М.Б.Гавриков, Р.В.Сорокин.

О вынужденных колебаниях плазмы в круглой цилиндрической трубе.

Аннотация.

В работе исследованы вынужденные колебания плазмы в круглой цилиндрической трубе под действием периодически изменяющихся перепада давления плазмы вдоль оси трубы и полного тока. Плазма предполагается квазинейтральной, несжимаемой, вязкой и электропроводной, в полном объёме учитывается инерция электронов. В первой части работы представлено полное математическое решение задачи о вынужденных колебаниях. Во второй – исследованы различные предельные и частные случаи: приближение невязких электронов, МГД – предел, электрон-позитронная плазма, низкочастотный и высокочастотный пределы и пр.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00573).

M.B.Gavrikov, R.V.Sorokin.

About the compelled fluctuations of plasma in a round cylindrical pipe.

Abstract.

In work the compelled fluctuations of plasma in a round cylindrical pipe under action of periodically changing pressure difference of plasma along an axis of a pipe and a full current are investigated. Plasma is supposed quasineutral, incompressible, viscous and electro wire, inertia of electrons is in full considered. In the first part of work the full mathematical decision of a problem on the compelled fluctuations is presented. In the second - are investigated various limiting and and special cases: approach nonviscous electrons, (МГД - a limit), electron-positronic plasma, low-frequency and high-frequency limits and other.

Work is executed at support of the Russian foundation for basic research (a code of the project 05-01-00573).

Введение.

Задача о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе круглого сечения с давних пор привлекала внимание исследователей. Этой задачей занимались ещё Гельмгольц (H. Helmholtz, 1879г.) [1] и И.С.Громека (1882г.) [2]. Ёе частные случаи были разобраны различными авторами [3, 4, 5]. В частности, в [5] рассмотрены вынужденные колебания вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе круглого сечения под действием *гармонически* изменяющегося со временем перепада давления вдоль оси трубы (см. также [6]). Представляет значительный интерес рассмотрение аналогичной задачи для цилиндрической круглой трубы, заполненной плазмой. Однако вынужденные колебания плазмы, в отличие от чисто гидродинамического случая, будут возбуждаться не только гармонически изменяющимся по времени перепадом давления по оси трубы, но и гармоническим по времени током, протекающим через трубу, причем частоты тока (ω) и перепада давления (Ω) могут быть произвольными и различными. Можно решить ещё более общую задачу, считая перепад давления по оси трубы и полный ток произвольными периодическими по времени функциями с частотами Ω и ω соответственно. Наконец, можно продвинуться ещё дальше, полагая перепад давления и полный ток суммами *конечного числа* периодически зависящих от времени функций с произвольными частотами.

Глубина исследования вынужденных колебаний плазмы существенно зависит от принятой за основу модели плазмы в трубе. В этой работе будем считать плазму двухкомпонентной, полностью ионизованной, несжимаемой, вязкой, электропроводной и квазинейтральной. Однако не будем пренебрегать инерцией электронов и током смещения в уравнениях Максвелла, но будем предполагать коэффициенты вязкости компонент плазмы и её электропроводность константами, что существенно упрощает исследование. Последнее допущено разумно, поскольку, как известно [7,8], в простейшем случае коэффициенты вязкости электронов $\mu_e = \mu_-$, ионов $\mu_i = \mu_+$ а также электропроводность плазмы σ зависят только от температуры.

$$\mu_e = AT_e^{5/2}, \qquad \mu_i = BT_i^{5/2}, \qquad \sigma = CT_e^{3/2},$$

причем коэффициенты пропорциональности A, B, C в гауссовской системе единиц (T_i, T_e меряются ${}^0K$) имеют экстремальные порядки: $A \sim 10^{-18}$, $B \sim 10^{-16}$, $C \sim 10^7$. Учитывая, что в уравнения динамики плазмы (см. ниже) входит только σ^{-1}, для существенного изменения μ_e, μ_i, σ^{-1} необходимо изменение T_i, T_e на несколько порядков. Поэтому в широком диапазоне изменения температур T_i, T_e можно считать μ_e, μ_i, σ^{-1} константами.

В качестве базовой модели динамики плазмы в трубе примем модель несжимаеамых жидкостей:

$$\rho_\pm = \mathrm{const}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{v}_\pm = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_\pm \mathbf{v}_\pm}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{\pi}_\pm = \pm e_\pm n_\pm \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}_\pm \times \mathbf{H}\right]\right) + \mathrm{div}\Pi_\pm + \mathbf{R}_\pm, \qquad (*)$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0,$$

где плотность тока $\mathbf{j}$, тензоры напряжений $\boldsymbol{\pi}_\pm$ и вязких напряжений $\Pi_\pm$ и силы трения $R_\pm$ между компонентами имеют вид:

$$\boldsymbol{\pi}_\pm = \rho_\pm \mathbf{v}_\pm \cdot \mathbf{v}_\pm + p_\pm E_3, \qquad \Pi_\pm = 2\mu_\pm D_\pm,$$

$$\mathbf{j} = e_+ n_+ \mathbf{v}_+ - e_- n_- \mathbf{v}_-, \qquad \mathbf{R}_\pm = \pm\frac{e_+ e_- n_+ n_-}{\sigma}\left(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-\right).$$

Здесь $D_\pm$ – тензор деформаций:

$$D_\pm = \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha^\pm}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta^\pm}{\partial x_\alpha}\right)\right\|.$$

Считается, что $e_+ n_+ = e_- n_-$ (условие квазинейтральности) и в начальный момент времени:

$$\mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0.$$

Тогда в силу уравнений системы $(*)$ эти условия будут выполнены и в любой другой момент времени.

Систему $(*)$ удобно редуцировать к одножидкостной форме переходом к массовой скорости $\mathbf{U} = \left(\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-\right)/\rho$, $\rho = \rho_+ + \rho$:

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{\pi} = \rho^{-1}\mathrm{div}P - (4\pi c\rho)^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right],$$

$$\omega_p^{-2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2\omega_p^{-2}\mathrm{rotrot}\mathbf{E} + \mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{j} - c^{-1}\left[\mathbf{U}\times\mathbf{H}\right] + \rho^{-1}\mathrm{div}W + (\lambda_- - \lambda_+)(4\pi c\rho)^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right], \quad (**)$$

$$c^{-1}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0,$$

где $\omega_p = \left(4\pi\rho\lambda_+^{-1}\lambda_-^{-1}\right)^{1/2}$ – плазменная частота, $\lambda_\pm = m_\pm/e_\pm$, $\mathbf{j} = c(4\pi)^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{H} - (4\pi)^{-1}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ и в начальный момент времени $\mathrm{div}\mathbf{H} = 0$. Явные выражения для тензоров π, P, W вычислены ниже, см. §1. Система $(**)$ равносильна системе $(*)$ и решается относительно неизвестных функций $\mathbf{U}$, p_+, p_-, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ после чего скорости $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$ ищутся по явным формулам:

$$\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{U} \pm \frac{\lambda_{\mp}}{\rho}\mathbf{j}.$$

§1. Уравнения динамики двухкомпонентной несжимаемой плазмы.

