Введение. Задачи плазмостатики исторически возникли как составная часть программы УТС [1]. В центре внимания плазмостатики находится расчет равновесных конфигураций плазмы и удерживающего её магнитного поля. Технические конструкции, реализующие равновесные конфигурации, называются *магнитными ловушками*. Теоретической основой расчета магнитных ловушек на сегодняшний день является МГД – теория.

Практически наиболее интересны равновесные конфигурации, обладающие определенной симметрией: цилиндрической, плоской, осевой, винтовой. В случае осевой симметрии равновесная МГД – конфигурация ищется как решение *уравнения Грэда – Шафранова* [1,2]:

$$\Delta^*\Psi \equiv \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}=-\frac{16\pi^3 r^2}{c}\frac{dP(\Psi)}{d\Psi}-\frac{8\pi^2 r}{c}J\frac{dJ(\Psi)}{d\Psi},$$

где $\Psi(r,z)$ – функция магнитного потока, $P(\Psi)$, $J(\Psi)$ – произвольные заданные функции, имеющие смысл давления плазмы и функции полного тока.

В работе выведены уравнения плазмостатики (общие и в случаях цилиндрической и осевой симметрии), базирующиеся на существенно более точных ЭМГД (ЭлектроМагнитных ГидроДинамических) – уравнениях плазмы, предельным случаем которых – при стремлении погонного числа частиц к бесконечности – являются МГД – уравнения.

ЭМГД – теория [3], предполагая квазинейтральность и нерелятивистский характер плазменных процессов, в полном объеме, в отличие от МГД, учитывает инерцию электронной компоненты.

В случае осевой симметрии уравнения ЭМГД – равновесия сводятся к паре дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно функций магнитного потока Ψ и полного тока J (уравнения (25-27) из §5). В практически важных предельных случаях Θ – пинча и Z – пинча полученная система редуцируется к одному уравнению 2-го порядка относительно Ψ (уравнение (14) из §4) и J (уравнение (37) из §7), соответственно.

Выведенные уравнения ЭМГД – равновесия принципиально отличаются от уравнения Грэда – Шафранова.

Во-первых, для ЭМГД семейства поверхностей уровня $\Psi \equiv \mathrm{const}$, $J \equiv \mathrm{const}$, $P \equiv \mathrm{const}$ не совпадают между собой, как это было в МГД, а, напротив, функции Ψ, J, P функционально независимы.

Во-вторых, ЭМГД – равновесные конфигурации зависят от распределения плотности плазмы, которая, в отличие от МГД – теории, не может выбираться произвольно, но подлежит нахождению.

В-третьих, в ЭМГД – плазмостатике разреженная и плотная плазма подчиняется разным законам равновесия. Математически это выражается в том, что полученные уравнения ЭМГД – равновесия являются смешанного типа системой дифференциальных уравнений относительно Ψ и J, гиперболической для разреженной плазмы и эллиптической для плотной (см. § 7).

В-четвертых, ЭМГД – равновесия существенно определяются уравнениями состояния плазменных компонент (см.§5).

Уравнения ЭМГД – плазмостатики в МГД – пределе переходят в уравнение Грэда – Шафранова. Количественной мерой различия двух теорий является параметр

$$\xi^2 = \frac{\mathrm{c}^2 \mathrm{m_e}}{4\pi \mathrm{e}^2 \mathrm{Z n_0 L_0^2}},$$

где Z – кратность заряда ионов, $\mathrm{n_0}$, $\mathrm{L_0}$ – характерные плотности числа частиц и длины. Теоретически, ЭМГД – плазмостатика переходит в МГД – плазмостатику при $\xi^2 \to 0$. Однако, для параметров реальной плазмы ξ^2 конечно, и различие двух теорий может быть существенным, причем не только количественно , но и качественно, поскольку дифференциальный оператор уравнений ЭМГД – равновесия является сингулярным по ξ^2 и значит в МГД – пределе, $\xi^2 \to 0$, вырождается. Поэтому уравнение Грэда – Шафранова является не просто предельным, но вырожденным случаем ЭМГД – плазмостатики.

§ 1. ЭМГД – модель плазмы.

Течение бездиссипативной квазинейтральной нерелятивистской плазмы с учетом инерции электронов подчиняется следующей системе уравнений (ЭМГД–уравнения) [3] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{U} = 0, \qquad \text{(а)}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \pi = 0 , \qquad \text{(б)}$$

$$\frac{\partial S_\pm}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla S_\pm \pm \frac{\lambda_\mp}{\rho} \mathbf{j} \cdot \nabla S_\pm = 0 , \qquad \text{(в)} \qquad (1)$$

$$\mathbf{E} + \frac{\mathrm{c}^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi\rho} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \cdot [\mathbf{U} \times \mathbf{H}] + \rho^{-1} \operatorname{Div} W , \qquad \text{(г)}$$

$$\mathrm{c}^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 , \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 , \qquad \text{(д)}$$

$$\mathbf{j} = \mathrm{c}(4\pi)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H} , \qquad \text{(е)}$$

Тензор напряжений π и тензор W вычисляются по формулам:

$$\pi = \pi^{(h)} + \pi^{(p)} + \pi^{(c)} \qquad (2)$$

$$W = (\lambda_- - \lambda_+)[\pi^{(c)} + \pi^{(p)}] + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-)E_3 + \lambda_+\lambda_-(\mathbf{j}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\mathbf{j}\}$$

А гидродинамическая (h), пондеромоторная (p) и токовая (c) части тензора напряжения определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} &\pi^{(h)} = \rho\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} + p_\Sigma E_3 \ , \\ &\pi^{(p)} = \frac{\mathrm{H}^2}{8\pi}\mathrm{E}_3 - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi} \ , \\ &\pi^{(c)} = \lambda_+\lambda_-\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}/\rho \ . \end{aligned} \qquad (3)$$

Выше считалось $\lambda_\pm = \mathrm{m}_\pm/\mathrm{e}_\pm$, $\mathrm{p}_\Sigma = \mathrm{p}_+ + \mathrm{p}_-$, $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $\mathbf{U} = (\rho_+\mathbf{v}_+ + \rho_-\mathbf{v}_-)/\rho$, где $\mathrm{S}_\pm$, $\mathrm{p}_\pm$, $\rho_\pm$, $\mathbf{v}_\pm$ – энтропии, давления, плотности и гидродинамические скорости электронов и ионов полностью ионизованной плазмы с массами частиц $\mathrm{m}_\pm$ и зарядами $\pm\mathrm{e}_\pm$. Система (1-3) замыкается уравнениями состояния для электронов и ионов $\mathrm{p}_\pm = \mathrm{p}_\pm(\mathrm{S}_\pm, \rho_\pm)$, при этом для каждой компоненты выполнено термодинамическое тождество $\mathrm{TdS} = \mathrm{d}\varepsilon - (\mathrm{p}/\rho^2)\mathrm{d}\rho$. Решив систему (1-3), по элементарным формулам:

$$\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm \frac{\lambda_\mp}{\rho}\mathbf{j}, \quad \rho_\pm = \frac{\lambda_\pm}{\lambda}\rho \ , \quad \lambda = \lambda_+ + \lambda_- \ ,$$

находим гидродинамические скорости и плотности плазменных компонент. Нетривиальность этих соотношений в том, что *в силу системы (1-3) так вычисляемые скорости и плотности компонент плазмы удовлетворяют точным законам сохранения массы, энергии, импульса*.

В случае, когда компоненты плазмы суть идеальные политропные газы с общим показателем адиабаты γ, идеальная МГД получается предельным переходом из системы (1-3) при стремлении к бесконечности погонного числа частиц плазмы:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{div}\rho\mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial\rho\mathbf{U}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{Div}\,\pi = 0, \quad \pi = \pi^{(\mathrm{h})} + \pi^{(\mathrm{p})} \ , \\ &\frac{\partial \mathrm{p}_\Sigma}{\partial \mathrm{t}} + \mathbf{U}\cdot\nabla \mathrm{p}_\Sigma + \gamma\,\mathrm{p}_\Sigma\,\mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \qquad \mathbf{E} = -\mathrm{c}^{-1}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}], \\ &\mathrm{c}^{-1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \ , \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \mathbf{j} = \mathrm{c}(4\pi)^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{H}. \end{aligned}$$

§2. Уравнения ЭМГД – плазмостатики.

Рассмотрим решения системы (1-3), предполагая $\partial/\partial\mathrm{t} = 0$, $\mathbf{U} = 0$.

Теорема 1. *Система* (1-3) *с* $\partial/\partial\mathrm{t} = 0$, $\mathbf{U} = 0$ *равносильна соотношениям*:

$$\mathrm{Div}\,\pi = 0 \ ,$$

$$\nabla\rho\times\nabla(\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_-) = 0\ ,$$
$$\mathbf{j}\cdot\nabla \mathrm{S}_\pm = 0, \qquad (4)$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0\,.$$

При этом ток $\mathbf{j}$*, электрическое поле* $\mathbf{E}$ *и тензор* π *вычисляются по формулам*:

$$\mathbf{j} = \mathrm{c}(4\pi)^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = \rho^{-1}\nabla(\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_-),$$
$$(5)$$
$$\pi = (\mathrm{p}_\Sigma + \frac{\mathrm{H}^2}{8\pi})\mathrm{E}_3 - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi} + \lambda_+\lambda_-\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}/\rho\,.$$

Доказательство. Равенства $\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{U} = 0$, подставленные в систему (1-3), приводят к соотношениям:

$$\mathrm{Div}\,\pi = 0, \quad \pi = (\mathrm{p}_\Sigma + \frac{\mathrm{H}^2}{8\pi})\mathrm{E}_3 - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi} + \lambda_+\lambda_-\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}/\rho \qquad (а)$$
$$\mathbf{j}\cdot\nabla \mathrm{S}_\pm = 0, \qquad (б)$$
$$\mathbf{E} + \frac{\mathrm{c}^2\,\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\mathrm{rotrot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{\mathrm{c}}\cdot[\mathbf{U}\times\mathbf{H}] + \rho^{-1}\,\mathrm{Div}\,W\ , \qquad (в)$$
$$W = [(\lambda_- - \lambda_+)\frac{\mathrm{H}^2}{8\pi} + (\lambda_- \mathrm{p}_+ - \lambda_+ \mathrm{p}_-)]\mathrm{E}_3 + (\lambda_- - \lambda_+)[\lambda_+\lambda_-\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}/\rho - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi}]$$
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0, \qquad (г)$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0\,. \qquad (д)$$

С учетом (г) получаем для $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \rho^{-1}\,\mathrm{Div}\,\mathrm{W} = \rho^{-1}\,\mathrm{Div}(\frac{\mathrm{H}^2}{8\pi}\mathrm{E}_3 - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi} + \lambda_+\lambda_-\frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}}{\rho})(\lambda_- - \lambda_+) + \rho^{-1}\,\mathrm{Div}(\lambda_- \mathrm{p}_+ - \lambda_+ \mathrm{p}_-)\mathrm{E}_3$$

Но из уравнения (а):

$$\mathrm{Div}(\frac{\mathrm{H}^2}{8\pi}\mathrm{E}_3 - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi} + \lambda_+\lambda_-\frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}}{\rho}) = -\mathrm{Div}\,\mathrm{p}_\Sigma\mathrm{E}_3 = -\nabla(\mathrm{p}_+ + \mathrm{p}_-)\,.$$

Откуда:

$$\mathbf{E} = -\rho^{-1}(\lambda_- - \lambda_+)\nabla(\mathrm{p}_+ + \mathrm{p}_-) + \rho^{-1}\nabla(\lambda_- \mathrm{p}_+ - \lambda_+ \mathrm{p}_-) = \rho^{-1}\nabla(\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_-)$$

Но тогда условие (г) приводит к соотношению:

$$0 = \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{rot}(\ \rho^{-1}\nabla(\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_-)) =$$
$$= \rho^{-1}\,\mathrm{rot}\nabla(\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_-) + \nabla(\rho^{-1})\times\nabla(\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_-) =$$
$$= -\rho^{-2}\nabla\rho\times\nabla(\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_-)\ ,$$

откуда получается равенство $\nabla\rho\times\nabla(\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_-) = 0$. Тем самым получили все соотношения (4), (5). Очевидно, что и обратно: при выполнении (4) и (5) выполняются уравнения (а – д), а значит и уравнения системы (1 – 5) с $\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{U} = 0$, ч. т. д.

