Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Т. В. ДУДНИКОВА

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Препринт

Москва 2005

Аннотация

Т. В. Дудникова.[1] Стабилизация статистических решений волнового уравнения в четномерном пространстве.

Рассматриваются волновые уравнения в $\mathbb{R}^n$ с постоянными или переменными коэффициентами в случае четных $n \ge 4$. Начальные данные - случайная функция с конечной средней плотностью энергии, удовлетворяющая условию перемешивания типа Розенблатта или Ибрагимова - Линника. Предполагается, что начальная случайная функция сходится при $x_n \to \pm\infty$ к двум различным пространственно-инвариантным процессам с распределениями $\mu_\pm$. Изучается распределение μ_t случайного решения в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Основной результат - доказательство сходимости мер μ_t к гауссовой мере при $t \to \infty$.

Abstract

T. V. Dudnikova. Stabilization of Statistical Solutions to the Wave Equation in the Even-Dimensional Space.

Consider the wave equations in $\mathbb{R}^n$, with constant or variable coefficients for even $n \ge 4$. The initial datum is a random function with a finite mean density of energy that satisfies a Rosenblatt- or Ibragimov-Linnik-type mixing condition. It is assumed that the initial random function converges to two distinct space-homogeneous processes as $x_n \to \pm\infty$, with the distributions $\mu_\pm$. We study the distribution μ_t of the random solution at a time $t \in \mathbb{R}$. The main result is the convergence of μ_t to a Gaussian measure as $t \to \infty$.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (грант No 03-01-00189), ДФГ (грант No 436 RUS 113/615/0-1).

1. Введение

Рассматривается волновое уравнение в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 4$ и четное,

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} (\partial_j - iA_j(x))^2 u(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0(x). \end{cases} \tag{1-1}$$

Здесь $\partial_j \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $(A_1(x), \ldots, A_n(x))$ - потенциал магнитного поля. Решение $u(x,t)$ является комплекснозначной функцией.

Предполагается, что функции $A_j(x)$ в уравнении (1-1) удовлетворяют следующим условиям:

E1. $A_j(x)$ - действительнозначные функции класса C^∞.

E2. $A_j(x) = 0$ при $|x| > R_0$, где $R_0 < \infty$.

Обозначим $Y(t) = (Y^0(t), Y^1(t)) \equiv (u(\cdot,t), \dot{u}(\cdot,t))$, $Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0, v_0)$. Тогда уравнение (1-1) принимает вид

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}Y(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad Y(0) = Y_0. \tag{1-2}$$

Через $\mathcal{A}$ обозначается операторнозначная матрица

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j - iA_j(x))^2. \tag{1-3}$$

Мы предполагаем, что начальные данные Y_0 - случайный элемент функционального пространства $\mathcal{H}$ состояний с конечной локальной энергией, см. определение 2.1 ниже. Распределение Y_0 обозначается через μ_0.

Мы отождествляем комплексное и действительное пространства $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, и через $\otimes$ обозначаем тензорное произведение действительных векторов.

Предполагается, что мера μ_0 обладает нулевым средним, и начальная корреляционная матрица $(Q_0^{ij}(x,y))_{i,j=0,1}$, т.е.

$$Q_0^{ij}(x,y) := \int (Y^i(x) \otimes Y^j(y))\, \mu_0(dY), \quad i,j = 0,1,$$

имеет вид

$$Q_0^{ij}(x,y) = \begin{cases} q_-^{ij}(x-y), & x_n, y_n < -a, \\ q_+^{ij}(x-y), & x_n, y_n > a. \end{cases} \tag{1-4}$$

Здесь $q_{\pm}^{ij}(x-y)$ - корреляционные функции некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_{\pm}$ с нулевым средним значением, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, и $a > 0$. Мера μ_0 не является трансляционно-инвариантной, если $q_-^{ij} \neq q_+^{ij}$. Кроме того предполагается, что начальная мера μ_0 обладает конечной средней плотностью энергии,

$$\begin{aligned} e_0(x) &:= E[|u_0(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2] \\ &= \operatorname{tr}\left(Q_0^{00}(x,x) + \nabla_x \cdot \nabla_y Q_0^{00}(x,y)|_{y=x} + Q_0^{11}(x,x)\right) \le e_0 < \infty. \quad (1\text{-}5) \end{aligned}$$

Наконец предполагается, что начальная мера μ_0 удовлетворяет условию перемешивания типа Розенблатта или Ибрагимова-Линника, которое означает, грубо говоря, что

$$Y_0(x) \text{ и } Y_0(y) \text{ являются асимптотически независимыми} \quad (1\text{-}6)$$

при $|x-y| \to \infty$.

Обозначим через $\mu_t(dY)$, $t \in \mathbb{R}$, меру на $\mathcal{H}$, которая является распределением случайного решения $Y(t)$ задачи (1-1).

Основная цель статьи - доказать слабую сходимость мер μ_t,

$$\mu_t \to \mu_\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad (1\text{-}7)$$

к предельной мере μ_∞, которая является трансляционно-инвариантной гауссовской мерой. По определению, это означает сходимость

$$\int f(Y)\mu_t(dY) \to \int f(Y)\mu_\infty(dY) \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

для любого ограниченного непрерывного функционала $f(Y)$ на соответствующем пространстве.

Доказательство сходимости (1-7) мы проводим сначала для случая постоянных коэффициентов. Мы разбиваем доказательство на три этапа, используя общую стратегию [1]-[4].