Рассмотрим поток вязкой несжимаемой гидродинамической электропроводной и квазинейтральной двухкомпонентной плазмы. С учетом инерции как электронов, так и ионов динамика потока подчиняется уравнениям:

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho^{-1}\mathrm{Div}\boldsymbol{\pi} = \rho^{-1}\mathrm{div}P - (4\pi c\rho)^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{H}\right],$$

$$\frac{\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\mathrm{rotrot}\mathbf{E} + \mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{j} - c^{-1}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}] + \rho^{-1}\mathrm{div}W + \frac{\lambda_- - \lambda_+}{4\pi\rho c}\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right], \quad (1)$$

$$c^{-1}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0.$$

В начальный момент $\mathrm{div}\mathbf{H} = 0$, и

$$\mathbf{j} = c(4\pi)^{-1}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H} - (4\pi)^{-1}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \rho \equiv \mathrm{const}. \quad (2)$$

Выражения для тензоров $\boldsymbol{\pi}$, P, W имеют вид:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^{(h)} + \boldsymbol{\pi}^{(p)} + \boldsymbol{\pi}^{(H)}, \qquad P = \Pi_*^{(H)} + \Pi_\Sigma^{(U)}, \quad (3)$$

$$W = (\lambda_- - \lambda_+)\cdot\left(\boldsymbol{\pi}^{(p)} + \boldsymbol{\pi}^{(H)}\right) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-)E_3 + \lambda_-\lambda_+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\mathbf{j}) - \Pi_*^{(U)} - \Pi^{(H)}.$$

Наконец, тензоры $\boldsymbol{\pi}^{(p)}$, $\boldsymbol{\pi}^{(h)}$, $\boldsymbol{\pi}^{(H)}$ вычисляются по формулам:

$$\boldsymbol{\pi}^{(h)} = \rho\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} + p_\Sigma E_3, \quad \boldsymbol{\pi}^{(p)} = \frac{H^2}{8\pi}E_3 - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi}, \qquad \boldsymbol{\pi}^{(H)} = \frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho}\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}, \quad (4)$$

где $p_\Sigma = p_+ + p_-$ – суммарное давление, а тензоры $\Pi^{(H)}$, Π_Σ^{U}, $\Pi_*^{(H)}$ $\Pi_*^{(U)}$ пропорциональны тензорам деформаций $\mathrm{def}\mathbf{U}$, $\mathrm{def}\mathbf{j}$:

$$\Pi_\Sigma^{(U)} = 2\mu_\Sigma\mathrm{def}\mathbf{U}, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_*\mathrm{def}\mathbf{U}, \quad \Pi^{(H)} = \frac{2\mu^*}{\rho}\mathrm{def}\mathbf{j}, \quad \Pi_*^{(H)} = \frac{2\mu_*}{\rho}\mathrm{def}\mathbf{j}. \quad (5)$$

Константы, участвующие в предыдущих формулах, имеют вид:

$$\lambda_\pm = \frac{m_\pm}{e_\pm}, \qquad \mu_* = \lambda_-\mu_+ - \lambda_+\mu_-, \quad \mu^* = \lambda_-^2\mu_+ + \lambda_+^2\mu_-, \quad \mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-, \quad (6)$$

где $\mu_\pm$, $e_\pm$ – массы и (абсолютные) величины зарядов частиц плазменных компонент, $\rho_\pm$, $\mu_\pm$ – давления и гидродинамические вязкости компонент, σ – электропроводность плазмы. Если пренебречь зависимостью σ^{-1}, $\mu_\pm$ от температуры, то соотношения $(1\div 6)$ составляют замкнутую и определенную систему уравнений для нахождения 11 скалярных неизвестных функций: компонент векторов $\mathbf{U}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ и давления p_+, p_-. Скорости $\mathbf{v}_\pm$ и плотности $\rho_\pm$ компонент плазмы выражаются через решение системы $(1\div 6)$ по формулам:

$$\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm \left(\frac{\lambda_\mp}{\rho}\right)\mathbf{j}, \qquad \rho_\pm = \frac{\lambda_\pm}{\lambda}\rho, \qquad \lambda = \lambda_+ + \lambda_- . \tag{7}$$

С учетом зависимости σ и $\mu_\pm$ от температуры систему $(1\div 6)$ надо дополнить уравнениями для температур $T_\pm$ плазменных компонент:

$$\left[\frac{\partial T_\pm}{\partial t} + \operatorname{div}(T_\pm \mathbf{v}_\pm)\right]\rho_\pm c_p^\pm = \operatorname{div}(\chi_\pm \nabla T_\pm) + 2\mu_\pm \operatorname{tr}(D_\pm \cdot D_\pm) + m_\mp \cdot m_\Sigma^{-1}\sigma^{-1} j^2 \pm b(T_- - T_+), \tag{8}$$

где $m_\Sigma = m_+ + m_-$, $D_\pm = \operatorname{def}\mathbf{v}_\pm$, $\chi_\pm \geq 0$ – коэффициенты переноса, $c_p = T\dfrac{\partial S}{\partial T}$ – удельная теплоемкость при постоянном давлении (S – плотность энтропии). Для идеального газа $S = km^{-1}(\gamma-1)^{-1}\ln\left(p^{1-\gamma}T^\gamma\right) + \mathrm{const}$ (k – постоянная Больцмана, γ – показатель адиабаты), $c_p = T\dfrac{\partial S}{\partial T} = km^{-1}(\gamma-1)^{-1} \equiv \mathrm{const}$. В итоге, система $(1\div 8)$ *полностью описывает изменения скоростей, давлений, температур, электрического и магнитного полей несжимаемой квазинейтральной вязкой электропроводной плазмы. Она пригодна для исследования высокочастотных процессов в плазме, равноправным образом учитывающих динамику обеих компонент, в частности их взаимодействие, и в то же время является одножидкостной.* Для низко частотных процессов в системе $(1\div 8)$ надо везде положить $\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv 0$, $\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \equiv 0$. Физически это равносильно игнорированию тока смещения. Тогда снова получается замкнутая и определенная система уравнений для нахождения величин $\mathbf{U}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, p_+, p_-.

§2. Задача о течении плазмы в цилиндрическом канале.