Итак, стационарная ($\partial/\partial t = 0$) в среднем неподвижная ($\mathbf{U} = 0$) плазменная конфигурация является решением системы (4 – 5). Эта система включает 6 неизвестных скалярных функций p_+, p_-, ρ, $\mathbf{H}$ и состоит из 9 скалярных уравнений. Чтобы получить из неё уравнения ЭМГД – плазмостатики, воспользуемся следующей математической теоремой, являющейся несложным следствием теорем о неявной и обратной функциях.

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{R}^3$ *– открытое,* $\mathrm{f},\ \mathrm{g} : \mathrm{G} \to \mathrm{R}$ *– функции класса* $\mathrm{C}^k,\ k \ge 1$, *причем* (а) $\nabla \mathrm{f} \times \nabla \mathrm{g} \equiv 0$ *в* G, (б) *в любой точке из* G *векторы* $\nabla \mathrm{f},\ \nabla \mathrm{g}$ *одновременно не равны 0. Тогда образ* G *при отображении* $\mathrm{G} \to \mathrm{R}^2$, $\mathrm{x} \to (\mathrm{f}(x), \mathrm{g}(x)),\ x \in \mathrm{G}$ *есть одномерное подмногообразие*.

Условия (а) и (б) из формулировки *Теоремы 2* равносильны требованию чтобы ранг отображения $\mathrm{G} \to \mathrm{R}^2$, из *Теоремы 2* всюду в G тождественно равнялся бы 1. Утверждение *Теоремы 2* означает функциональную зависимость f и g. Поясним точный смысл этого утверждения. Пусть $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{G}$ – произвольная, тогда найдется открытое $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{U} \subseteq \mathrm{G}$, для которого либо $\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}(\mathrm{g}(x))$, либо $\mathrm{g}(x) = \mathrm{H}(\mathrm{f}(x))$, для всех $\mathrm{x} \in \mathrm{U}$, где $\mathrm{F},\ \mathrm{G}$ – функции класса C^k, заданные на некоторых интервалах. Это локальная версия функциональной зависимости. Глобальная может и не иметь место. Тем не менее *Теорема 2* в дальнейшем будет основанием для заключения о функциональной зависимости либо вида $\mathrm{f} = \mathrm{F}(\mathrm{g})$, либо – $\mathrm{g} = \mathrm{H}(\mathrm{f})$.

Важно, что справедливость указанных функциональных зависимостей *достаточна* для выполнения равенства $\nabla \mathrm{f} \times \nabla \mathrm{g} = 0$. Поэтому решения получаемых ниже посредством *Теоремы 2* уравнений равновесия заведомо будут являться и решениями системы (4–5). А *Теорема 2* гарантирует при этом отсутствие, *вообще говоря*, других равновесий.

Из *Теоремы 2* и второго равенства системы (4) следует:

$$\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_- = \mathrm{h}(\rho),$$

где $\mathrm{h}(\rho)$ – произвольная гладкая функция. Поэтому, учитывая равенства

$$\mathrm{Div}\,\pi^{(\mathrm{p})} = -(4\pi)^{-1}[\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \times \mathbf{H}] \quad , \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\,\mathrm{c}^{-1}\,\mathbf{j} \ ,$$

для нахождения 6 скалярных величин $\mathrm{p}_+,\ \mathrm{p}_-,\ \rho, \mathbf{H}$ получим из (4-5) семь скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\nabla \mathrm{p}_\Sigma + \lambda_+\lambda_-\,\mathrm{Div}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}/\rho) = \mathrm{c}^{-1}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}] \\
&\mathbf{j}\cdot\nabla \mathrm{S}_\pm = 0 \\
&\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0 \\
&\mathbf{j} = \mathrm{c}(4\pi)^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \\
&\lambda_+ \mathrm{p}_+ - \lambda_- \mathrm{p}_- = \mathrm{h}(\rho)
\end{aligned} \tag{6}$$

с произвольной гладкой функцией $\mathrm{h}(\rho)$. Дополненные уравнениями состояния плазменных компонент $\mathrm{p}_\pm = \mathrm{p}_\pm(\mathrm{S}_\pm\,,\ \rho_\pm)$, $\rho_\pm = (\lambda_\pm/\lambda)\rho$, они дают **систему уравнений ЭМГД – плазмостатики**.

Учтем теперь присутствие внешних токов $\mathbf{j}_0$. Тогда в системе ЭМГД – уравнений (1-3) изменятся *только* уравнения (1.б, г, е):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{Div}\,\pi = -\mathrm{c}^{-1}[\mathbf{j}_0 \times \mathbf{H}] \ ,$$

$$\mathbf{E}+\frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{E}=-c^{-1}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}]+\rho^{-1}\,\mathrm{Div}W+(\lambda_--\lambda_+)(c\rho)^{-1}[\mathbf{j_0}\times\mathbf{H}]$$

$$\mathbf{j}+\mathbf{j}_0=c(4\pi)^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\quad .$$

Полученную систему уравнений обозначим (1′). Подчеркнем, что в (1′) тензоры π и W вычисляются по старым формулам (2–3). Полагая в системе (1′, 2, 3) $\partial/\partial t=0,\ \mathbf{U}=0$ и дословно повторяя приведенные выше рассуждения, приходим к следующей системе **уравнений ЭМГД – плазмостатики с учетом внешних токов**:

$$\begin{aligned}
&\nabla p_\Sigma+\lambda_+\lambda_-\mathrm{Div}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}/\rho)=c^{-1}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]\\
&\mathbf{j}\cdot\nabla S_\pm=0\\
&\mathrm{div}\mathbf{H}=0\\
&\mathbf{j}+\mathbf{j}_0=c(4\pi)^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{H}\\
&\lambda_+p_+-\lambda_-p_-=h(\rho)
\end{aligned}\qquad (6')$$

где $h(\rho)$ – произвольная гладкая функция и фиксированы уравнения состояния $p_\pm=p_\pm(S_\pm,\rho_\pm)$, $\rho_\pm=(\lambda_\pm/\lambda)\rho$. При этом электрическое поле $\mathbf{E}$ в равновесной конфигурации вычисляется по старой формуле (5).

§3. Равновесия в цилиндрически симметричном случае.

В отсутствие внешних токов, $\mathbf{j}_0=0$, система (6) в случае $\partial/\partial\varphi=0$, $\partial/\partial z=0$ приводит к соотношениям:

$$H_r=0,\quad j_r=0,\quad j_\varphi=-c(4\pi)^{-1}\frac{dH_z}{dr},\quad j_z=c(4\pi)^{-1}\frac{d\,rH_\varphi}{d\,r}\qquad .$$

С учетом этого второе и третье уравнения в (6) выполнены тождественно, а пятое позволяет по известным p_Σ и ρ найти p_+, p_- из линейной системы с ненулевым определителем:

$$\begin{aligned}
&\lambda_+p_+-\lambda_-p_-=h(\rho)\\
&p_++p_-=p_\Sigma\ .
\end{aligned}$$

Оставшееся первое векторное уравнение в (6) сводится к одному скалярному равенству:

$$-\frac{\lambda_+\lambda_-}{r\rho}j_\varphi^2+\frac{dp_\Sigma}{dr}=c^{-1}(j_\varphi H_z-j_zH_\varphi)\quad ,$$

которое, учитывая выражения для j_φ, j_z , дает следующее **уравнение равновесия**:

$$\frac{d}{dr}\Big(p_\Sigma+\frac{H_\varphi^2+H_z^2}{8\pi}\Big)+\frac{H_\varphi^2}{4\pi r}=\frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{16\pi^2r\rho}\Big(\frac{dH_z}{dr}\Big)^2\ .\qquad (7)$$

Итак, в случае цилиндрической симметрии система уравнений ЭМГД – плазмостатики (6) сводится к одному уравнению (7). В МГД – пределе

$\rho \to +\infty$, уравнение (7) переходит в известное уравнение равновесия в МГД для цилиндрически симметричной конфигурации [4]:

$$\frac{d}{dr}(p_\Sigma + \frac{H_z^2 + H_\varphi^2}{8\pi}) + \frac{H_\varphi^2}{4\pi r} = 0 \qquad .$$

В случае Z – пинча ($H_z = 0$) уравнения равновесия в МГД – и ЭМГД – теориях совпадают. В случае Θ – пинча $(H_\varphi = 0)$ из (7) следует:

$$\frac{d}{dr}(p_\Sigma + \frac{H_z^2}{8\pi}) = \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{16\pi^2 r\rho}(\frac{dH_z}{dr})^2 \quad . \tag{8}$$

Значит в Θ – пинче полное давление плазмы $p_\Sigma + \frac{H_z^2}{8\pi}$ не постоянно, как в МГД – теории, но монотонно растет с удалением от оси Z, причем тем быстрее, чем меньше плотность плазмы ρ и больше азимутальный ток j_φ. В частности, диамагнетизм цилиндрического Θ – пинча сильнее, чем предсказывает МГД – теория. В МГД для Θ – пинча имеем $p_\Sigma + \frac{H_z^2}{8\pi} \equiv \mathrm{const}$. В ЭМГД ситуация сложнее.