I. Семейство мер μ_t, $t \ge 0$, является слабо компактным в подходящем пространстве Фреше.

II. Корреляционные матрицы сходятся к пределу: для $i, j = 0, 1$,

$$Q_t^{ij}(x,y) = \int (Y^i(x) \otimes Y^j(y))\mu_t(dY) \to Q_\infty^{ij}(x,y), \quad t \to \infty. \quad (1\text{-}8)$$

III. Характеристические функционалы сходятся к гауссовскому:

$$\hat{\mu}_t(\Psi) := \int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\mu_t(dY) \to \exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\}, \quad t \to \infty, \quad (1\text{-}9)$$

где Ψ - произвольный элемент двойственного пространства, и $\mathcal{Q}_\infty$ - квадратичная форма с интегральным ядром $(Q^{ij}_\infty(x,y))_{i,j=0,1}$; через $\langle Y,\Psi\rangle$ обозначается скалярное произведение в действительном гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{R}^N$.

Свойство **I** следует из теоремы Прохорова о компактности с использованием методов М.И. Вишика и А.В. Фурсикова, разработанных ими для задач статистической гидромеханики в [9]. Сначала доказывается равномерная оценка для средней локальной энергии по мере μ_t. Мы выводим эту оценку из явного выражения для корреляционных матриц $Q^{ij}_t(x,y)$. Из нее следует выполнение условий теоремы Прохорова по теореме вложения Соболева. Свойство **II** также выводится из явного выражения для корреляционных матриц $Q^{ij}_t(x,y)$, как и в [3] для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Отметим различия в доказательствах в случае четной и нечетной размерности пространства $\mathbb{R}^n$. В случае нечетного n формула Герглотца - Петровского позволяет выразить корреляционные функции $Q^{ij}_t(x,y)$ через интегралы по сферам радиуса t. В пределе при $t\to\infty$ сферы становятся плоскостями. Поэтому доказательства свойств **I** и **II** в случае нечетного n проводятся в координатном пространстве (см. [3]). В случае четного n корреляционные функции $Q^{ij}_t(x,y)$ выражаются через интегралы по шару радиуса t. Поэтому метод доказательства из [3] уже не работает. Мы доказываем свойства **I** и **II** в пространстве Фурье, используя метод из [1, 4, 5].

Наконец, для доказательства свойства **III** используется вариант метода “комнат-коридоров” С.Н. Бернштейна из [2, 3, 6].

В заключение, мы распространяем сходимость (1-7) на уравнения с переменными коэффициентами, которые являются постоянными вне конечной области. Это обобщение вытекает из результата для постоянных коэффициентов с использованием теории рассеяния для решений с бесконечной энергией, которая построена в [6].

Для уравнения (1-1) сходимость (1-7) была доказана в [6] в случае трансляционно-инвариантных начальных мер μ_0. Для нетрансляционно-инвариантных мер μ_0 сходимость (1-7) была доказана для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ в [3], для уравнения Клейна-Гордона в [5] и для гармонического кристалла в [4]. Здесь мы обобщаем эти работы на случай волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$, где $n\ge 4$ и четно.

2. Основные результаты

Предполагается, что начальные данные Y_0 принадлежат комплексному фазовому пространству $\mathcal{H}$.

Определение 2.1. $\mathcal{H} \equiv H^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \oplus H^0_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *- пространство Фреше пар* $Y \equiv (u(x), v(x))$ *комплексных функций* $u(x)$, $v(x)$ *с локальными энергетическими полунормами*

$$\|Y\|_R^2 = \int\limits_{|x|<R} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 + |v(x)|^2)dx < \infty, \quad \forall R > 0.$$

Следующее предложение 2.2 вытекает из [7, теоремы V.3.1, V.3.2].

Предложение 2.2. *i) Для любого* $Y_0 \in \mathcal{H}$ *существует единственное решение* $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *задачи Коши (1-2).*
ii) Для любого $t \in \mathbb{R}$ *оператор* $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ *непрерывен на* $\mathcal{H}$, *и справедливы следующие энергетические оценки:* $\forall R > 0$

$$\|U(t)Y_0\|_R \leq C(t)\|Y_0\|_{R+|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2-1}$$

Выберем функцию $\zeta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\zeta(0) \neq 0$. Обозначим через $H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, локальные пространства Соболева, то есть пространства Фреше распределений $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ с конечными полунормами

$$\|u\|_{s,R} := \|\Lambda^s(\zeta(x/R)u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

где $\Lambda^s v := F^{-1}_{k\to x}(\langle k\rangle^s \hat{v}(k))$, $\langle k\rangle := \sqrt{|k|^2+1}$, и $\hat{v} := Fv$ - преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста v. Для $\psi \in D \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ определим $F\psi(k) = \int e^{ik\cdot x}\psi(x)dx$.

Для $s \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{H}^s \equiv H^{1+s}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n) \oplus H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-\varepsilon}$ для каждого $\varepsilon > 0$, и это вложение - компактно.

2.1. Случайное решение. Сходимость к равновесию

Мы предполагаем, что $Y_0 = Y_0(\omega, x)$ в (1-2) - измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Тогда $Y(t) = U(t)Y_0$ - также измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ в силу предложения 2.2. Обозначим через $\mu_0(dY_0)$ борелевскую вероятностную меру на $\mathcal{H}$, которая является распределением Y_0.

Определение 2.3. μ_t *- борелевская вероятностная мера на* $\mathcal{H}$*, которая является распределением* $Y(t)$*:*

$$\mu_t(B) = \mu_0(U(-t)B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Наша основная цель - доказать слабую сходимость μ_t в пространстве Фреше $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$:

$$\mu_t \xrightarrow{\mathcal{H}^{-\varepsilon}} \mu_\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{2-2}$$

где μ_∞ - некоторая борелевская вероятностная мера на пространстве $\mathcal{H}$.