Рассмотрим течение плазмы по цилиндрической трубе радиуса $r_0 > 0$, ось которой совпадает с осью OZ. Будем считать $\mu_\pm = \mathrm{const}$, $\sigma = \mathrm{const}$ и предположим, что все параметры течения, за исключением давлений, обладают цилиндрической симметрией $(\partial/\partial z = 0,\ \partial/\partial\varphi = 0)$, а давления осесимметричны, $\partial p_\pm/\partial\varphi = 0$. Кроме того, считаем что отсутствуют особенности параметров течения на оси OZ. Тогда из условий $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{U} = 0$, следуют равенства $H_r = 0$, $E_r = 0$, $U_r = 0$, а из равенства (2) тогда вытекает соотношение $j_r = 0$. В итоге система $(1\div 6)$ распадается на две подсистемы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_\varphi}{\partial t} = \mu_\Sigma \rho^{-1} D U_\varphi + \mu_* \rho^{-2} D j_\varphi \\ \dfrac{\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\dfrac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} - \dfrac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\cdot D E_\varphi + E_\varphi = \sigma^{-1} j_\varphi - \mu_* \rho^{-1} D U_\varphi - \mu^* \rho^{-2} D j_\varphi \\ c^{-1}\dfrac{\partial H_z}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r E_\varphi\right) = 0, \qquad j_\varphi = -c(4\pi)^{-1}\dfrac{\partial H_z}{\partial r} - (4\pi)^{-1}\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial t} \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_z}{\partial t} + \rho^{-1}\dfrac{\partial p_\Sigma}{\partial z} = \mu_\Sigma \rho^{-1} \Delta U_z + \mu_* \rho^{-2} \Delta j_z \\ \dfrac{\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \dfrac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\Delta E_z + E_z = \sigma^{-1} j_z - \mu_* \rho^{-1} \Delta U_z - \mu^* \rho^{-2} \Delta j_z + \rho^{-1}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-\right) \\ c^{-1}\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \qquad j_z = \dfrac{c}{4\pi r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r H_\varphi\right) - (4\pi)^{-1}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \tag{II}$$

где $Df = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^{-1}\dfrac{\partial}{\partial r}(rf)\right)$, $\Delta f = r^{-1}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)$, и уравнения для нахождения давлений $p_\pm$:

$$\begin{cases} -\rho r^{-1} U_\varphi^2 + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(p_\Sigma + \dfrac{H^2}{8\pi}\right) + (4\pi r)^{-1} H_\varphi^2 - \lambda_+\lambda_-(\rho r)^{-1} j_\varphi^2 + \dfrac{1}{4\pi c}\left(H_z\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial t} - H_\varphi\dfrac{\partial E_z}{\partial t}\right) = 0 \\ -c^{-1}\left(U_\varphi H_z - U_z H_\varphi\right) + \rho^{-1}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-\right) + \rho^{-1}\left(\lambda_- - \lambda_+\right)\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{H^2}{8\pi}\right) + (4\pi r)^{-1} H_\varphi^2 - \right. \\ \left. -\lambda_+\lambda_-(\rho r)^{-1} j_\varphi^2 - 2\lambda_+\lambda_-(\rho r)^{-1} j_\varphi U_\varphi - \left(\lambda_- - \lambda_+\right)(4\pi c\rho)^{-1}\left(H_z\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial t} - H_\varphi\dfrac{\partial E_z}{\partial t}\right)\right] = 0 \end{cases} \tag{III}$$

Из уравнений (III) вытекает, что $\dfrac{\partial p_\Sigma}{\partial r}$, $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-\right)$ зависят только от t и r, но не от z. Отсюда следует, что $p_\pm = \psi_\pm(t,z) + \varphi_\pm(t,r)$. Но тогда из первых двух уравнений системы (II) вытекает, что $\psi_\pm(t,z) = a_\pm(t)z + b_\pm(t)$. Откуда (присоединяя функции $b_\pm(t)$ к $\varphi_\pm(t,r)$) получим:

$$p_\pm = a_\pm(t)z + \varphi_\pm(t,r), \quad \frac{\partial p_\pm}{\partial z} = a_\pm(t), \quad \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} = a_+(t) + a_-(t),$$

где функции $a_\pm(t)$, определяющие перепад давлений вдоль оси Z в каждый момент времени, должны задаваться, а функции $\varphi_\pm(t,r)$ ищутся из системы (III) после решения систем (I) и (II). Далее рассмотрим преимущественно случай, когда $U_\varphi = 0$, $H_z = 0$, $E_\varphi = 0$ тогда и $j_\varphi = 0$ и система (I) удовлетворяется тождественно. Для нахождения функций H_φ, E_z, U_z, j_z имеем систему (II), которую надо дополнить начальными и граничными условиями.

Граничные условия имеют вид:

$U_z(t,r_0) = 0$, $j_z(t,r_0) = 0$, (условие “прилипания”), (9)

$$J_{tot}(t) = 2\pi\int_0^{r_0} r\, j_z(t,r)dr = J(t), \tag{10}$$

где $J(t)$ – заданная функция, а $J_{tot}(t)$ – полный ток, протекающий в момент времени t через сечение трубы. Кроме того, к числу граничных условий относится ограниченность функций H_φ, E_z, U_z, j_z в окрестности $r = 0$.

Итак, градиенты давлений $a_\pm(t)$ задают правые части системы (II), а функция $J(t)$ определяет граничные условия. Далее будем рассматривать также и комплексные решения системы (II). Поскольку система (II) линейная с вещественными коэффициентами, то, во-первых, для её решения верен принцип суперпозиции и, во-вторых, вещественная и мнимая части комплексного решения системы (II) являются её вещественными решениями.

Пусть теперь правые части и граничные условия системы (II) меняются по гармоническому закону, т.е. имеют вид:

$$a_\pm(t) = a_\pm \exp(i\omega t), \qquad J(t) = J_0 \exp(i\omega t), \qquad a_\pm, J_0 \in C, \tag{11}$$

Тогда начальные условия теряют смысл и решение системы (II) ищется в виде:

$$u(r,t) = u(r)\exp(i\omega t), \qquad u(r) \in C \tag{12}$$

где $u = (U_z, j_z, E_z, H_\varphi)$, а $u(r)$ называется *вектором комплексных амплитуд* решения $u(r,t)$. Ниже, в §3, указан рецепт нахождения решения вида (12), в частности, будет доказана его единственность.

Если правые части и граничные условия имеют более общий вид:

$$a_\pm(t) = a_\pm \exp(i\Omega t), \ J(t) = J_0 \exp(i\omega t), \qquad a_\pm, J_0 \in C,$$

и, вообще говоря, $\Omega \neq \omega$, то в силу принципа суперпозиции решение системы **(**II**)** является суммой двух решений:

$$u(r,t) = u_\Omega(r,t) + u_\omega(r,t),$$

где решения $u_\Omega(r,t)$ и $u_\omega(r,t)$ имеют вид

$$u_\Omega(r,t) = u_\Omega(r)\exp(i\Omega t), \qquad u_\omega(r,t) = u_\omega(r)\exp(i\omega t)$$

и определяются разными правыми частями и граничными условиями. Для решения $u_\Omega(r,t)$ имеем $a_\pm(t) = a_\pm \exp(i\Omega t)$, $J(t) = 0$, а для решения $u_\omega(r,t)$ полагаем $a_\pm(t) = 0$, $J(t) = J_0 \exp(i\omega t)$. Оба этих решения являются частными случаями решений системы (II) вида (12) с правыми частями и граничными условиями вида (11) и поэтому ищутся по методе §3. Заметим, что принцип суперпозиции не распространяется на радиальную часть давления, зависящую в каждый момент времени только от r (т.е. на функции $\varphi_\pm(t,r)$), поскольку хотя уравнения системы (III) относительно p_+, p_- линейны по p_+, p_-, но их правые части нелинейны по U_z, H_φ, E_z. В частности, p_+, p_- при $\Omega \neq \omega$ не являются гармоническими по времени колебаниями, а при $\Omega \neq \omega$

изменяются гармонически по времени, но с частотой 2ω, а не ω. Интересен вопрос, как соотношение частот $\Omega:\omega$ влияет на характер решения $u(r,t)$ и радиальные части давлений $p_{\pm}(t,r)$, в частности, могут ли быть резонансные явления?