Рассмотрим (8) как дифференциальное уравнение относительно H_z:

$$\dot{H}_z = \frac{2\pi r\rho}{c^2 \lambda_+ \lambda_-} \cdot \{H_z \pm [H_z^2 + 4c^2 \lambda_+ \lambda_- \cdot \frac{\dot{p}_\Sigma}{r\rho}]^{1/2}\} \tag{9}$$

где точка над буквой – дифференцирование по r. Тогда в МГД – пределе решения одного из дифференциальных уравнений (9) переходят в МГД – равновесия, а решения другого не сходятся ни к какому МГД – равновесию и, значит, дают принципиально новые равновесные конфигурации, не укладывающиеся в МГД – теорию. Продемонстрируем это на частном примере. Если $p_\Sigma \equiv \mathrm{const}$, то из (9) получаем два решения:

$$H_z(r) \equiv \mathrm{const}, \qquad H_z(r) = H_0 \exp[\frac{4\pi}{c^2 \lambda_+ \lambda_-} \int_0^r r\rho dr] \qquad ,$$

где H_0 – значение H_z на оси $r = 0$. Первое решение – то же, что и в МГД, а второе в МГД – пределе вовсе не стремится к константе, т.е. к МГД – равновесию. Выбирая различные $\rho(r)$, получим из второго решения различные равновесные конфигурации, не имеющие аналогов в МГД. Например, пусть в равновесном плазменном шнуре радиуса R плотность равна $\rho(r) = \rho_0(1 - (r/R)^2)$, тогда для $H_z(r)$ получим:

$$H_z(r) = H_0 \exp\{\frac{4\pi\rho_0 R^2}{c^2 \lambda_+ \lambda_-} \cdot \frac{1}{2}(\frac{r}{R})^2 [1 - \frac{1}{2}(\frac{r}{R})^2]\} \ .$$

Важную роль играет безразмерная комбинация $\xi^{-2} = \frac{4\pi\rho_0 R^2}{c^2 \lambda_+ \lambda_-}$. МГД – предел отвечает переходу $\xi^2 \to 0$. Но тогда $H_z(r)$ поточечно на $0 < r \le R$ сходится к $+\infty$ и никакого МГД – равновесия в пределе не возникает. Математически указанный эффект объясняется наличием малого параметра при старшей степени в уравнении (8). Другой интегрируемый случай, когда $dp_\Sigma/dr = \chi r\rho$, $\chi = const$. Тогда интеграция (9) дает:

$$\{\frac{1}{2}\ln\left| H \pm \sqrt{H^2 + a}\right| - \frac{1}{4a}(H \mp \sqrt{H^2 + a})^2\}\Big|_{H_0}^{H_z} = \frac{2\pi}{c^2\lambda_+\lambda_-}\int_0^r r\rho dr ,$$

где $a = 4c^2\lambda_+\lambda_-\chi$, H_0 – значение $H_z(0)$.

В общем случае, выбирая распределение плотности по закону:

$$\rho(r) = \frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi H_\varphi^2}(\frac{dH_z}{dr})^2 ,$$

получим равновесие с постоянным по радиусу полным давлением,

$$p_\Sigma + \frac{H_z^2 + H_\varphi^2}{8\pi} \equiv const ,$$

Основное уравнение (7) можно рассматривать как формулу для вычисления распределения плотности ρ в равновесной цилиндрически симметричной конфигурации по произвольным полям H_z, H_φ, p_Σ:

$$\rho = \frac{\lambda_+\lambda_- c^2}{16\pi^2 r}\cdot(\frac{dH_z}{dr})^2\cdot\{\frac{H_\varphi^2}{4\pi r} + \frac{d}{dr}(p_\Sigma + \frac{H_z^2 + H_\varphi^2}{8\pi})\}^{-1} \qquad (10)$$

Единственное физическое ограничение $\rho > 0$ приводит к неравенству:

$$\frac{H_\varphi^2}{4\pi r} + \frac{d}{dr}(p_\Sigma + \frac{H_z^2 + H_\varphi^2}{8\pi}) > 0$$

Таким образом, ЭМГД – плазмостатика в цилиндрически симметричном случае сводится к неравенству:

$$\frac{H_\varphi^2}{4\pi r} + \frac{d}{dr}(p_\Sigma + \frac{H_z^2 + H_\varphi^2}{8\pi}) \geq 0 ,$$

которое в зонах, где $H_z \neq const$, должно быть строгим и тогда по (10) в этих зонах, однозначно находится распределение плотности $\rho(r)$. А в зонах, где $H_z \equiv const$, указанное неравенство переходит в точное равенство, совпадающее с уравнением МГД – плазмостатики в цилиндрически симметричном случае (а плотность ρ в этих зонах произвольная).

§ 4. Равновесия в аксиально симметричном случае: Θ – пинч.

В случае $\partial/\partial\varphi = 0$, переходя к цилиндрическим координатам в системе (6′) и считая $j_r^0 = j_z^0 = 0$, получим:

$$\mathrm{Div}\,\pi = 0 \quad : \qquad (a)$$

$$\lambda_+\lambda_-\{j_r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{j_r}{\rho}) + j_z\frac{\partial}{\partial z}(\frac{j_r}{\rho})\} - \frac{\lambda_+\lambda_-}{r\rho}j_\varphi^2 + \frac{\partial p_\Sigma}{\partial r} = c^{-1}(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi)$$

$$\lambda_+\lambda_-\{j_r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{j_z}{\rho}) + j_z\frac{\partial}{\partial z}(\frac{j_z}{\rho})\} + \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} = c^{-1}(j_r H_\varphi - j_\varphi H_r)$$

$$\lambda_+\lambda_-\{j_r r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{rj_\varphi}{\rho}) + j_z\frac{\partial}{\partial z}(\frac{j_\varphi}{\rho})\} = c^{-1}(j_z H_r - j_r H_z)$$

$$\mathbf{j}\cdot\nabla S_\pm = 0 \quad : \qquad j_r\frac{\partial S_\pm}{\partial r} + j_z\frac{\partial S_\pm}{\partial z} = 0 \qquad (б)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{H} = 0 \quad : \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \qquad (в)$$

$$\mathbf{j} + \mathbf{j}_0 = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \quad : \qquad (г)$$

$$j_r = -c(4\pi)^{-1}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\ , \qquad j^0_\varphi + j_\varphi = c(4\pi)^{-1}(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r})\ , \qquad j_z = c(4\pi r)^{-1}\frac{\partial rH_\varphi}{\partial r}$$

Введем функции *магнитного потока* Ψ и *полного тока* $J = crH_\varphi/2$:

$$H_r = -(2\pi r)^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\ , \qquad H_z = (2\pi r)^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\ , \qquad H_\varphi = \frac{2J}{cr}$$

Тогда соотношения (г) перепишутся в виде:

$$j_r = -(2\pi r)^{-1}\frac{\partial J}{\partial z}\ , \qquad j_z = (2\pi r)^{-1}\frac{\partial J}{\partial r} \qquad (г')$$

$$j^0_\varphi + j_\varphi = \frac{c}{8\pi^2 r}\Delta^*\Psi\ , \qquad \Delta^*\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - r^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\ .$$

Теорема 3. *Пусть* $\nabla J \neq 0$ *тождественно,* $\nabla = (\partial/\partial r, \partial/\partial z)$, *тогда*:

1) $S_\pm = S_\pm(J)$ – *произвольные гладкие функции,*

2) $\Psi + 2\pi c\lambda_+\lambda_- \cdot \dfrac{rj_\varphi}{\rho} = A(J)$, *где* $A(J)$ – *произвольная гладкая функция.*

При соблюдении этих условий второе равенство в (б') и соотношение $(\mathrm{Div}\,\pi)_\varphi = 0$ *выполнены тождественно*.

Доказательство. Рассмотрим $J, S_\pm$ как функции от трёх переменных (r, φ, z), тогда условие $\mathbf{j}\cdot\nabla S_\pm = 0$ с учетом выражений (г′) равносильно векторному равенству:

$$\nabla J \times \nabla S_\pm = 0\ , \qquad \nabla = (\partial/\partial r, \partial/\partial\varphi, \partial/\partial z)$$

Поскольку $\nabla J \neq 0$, то выполнены все условия *Теоремы 2* и значит $S_\pm = S_\pm(J)$, что доказывает 1).

Третье соотношение (а) с учетом (г′) и выражений для H_r, H_z перепишется так:

$$\lambda_+\lambda_-\{\frac{\partial J}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{rj_\varphi}{\rho}) - \frac{\partial J}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{rj_\varphi}{\rho})\} = (2\pi c)^{-1}(\frac{\partial J}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{\partial J}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial z})$$

Группируя подобные члены, получим:

$$\frac{\partial J}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\Psi + 2\pi c\lambda_+\lambda_- \cdot \frac{rj_\varphi}{\rho}) - \frac{\partial J}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(\Psi + 2\pi c\lambda_+\lambda_- \cdot \frac{rj_\varphi}{\rho}) = 0$$

Последнее равенство равносильно соотношению (см. начало доказательства):

$$\nabla J \times \nabla(\Psi + 2\pi c\lambda_+\lambda_- \frac{rj_\varphi}{\rho}) = 0$$

Поскольку $\nabla J \neq 0$, то на основании *Теоремы 2* заключаем, что

$$\Psi + 2\pi c \lambda_+ \lambda_- \frac{r j_\varphi}{\rho} = A(J) \quad ,$$

где $A(J)$ – произвольная гладкая функция. Ч.Т.Д.

Проанализируем уравнения равновесия (6′) сначала в вырожденном случае, когда $\nabla J \equiv 0$, т.е. когда $J \equiv \mathrm{const}$. Физически это соответствует Θ – пинчу.

Итак, пусть $J \equiv \mathrm{const}$, тогда из (г′) получим $j_r = j_z = 0$. Значит равенство (б) и третье равенство (а) выполнены тождественно. Равенство (в) выполнено всегда, а первые два уравнения (а) с учетом выражений для H_r, H_z дают:

$$-\frac{\lambda_+\lambda_- j_\varphi^2}{r\rho} + \frac{\partial p_\Sigma}{\partial r} = \frac{j_\varphi}{2\pi rc} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} = \frac{j_\varphi}{2\pi rc} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{11}$$

К этим равенствам надо добавить выражение для j_φ через j_φ^0 и Ψ :

$$j_\varphi^0 + j_\varphi = -\frac{c}{8\pi^2 r} \Delta^* \Psi \tag{12}$$

Если из системы (11 – 12) найдены функции p_Σ, ρ, Ψ, то пятое уравнение (6′) позволяет найти функции p_+, p_- из системы линейных уравнений с ненулевым определителем:

$$\lambda_+ p_+ - \lambda_- p_- = h(\rho)$$

$$p_+ + p_- = p_\Sigma$$

Проинтегрируем систему (11-12).