Напомним, что мы отождествляем $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Обозначим $M^2 = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$.

Определение 2.4. *Определим корреляционные функции меры* μ_t *как* M^2*-значные обобщенные функции*

$$Q_t^{ij}(x,y) := E(Y^i(x,t) \otimes Y^j(y,t)), \quad i,j = 0,1, \quad x,y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{2-3}$$

где E *обозначает интеграл по мере* $\mu_0(dY)$*, а сходимость этого интеграла понимается в смысле обобщенных функций, т.е.*

$$\langle Q_t^{ij}(x,y), \Psi(x,y)\rangle := E\langle Y^i(x,t) \otimes Y^j(y,t), \Psi(x,y)\rangle, \quad \Psi \in S(\mathbb{R}^{2n}). \tag{2-4}$$

Для борелевской вероятностной меры μ через $\hat{\mu}$ обозначим её характеристический функционал (преобразование Фурье)

$$\hat{\mu}(\Psi) \equiv \int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\, \mu(dY), \quad \Psi \in \mathcal{S},$$

где $\mathcal{S} = S \oplus S$, и через $S = S(\mathbb{R}^n)$ обозначается пространство Шварца.

2.2. Условие перемешивания

Через $O(r)$ обозначим множество всех пар открытых ограниченных подмножеств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ с расстоянием $\operatorname{dist}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq r$, и через $\sigma(\mathcal{A})$ - σ-алгебру в $\mathcal{H}$, порожденную линейными функционалами $Y \mapsto \langle Y, \Psi\rangle$, где $\Psi \in \mathcal{D} \equiv D \oplus D$ с $\operatorname{supp}\Psi \subset \mathcal{A}$.

Определим коэффициент перемешивания Ибрагимова - Линника вероятностной меры μ_0 на $\mathcal{H}$ следующим образом (ср. с определением 17.2.2 из [8, с.391])

$$\varphi(r) \equiv \sup_{(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in O(r)} \ \sup_{\substack{A \in \sigma(\mathcal{A}),\, B \in \sigma(\mathcal{B}) \\ \mu_0(B) > 0}} \frac{|\mu_0(A \cap B) - \mu_0(A)\mu_0(B)|}{\mu_0(B)}.$$

Определение 2.5. *Мера* μ_0 *удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова-Линника, если*

$$\varphi(r) \to 0, \quad r \to \infty. \tag{2-5}$$

Ниже мы уточним скорость убывания φ (см. условие **S3**).

2.3. Основная теорема

Предполагаем, что начальная мера μ_0 удовлетворяет следующим условиям **S0**-**S3**:

S0 μ_0 имеет нулевое математическое ожидание, $EY_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

S1 μ_0 имеет корреляционные матрицы вида

$$Q_0^{ij}(x,y) = q_-^{ij}(x-y)\zeta_-(x_n)\zeta_-(y_n) + q_+^{ij}(x-y)\zeta_+(x_n)\zeta_+(y_n). \tag{2-6}$$

Здесь функции $\zeta_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ такие, что

$$\zeta_\pm(s) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad \pm s > a, \\ 0, & \text{при} \quad \pm s < -a, \end{cases} \tag{2-7}$$

где $q_\pm^{ij}(x-y)$ - корреляционные функции некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_\pm$ с нулевым средним значением, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, и $a > 0$.

S2 μ_0 имеет ограниченную среднюю плотность энергии, т.е. выполнено условие (1-5).

S3 Мера μ_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова - Линника, причем

$$\int_0^\infty r^{n-1}\varphi^{n/(2(n+2))}(r)dr < \infty. \tag{2-8}$$

Прежде чем сформулировать основной результат, введем сначала корреляционную матрицу предельной меры в случае постоянных коэффициентов. Обозначим через $\mathcal{E}(x)$ фундаментальное решение оператора Лапласа Δ, $\mathcal{E}(x) = C_n|x|^{n-2}$, $n > 2$, и пусть $\mathcal{P}(x) := -iF^{-1}\dfrac{\operatorname{sgn} k_n}{|k|}$, где через F^{-1} обозначается обратное преобразование Фурье. Определим для почти всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ матричнозначную функцию следующим образом

$$Q_\infty(x,y) = \left(Q_\infty^{ij}(x,y)\right)_{i,j=0,1} = \left(q_\infty^{ij}(x-y)\right)_{i,j=0,1}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2-9}$$

где

$$q_\infty^{00} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{q}^+)^{00} - \mathcal{E} * (\mathbf{q}^+)^{11} + \mathcal{P} * ((\mathbf{q}^-)^{01} - (\mathbf{q}^-)^{10})\right], \quad (2\text{-}10)$$

$$q_\infty^{10} = \ -q_\infty^{01} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{q}^+)^{10} - (\mathbf{q}^+)^{01} \quad + \mathcal{P} * ((\mathbf{q}^-)^{11} - \Delta(\mathbf{q}^-)^{00})\right], \quad (2\text{-}11)$$

$$q_\infty^{11} = -\Delta q_\infty^{00} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{q}^+)^{11} - \Delta(\mathbf{q}^+)^{00} + \mathcal{P} * \Delta((\mathbf{q}^-)^{10} - (\mathbf{q}^-)^{01})\right]. \quad (2\text{-}12)$$

Здесь $\mathbf{q}^+ := \frac{1}{2}(q_+ + q_-)$, $\mathbf{q}^- := \frac{1}{2}(q_+ - q_-)$, и $*$ обозначает свертку обобщенных функций. Свертки $\mathcal{E} * \mathbf{q}^\pm$ и $\mathcal{P} * \mathbf{q}^\pm$ определены в силу предложения 4.1.