Переход к любым периодически изменяющимся во времени перепадам давлений и полным токам очевиден. Пусть $a_{\pm}(t)$ и $J(t)$ - периодические функции с периодами $2\pi/\Omega$ и $2\pi/\omega$ соответственно. Разлагая эти функции в ряд Фурье,

$$a_{\pm}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^{\pm}\exp(ik\Omega t),\; J(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k\exp(ik\omega t)$$

и пользуясь принципом суперпозиции, получим *формальное* решение системы (II) для правой части $a_{\pm}(t)$ и граничного условия $J(t)$:

$$u(r,t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u_k(r)\exp(ik\Omega t)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}v_k(r)\exp(ik\omega t),$$

где $u_k(r)$ – вектор комплексных амплитуд решения системы (II) для частоты $k\Omega$ и $a_{\pm}=a_k^{\pm}$, $J_0=0$, а $v_k(r)$ – вектор комплексных амплитуд решения системы (II) для частоты $k\omega$ и $a_{\pm}=0$, $J_0=J_k$.

Можно пойти ещё дальше и, опираясь на принцип суперпозиции, указать формальное решение системы (II) в случае, когда перепады давлений вдоль оси трубы и полный ток есть сумма конечного числа периодических колебаний с произвольными частотами. Однако детальный анализ всех этих вопросов (включая исследование сходимости формальных рядов, задающих решения) выходит за рамки настоящей работы.

§3. Общий случай вязкой плазмы

Рассмотрим общий случай отличных от нуля вязкостей компонент плазмы, $\mu_+>0,\ \mu_->0$. Ищем решение системы (II) вида $f(t,r)=f(r)\exp(i\omega t)$, для правых частей и граничных условий вида $a_{\pm}(t)=a_{\pm}\exp(i\omega t)$, $J(t)=J_0\exp(i\omega t)$, $a_{\pm},J_0\in C$. Тогда для комплексных амплитуд получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&i\omega U_z+a\rho^{-1}=\mu\rho^{-1}\Delta U_z+\mu_*\rho^{-2}\Delta j_z,\\
&\left(1-\frac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho}\right)E_z-\frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\Delta E_z=\sigma^{-1}j_z-\mu_*\rho^{-1}\Delta U_z-\mu^*\rho^{-2}\Delta j_z+a_*\rho^{-1},\\
&\frac{i\omega}{c}H_\varphi-\frac{dE_z}{dr}=0, \qquad\qquad , \qquad\qquad (13)\\
&j_z=\frac{c}{4\pi r}\frac{d}{dr}(rH_\varphi)-\frac{i\omega}{4\pi}E_z,\\
&\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right),
\end{aligned}$$

где $a = a_+ + a_-$, $a_* = \lambda_- a_+ - \lambda_+ a_-$. Исключая посредством третьего уравнения полученной системы из числа неизвестных H_φ, получим неоднородную систему трех линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно трёх функций $U_z(r)$, $j_z(r)$, $E_z(r)$:

$$\begin{cases} i\omega U_z + a\rho^{-1} = \mu\rho^{-1}\Delta U_z + \mu_*\rho^{-2}\Delta j_z \\ \left(1 - \dfrac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho}\right)E_z - \dfrac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\Delta E_z = \sigma^{-1}j_z - \mu_*\rho^{-1}\Delta U_z - \mu^*\rho^{-2}\Delta j_z + a_*\rho^{-1} \\ j_z = \dfrac{c^2}{4\pi i\omega}\Delta E_z - \dfrac{i\omega}{4\pi}E_z \end{cases} \tag{14}$$

Система (14) имеет частное решение, состоящее из констант U_0, j_0, E_0, являющихся решением линейной системы:

$$-i\omega U_0 = a\rho^{-1}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho}\right)E_0 - \sigma^{-1}j_0 = a_*\rho^{-1}$$

$$j_0 + \frac{i\omega}{4\pi}E_0 = 0$$

Откуда получим:

$$U_0 = -\frac{a}{i\omega\rho}, \quad j_0 = -\frac{i\omega a_*}{4\pi\rho}\left[1 - \frac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho} + \frac{i\omega}{4\pi\sigma}\right]^{-1}, \quad E_0 = \frac{a_*}{\rho}\left[1 - \frac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho} + \frac{i\omega}{4\pi\sigma}\right]^{-1} \tag{15}$$

Общее решение системы (14) есть сумма решения (15) и общего решения однородной системы (14). При этом нас интересуют только решения, ограниченные в нуле. Относительно дифференциального оператора $\frac{d}{dr}$ система (14) является системой линейных уравнений с *переменными* коэффициентами, а относительно дифференциального оператора $\Delta = r^{-1}\,d/dr\,(r\,d/dr)$ она является линейной системой с *постоянными* коэффициентами. Поэтому её решения можно искать по той же схеме, которая используется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Так что *ищем решения однородной системы* (14) *в виде линейной комбинации собственных функций оператора* Δ, ограниченных в нуле.

Предварительно найдем собственные функции оператора Δ. Пусть $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$. Рассмотрим ограниченные в нуле решения уравнения

$$\Delta W = \lambda W$$

(это и есть искомые собственные функции). Последнее уравнение заменой независимой переменной $z=\sqrt{\lambda}r$ сводится к модифицированному уравнению Бесселя порядка 0:

$$\frac{d^2W}{dz^2}+z^{-1}\frac{dW}{dz}-W=0\,.$$

Откуда (учитывая ограниченность решения в нуле) $W(z)=RI_0(z)$, $R\in C$ и значит собственные функции оператора Δ, ограниченные в нуле, имеют вид:

$$W(r)=RI_0\left(\sqrt{\lambda}r\right),\ R\in C,\ 0\le r\le r_0,$$

где $I_0(z)$ - функция Бесселя мнимого аргумента индекса 0. Указанные собственные функции отвечают собственному значению $\lambda\neq 0$.