Теорема 4. *Пусть* $\rho(r,\Psi) > 0$ – *произвольная гладкая функция,* $P(r,\Psi)$– *произвольное решение уравнения в частных производных 1-го порядка:*

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 4\pi^2 c^2 \lambda_+ \lambda_- \cdot \frac{r}{\rho(r,\Psi)} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \Psi}\right)^2 \quad , \tag{13}$$

а Ψ *– решение эллиптического уравнения*

$$\Delta^* \Psi = -16\pi^3 r^2 \frac{\partial P}{\partial \Psi} - \frac{8\pi^2 r}{c} j_\varphi^0 \quad . \tag{14}$$

Тогда функции $\rho(r,z) = \rho(r, \Psi(r,z))$, $p_\Sigma(r,z) = P(r,\Psi(r,z))$, $\Psi(r,z)$ *являются решением системы* (11–12) *и любое решение этой системы, для которого* $\partial\Psi/\partial z \neq 0$ *тождественно, получается указанным способом.*

Доказательство. Найдем решения системы (11–12), для которых $\partial\Psi/\partial z \neq 0$ тождественно. Тогда можно сделать замену переменных, перейдя от переменных (r,z) к переменным (r,Ψ). Пусть в новых переменных $p_\Sigma = P(r,\Psi)$ – одна из искомых функций. Из второго уравнения (11) выводим:

$$\frac{\partial P}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{j_\varphi}{2\pi rc} \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

А т.к. $\partial\Psi/\partial z \neq 0$, то отсюда следует

$$\frac{\partial P}{\partial \Psi} = \frac{j_\varphi}{2\pi rc}$$

и значит

$$j_\varphi = 2\pi rc \frac{\partial P}{\partial \Psi}$$

Подставляя полученные выражения для j_φ в первое уравнение (11):

$$-\lambda_+\lambda_- \cdot 4\pi^2 c^2 \frac{r}{\rho}(\frac{\partial P}{\partial \Psi})^2 + \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial \Psi}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial \Psi}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

получим уравнение на функцию $P(r, \Psi)$:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 4\pi^2 c^2 \lambda_+\lambda_- \frac{r}{\rho}(\frac{\partial P}{\partial \Psi})^2,$$

которое совпадает с (13). Наконец, подставляя полученные выше выражения для j_φ в равенство (12), получаем уравнение (14). Ч.Т.Д.

В МГД – пределе, $\rho \to +\infty$, (13) дает, $\partial P/\partial r = 0$, т.е. $P = P(\Psi)$, но тогда (14) совпадает с уравнением Грэда – Шафранова. (см. Введение) в случае $J = 0$. Итак, отличие от МГД – теории проявляется в *функциональной* зависимости давления не только от магнитного потока Ψ, но и от радиуса r. Этому есть простое физическое объяснение. Поскольку в ЭМГД – теории, в отличие от МГД, ток есть движение заряженных частиц, то при наличии азимутального тока j_φ заряженные частицы плазмы вращаются вокруг оси Z (в среднем покоясь при этом) и значит на них действует центробежная сила, равная, как легко подсчитать, $\lambda_+\lambda_- j_\varphi^2/(r\rho)$. Поэтому градиент давления должен уравновесить не только пондеромоторную силу (как это было в МГД), но и центробежную. В итоге градиент давления распадается в сумму двух слагаемых. Первое, равное $\partial P/\partial r$, уравновешивает центробежную силу – соответствующий баланс сил выражен уравнением (13), второе слагаемое, равное $(\partial P/\partial\Psi)\nabla\Psi$, уравновешивает пондеромоторную силу – этот баланс сил записан в уравнении (14). Таким образом, приходим к системе (13 – 14). Уравнение (13) показывает, что давление непостоянно на магнитных поверхностях $\Psi \equiv \text{const}$. Более того, на каждой магнитной поверхности оно возрастает по мере удаления точки поверхности от оси Z. Именно за счет этого роста градиент давления уравновешивает центробежную силу.

В отличие от МГД – теории, ЭМГД – равновесия определяются распределением плотности ρ. Это приводит к недоопределенности системы (13 – 14), поэтому в буквальном смысле её решение тривиально. Выберем любую функцию $P(r,\Psi)$, лишь бы $\partial P/\partial r > 0$. Для этой функции, с одной стороны, решим эллиптическое уравнение (14) и найдем $\Psi(r,z)$, а с другой – вычислим из (13) функцию $\rho(r,\Psi)$. После этого, подставив в $\rho(r,\Psi)$ и $P(r,\Psi)$ найденную функцию $\Psi(r,z)$, получим пространственные распределения

$\rho(r,z),\ p_\Sigma(r,z)$. Таким образом, содержательная постановка задачи для системы (13 – 14) должна опираться на некоторые физические гипотезы относительно искомой равновесной конфигурации, позволяющие установить функциональную связь между ρ и p_Σ. Например, будем искать равновесные конфигурации, для которых энтропии электронов и ионов однородны по пространству. Для таких конфигураций:

$$p_\Sigma = p_+ + p_- = p_+(S_+,\ (\lambda_+/\lambda)\rho) + p_-(S_-,\ (\lambda_+/\lambda)\rho = P(\rho)$$

суть известная функция от ρ, поскольку $S_\pm$ – константы. Условие изоэнтропичности можно заменить на изотермичность, либо условие $\rho \equiv \mathrm{const}$ и т.д. В общем виде эту идею можно сформулировать так. Пусть задана функция $\rho = f(P)$ (гладкая, положительная в области $(0, +\infty)$ и монотонно возрастающая). Ищем решение уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 4\pi^2 c^2 \lambda_+ \lambda_- \frac{r}{f(P)} \left(\frac{\partial P}{\partial \Psi}\right)^2 \tag{15}$$

и для найденной функции $P(r,\Psi)$ решаем уравнение (14). Если $\Psi(r,z)$ его решение, то $\rho(r,z) = f(P(r,\Psi(r,z))),\ p_\Sigma(r,z) = P(r,\Psi(r,z)))$, $\Psi(r,z)$ задают параметры искомой равновесной конфигурации. Уравнение (15) может быть решено в явном виде.

Теорема 5. *Пусть* $\sigma > 0$, *тогда уравнение в частных производных 1-го порядка*

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\sigma r}{f(P)} \left(\frac{\partial P}{\partial \Psi}\right)^2 \tag{15′}$$

имеет следующий полный интеграл

$$P(r,\Psi,a,b) = F^{-1}\left(\frac{\sigma r^2 a}{2} + \sqrt{a}\Psi + b\right)$$

где $a > 0,\ b$ – *произвольные, а*

$$F(P) = \int \frac{dP}{f(P)} \quad .$$

Доказательство. Можно прямой подстановкой убедиться, что для любых фиксированных вещественных $a > 0,\ b$ функция $P(r,\Psi,a,b)$ является точным решением уравнения (15′). С другой стороны, делая замену $Q = F(P)$ в уравнении (15′), приведем его к виду:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \sigma r \left(\frac{\partial Q}{\partial \Psi}\right)^2$$

Но это уравнение относится к типу уравнений с разделяющимися переменными [5, стр.388] и его решение [5, там же] по стандартной схеме приводит к искомому результату. Ч.Т.Д.

Уравнение (15′) имеет решение двух сортов. Во-первых, это функции, возникающие из полного интеграла, т.е. вида $P(r,\Psi,a,b)$ для любых фиксированных $a>0,\ b$. Во-вторых, это функции вида $P(r,\Psi,\ a(r,\Psi),\ b(r,\Psi))$, где $a(r,\Psi),\ b(r,\Psi)$ вычисляются по произвольной гладкой функции $\omega(a)$ по следующему правилу: $b=\omega(a(r,\Psi))$, $a(r,\Psi)$ – решение уравнения $\sigma r^2/2+\Psi/(2\sqrt{a})+\omega'(a)=0$ относительно a. Других решений уравнение (15′) не имеет. Подробности смотри в [5].

Наконец, приведем количественную оценку различия ЭМГД – и МГД – равновесий Θ – пинча водородной плазмы. Выберем характерные масштабы P, H, Ψ, ρ, j так, чтобы :

$$[p]=\frac{[H]^2}{4\pi}\quad,\quad [\Psi]=2\pi[L]^2[H]\quad,\quad [\rho]=m_i[n]\quad,\quad [j]=\frac{c[H]}{4\pi[L]}\quad,$$

где $[n]$ – характерная плотность числа частиц, $[L]$ – характерная длина и т.д. Обезразмерим уравнения (13), (14):

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\xi^2\,\frac{r}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial\Psi}\right)^2\quad, \tag{13′}$$

$$\Delta^*\Psi=-r^2\,\frac{\partial P}{\partial\Psi}-rj_\varphi^0\quad, \tag{14′}$$

где в гауссовской системе единиц:

$$\xi^2=\frac{c^2 m_e}{4\pi e^2[n][L]^2}=0.283\cdot\frac{10^{12}}{[n][L]^2}$$

безразмерный параметр (см.§3). МГД предел соответствует переходу $\xi^2\to 0$. Очевидно, если погонное число частиц $[n][L]^2\le 10^{14}$, то ЭМГД – и МГД – равновесия будут существенно различаться. Но даже при $\xi^2<<1$ и малом различии функций $\Psi_{\text{МГД}}$ и $\Psi_{\text{ЭМГД}}$ соответствующие им магнитные поверхности могут иметь принципиально разную топологию.

§ 5. Аксиально симметричные равновесия: общий случай.