Формулы (2-9), (2-10)–(2-12) могут быть переписаны в виде

$$\hat{q}_\infty(k) := \hat{q}_\infty^+(k) + \hat{q}_\infty^-(k), \quad (2\text{-}13)$$

где

$$\hat{q}_\infty^+(k) \ := \ \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{q}}^+(k) + \hat{C}(k)\hat{\mathbf{q}}^+(k)\hat{C}^T(k)), \quad (2\text{-}14)$$

$$\hat{q}_\infty^-(k) \ := \ i\,\mathrm{sgn}(k_n)\frac{1}{2}(\hat{C}(k)\hat{\mathbf{q}}^-(k) - \hat{\mathbf{q}}^-(k)\hat{C}^T(k)) \quad (2\text{-}15)$$

с матрицей $\hat{C}(k)$ вида

$$\hat{C}(k) = \begin{pmatrix} 0 & |k|^{-1} \\ -|k| & 0 \end{pmatrix}. \quad (2\text{-}16)$$

Пусть H_0 обозначает пространство комплекснозначных функций $\Psi = (\Psi^0, \Psi^1)$ с конечной нормой

$$\|\Psi\|_{H_0}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\Psi^0(x)|^2 + |\nabla\Psi^1(x)|^2)\, dx < \infty. \quad (2\text{-}17)$$

Обозначим через $\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)$ действительную квадратичную форму на пространстве $\mathcal{S}$, определенную следующим образом

$$\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi) = \sum_{i,j=0,1} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (Q_\infty^{ij}(x,y)\Psi^i(x) \otimes \Psi^j(y))\, dxdy,$$

где $Q_\infty^{ij}(x,y)$ определены в (2-9)-(2-12), $(\cdot,\cdot)$ обозначает действительное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Форма $\mathcal{Q}_\infty$ непрерывна на S в силу следствия 4.3.

Теорема 2.6. *Пусть* $n \geq 4$, *четное и выполнены условия* **E1–E2** *и* **S0–S3**. *Тогда*
i) сходимость (2-2) справедлива для любого $\varepsilon > 0$.
ii) Предельная мера μ_∞ *- гауссовская на* $\mathcal{H}$.
iii) Предельный характеристический функционал имеет вид

$$\hat{\mu}_\infty(\Psi) = \exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi, W\Psi)\},\ \ \Psi \in \Pi,$$

где Π *- плотно в* H_0, $W: H_0 \to H_0$ *- изоморфизм, и* $W\Pi \subset \mathcal{D}$.

3. Волновое уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим волновое уравнение с постоянными коэффициентами ($A_j(x) \equiv 0$),

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,t) = \Delta u(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & \dot{u}|_{t=0} = v_0(x). \end{cases} \tag{3-1}$$

Как и в (1-1), перепишем (3-1) в виде

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}_0 Y(t),\ \ t \in \mathbb{R};\ \ Y(0) = Y_0. \tag{3-2}$$

Здесь

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}. \tag{3-3}$$

Обозначим через $U_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, динамическую группу задачи (3-2). Тогда $Y(t) = U_0(t)Y_0$.

Обозначим $\mu_t(B) = \mu_0(U_0(-t)B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \in \mathbb{R}$. Сформулируем основной результат для задачи (3-2).

Теорема 3.1. *Пусть* $n \geq 4$ *и четное, и выполнены условия* **S0-S3**. *Тогда справедливы утверждения теоремы 2.6 с* $W = I$, *и предельная мера* μ_∞ *трансляционно-инвариантна.*

Эта теорема может быть выведена из предложений 3.2 и 3.3, используя те же самые рассуждения, как в [9, теорема XII.5.2].

Предложение 3.2. *Семейство мер* $\{\mu_t, t \in \mathbb{R}\}$ *слабо компактно на* $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$ *с любым* $\varepsilon > 0$, *и справедливы оценки*

$$\sup_{t \geq 0} E\|U_0(t)Y_0\|_R^2 < \infty,\ \ R > 0.$$

Предложение 3.3. *Пусть выполнены условия* **E1**-**E2** *и* **S0**-**S3**. *Тогда для любого* $\Psi \in \mathcal{S}$,

$$\hat{\mu}_t(\Psi) \equiv \int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\, \mu_t(dY) \to \exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)\}, \quad t \to \infty. \tag{3-4}$$

4. Оценки для начальной ковариации

4.1. Перемешивание в терминах спектральной плотности

Следующее предложение выражает условие перемешивания в терминах преобразования Фурье $\hat{q}_\pm^{ij}$ начальных корреляционных функций $q_\pm^{ij}$. Из условия **S2** следует, что $q_\pm^{ij}(z)$ - непрерывные ограниченные функции. Поэтому $Q_0^{ij}(x,y)$ в (2-6) также являются непрерывными ограниченными функциями.

Предложение 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда*
i) при $i,j = 0,1$ *имеют место следующие оценки*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q_0^{ij}(x,y)|\, dy \le C < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q_0^{ij}(x,y)|\, dx \le C < \infty, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

где константа C *не зависит от* $x, y \in \mathbb{R}^n$.
ii) $\hat{q}_\pm^{ij} \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$, $i,j = 0,1$.
iii) $|k|^l \hat{q}_\pm^{ij} \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$, $-i-j \le l \le 2-i-j$.