Теперь, подберем λ, R_1, R_2, R_3 $\in$ C так чтобы функции $U_z(r)=R_1I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$, $j_z(r)=R_2I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$, $E_z(r)=R_3I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$ являлись решением однородной системы (14). Подставляя указанные функции в однородную систему (14), получим для нахождения λ, R_1, R_2, R_3 систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(i\omega-\dfrac{\mu}{\rho}\lambda\right)R_1-\dfrac{\mu_*}{\rho^2}\lambda R_2=0\\ \dfrac{\mu_*}{\rho}\lambda R_1+\left(\dfrac{\mu^*\lambda}{\rho^2}-\dfrac{1}{\sigma}\right)R_2+\left(1-\dfrac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho}-\dfrac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\lambda\right)R_3=0\\ R_2+\left(\dfrac{i\omega}{4\pi}-\dfrac{c^2}{4\pi i\omega}\lambda\right)R_3=0\end{cases}\qquad(16)$$

Система (16), линейная по R_1, R_2, R_3, имеет нетривиальное решение $(R_1,\,R_2,\,R_3)\neq 0$ тогда и только тогда, когда её определитель равен 0. Это дает кубическое уравнение для нахождения λ:

$$\begin{aligned}&\lambda^3\left[\frac{\mu_+\mu_-\lambda_\Sigma^2}{\rho^3}\right]-\lambda^2\left[\frac{\mu}{\rho\sigma}+\frac{i\omega\lambda_\Sigma(\lambda_-\mu_++\lambda_+\mu_-)}{\rho^2}-\omega^2\frac{\mu_+\mu_-\lambda_\Sigma^2}{\rho^3c^2}\right]+\\ &\quad+i\omega\lambda\left[\frac{1}{\sigma}+\frac{4\pi\mu}{\rho c^2}+i\omega\left(\frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho}+\frac{\mu}{\rho\sigma c^2}\right)-\omega^2\frac{(\lambda_-\mu_++\lambda_+\mu_-)\lambda_\Sigma}{c^2\rho^2}\right]+\\ &\quad+\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho}+\frac{i\omega}{4\pi\sigma}\right)=0\end{aligned}\qquad(17)$$

Если λ – корень кубического уравнения (17), то вектор

$$\begin{bmatrix}\Phi(\lambda)\\ 1\\ \Psi(\lambda)\end{bmatrix},\qquad \Psi(\lambda)=\frac{4\pi i\omega}{c^2\lambda+\omega^2},\qquad \Phi(\lambda)=\frac{\mu_*\lambda}{\left(i\omega-\mu\rho^{-1}\lambda\right)\rho^2}\,.$$

лежит в пространстве решений системы (16). Поэтому, если λ_1, λ_2, λ_3– попарно различные корни кубического уравнения (17), то векторная функция

$$\begin{bmatrix} U_z(r) \\ j_z(r) \\ E_z(r) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \Phi(\lambda_1) \\ 1 \\ \Psi(\lambda_1) \end{bmatrix} I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + C_2 \begin{bmatrix} \Phi(\lambda_2) \\ 1 \\ \Psi(\lambda_2) \end{bmatrix} I_0\left(\sqrt{\lambda_2} r\right) + C_3 \begin{bmatrix} \Phi(\lambda_3) \\ 1 \\ \Psi(\lambda_3) \end{bmatrix} I_0\left(\sqrt{\lambda_3} r\right)$$

где $C_1, C_2, C_3 \in C$ – произвольные константы, является, очевидно, решением однородной системы (14), удовлетворяющим условиям ограниченности в нуле. Значит общее решение неоднородной системы (14), ограниченное в нуле, задается формулами:

$$U_z(r) = U_0 + \sum_{k=1}^{3} C_k \cdot \Phi(\lambda_k) I_0\left(\sqrt{\lambda_k} r\right),$$

$$j_z(r) = j_0 + \sum_{k=1}^{3} C_k \cdot I_0\left(\sqrt{\lambda_k} r\right), \tag{18}$$

$$E_z(r) = E_0 + \sum_{k=1}^{3} C_k \cdot \Psi(\lambda_k) I_0\left(\sqrt{\lambda_k} r\right),$$

где j_0, E_0, U_0 вычисляются по формулам (15). Константы C_1, C_2, C_3 ищутся из граничных условий прилипания (9) и заданного полного тока (10). Условия прилипания $U_z(r_0) = 0$, $j_z(r_0) = 0$ дают первые два уравнения на три константы C_1, C_2, C_3:

$$\sum_{k=1}^{3} C_k \cdot \Phi(\lambda_k) I_0\left(\sqrt{\lambda_k} r_0\right) = -U_0, \qquad \sum_{k=1}^{3} C_k \cdot I_o\left(\sqrt{\lambda_k} r_0\right) = -j_0. \tag{19}$$

Чтобы получить третье уравнение, предварительно вычислим (с учётом тождества $I_0'(z) = I_1(z)$, см. [9]):

$$H_\varphi(r) = \frac{c}{i\omega} \cdot \frac{dE_z}{dr} = \frac{c}{i\omega} \cdot \sum_{k=1}^{3} C_k \cdot \Psi(\lambda_k) \sqrt{\lambda_k} \cdot I_1\left(\sqrt{\lambda_k} r\right)$$

$$\int_0^{r_0} r E_z(r) dr = \int_0^{r_0} r E_0 dr + \sum_{k=1}^{3} C_k \Psi(\lambda_k) \cdot \int_0^{r_0} r I_0\left(\sqrt{\lambda_k} r\right) dr = \frac{r_0^2 E_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} \frac{C_k \cdot \Psi(\lambda_k) I_1\left(\sqrt{\lambda_k} r_0\right) r_0}{\sqrt{\lambda_k}}$$

где $I_1(z)$ - функция Бесселя мнимого аргумента индекса 1 и использовано тождество $\left(z I_1(z)\right)' = z I_0(z)$, см. [9]. Подставим эти выражения в четвертое уравнение системы (II), проинтегрированное от 0 до r_0:

$$\frac{2}{c r_0} J_{tot}(t) + \frac{1}{2\pi c r_0} \frac{d}{dt} \int_0^{r_0} 2\pi r E_z(t, r) dr = H_\varphi(t, r_0), \tag{20}$$

где надо положить $J_{tot}(t) = J(t) = J_0 \exp(i\omega t)$, $E_z(t, r) = E_z(r) \exp(i\omega t)$, $H_\varphi(t, r_0) = H_\varphi(r_0) \exp(i\omega t)$. Тем самым, в частности, задействовано граничное условие (10). С учетом предварительного вычисления и выражения для $\Psi(\lambda)$ приходим к третьему уравнению для нахождения C_1, C_2, C_3:

$$\sum_{k=1}^{3} C_k I_1\left(\sqrt{\lambda_k}\, r_0\right)\lambda_k^{-1/2} = \frac{J_0}{2\pi r_0} + \frac{i\omega r_0 E_0}{8\pi} \tag{21}$$