Разберем теперь основной случай, $J\ne\text{const}$ тождественно, считая $j_r^0=j_z^0=0$. Тогда, согласно *Теореме 3*, имеют место первые интегралы:

$$S_\pm=S_\pm(J) \tag{16}$$

$$\Psi+2\pi c\,\lambda_+\lambda_-\cdot\frac{r\,j_\varphi}{\rho}=A(J)\quad, \tag{17}$$

где $S_\pm(J),\ A(J)$ – произвольные гладкие функции. Отсюда

$$p_\Sigma=p_++p_-=p_+(S_+(J),\ (\lambda_+/\lambda)\rho)+p_-(S_-(J),\ (\lambda_-/\lambda)\rho)=p(J,\rho) \tag{18}$$

известная функция от $J,\ \rho$. Пятое уравнение системы (6') накладывает на эту функцию определенное ограничение, которое будет рассмотрено ниже, но вывод уравнений равновесия от этого ограничения не зависит. Первый интеграл (17) вместе с двумя первыми уравнениями (а) из §4 и с учетом (18) образует систему из трех уравнений для нахождения трех неизвестных функций $\rho(r,z),\ \Psi(r,z),\ J(r,z)$. Получим эту систему в явном виде. Выразим j_φ из (17)

$$j_\varphi = \frac{(A(J)-\Psi)\rho}{2\pi c \lambda_+ \lambda_- r} \tag{19}$$

и подставим полученное выражение в первые два уравнения (а) из §4, учтя при этом выражения (г′) для j_r, j_z и формулы для H_r, H_z, H_φ. Принципиально важно, что результат подстановки можно записать в следующем *симметризованном виде*:

$$\begin{gathered}
\frac{\rho}{4\pi^2 c^2 \lambda_+\lambda_-}\cdot\frac{\partial}{\partial r}[\frac{(A-\Psi)^2}{2r^2}] - \frac{\rho}{4\pi^2 c^2 \lambda_+\lambda_-}\cdot\frac{A-\Psi}{r^2}\cdot\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{J}{\pi r^2 c^2}\cdot\frac{\partial J}{\partial r} + \\
+\frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho}[j_r\frac{\partial j_r}{\partial r} + j_z\frac{\partial j_r}{\partial z}] - \frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho^2}j_r[j_r\frac{\partial\rho}{\partial r} + j_z\frac{\partial\rho}{\partial z}] = 0 \\
\frac{\rho}{4\pi^2 c^2 \lambda_+\lambda_-}\cdot\frac{\partial}{\partial z}[\frac{(A-\Psi)^2}{2r^2}] - \frac{\rho}{4\pi^2 c^2 \lambda_+\lambda_-}\cdot\frac{A-\Psi}{r^2}\cdot\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{J}{\pi r^2 c^2}\cdot\frac{\partial J}{\partial z} + \\
+\frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho}[j_r\frac{\partial j_z}{\partial r} + j_z\frac{\partial j_z}{\partial z}] - \frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho^2}j_z[j_r\frac{\partial\rho}{\partial r} + j_z\frac{\partial\rho}{\partial z}] = 0
\end{gathered} \tag{20}$$

Умножим первое уравнение (20) на j_r, а второе на j_z и сложим:

$$\begin{gathered}
\frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho}[j_r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{j_r^2+j_z^2}{2}) + j_z\frac{\partial}{\partial z}(\frac{j_r^2+j_z^2}{2})] - \frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho^2}(j_r^2+j_z^2)[j_r\frac{\partial\rho}{\partial r} + j_z\frac{\partial\rho}{\partial z}] + \\
+\frac{\partial p}{\partial\rho}[j_r\frac{\partial\rho}{\partial r} + j_z\frac{\partial\rho}{\partial z}] + \frac{\rho}{4\pi^2 c^2\lambda_+\lambda_-}\cdot\{j_r\frac{\partial}{\partial r}[\frac{(A-\Psi)^2}{2r^2}] + j_z\frac{\partial}{\partial z}[\frac{(A-\Psi)^2}{2r^2}]\} = 0\,.
\end{gathered}$$

Группируя члены, получим:

$$\begin{gathered}
j_r\{\frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{j_r^2+j_z^2}{2}) - \frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho^2}(j_r^2+j_z^2)\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{\rho}{4\pi^2 c^2\lambda_+\lambda_-}\frac{\partial}{\partial r}[\frac{(A-\Psi)^2}{2r^2}]\} + \\
+j_z\{\frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{j_r^2+j_z^2}{2}) - \frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho^2}(j_r^2+j_z^2)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\rho}{4\pi^2 c^2\lambda_+\lambda_-}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{(A-\Psi)^2}{2r^2}]\} = 0
\end{gathered} \tag{21}$$

Теперь заметим, что разделив равенство (21) на ρ в фигурных скобках получим выражения вида:

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial\Re}{\partial J}\cdot\frac{\partial J}{\partial r}\ , \qquad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial\Re}{\partial J}\cdot\frac{\partial J}{\partial z}\ ,$$

где

$$\mathrm{F} = \lambda_+\lambda_- \frac{\mathrm{j}_r^2 + \mathrm{j}_z^2}{2\rho^2} + (4\pi^2\,\mathrm{c}^2\,\lambda_+\lambda_-)^{-1}\cdot\frac{(\mathrm{A}-\Psi)^2}{2\,\mathrm{r}^2} + \Re(\mathrm{J},\rho)$$

$$\Re(\mathrm{J},\rho) = \int\frac{\partial\,\mathrm{p}}{\partial\rho}\cdot\frac{d\rho}{\rho} \qquad (22)$$

Поэтому равенство (21) примет вид:

$$\mathrm{j}_r\frac{\partial\,\mathrm{F}}{\partial\,\mathrm{r}} + \mathrm{j}_z\frac{\partial\,\mathrm{F}}{\partial\,\mathrm{z}} - \frac{\partial\Re}{\partial\,\mathrm{J}}\Big(\frac{\partial\,\mathrm{J}}{\partial\,\mathrm{r}}\cdot\mathrm{j}_r + \frac{\partial\,\mathrm{J}}{\partial\,\mathrm{z}}\cdot\mathrm{j}_z\Big) = 0$$

Учитывая выражение для $\mathrm{j}_r, \mathrm{j}_z$, получим в итоге:

$$\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\,\mathrm{z}}\cdot\frac{\partial\,\mathrm{F}}{\partial\,\mathrm{r}} - \frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\,\mathrm{r}}\cdot\frac{\partial\,\mathrm{F}}{\partial\,\mathrm{z}} = 0$$

Последнее соотношение эквивалентно векторному тождеству:

$$\nabla\,\mathrm{J}\times\nabla\,\mathrm{F} = 0$$

и т.к. $\nabla\,\mathrm{J}\neq 0$, то на основании *Теоремы 2* заключаем, что $\mathrm{F}=\mathrm{F}(\mathrm{J})$ – произвольная гладкая функция. Итак, получили еще один первый интеграл

$$\frac{\lambda_+\lambda_-}{8\pi^2\,\mathrm{r}^2\,\rho^2}\Big[\Big(\frac{\partial\,\mathrm{J}}{\partial\,\mathrm{r}}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\,\mathrm{J}}{\partial\,\mathrm{z}}\Big)^2\Big] + \frac{(\mathrm{A}-\Psi)^2}{8\pi^2\,\mathrm{r}^2\mathrm{c}^2\,\lambda_+\lambda_-} + \Re(\mathrm{J},\rho) \equiv \mathrm{F}(\mathrm{J}) \qquad (23)$$

Используя выражение (19) для j_φ, этот интеграл можно переписать в виде:

$$\lambda_+\lambda_-\cdot\frac{\mathrm{j}^2}{2\rho^2} + \Re(\mathrm{J},\rho) = \mathrm{F}(\mathrm{J}) \quad , \qquad \mathrm{j}^2 = \mathrm{j}_\mathrm{r}^2 + \mathrm{j}_\varphi^2 + \mathrm{j}_\mathrm{z}^2$$

Наконец, преобразуем выражение для $\Re$, интегрируя (22) по частям:

$$\Re(\mathrm{J},\rho) = \int\frac{\partial\,\mathrm{p}}{\partial\rho}\cdot\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{p}}{\rho} + \int\frac{\mathrm{p}}{\rho^2}\,d\rho$$

Теперь немного термодинамики. Если рассматривать все термодинамические параметры как функции энтропии и плотности, то из 2-го закона термодинамики $\mathrm{T}\,d\mathrm{S} = d\varepsilon - (\mathrm{p}/\rho^2)d\rho$ следует, что $\partial\varepsilon/\partial\rho = \mathrm{p}/\rho^2$. Поэтому:

$$\frac{\mathrm{p}}{\rho^2} = \frac{\mathrm{p}_+(\mathrm{S}_+,\rho_+)}{\rho_+^2}\cdot\frac{\lambda_+^2}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{p}_-(\mathrm{S}_-,\rho_-)}{\rho_-^2}\cdot\frac{\lambda_-^2}{\lambda^2} = \frac{\partial\varepsilon_+}{\partial\rho_+}\cdot\frac{\lambda_+^2}{\lambda^2} + \frac{\partial\varepsilon_-}{\partial\rho_-}\cdot\frac{\lambda_-^2}{\lambda^2} \qquad ,$$

где $\lambda = \lambda_+ + \lambda_-$.

Откуда

$$\int\frac{\mathrm{p}}{\rho^2}\,d\rho = \frac{\lambda_+}{\lambda}\int\frac{\partial\varepsilon_+}{\partial\rho_+}\,d\rho_+ + \frac{\lambda_-}{\lambda}\int\frac{\partial\varepsilon_-}{\partial\rho_-}\,d\rho_- = \frac{\lambda_+\varepsilon_+ + \lambda_-\varepsilon_-}{\lambda} = \varepsilon \quad ,$$

где ε – плотность внутренней энергии плазмы. Поэтому окончательно имеем:

$$\Re(\mathrm{J},\rho) = \frac{\mathrm{p}}{\rho} + \varepsilon \quad .$$

Итак, интеграл (23) может быть переписан в виде:

$$\lambda\;\lambda_-\frac{\mathrm{j}^2}{2\rho^2} + \frac{\mathrm{p}}{\rho} + \varepsilon = \mathrm{F}(\mathrm{J}) \quad . \qquad (24)$$

Продолжим вывод уравнений равновесия. Выразим из интеграла (23) комбинацию $(\mathrm{A}-\Psi)^2/\mathrm{r}^2$ и подставим её под знак дифференцирования в любое из двух уравнений (20):

$$\frac{(\mathrm{A}-\Psi)^2}{\mathrm{r}^2}=8\pi^2\,\mathrm{c}^2\,\lambda_+\lambda_-[\mathrm{F}(\mathrm{J})-\lambda_+\lambda_-\,\frac{\mathrm{j}_r^2+\mathrm{j}_z^2}{2\rho^2}-\Re(\mathrm{J},\rho)]$$

Тогда приходим к одному и тому же дифференциальному уравнению относительно функции J:

$$\Delta^*\,\mathrm{J}=\rho^{-1}(\frac{\partial\,\mathrm{J}}{\partial\,\mathrm{r}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\,\mathrm{r}}+\frac{\partial\,\mathrm{J}}{\partial\,\mathrm{z}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\,\mathrm{z}})+\frac{4\pi\rho\,\mathrm{J}}{\mathrm{c}^2\,\lambda_+\lambda_-}+$$

$$+\frac{4\pi^2\,\mathrm{r}^2\,\rho^2}{\lambda_+\lambda_-}[\mathrm{F}'(\mathrm{J})+\rho^{-1}\frac{\partial\,\mathrm{p}}{\partial\,\mathrm{J}}-\frac{\partial\Re}{\partial\,\mathrm{J}}]-(\frac{\rho}{\mathrm{c}\,\lambda_+\lambda_-})^2\,\mathrm{A}'(\mathrm{J})(\mathrm{A}(\mathrm{J})-\Psi)$$

Наконец, подставляя выражение (19) для j_φ в равенство

$$\mathrm{j}_\varphi+\mathrm{j}_\varphi^0=-\frac{\mathrm{c}}{8\pi^2\mathrm{r}}\Delta^*\Psi$$