Доказательство. *i)* Из условий **S0**, **S2** и **S3** по теореме 17.2.3 из [8, с.392] вытекает, что при $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| \le 1-i$ и $|\beta| \le 1-j$ с $i,j = 0,1$ справедливы следующие оценки:

$$|D_{x,y}^{\alpha,\beta} Q_0^{ij}(x,y)| \le Ce_0 \varphi^{1/2}(|x-y|), \quad x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{4-1}$$

Из оценок (4-1) и (2-8) следует, что для $p \ge n/(n+2)$ справедливы следующие оценки:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |D_{x,y}^{\alpha,\beta} Q_0^{ij}(x,y)|^p\, dy \le C_1 e_0^p \int\limits_0^\infty r^{n-1} \varphi^{p/2}(r) dr < \infty. \tag{4-2}$$

ii) Аналогично (4-1), для $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ с $|\gamma| \le 2-i-j$, $i,j = 0,1$, имеем

$$|D_z^\gamma q_\pm^{ij}(z)| \le Ce_0 \varphi^{1/2}(|z|), \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{4-3}$$

Поэтому в силу (2-8) получаем, что для $p \geq n/(n+2)$ (ср. с (4-2))

$$D^\gamma q_\pm^{ij}(z) \ \in \ L^p(\mathbb{R}^n) \otimes M^2. \tag{4-4}$$

Но по теореме Бохнера распределение $\hat{q}_\pm \equiv (\hat{q}_\pm^{ij}(k))dk$ является положительно-определенной матричнозначной мерой на $\mathbb{R}^n$, причем из условия **S2** вытекает, что полная мера $\hat{q}_\pm(\mathbb{R}^n)$ конечна. Наконец, из (4-4) при $p=2$ следует, что $\hat{q}_\pm^{ij} \in L^2(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$.

iii) Аналогично пункту *ii)*, из оценки (4-4) и теоремы Бохнера следует, что $|k|^{2-i-j}\hat{q}_\pm^{ij}(k) \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$, $i,j = 0,1$. Следовательно, из пункта *ii)* и (4-4) вытекают требуемые оценки. □

Следствие 4.2. *i) Из пункта i) предложения 4.1 в силу леммы Шура следует, что квадратичная форма* $\mathcal{Q}_0(\Psi,\Psi) = \langle Q_0(x,y), \Psi(x) \otimes \Psi(y)\rangle$ *непрерывна на* $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^2$.
ii) Применяя формулу (2-16) для матрицы $\hat{C}(k)$, *получаем*

$$\hat{C}(k)\hat{q}_\pm(k)\hat{C}^T(k), \ \ \hat{C}(k)\hat{q}_\pm(k), \ \ \hat{q}_\pm(k)\hat{C}^T(k) \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^4. \tag{4-5}$$

Поэтому, из (2-13)-(2-15) вытекает, что $\hat{q}_\infty^{ij} \in L^1(\mathbb{R}^n) \otimes M^2$, $\forall i,j$.

Следствие 4.3. *Квадратичная форма* $\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)$ *непрерывна на* $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^2$.

4.2. Разложение начальной ковариации

Из свойств (2-7) функций $\alpha_\pm$ вытекает следующая лемма.

Лемма 4.4. *Преобразования Фурье функций* $\zeta_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ *допускают следующие представления:*

$$\hat{\zeta}_\pm(k) = \pi\delta(k) \pm i\,\mathrm{PV}(\frac{1}{k})\hat{\alpha}_\pm(k), \tag{4-6}$$

где $\alpha_\pm \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Из условий **S1** и **S2** следует, что $Q_0(x,y)$ - непрерывные ограниченные функции. Следовательно, они принадлежат пространству умеренных распределений Шварца так же, как их преобразования Фурье. Применим преобразование Фурье к функции $Q_0(x,y)$:

$$\hat{Q}_0(k,k') := F_{\substack{x \to k \\ y \to -k'}} \ Q_0(x,y), \quad k,k' \in \mathbb{R}^n. \tag{4-7}$$

Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 4.5. *Пусть выполнены условия* **S0-S3**. *Тогда*

$$\hat{Q}_0(k,k') = \hat{Q}_0^1(k,k') + \hat{Q}_0^2(k,k') + \hat{Q}_0^3(k,k'), \tag{4-8}$$

где слагаемые допускают следующие представления:

$$\hat{Q}_0^1(k,k') = \delta(k-k')\ (2\pi)^n \frac{1}{4}(\hat{q}_+(k) + \hat{q}_-(k)), \tag{4-9}$$

$$\hat{Q}_0^2(k,k') = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(2\pi)^{n-2} \sum_{\pm} \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\alpha}_\pm(k_n-\xi)}{k_n-\xi} \frac{\overline{\hat{\alpha}_\pm}(k'_n-\xi)}{k'_n-\xi} \hat{q}_\pm(\mathbf{k},\xi)d\xi, \tag{4-10}$$

$$\hat{Q}_0^3(k,k') = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\ (2\pi)^{n-2}\pi i\ \mathrm{PV}(\frac{1}{k_n-k'_n})[\hat{q}_+(k)\overline{\hat{\alpha}_+}(k'_n-k_n)$$
$$+\hat{q}_+(k')\hat{\alpha}_+(k_n-k'_n)-\hat{q}_-(k)\overline{\hat{\alpha}_-}(k'_n-k_n)-\hat{q}_-(k')\hat{\alpha}_-(k_n-k'_n)]. \tag{4-11}$$

Здесь и ниже для краткости обозначаем $k = (\mathbf{k}, k_n)$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_{n-1})$.