Найдя из системы (19), (21) трех линейных уравнений с тремя неизвестными константы C_1, C_2, C_3, получим, согласно (18), искомое распределение тока. Вот явные формулы:

$$j_z(r) = j_0 + \sum_{k=1}^{3} \tilde{C}_k \frac{I_0\left(\sqrt{\lambda_k}\, r\right)}{I_0\left(\sqrt{\lambda_k}\, r_0\right)}, \quad 0 \le r \le r_0 \tag{22}$$

$$\tilde{C}_1 = D^{-1}\left\{-U_0[L(3)-L(2)] + j_0[L(3)\Phi(\lambda_2) - L(2)\Phi(\lambda_3)] + \left(\frac{J_0}{2\pi r_0} + \frac{i\omega r_0 E_0}{8\pi}\right)(\Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_3))\right\},$$

$$\tilde{C}_2 = D^{-1}\left\{U_0[L(3)-L(1)] - j_0[L(3)\Phi(\lambda_1) - L(1)\Phi(\lambda_3)] - \left(\frac{J_0}{2\pi r_0} + \frac{i\omega r_0 E_0}{8\pi}\right)(\Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_3))\right\},$$

$$\tilde{C}_3 = D^{-1}\left\{U_0[L(1)-L(2)] + j_0[L(2)\Phi(\lambda_1) - L(1)\Phi(\lambda_2)] + \left(\frac{J_0}{2\pi r_0} + \frac{i\omega r_0 E_0}{8\pi}\right)(\Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_2))\right\},$$

$$D = L(1)(\Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_3)) + L(2)(\Phi(\lambda_3) - \Phi(\lambda_1)) + L(3)(\Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_2)),$$

где введено обозначение $L(k) = I_1\left(\sqrt{\lambda_k}\, r_0\right) I_0\left(\sqrt{\lambda_k}\, r_0\right)^{-1} \lambda_k^{-1/2}$, $1 \le k \le 3$.

Формула (22) значительно упрощается в чисто электродинамическом случае, когда отсутствует перепад гидродинамического давления по оси Z. Тогда $a = 0$, $a_* = 0$ и значит, согласно (15), $U_0 = 0$, $j_0 = 0$, $E_0 = 0$. Поэтому формула (22) приводит к такой формуле для распределения тока:

$$j_z(r) = \frac{J_0}{2\pi r_0} \cdot \left\{L(1)\left(i\omega - \mu\rho^{-1}\lambda_1\right)(\lambda_2 - \lambda_3) + L(2)\left(i\omega - \mu\rho^{-1}\lambda_2\right)(\lambda_3 - \lambda_1) + L(3)\left(i\omega - \mu\rho^{-1}\lambda_3\right)(\lambda_1 - \lambda_2)\right\}^{-1} \times$$

$$\times\left\{\frac{I_0\left(\sqrt{\lambda_1}\, r\right)}{I_0(1)}\left(i\omega - \mu\rho^{-1}\lambda_1\right)(\lambda_2 - \lambda_3) + \frac{I_0\left(\sqrt{\lambda_2}\, r\right)}{I_0(2)}\left(i\omega - \mu\rho^{-1}\lambda_2\right)(\lambda_3 - \lambda_1) + \frac{I_0\left(\sqrt{\lambda_3}\, r\right)}{I_0(3)}\left(i\omega - \mu\rho^{-1}\lambda_3\right)(\lambda_1 - \lambda_2)\right\}$$

где $I_0(k) = I_0\left(\sqrt{\lambda_k}\, r_0\right)$, $1 \le k \le 3$. Итак, получено решение поставленной задачи в случае, когда все корни кубического уравнения (17) простые.

§4. Общий случай вязкой плазмы: метод исключений

Если кубическое уравнение (17) имеет кратные корни, то однородную систему (14) нельзя решить изложенным выше способом. Применим в этом случае *метод исключений*. Исключая j_z из однородной системы (14) посредством третьего уравнения и ΔU_z из второго уравнения системы посредством первого уравнения. В результате получим следующие выражения для $U_z(r)$ и $j_z(r)$ через $E_z(r)$:

$$\begin{aligned} U_z(r) &= \alpha_0 E_z + \alpha_1 \Delta E_z + \alpha_2 \Delta^2 E_z, \\ j_z(r) &= \beta_0 E_z + \beta_1 \Delta E_z, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\alpha_0 = -\frac{\mu}{i\omega\mu_*}\left(1 - \frac{\lambda_+\lambda_-\omega^2}{4\pi\rho} + \frac{i\omega}{4\pi\sigma}\right), \qquad \alpha_1 = \frac{\mu}{i\omega\mu_*}\left(\frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho} + \frac{\mu_+\mu_-\lambda_\Sigma^2}{4\pi\rho^2\mu}i\omega + \frac{c^2}{4\pi i\omega\sigma}\right),$$

$$\alpha_2 = \frac{c^2\mu_+\mu_-\lambda_\Sigma^2}{4\pi\rho^2\omega^2\mu_*}, \qquad \beta_0 = -\frac{i\omega}{4\pi}, \qquad \beta_1 = \frac{c^2}{4\pi i\omega}.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение однородной системы (14), получим следующее уравнение на функцию $E_z(r)$:

$$A\Delta^3 E_z + B\Delta^2 E_z + C\Delta E_z + DE_z = 0,$$

где A, B, C, D совпадают с коэффициентами при степенях $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1$ кубического многочлена (17) соответственно. Поэтому, если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни (17) с учётом кратности, то уравнение на E_z можно переписать в операторном виде:

$$(\Delta - \lambda_1)(\Delta - \lambda_2)(\Delta - \lambda_3)E_z = 0, \tag{25}$$

причем операторные скобки коммутируют друг с другом. В силу соотношений (24), поиск ограниченных в нуле решений однородной системы (14) эквивалентен поиску решений уравнения (25), удовлетворяющих **условию ограниченности**: $E_z, \Delta E_z, \Delta^2 E_z$ *ограничены в нуле*. Практическое решение уравнения (25) основано на следующих результатах.