получаем дифференциальное уравнение относительно Ψ. В итоге получим следующую систему уравнений для нахождения функций $\Psi,\ \mathrm{J},\ \rho$:

$$\Delta^*\Psi=\frac{4\pi\rho(\Psi-\mathrm{A}(\mathrm{J}))}{\mathrm{c}^2\,\lambda_+\lambda_-}-\frac{8\pi^2 r}{\mathrm{c}}\,\mathrm{j}_\varphi^0\ ,$$

$$\Delta^*\,\mathrm{J}=\rho^{-1}<\nabla\,\mathrm{J},\ \nabla\rho>+\frac{4\pi\rho\,\mathrm{J}}{\mathrm{c}^2\lambda_+\lambda_-}+\frac{4\pi^2\mathrm{r}^2\rho^2}{\lambda_+\lambda_-}\,[\mathrm{F}'(\mathrm{J})+\rho^{-1}\frac{\partial\,\mathrm{p}}{\partial\,\mathrm{J}}-\frac{\partial\Re}{\partial\,\mathrm{J}}]-$$

$$-(\frac{\rho}{\mathrm{c}\,\lambda_+\lambda_-})^2\,\mathrm{A}'(\mathrm{J})(\mathrm{A}(\mathrm{J})-\Psi)\ ,\tag{25}$$

$$\frac{\lambda_+\lambda_-}{8\pi^2\rho^2\mathrm{r}^2}<\nabla\,\mathrm{J},\ \nabla\,\mathrm{J}>+\frac{(\mathrm{A}(\mathrm{J})-\Psi)^2}{8\pi^2\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{r}^2\lambda_+\lambda_-}+\Re(\mathrm{J},\rho)=\mathrm{F}(\mathrm{J})\ ,$$

где

$$\mathrm{p}(\mathrm{J},\rho)=\mathrm{p}_+(\mathrm{S}_+(\mathrm{J}),\ (\lambda_+/\lambda)\rho)+\mathrm{p}_-(\mathrm{S}_-(\mathrm{J}),\ (\lambda_-/\lambda)\rho)\ ,$$

$$\Re(\mathrm{J},\rho)=\frac{\mathrm{p}}{\rho}+\int\frac{\mathrm{p}}{\rho^2}\,d\rho\ ,\tag{26}$$

$\mathrm{A}(\mathrm{J}),\ \mathrm{F}(\mathrm{J})>0$ – произвольные гладкие функции, $\mathrm{j}_\varphi^0(\mathrm{r},\mathrm{z})$ – произвольная функция, $\mathrm{S}_\pm(\mathrm{J})$ – произвольные гладкие функции, подчиненные ограничению ((равносильному пятому уравнению системы $(6')$):

$$\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{J}}[\lambda_+\,\mathrm{p}_+(\mathrm{S}_+(\mathrm{J}),\ (\lambda_+/\lambda)\rho)-\lambda_-\,\mathrm{p}_-(\mathrm{S}_-(\mathrm{J}),\ (\lambda_-/\lambda)\rho)]\equiv 0\tag{27}$$

тождественно по всем J,ρ. Система (25–27) и является искомой системой **уравнений ЭМГД – плазмостатики в присутствии внешних токов и для произвольных уравнений состояния электронов и ионов.**

Особо отметим роль уравнений состояния в ЭМГД – плазмостатике. Условие (27) заведомо всегда выполнено для изоэнтропических равновесий, когда $\mathrm{S}_{\pm}(\mathrm{J})=\mathrm{const}$. Тогда уравнения равновесия (25) упрощаются, т.к. $\partial \mathrm{p}/\partial \mathrm{J}=0,\ \partial\Re/\partial \mathrm{J}=0$. Существует ли неизоэнтропические равновесные конфигурации, зависит от уравнений состояния плазменных компонент. Вот простой пример.

Пусть электроны и ионы – идеальные политропные газы с показателями адиабаты $\gamma_{\pm}>1$. Тогда:

$$\mathrm{p}_{\pm}=\mathrm{p}_{\pm}(\mathrm{S}_{\pm},\rho_{\pm})=\rho_{\pm}^{\gamma_{\pm}}\exp[\frac{\mathrm{m}_{\pm}}{k}(\gamma_{\pm}-1)\mathrm{S}_{\pm}]\quad,$$

где k – постоянная Больцмана. Условие (27) дает

$$\lambda_{+}^{\gamma_{+}+1}\frac{d}{d\,\mathrm{J}}\{\exp[\frac{\mathrm{m}_{+}}{k}(\gamma_{+}-1)\mathrm{S}_{+}(\mathrm{J})]\}\rho^{\gamma_{+}}-\lambda_{-}^{\gamma_{-}+1}\frac{d}{d\,\mathrm{J}}\{\exp[\frac{\mathrm{m}_{-}}{k}(\gamma_{-}-1)\mathrm{S}_{-}(\mathrm{J})]\}\rho^{\gamma_{-}}\equiv 0$$

Если показатели адиабаты различные, $\gamma_{+}\neq\gamma_{-}$, то функции $\rho^{\gamma_{+}},\rho^{\gamma_{-}}$ линейно независимы и последнее условие может быть выполнено для всех J,ρ только в случае $\mathrm{S}_{\pm}(\mathrm{J})=\mathrm{const}$, т.е. только для изоэнтропических равновесий. Но если показатели адиабаты γ_{+},γ_{-} равны, $\gamma_{+}=\gamma_{-}=\gamma$, то $\rho^{\gamma_{+}}=\rho^{\gamma_{-}}=\rho^{\gamma}$ и условие (27) равносильно равенству:

$$\lambda_{+}^{\gamma+1}\exp[\frac{\mathrm{m}_{+}}{\mathrm{k}}(\gamma-1)\mathrm{S}_{+}(\mathrm{J})]-\lambda_{-}^{\gamma+1}\exp[\frac{\mathrm{m}_{-}}{\mathrm{k}}(\gamma-1)\mathrm{S}_{-}(\mathrm{J})]\equiv\mathrm{K}=\mathrm{const},$$

что позволяет константу $\mathrm{K}\geq 0$ и гладкую функцию $\mathrm{S}_{-}(\mathrm{J})$ выбрать произвольно (тогда $\mathrm{S}_{+}(\mathrm{J})$ однозначно вычисляются). При этом:

$$\mathrm{p}(\mathrm{J},\rho)=\mathrm{S}(\mathrm{J})\rho^{\gamma}\quad,\quad \mathrm{S}(\mathrm{J})=(\frac{\lambda_{+}}{\lambda})^{\gamma}\exp[\frac{\mathrm{m}_{+}}{k}(\gamma-1)\mathrm{S}_{+}(\mathrm{J})]+(\frac{\lambda_{-}}{\lambda})^{\gamma}\exp[\frac{\mathrm{m}_{-}}{k}(\gamma-1)\mathrm{S}_{-}(\mathrm{J})]$$

$$\Re(\mathrm{J},\rho)=\frac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{S}(\mathrm{J})\rho^{\gamma-1}\quad,\qquad \rho^{-1}\frac{\partial\mathrm{p}}{\partial\mathrm{J}}-\frac{\partial\Re}{\partial\mathrm{J}}=-\frac{\mathrm{S}'(\mathrm{J})}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}\tag{27'}$$

Можно предположить, что для сложных уравнений состояния, когда зависимости $\mathrm{p}_{+}(\mathrm{S}_{+},\rho_{+})$, $\mathrm{p}_{-}(\mathrm{S}_{-},\rho_{-})$ как функции от плотности принципиально различны, возможны только изоэнтропические равновесия.

Укажем на физический смысл интеграла (24). Это закон сохранения энергии для равновесной конфигурации. Можно установить следующий закон сохранения полной энергии в ЭМГД – теории: на решении системы (1-3) выполнено тождество:

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{t}}[\rho(\frac{U^2}{2}+\varepsilon+\frac{\lambda_{+}\lambda_{-}}{2\rho^2}\mathrm{j}^2)+\frac{\mathrm{H}^2}{8\pi}]+$$
$$+\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{U}(\frac{U^2}{2}+\varepsilon+\frac{\lambda_{+}\lambda_{-}}{2\rho^2}\mathrm{j}^2+\frac{\mathrm{p}_{\Sigma}}{\rho})+\frac{\mathrm{c}}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]+\mathrm{B}\mathbf{j}\right\}=0\ ,$$

где $\varepsilon=(\varepsilon_{+}\lambda_{+}+\varepsilon_{-}\lambda_{-})/\lambda$ и

$$\mathrm{B}=\lambda_{+}\lambda_{-}\frac{<\mathbf{U},\mathbf{j}>}{\rho}+\lambda_{+}\lambda_{-}(\lambda_{-}-\lambda_{+})\frac{\mathrm{j}^2}{2\rho^2}+\frac{\lambda_{+}\lambda_{-}}{\lambda}(\varepsilon_{+}-\varepsilon_{-})+\frac{\lambda_{-}\mathrm{p}_{+}-\lambda_{+}\mathrm{p}_{-}}{\rho}\quad.$$

Полагая в законе сохранения $\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{U} = 0$, получим:

$$\mathrm{div}\{\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] + B\mathbf{j}\} = 0 \quad . \tag{28}$$

Учитывая соотношение $\mathbf{E} = \rho^{-1}\nabla(\lambda_+ p_+ - \lambda_- p_-)$, $\lambda_+ p_+ - \lambda_- p_- = h(\rho)$, нетрудно проверить, что в аксиально симметричном случае соотношение (28) и (24) эквивалентны.

§6. МГД – предел.