Доказательство. Применяя равенство $\widehat{fg} = (2\pi)^{-2n}\hat{f} * \hat{g}$ для умеренных распределений в $\mathbb{R}^{2n}$, получаем из (2-6), формально,

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_0(k,k') &:= F_{\substack{x\to k\\ y\to -k'}} [\sum_{\pm} \zeta_\pm(x_n)\zeta_\pm(y_n)q_\pm(x-y)] \\
&= (2\pi)^{-2n}\sum_{\pm}(F_{x\to k}(\zeta_\pm(x_n))\overline{F_{y\to k'}(\zeta_\pm(y_n))}) * (2\pi)^n\hat{q}_\pm(k)\delta(k-k') \\
&= (2\pi)^{n-2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\sum_{\pm}\int_{\mathbb{R}}[\hat{\zeta}_\pm(k_n-\xi)\overline{\hat{\zeta}_\pm}(k'_n-\xi)\hat{q}_\pm(\mathbf{k},\xi)]\,d\xi,
\end{aligned} \tag{4-12}$$

где $*$ обозначает свертку по k и k'. Она существует в смысле умеренных распределений, так как распределение $\hat{\zeta}_\pm(\xi)$ - гладкая функция при $\xi \neq 0$ и быстро убывает при $|\xi| \to \infty$, а $\hat{q}_\pm$ - ограниченные непрерывные функции. Последний интеграл существует по тем же причинам, как предел римановских интегральных сумм по ξ со значениями в умеренных распределениях от (k,k'). Подставляя (4-6) в (4-12), получаем

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_0(k,k') &= (2\pi)^{n-2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\sum_{\pm}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^1}\hat{q}_\pm(\mathbf{k},\xi)[\pi\delta(k_n-\xi) \pm i\,\frac{\hat{\alpha}_\pm(k_n-\xi)}{k_n-\xi}] \\
&\quad [\pi\delta(k'_n-\xi) \mp i\,\frac{\overline{\hat{\alpha}_\pm}(k'_n-\xi)}{k'_n-\xi}]\,d\xi.
\end{aligned} \tag{4-13}$$

Наконец, из (4-13) вытекают формулы (4-8) - (4-11). □

5. Равномерные оценки и сходимость ковариации

В этом параграфе мы докажем равномерную оценку и сходимость (1-8) для ковариации $Q_t(x,y)$ меры μ_t (см. определение 2.4) в случае постоянных коэффициентов. Обозначим

$$\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi) := \langle Q_t(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle, \quad \Psi\in\mathcal{S}. \tag{5-1}$$

Введем подпространство пробных функций $\mathcal{S}_0\subset\mathcal{S}$:

$$\begin{gathered}\mathcal{S}_0 = \cup_N \mathcal{S}_N,\\ \mathcal{S}_N := \{\Psi\in\mathcal{S}: \hat{\Psi}(k)=0 \text{ при } |k|\geq N \text{ или } |k_n|\leq 1/N\}.\end{gathered} \tag{5-2}$$

Лемма 5.1. *Пусть* $\lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)=\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)$ *для любых* $\Psi\in\mathcal{S}_0$. *Тогда та же сходимость выполняется и для всех* $\Psi\in\mathcal{S}$.

Доказательство. Во-первых, из (9-1) следует, что

$$\langle Y(x,t),\Psi(x)\rangle = \langle Y_0(x),\Phi(x,t)\rangle,$$

где $\Phi(\cdot,t)=F^{-1}[\hat{\mathcal{G}}_t^*(k)\hat{\Psi}(k)]$. Поэтому, $\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)=\mathcal{Q}_0(\Phi(\cdot,t),\Phi(\cdot,t))$. Следовательно,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)|\leq C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\Phi(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \tag{5-3}$$

в силу пункта *i)* следствия 4.2. Обозначим через $\mathcal{S}_V$ пространство $\mathcal{S}$ с нормой

$$\|\Psi\|_V=\int(|\hat{\Psi}^0(k)|^2+|k|^{-2}|\hat{\Psi}^0(k)|^2+(|k|^2+1)|\hat{\Psi}^1(k)|^2)\,dk.$$

Применяя равенство Парсеваля и формулы (2-16), (9-4), получаем:

$$\|\Phi(\cdot,t)\|_{L^2}^2=(2\pi)^{-n}\int|\hat{\mathcal{G}}_t^*(k)\hat{\Psi}(k)|^2\,dk\leq C\|\Psi\|_V^2. \tag{5-4}$$

Для любой функции $\Psi\in\mathcal{S}$ можно подобрать такую функцию $\Psi_N\in\mathcal{S}_N$, что

$$\hat{\Psi}_N(k)=\begin{cases}\hat{\Psi}(k), & \text{если} \quad |k|\leq N/2 \quad \text{и} \quad |k_n|\geq 2/N,\\ 0, & \text{если} \quad |k|\geq N \quad \text{или} \quad |k_n|\leq 1/N,\end{cases}$$

и, кроме того,

$$\|\Psi_N-\Psi\|_V^2\to 0,\ \ N\to\infty. \tag{5-5}$$

Поэтому данная лемма вытекает из (5-3) - (5-5) и следствия 4.3. $\square$

Предложение 5.2. *Пусть выполнены условия* **S0-S3**. *Тогда*
i) функция $Q_t(x,y)$ *непрерывна и*

$$\sup_{t\geq 1}\sup_{x\in B_R}|Q_t(x,x)|<\infty, \quad R>0. \tag{5-6}$$

ii) Корреляционные функции сходятся в смысле распределений, т.е.

$$\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)\to\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi), \;\; t\to\infty, \;\; \Psi\in\mathcal{S}. \tag{5-7}$$

Доказательство. Так как решение $Y(t)$ задачи Коши (3-1) имеет вид $Y(t)=(\mathcal{G}_t(\cdot)*Y_0)(x)$, то $Q_t(x,y)$ допускает представление в виде свертки

$$Q_t(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}(\mathcal{G}_t(x-x')Q_0(x',y')\mathcal{G}_t^T(y-y'))\,dx'dy',$$

существование которой доказывается через преобразование Фурье.