Теорема 1. *Пусть корни* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *попарно различны. Тогда:*

1) *шесть функций* $I_0\left(\sqrt{\lambda_s}r\right)$, $1 \le s \le 3$, $K_0\left(\sqrt{\lambda_s}r\right)$, $1 \le s \le 3$ *образуют базис в пространстве решений уравнения (25),*
2) *три функции* $I_0\left(\sqrt{\lambda_s}r\right)$, $1 \le s \le 3$ *образуют базис в подпространстве всех тех решений уравнения (25), которые удовлетворяют условию ограниченности.*

Теорема 2. *Пусть среди корней (17) один корень двукратный, а один – простой:* $\lambda_1 \ne \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$. *Тогда:*

1) *шесть функций* $I_0\left(\sqrt{\lambda_s}r\right)$, $s = 1{,}0$, $rI_1\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)$, $K_0\left(\sqrt{\lambda_s}r\right)$, $s = 1{,}0$, $rK_1\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)$ *образуют базис в пространстве решений уравнения (25),*
2) *три функции* $I_0\left(\sqrt{\lambda_1}r\right)$, $I_0\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)$, $rI_1\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)$, *образуют базис в подпространстве всех тех решений уравнения (25), которые удовлетворяют условию ограниченности.*

Теорема 3. *Пусть уравнение (17) имеет один трёхкратный корень* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$. *Тогда:*

1) *шесть функций* $r^s I_s\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)$, $0 \le s \le 2$, $r^s K_s\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)$, $0 \le s \le 2$ *образуют базис в пространстве решений уравнения (25),*
2) *три функции* $r^s I_s\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)$, $0 \le s \le 2$ *образуют базис в подпространстве всех тех решений уравнения (25), которые удовлетворяют условию ограниченности.*

В этих формулировках $K_s(z)$– функция Макдональда индекса s, а $I_s(z)$– функция Бесселя мнимого аргумента индекса s. Для нижеследующего важно, что функции $I_s(z), K_s(z)$ образуют базис в пространстве решений уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-\left(1+\frac{s^2}{z^2}\right)u=0,$$

в частности, они линейно независимы (см. [9]).

Теорема 1 даёт обоснование изложенному выше, в §3, способу решения системы (II) в случае простых корней. *Теоремы 2 и 3* позволяют указать практический способ нахождения решения системы (II) в случае кратных корней уравнения (17). Разберем для примера подробно случай, когда кубический многочлен (17) имеет один простой и один двукратный корни, обозначаемые λ_1 и λ_0 соответственно. Согласно *Теореме 2*, искомое решение уравнения (25) ищется в виде:

$$E_z(r)=C_1I_0\left(\sqrt{\lambda_1}r\right)+C_2I_0\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)+C_3rI_1\left(\sqrt{\lambda_0}r\right),\ C_1, C_2, C_3\in C \tag{26}$$

Подставляя это выражение в (24), находим $U_z(r)$, $j_z(r)$. Воспользуемся при этом технической леммой.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda\neq 0$, $\lambda\in C$*, тогда:*

1) $(\Delta-\lambda)\left(I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=(\Delta-\lambda)\left(K_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=0$,

2) $(\Delta-\lambda)\left(rI_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=2\sqrt{\lambda}I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$, $\quad(\Delta-\lambda)\left(rK_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=-2\sqrt{\lambda}K_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$,

3) $(\Delta-\lambda)^2\left(rI_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=(\Delta-\lambda)^2\left(rK_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=0$

4) $(\Delta-\lambda)\left(r^2I_2\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=4\sqrt{\lambda}rI_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)$, $\qquad(\Delta-\lambda)\left(r^2K_2\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=-4\sqrt{\lambda}rK_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)$.

Из *леммы 1*, в частности, следуют формулы:

$$\Delta\left(I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=\lambda I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right),\qquad \Delta^2\left(I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=\lambda^2I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right),$$

$$\Delta\left(rI_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=2\sqrt{\lambda}I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)+\lambda rI_1\left(\sqrt{\lambda}r\right),\qquad \Delta^2\left(rI_1\left(\sqrt{\lambda}r\right)\right)=4\lambda^{3/2}I_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)+\lambda^2rI_1\left(\sqrt{\lambda}r\right).$$

Используя эти преобразования, находим:

$$U_z(r)=C_1p(\lambda_1)I_0\left(\sqrt{\lambda_1}r\right)+C_2p(\lambda_0)I_0\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)+C_3\left[p(\lambda_0)rI_1\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)+2\sqrt{\lambda_0}p'(\lambda_0)I_0\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\right], \tag{27}$$

$$j_z(r)=C_1q(\lambda_1)I_0\left(\sqrt{\lambda_1}r\right)+C_2q(\lambda_0)I_0\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)+C_3\left[q(\lambda_0)rI_1\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)+2\sqrt{\lambda_0}q'(\lambda_0)I_0\left(\sqrt{\lambda_0}r\right)\right],$$

где

$$p(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2,\qquad q(\lambda)=\beta_0+\beta_1\lambda,$$

а коэффициенты α_i, β_j, $0\le i\le 2$, $0\le j\le 1$ вычисляются так же как и в формулах (24). Значит общее решение неоднородного уравнения (14) имеет вид:

$$U_z=U_0+U_z(r),\qquad j_z=j_0+j_z(r),\qquad E_z=E_0+E_z(r), \tag{28}$$

где $U_z(r)$, $j_z(r)$, $E_z(r)$ вычисляются по формулам (26), (27), а константы U_0, j_0, E_0 – по формулам (15). Константы C_1, C_2, C_3 ищутся из граничных условий.

Условия прилипания (9) дают $U_z(r_0) = -U_0$, $j_z(r_0) = -j_0$, откуда получаются два уравнения на искомые константы:

$$\begin{aligned} &C_1 p(\lambda_1) I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r_0\right) + C_2 p(\lambda_0) I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right) + C_3\left[p(\lambda_0) r_0 I_1\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right) + 2\sqrt{\lambda_0}\, p'(\lambda_0) I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right)\right] = -U_0, \\ &C_1 q(\lambda_1) I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r_0\right) + C_2 q(\lambda_0) I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right) + C_3\left[q(\lambda_0) r_0 I_1\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right) + 2\sqrt{\lambda_0}\, q'(\lambda_0) I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right)\right] = -j_0. \end{aligned} \qquad (29)$$

Третье уравнение получается из граничного условия (20), которое даёт:

$$\frac{2J_0}{cr_0} + \frac{i\omega}{cr_0} \int_0^{r_0} \left(rE_0 + rE_z(r)\right) dr = \frac{c}{i\omega} \frac{dE_z}{dr}(r_0)$$

Подставляя сюда выражение (26) для $E_z(r)$ после несложных преобразований приходим к третьему уравнению для C_1, C_2, C_3:

$$C_1 I_1\left(\sqrt{\lambda_1} r_0\right) \frac{c^2\lambda_1 + \omega^2}{i\omega\sqrt{\lambda_1}} + C_2 I_1\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right) \frac{c^2\lambda_0 + \omega^2}{i\omega\sqrt{\lambda_0}} + C_3\left[r_0 I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right) \frac{c^2\lambda_0 + \omega^2}{i\omega\sqrt{\lambda_0}} + 2I_1\left(\sqrt{\lambda_0} r_0\right) \frac{i\omega}{\lambda_0}\right] =$$
$$= \frac{2J_0}{r_0} + \frac{i\omega r_0 E_0}{2} \qquad (30)$$

Находя из системы трёх линейных уравнений (29), (30) константы C_1, C_2, C_3 (скажем, по правилу Крамера), по формулам (26), (27) – функции $U_z(r)$, $j_z(r)$, $E_z(r)$, получим по формулам (29) интересующее нас решение неоднородного уравнения (14). Детали легко восстанавливаются.

Теоремы 1-3 доказываются единообразным способом. Разберем для примера доказательство *Теоремы 2*. Заметим, что результаты этих теорем допускают следующее значительное обобщение.