Рассмотрим МГД – предел уравнений ЭМГД – плазмостатики (25). Принципиально важно убедится, что в МГД – пределе получаются уравнения Грэда – Шафранова МГД – плазмостатики. Приведем систему (25) к безразмерному виду, выбрав характерные масштабы соответствующих величин, обозначаемых скобками, так что:

$$[J] = \frac{c}{2}[H][L],\ \ [\Psi] = 2\pi[H][L]^2\ ,\ \ [p] = \frac{[H]^2}{4\pi}\quad ,$$

$$[A] = [\Psi],\qquad [F] = \frac{[H]^2}{8\pi[\rho]},\qquad [j] = \frac{c[H]}{4\pi[L]}.$$

Пусть

$$\xi^2 = \frac{c^2\,\lambda_+\lambda_-}{4\pi[\rho][L]^2}$$

безразмерный параметр. Тогда в безразмерном виде система (25) дает:

$$\begin{aligned}
&\xi^2\Delta^*\Psi = \rho(\Psi - A(J)) - r\,\xi^2\, j_\varphi^0\\
&\xi^4\Delta^*\, J = \xi^4\rho^{-1} < \nabla J, \nabla\rho > +\xi^2\, J\,\rho +\\
&\qquad + \frac{\xi^2\, r^2\,\rho^2}{2}[F'(J) + 2(\rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial J} - \frac{\partial\Re}{\partial J})] - \rho^2 A'(J)(A(J)-\Psi)\\
&\xi^4\rho^{-2}\, r^{-2}[(\frac{\partial J}{\partial r})^2 + (\frac{\partial J}{\partial z})^2] + (\frac{A(J)-\Psi}{r})^2 + 2\xi^2\Re(J,\rho) = \xi^2\, F(J)
\end{aligned} \tag{25$'$}$$

МГД – предел соответствует переходу $\xi^2 \to 0$. Разложим функции $\rho, \Psi,\ J,\ j_\varphi^0$ по степеням ξ^2:

$$\begin{aligned}
&\rho = \rho_0 + \rho_1\xi^2 + \rho_2\xi^4 + \ldots \quad ,\\
&\Psi = \Psi_0 + \Psi_1\xi^2 + \Psi_2\xi^4 + \ldots \quad ,\\
&J = J_0 + J_1\xi^2 + J_2\xi^4 + \ldots \quad ,\\
&j_\varphi^0 = j_0 + j_1\xi^2 + j_2\xi^4 + \ldots \quad ,
\end{aligned} \tag{29}$$

где ρ_k, Ψ_k, J_k, j_k, $k \ge 0$ – функции от (r, z). Тогда:

$$A(J) = A(J_0) + A'(J_0)J_1\xi^2 + \ldots$$

$$A'(J) = A'(J_0) + A''(J_0)J_1\xi^2 + \ldots$$

Оказывается, нулевые коэффициенты разложений ρ_0, Ψ_0, J_0, j_0 связаны определенными соотношениями. Чтобы получить их, подставим разложение

(29) в уравнения (25′) и ограничимся первыми двумя членами разложения по параметру ξ^2:

$$\xi^2\Delta^*\Psi_0+\ldots=\rho_0(\Psi_0-A(J_0))+[\rho_1(\Psi_0-A(J_0))+\rho_0(\Psi_1-A'(J_0)J_1)-r\,j_0]\xi^2+\ldots$$

$$0+\ldots=-\rho_0^2A'(J_0)(A(J_0)-\Psi_0)+\xi^2\{J_0\,\rho_0+\frac{r^2\,\rho_0^2}{2}[F'(J_0)+2(\rho_0^{-1}\frac{\partial p}{\partial J}(J_0,\rho_0)-$$
$$-\frac{\partial\Re}{\partial J}(J_0,\rho_0))]-\rho_0^2A'(J_0)(A'(J_0)J_1-\Psi_1)-\rho_0^2(A(J_0)-\Psi_0)A''(J_0)J_1-$$
$$-2\rho_0A'(J_0)(A(J_0)-\Psi_0)\rho_1\}+\ldots$$

$$\frac{(A(J_0)-\Psi_0)^2}{r^2}+[2\Re(J_0,\rho_0)+2r^{-2}(A(J_0)-\Psi_0)(A'(J_0)J_1-\Psi_1)]\xi^2+\ldots=F(J_0)\xi^2+\ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ получим из 1-го уравнения $\Psi_0=A(J_0)$ (здесь учтено $\rho_0>0$). С учетом этого дальнейшее приведение подобных членов дает:

$$\Delta^*\Psi_0=\rho_0(\Psi_1-A'(J_0)J_1)-rj_0\ ,$$
$$J_0\,\rho_0+\frac{r^2\,\rho_0^2}{2}[F'(J_0)+2(\rho_0^{-1}\frac{\partial p}{\partial J}(J_0,\rho_0)-\frac{\partial\Re}{\partial J}(J_0,\rho_0))]-$$
$$-\rho_0^2A'(J_0)(A'(J_0)J_1-\Psi_1)=0 \qquad (30)$$
$$2\Re(J_0,\rho_0)=F(J_0)$$

из последнего уравнения следует, что $\rho_0=\rho_0(J_0)$ (т.к. $\partial\Re/\partial\rho=\rho^{-1}\partial p/\partial\rho>0$ и значит полученные нелинейное уравнение всегда разрешимо относительно ρ_0), в частности, все три функции ρ_0,Ψ_0,J_0 (а значит и $p_0=p(J_0,\rho_0)$) функционально зависимы. Далее,

$$F'(J_0)=2\frac{\partial\Re}{\partial J}+2\frac{\partial\Re}{\partial\rho}\rho_0'=2\frac{\partial\Re}{\partial J}+2\frac{\partial p}{\partial\rho}\cdot\frac{\rho_0'}{\rho_0}\ .$$

Подставляя это соотношение и выражение $\rho_0(\Psi_1-A'(J_0)J_1)$ из первого уравнения системы (30) во второе уравнение, получим, сокращая на ρ_0:

$$J_0+r^2[\frac{\partial p}{\partial\rho}\rho_0'+\frac{\partial p}{\partial J}]+(\Delta^*\Psi_0+rj_0)A'(J_0)=0\ .$$

Но для $p_0(J_0)=p(J_0\,,\rho_0(J_0))$ имеем:

$$\frac{dp_0}{dJ_0}=\frac{\partial p}{\partial J}+\frac{\partial p}{\partial\rho}\rho_0'$$

Учитывая $\Psi_0=A(J_0)$, получим:

$$\frac{dp_0}{dJ_0}\Big/A'(J_0)=\frac{dp_0}{dJ_0}\Big/\frac{d\Psi_0}{dJ_0}=\frac{dp_0}{d\Psi_0}\ ,\qquad J_0\big/A'(J_0)=J_0\frac{dJ_0}{d\Psi_0}\ .$$

Окончательно, приходим к соотношению:

$$\Delta^*\Psi_0=-r^2\frac{dP_0}{d\Psi_0}-J_0\frac{dJ_0}{d\Psi_0}-rj_0\,,$$

которое в размерном виде совпадает в точности с уравнением Грэда - Шафранова:

$$\Delta^* \Psi_0 = -16\pi^3 r^2 \frac{dP_0}{d\Psi_0} - \frac{16\pi^2}{c^2} J_0 \frac{dJ_0}{d\Psi_0} - \frac{8\pi^2 r}{c} j_0 \ ,$$

где $P_0 = P_0(\Psi_0)$, $J_0 = J_0(\Psi_0)$.

Процесс разложения можно продолжить и получить уравнения, связывающие J_1, Ψ_1, ρ_1 ; J_2, Ψ_2, ρ_2 и т.д. Таким образом, цепочка уравнений на коэффициенты разложений (29) расцепляется: в принципе, последовательно можно найти все коэффициенты разложений.

§7. Неэллиптичность уравнений равновесия.

Рассмотрим более подробно систему уравнений ЭМГД – плазмостатики (25). Третье уравнение этой системы – нелинейное недифференциальное уравнение относительно плотности ρ. Исключая из него ρ и подставляя полученное выражение в первые два уравнения системы (25), получим систему из двух дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно функций Ψ, J. Нас интересует тип дифференциального оператора старших производных полученной системы. Реализация намеченного плана зависит от вида нелинейной функции $\Re(J, \rho)$, т.е. от уравнений состояния плазменных компонент. Проанализируем случай, когда электроны и ионы являются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты $\gamma > 1$. Тогда система (25) конкретизируется формулами (27′), и третье уравнение системы (25) имеет вид:

$$g(\rho) = u \ , \quad g(\rho) = \alpha\rho^{-2} + \beta\rho^{\gamma-1} \ , \qquad (31)$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda_+\lambda_-}{8\pi^2}[(\frac{\partial J}{\partial r})^2 + (\frac{\partial J}{\partial z})^2], \quad \beta = \frac{\gamma}{\gamma-1} r^2 S(J), \quad u = r^2 F(J) - \frac{(A(J)-\Psi)^2}{8\pi^2 c^2 \lambda_+\lambda_-} \ .$$

Для реальных (рациональных) показателей γ нахождение ρ сводится к поиску корней некоторого алгебраического многочлена.

Поскольку $\alpha, \beta > 0, \gamma > 1$, то уравнение (31) имеет два решения при $u > g(\rho_*)$, одно при $u = g(\rho_*)$ и не имеет решений при $u < g(\rho_*)$, где $\rho_* = (\frac{2}{\gamma-1} \cdot \frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{\gamma+1}}$ – точка абсолютного минимума функции $g(\rho)$ в области $(0, +\infty)$. График функции $g(\rho)$ состоит из двух ветвей, исходящих из точки минимума и уходящих на $+\infty$ при $\rho \to +\infty$ (″плотная″ ветвь) и $\rho \to 0+$ (″разреженная″ ветвь). Поэтому в области $u > g(\rho_*)$ уравнение (31) имеет два гладких решения $\rho = \Phi_\pm(\Psi, J, \nabla J, r)$, где знак ″–″ отвечает значениям

$\rho < \rho_*$ ("разреженная" ветвь решений). а знак "+" – значениям $\rho > \rho_*$ ("плотная" ветвь решений). При $\gamma = 3$ функции $\Phi_\pm$ имеют явные выражения:

$$\Phi_\pm(\Psi,\ J,\ \nabla J,\ r) = \left\{\frac{u \pm (u^2 - 4\alpha\beta)^{1/2}}{2\beta}\right\}^{1/2} \tag{32}$$

с учетом формул (31) для $\alpha,\ \beta,\ u$. Условие $u > g(\rho_*)$ равносильно условию $u > 2(\alpha\beta)^{1/2}$. (Можно бы везде ограничиться случаем $\gamma = 3$, поскольку качественная картина решений, вероятно, не будет зависеть от γ.)

Теорема 6. *После подставки функций* $\rho = \Phi_\pm(\Psi,\ J,\ \nabla J,\ r)$, *в первые два уравнения системы ЭМГД- плазмостатики (25) операторы старших производных 1-го и 2-го уравнений имеют соответственно вид*:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\ , \tag{33}$$

$$[1 - K_\pm(\frac{\partial J}{\partial z})^2]\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - 2K_\pm \frac{\partial J}{\partial r}\cdot\frac{\partial J}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 J}{\partial r\partial z} + [1 - K_\pm(\frac{\partial J}{\partial r})^2]\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}, \tag{34}$$

где $K_\pm = \lambda_+\lambda_-(4\pi^2\Delta_\pm)^{-1}$, $\Delta_\pm = 2\alpha - (\gamma - 1)\beta\Phi_\pm^{\gamma+1}$.

Доказательство теоремы дадим ниже. Ясно, что оператор (33) всегда эллиптический. Тип дифференциального оператора (34) определяется типом квадратурной формулы с матрицей коэффициентов:

$$C_\pm = \begin{bmatrix} 1 - K_\pm(\frac{\partial J}{\partial z})^2 & -K_\pm\frac{\partial J}{\partial r}\frac{\partial J}{\partial z} \\ -K_\pm\frac{\partial J}{\partial r}\frac{\partial J}{\partial z} & 1 - K_\pm(\frac{\partial J}{\partial r})^2 \end{bmatrix}.$$

Имеем с учетом определений α и $\Delta_\pm$:

$$\det C_\pm = 1 - K_\pm[(\frac{\partial J}{\partial r})^2 + (\frac{\partial J}{\partial z})^2] = 1 - \frac{2\alpha}{\Delta_\pm} = -\frac{(\gamma-1)\beta}{\Delta_\pm}\cdot\Phi_\pm^{\gamma+1} \quad .$$

Очевидно

$$\Delta(\rho) = 2\alpha - (\gamma - 1)\beta\rho^{\gamma+1} = -\rho^3\frac{dg}{d\rho} \quad .$$

Значит $\Delta_+ = \Delta(\Phi_+) < 0$, т.к. $\Phi_+ > \rho_*$, а $\Delta_- = \Delta(\Phi_-) > 0$, т.к. $\Phi_- < \rho_*$.