Действительно, применим преобразование Фурье к матрице $Q_t(x,y)$:

$$\hat Q_t(k,k'):=F_{\substack{x\to k\\ y\to -k'}}\;Q_t(x,y)=\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat Q_0(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(-k'), \;\; k,k'\in\mathbb{R}^n,$$

где матрица $\hat{\mathcal{G}}_t(k)$ определена в (9-4), а $\hat Q_0(k,k')$ - в (4-7). Используя четность $\hat{\mathcal{G}}_t^T(-k')=\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')$ и разложение (4-8), разобьем $Q_t(x,y)$ на три слагаемых: $Q_t(x,y)=Q_t^1(x,y)+Q_t^2(x,y)+Q_t^3(x,y)$, где

$$Q_t^j(x,y):=(2\pi)^{-2n}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-ikx+ik'y}\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat Q_0^j(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')\,dkdk', \;\; x,y\in\mathbb{R}^n, \tag{5-8}$$

$t>0$, $j=1,2,3$. Теперь для доказательства предложения 5.2 достаточно проверить оценку (5-6) и сходимость к пределу (5-7) для каждого слагаемого $Q_t^j(x,y)$ с $j=1,2,3$. Мы сделаем это в леммах 5.3, 5.4 и 5.8, приведенных ниже.

Лемма 5.3. *i) Функция* $Q_t^1(x,y)$ *непрерывна и*

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}Q_t^1(x,x)\leq C<\infty.$$

ii) Для любых $x,y\in\mathbb{R}^n$ $Q_t^1(x,y)\to q_\infty^+(x-y)/2$ *при* $t\to\infty$, *где матрица* $\hat q_\infty^+$ *определена в (2-14).*

Доказательство. *i)* Подставляя (4-9) в (5-8), получаем

$$\hat{Q}_t^1(k,k')=(2\pi)^n\delta(k-k')\hat{\mathcal{G}}_t(k)\frac{1}{2}\hat{\mathbf{q}}^+(k)\hat{\mathcal{G}}_t^T(k),$$

где $\hat{\mathbf{q}}^+(k):=(\hat{q}_+(k)+\hat{q}_-(k))/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}Q_t^1(x,y)&\equiv q_t^1(x-y)\\&=(2\pi)^{-n}\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x-y)k}\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{\mathbf{q}}^+(k)\hat{\mathcal{G}}_t^T(k)\,dk,\quad x,y\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{5-9}$$

Поэтому, из (4-5) и формулы (9-4) вытекает пункт *i)* леммы 5.3.

ii) Применяя формулу (9-6) к $\hat{q}(k):=\hat{\mathbf{q}}^+(k)$, получаем, что

$$q_t^1(z)=(2\pi)^{-n}\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-izk}\hat{q}_\infty^+(k)\,dk+o(1),\ \ t\to\infty,\ \ z\in\mathbb{R}^n,$$

т.к. остальные осциллирующие интегралы в (5-9) стремятся к нулю при $t\to\infty$ ввиду (4-5) по теореме Лебега - Римана. □

Лемма 5.4. *i) Функция* $Q_t^2(x,y)$ *непрерывна и*

$$\sup_{t\geq 1}\sup_{x\in B_R}Q_t^2(x,x)\leq C<\infty\ \ \textit{при любом}\ \ R>0.$$

ii) $\lim\limits_{t\to\infty}\langle Q_t^2(x,y),\Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle=\dfrac{1}{2}\langle q_\infty^+(x-y),\Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle$, $\Psi\in\mathcal{S}$.

Доказательство. *i)* Подставляя (4-10) в (5-8), получаем

$$\begin{aligned}Q_t^2(x,y)&\equiv(2\pi)^{-2n}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-ikx+ik'y}\ \hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{Q}_0^2(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')\,dkdk'\\&=(2\pi)^{-n-2}\sum_{\pm}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}d\mathbf{k}dk_ndk_n'\,[\,e^{-ikx+ik'y}\ \hat{\mathcal{G}}_t(k)\\&\times\mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{\alpha}_\pm(k_n-\xi)}{k_n-\xi}\frac{\overline{\hat{\alpha}_\pm}(k_n'-\xi)}{k_n'-\xi}\hat{q}_\pm(\mathbf{k},\xi)\,d\xi\ \hat{\mathcal{G}}_t^T(k')]|_{k'=(\mathbf{k},k_n')}.\end{aligned}\tag{5-10}$$

После замены переменных получаем представление

$$Q_t^2(x,y)=(2\pi)^{-n-2}\sum_{\pm}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-ik(x-y)}J_\pm(t,x_n,k)\hat{q}_\pm(k)J_\pm^*(t,y_n,k)\,dk,\tag{5-11}$$

где через $J_\pm(t,x_n,k)=(J_\pm^{ij}(t,x_n,k))_{i,j=0,1}$ обозначается матричнозначный интеграл

$$J_\pm(t,x_n,k):=\mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi x_n}\frac{\hat{\alpha}_\pm(\xi)}{\xi}\hat{\mathcal{G}}_t(\mathbf{k},k_n+\xi)\,d\xi,\tag{5-12}$$

а $J_\pm^*$ - его эрмитовое сопряжение.

Предложение 5.5. *При любом $k\in\mathbb{R}^n$ функции $J_\pm(t,x_n,k)$ непрерывны и равномерно ограничены при $t>1$ и $x_n\in[-R,R]$, причем*

$$\sup_{t\ge1,|x_n|\le R}|J^{ij}_\pm(t,x_n,k)|\le C_1+C_2|\hat C^{ij}(k)|,\ \ i,j=0,1, \tag{5-13}$$

где функции $\hat C^{ij}(k)$ определены в (2-16), и константы C_1, C_2 не зависят от k.