Теорема 4. *Рассмотрим однородное уравнение:*

$$\Delta^n E + a_1 \Delta^{n-1} E + \ldots a_{n-1} \Delta E + a_n E = 0, \qquad a_i \in C, \qquad 1 \le i \le n, \qquad \Delta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *– корни характеристического многочлена*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

кратности $p_1, \ldots, p_m$ *(*$p_1 + \ldots + p_m = n$*) соответственно. Тогда:*

1) $2n$ *функций* $r^s I_s\left(\sqrt{\lambda_i} r\right)$, $r^s K_s\left(\sqrt{\lambda_i} r\right)$, $1 \le i \le m$, $0 \le s \le p_i - 1$ *образуют базис в пространстве решений однородного уравнения,*
2) n *функций* $r^s I_s\left(\sqrt{\lambda_i} r\right)$, $1 \le i \le m$, $0 \le s \le p_i - 1$ *образуют базис в подпространстве всех тех решений однородного уравнения, для которых функции* $E, \Delta E, \ldots \Delta^{n-1} E$ *ограничены в нуле.*

Доказательство Теоремы 2.

1) Из *Леммы 1* следует, что все перечисленные в первой части теоремы функции являются решениями однородного уравнения (25). Убедимся, что эти функции линейно независимы. Тогда из размерностных соображений будет следовать, что они образуют базис в пространстве всех решений

уравнения (25) (уравнение (25) – обыкновенное дифференциальное уравнение 6-го порядка, поэтому пространство его комплексных решений имеет размерность 6, значит любые шесть линейно независимых функций этого пространства образуют его базис).
Итак, пусть

$$C_1 I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + C_2 I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + C_3 r I_1\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + D_1 K_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + D_2 K_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + D_3 r K_1\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) \equiv 0 \quad (*)$$

Применяя к этому равенству оператор $(\Delta - \lambda_0)^2$, с учётом *Леммы 1*, получим:

$$C_1 (\Delta - \lambda_0)^2 I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + D_1 (\Delta - \lambda_0)^2 K_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) = 0$$

Но $(\Delta - \lambda_0)^2 = (\Delta - \lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_0)^2 = (\Delta - \lambda_1)^2 + 2(\Delta - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_0) + (\lambda_1 - \lambda_0)^2$. Поэтому из *Леммы 1* вытекает:

$$C_1 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + D_1 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 K_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) = 0$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_0$, а функции $I_0(z)$, $K_0(z)$ линейно независимы, отсюда вытекает $C_1 = D_1 = 0$. Учитывая последние равенства в (*) и применяя к (*) оператор $\Delta - \lambda_0$ с учётом *Леммы 1*, получим:

$$C_3 2\sqrt{\lambda_0} I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) - D_3 2\sqrt{\lambda_0} K_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) = 0$$

Из линейно независимости функций $I_0(z)$, $K_0(z)$ теперь следуют равенства $C_3 = D_3 = 0$. Но тогда равенство (*) сведётся к соотношению:

$$C_2 I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + D_2 K_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) = 0$$

Ещё раз используя независимость функций $I_0(z)$, $K_0(z)$, заключаем $C_2 = D_2 = 0$.
Итак, все коэффициенты линейной комбинации (*) равны нулю. Значит интересующие нас функции линейно независимы, ч.т.д.
2) Из предыдущего доказательства следует, что функции, перечисленные во второй части теоремы, линейно независимы, а из *Леммы 1* вытекает, что каждая из них (а значит и любая их линейная комбинация) удовлетворяют условию ограниченности (свойства $I_s(z)$, $K_s(z)$, см. в [9]). Осталось проверить, что любое решение $E(r)$ уравнения (25), удовлетворяющее условию ограниченности, является их линейной комбинацией. Согласно предыдущему доказательству, $E(r)$ разлагается в сумму:

$$E(r) = C_1 I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + C_2 I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + C_3 r I_1\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + D_1 K_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + D_2 K_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + D_3 r K_1\left(\sqrt{\lambda_0} r\right)$$

Поскольку $E(r)$ удовлетворяет условию ограниченности, то функции

$$(\Delta - \lambda_0) E = \Delta E - \lambda_0 E,$$

$$(\Delta - \lambda_0)^2 E = \Delta^2 E - 2\lambda_0 \Delta E + \lambda_0^2 E$$

ограничены в нуле. Но по *Лемме 1*:

$$(\Delta - \lambda_0)^2 E(r) = C_1 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + D_1 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 K_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right)$$

Т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_0$, то $D_1 = 0$ (ибо $K_0(z) \sim \ln\frac{2}{z}$, $z \to 0$, см. [9] и значит при $D_1 \neq 0$ функция $(\Delta - \lambda_0)^2 E$ заведомо не ограничена в нуле). Учитывая последнее равенство и применяя *Лемму 1*, получим:

$$(\Delta - \lambda_0)^2 E(r) = C_1(\lambda_1 - \lambda_0)^2 I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + 2\sqrt{\lambda_0} C_3 I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) - 2\sqrt{\lambda_0} D_3 K_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right)$$

Теперь из ограниченности в нуле функции $(\Delta - \lambda_0)E$ следует $D_3 = 0$. Но тогда

$$E(r) = C_1 I_0\left(\sqrt{\lambda_1} r\right) + C_2 I_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + C_3 r I_1\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) + D_2 K_0\left(\sqrt{\lambda_0} r\right)$$

Из ограниченности $E(r)$ в нуле теперь вытекает $D_2 = 0$. Итак $D_1 = D_2 = D_3 = 0$, откуда вытекает доказательство утверждения, ч.т.д. Теорема доказана.

Литература

1. H. Helmholtz, Uber electrishe Grenzschichten, Ann. d. Phys. u. Chem. 7, 1879, 337-382
2. И. С. Громека, К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах, Ученые записки Казанского ун-та, 1882. (Соб. соч. Изд. АНСССР, 1952, стр. 149-171)
3. P. Szymanski, Quelques solutions exactes des equations de l`hydrodynamique de fluide visqueux dans un tube cylinderique, Journ. de Mathem. 11, 1932, 67-107
4. А. И. Лурье, Операционное исчесление, ОНТИ, 1935, стр 205-209
5. П. Лямбоси, Вынужденные колебания несжимаемой вязкой жидкости в жёстком горизонтальной трубе, В сб. “Механика”, вып. 3, ИЛ, М., 1953, стр 67-77
6. Л. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа, “Наука”, М., 1978, стр. 400-403
7. Брагинский С. И., В сб. “Вопросы теории плазмы”. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1, М., Госатомиздат, 1963, с. 183
8. В. С. Имшенник, Н. А. Боброва, Динамика столкновительной плазмы, Энергоатомиздат, М., 1997., стр. 9 - 46 .
9. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, ГИТТЛ, М., 1953, стр. 148-151