Поэтому $\det C_+ > 0 > \det C_-$, $K_+ < 0 < K_-$. Отсюда следует, что квадратичная форма с матрицей коэффициентов C_+ положительно определена, и значит дифференциальный оператор (34) для знака "+" эллиптический, а квадратичная форма с матрицей коэффициентов C_- знакопеременная и значит дифференциальный оператор (34) для знака "–" гиперболический. Итак, если для исключения ρ используется ветвь $\rho = \Phi_+$, то возникающая система дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций Ψ, J имеет эллиптический тип, а если — ветвь $\rho = \Phi_-$, то —

гиперболический. Решение этой системы должно удовлетворять условию $u > g(\rho_*)$, которое эквивалентно неравенству:

$$C_1 < \nabla J,\ \nabla J >^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} [r^2 S(J)]^{\frac{2}{\gamma+1}} + C_2 (A(J) - \Psi)^2 < r^2 F(J)\ ,$$

где

$$C_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot (\frac{\gamma}{2})^{\frac{2}{\gamma+1}} (\frac{\lambda_+ \lambda_-}{8\pi^2})^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\ , \qquad C_2 = (8\pi^2 c^2 \lambda_+ \lambda_-)^{-1}\ .$$

Таким образом, уравнения ЭМГД – плазмостатики (25) являются смешанного типа системой уравнений, эллиптической в области плотных равновесий, $\rho > \rho_*$ и гиперболической в области разреженных равновесий, $\rho < \rho_*$. Условие $\rho > \rho_*$, учитывая выражения для ρ_*, α, β, легко преобразуется к виду:

$$\frac{i_\perp}{c_S} < M_* = (\frac{\lambda_+}{\lambda_-})^{1/2} + (\frac{\lambda_-}{\lambda_+})^{1/2} \tag{35}$$

где $\mathbf{i} = \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$ – токовая скорость, $\mathbf{i}_\perp = (i_r\ ,\ 0\ ,\ i_z)$ – её поперечная проекция, $c_S = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$ – адиабатическая скорость звука. Итак, *число Маха поперечной токовой скорости в области плотного равновесия всюду меньше критического значения* M_**, вычисляемого по (35), а в области разреженного равновесия всюду больше* M_*. *Разреженная и плотная плазма подчиняются разным законам равновесия*, что принципиально важно для постановки краевых задач в ЭМГД – плазмостатитике.

В концентрированном виде указанное различие проявляется для равновесия Z – пинча $(j_\varphi = 0,\ H_r = H_z = 0)$, реализуемых частными решениями системы (25) для $\Psi = A(J) \equiv \mathrm{Const}$:

$$\begin{gathered} \Delta^* J = \rho^{-1} < \nabla J\ ,\ \nabla \rho > + \frac{4\pi\rho J}{c^2 \lambda_+ \lambda_-} + \frac{4\pi^2 \rho^2 r^2}{\lambda_+ \lambda_-}[F'(J) - \frac{S'(J)}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}] \\ \frac{\lambda_+ \lambda_-}{8\pi^2 \rho^2 r^2} < \nabla J\ ,\ \nabla J > + \frac{\gamma}{\gamma-1} S(J) \rho^{\gamma-1} = F(J) \end{gathered} \tag{36}$$

Рассмотрим для простоты изоэнтропические равновесия $(S(J) \equiv \mathrm{Const})$, считая $F(J) \equiv \mathrm{Const}$ и $\gamma = 3$. Исключая ρ из второго уравнения системы (36) по формуле (32) и подставляя в первое, сведем задачу о равновесии Z– пинча к одному уравнению:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}[1 \pm \frac{a}{R\rho^2}(\frac{\partial J}{\partial r})^2] \pm \frac{2a}{R\rho^2}\frac{\partial J}{\partial r}\frac{\partial J}{\partial z}\frac{\partial^2 J}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 J}{\partial z^2}[1 \pm \frac{a}{R\rho^2}(\frac{\partial J}{\partial z})^2] = \\ = r^{-1}\frac{\partial J}{\partial r} \pm \frac{a}{R\rho^2 r} < \nabla J\ ,\ \nabla J > + \frac{4\pi\rho J}{c^2 \lambda_+ \lambda_-}\ , \end{gathered} \tag{37}$$

где $\rho=\rho_{\pm}=(3\mathrm{S})^{-1/2}[\mathrm{F}\pm \mathrm{R}]^{1/2}$, $\mathrm{R}=[\mathrm{F}^2-\frac{3\lambda_{+}\lambda_{-}\mathrm{S}}{4\pi^2 r^2}<\nabla \mathrm{J}\,,\ \nabla \mathrm{J}>]^{1/2}$, $a=\frac{\lambda_{+}\lambda_{-}}{8\pi^2 r^2}$, и мы ищем решения (37), удовлетворяющие неравенству

$$\frac{3\lambda_{+}\lambda_{-}\mathrm{S}}{4\pi^2 r^2}<\nabla \mathrm{J}\,,\ \nabla \mathrm{J}>\ <\ \mathrm{F}^2 \quad .$$

Очевидно, уравнение (37) эллиптично при выборе знака "+" и гиперболично при выборе знака "–" .

Доказательство теоремы 6. Уравнение (31) задает ветви $\rho=\Phi_{\pm}$ как неявные функции от $\alpha,\ \beta,\ \mathrm{u}$:

$$\mathrm{f}(\alpha,\beta,\mathrm{u},\rho)=\mathrm{g}(\rho)-\mathrm{u}=\frac{\alpha}{\rho^2}+\beta\rho^{\gamma-1}-\mathrm{u}=0\,.$$

Существование неявной функции гарантируется условием:

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\rho}=-\frac{2\alpha}{\rho^3}+\beta(\gamma-1)\rho^{\gamma-2}\neq 0\,.$$

Тип дифференциального уравнения относительно J определится результатом подстановки $\rho=\Phi_{\pm}$ в производные $\partial\rho/\partial r,\ \partial\rho/\partial \mathrm{z}$ во второе уравнение системы (25). (Первое уравнение (25) не зависит от производных $\partial\rho/\partial r$, $\partial\rho/\partial \mathrm{z}$, поэтому дифференциальный оператор старших производных этого уравнения не изменится при подстановке $\rho=\Phi_{\pm}$ и значит, совпадает с (33).) имеем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial r}+\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial r}+\frac{\partial\rho}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{z}}=\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial \mathrm{z}}+\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial \mathrm{z}}+\frac{\partial\rho}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathrm{z}} \qquad .$$

Производные $\partial\rho/\partial\alpha$, $\partial\rho/\partial\beta$, $\partial\rho/\partial u$ неявной функции получаются из уравнения $\mathrm{f}(\alpha,\beta,\,u,\rho(\alpha,\beta,u))\equiv 0$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}=-\frac{\partial \mathrm{f}/\partial\alpha}{\partial \mathrm{f}/\partial\rho}=\frac{\rho}{\Delta(\rho)} \quad , \quad \frac{\partial\alpha}{\partial r}=\frac{\lambda_{+}\lambda_{-}}{4\pi^2}[\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{r}}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{z}}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial \mathrm{r}\,\partial \mathrm{z}}]$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\beta}=-\frac{\partial \mathrm{f}/\partial\beta}{\partial \mathrm{f}/\partial\rho}=\frac{\rho^{\gamma+2}}{\Delta(\rho)} \quad , \quad \frac{\partial\beta}{\partial r}=\frac{2r\gamma}{\gamma-1}\mathrm{S}(\mathrm{J})+\frac{r^2\gamma}{\gamma-1}\cdot\mathrm{S}'(\mathrm{J})\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial u}=-\frac{\partial \mathrm{f}/\partial u}{\partial \mathrm{f}/\partial\rho}=-\frac{\rho^3}{\Delta(\rho)} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial r}=2r\,\mathrm{F}(\mathrm{J})+r^2\,\mathrm{F}'(\mathrm{J})\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial r}+\frac{\Psi-\mathrm{A}(\mathrm{J})}{4\pi^2 r^2\lambda_{+}\lambda_{-}}\cdot(\mathrm{A}'(\mathrm{J})\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial r}-\frac{\partial\Psi}{\partial r})$$

и аналогичные вычисления для $\partial/\partial \mathrm{z}$:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial \mathrm{z}}=\frac{\lambda_{+}\lambda_{-}}{4\pi^2}[\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{r}}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial \mathrm{r}\,\partial \mathrm{z}}+\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{z}}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial \mathrm{z}^2}] \quad ,$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial \mathrm{z}}=\frac{r^2\gamma}{\gamma-1}\cdot\mathrm{S}'(\mathrm{J})\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{z}} \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{z}}=r^2\,\mathrm{F}'(\mathrm{J})\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{z}}+\frac{\Psi-\mathrm{A}(\mathrm{J})}{4\pi^2 r^2\lambda_{+}\lambda_{-}}\cdot(\mathrm{A}'(\mathrm{J})\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{z}}-\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{z}}) \quad ,$$

где $\Delta(\rho) = 2\alpha - (\gamma - 1)\beta\rho^{\gamma+1}$. Вторые производные в уравнении для J в (25) содержатся в операторе $\Delta^* \mathrm{J}$ и в слагаемом $\rho^{-1} < \nabla \mathrm{J}, \nabla\rho >$, причем в его части, которая образована суммой $\rho^{-1} \cdot \dfrac{\partial\rho}{\partial\alpha} \cdot < \nabla \mathrm{J}, \nabla\alpha >$. Собирая вместе все вторые производные J приходим к оператору (34), ч.т.д .

Литература.

1. К.В.Брушлинский, В.В.Савельев. Магнитные ловушки для удержания плазмы. Мат. Моделирование, т.11 N 5, 1999, стр.3-36.
2. В.Д.Шафранов. В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып.2. Под ред. М.А.Леонтовича. М., Атомиздат, 1963, стр.92.
3. М.Б.Гавриков. Линейные волны в нерелятивисткой магнитной гидродинамике. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АНСССР, 1988, N199.
4. В.С.Имшенник, Н.А.Боброва, Динамика столкновительной плазмы. М., Энергоатомиздат. 1997, стр.49.
5. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М.-Л., ГИТТЛ, 1950.