В силу равенства (9-4) предложение 5.5 вытекает из следующей леммы.

Лемма 5.6. *Пусть $\omega(k)=|k|$, функция $\Omega(k)$ равна одной из функций $\omega(k)$, $\omega^{-1}(k)$ или 1, $x_n\in[-R,R]$. Тогда матричнозначный интеграл*

$$I(t,x_n,k):=\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x_n}e^{\pm i\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t}\frac{\hat\alpha_+(\xi)}{\xi}\Omega(\mathbf{k},k_n+\xi)\,d\xi$$

равномерно ограничен:

$$\sup_{|x_n|\le R,\,t\ge1}|I(t,x_n,k)|\le C\,\Omega(k), \tag{5-14}$$

где константа C не зависит от k.

Эта лемма доказана в [5]. Теперь пункт *i)* леммы 5.4 вытекает из равенства (5-11) и оценок (5-13) и (4-5) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

ii) В силу леммы 5.1 достаточно рассмотреть случай $\Psi\in\mathcal{S}_N$ с произвольным $N\in\mathbb{N}$. Из формулы (5-11) получаем:

$$\begin{aligned}\langle Q^2_t(x,y),\Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle &= (2\pi)^{-2n}\langle\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat Q^2_0(k,k')\hat{\mathcal{G}}^T_t(k'),\hat\Psi(k)\otimes\overline{\hat\Psi}(k')\rangle\\ &= (2\pi)^{-n-2}\sum_\pm\int\limits_{\mathbb{R}^n}j_\pm(t,k)\hat q_\pm(k)j^*_\pm(t,k)\,dk,\end{aligned} \tag{5-15}$$

где через $j_\pm(t,k)$ обозначается векторнозначный интеграл

$$j_\pm(t,k):=\mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat\alpha_\pm(\xi)}{\xi}\overline{\hat\Psi}(\mathbf{k},k_n+\xi)\hat{\mathcal{G}}_t(\mathbf{k},k_n+\xi)\,d\xi. \tag{5-16}$$

Напомним, что $\Psi\in\mathcal{S}_N$, поэтому

$$k\in\operatorname{supp}\hat\Psi\subset B^0_N:=\{k\in B_N:|k_n|\ge1/N\},$$

где через B_N обозначается шар радиуса N.

Лемма 5.7. *Пусть $\Psi \in \mathcal{S}_N$ с некоторым произвольным $N \in \mathbb{N}$. Тогда для $k \in \mathbb{R}^n$ получаем*

$$j_\pm(t,k) = -\pi \operatorname{sgn} k_n \overline{\hat{\Psi}}(k)\left[\sin\omega(k)t - \cos\omega(k)t\,\hat{C}(k)\right] + o(1), \qquad (5\text{-}17)$$

при $t \to +\infty$, где $o(1)$ стремится к нулю равномерно по $k \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из формулы (9-4) вытекает, что достаточно доказать сходимость (5-17) для интегралов вида

$$j_*(t,k) := \mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t}\frac{\hat{\alpha}_+(\xi)}{\xi} g(\mathbf{k},k_n+\xi)\,d\xi,$$

где $g(k) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{supp} g \subset B_N^0$. Поскольку $g(\mathbf{k},k_n+\xi) = 0$ при $|k_n+\xi| \le 1/N$, то

$$|\nabla_n\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)| = \frac{|k_n+\xi|}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)} \ge C(N) > 0,$$

если $(\mathbf{k},k_n+\xi) \in \operatorname{supp} g(\mathbf{k},k_n+\xi)$ и $k \in B_N^0$. Поэтому можем применить лемму 5 главы VII из [10, с.151] к интегралу $j_*(t,k)$ и, поскольку $\hat{\alpha}_+(0) = 1$, заключаем, что

$$j_*(t,k) = g(k)e^{\pm i\omega(k)t}\pi i \operatorname{sgn}(\pm\nabla_n\omega(k)) + o(1), \ \ t \to +\infty. \quad \square$$

Подставляя (5-17) в (5-15) и применяя (9-7) к $\hat{q}(k) = \hat{q}_+(k) + \hat{q}_-(k)$, получаем в силу формулы (2-14), что

$$\begin{aligned} &\langle Q_t^2(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle \\ = \ &(2\pi)^{-n-2}\pi^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{\Psi}}(k)[\sin|k|t - \cos|k|t\,\hat{C}(k)](\hat{q}_+(k)+\hat{q}_-(k)) \\ &\qquad\qquad [\sin|k|t\,I - \cos|k|t\,\hat{C}^T(k)]\hat{\Psi}(k)\,dk + o(1) \\ = \ &(2\pi)^{-n}\frac{1}{2}\langle\hat{q}_\infty^+(k), \hat{\Psi}(k)\otimes\overline{\hat{\Psi}}(k)\rangle + o(1), \ \ t \to \infty, \qquad (5\text{-}18) \end{aligned}$$

так как оставшиеся осциллирующие интегралы стремятся к нулю при $t \to \infty$ в силу теоремы Лебега - Римана и следствия 4.2. $\square$

Лемма 5.8. *i) Функция $Q_t^3(x,y)$ непрерывна и*

$$\sup_{t\ge1}\sup_{x\in B_R} Q_t^3(x,x) \le C < \infty \quad \text{для любого} \quad R > 0.$$

ii) $\lim\limits_{t\to\infty}\langle Q_t^3(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle = \langle q_\infty^-(x-y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle$ для любых $\Psi \in \mathcal{S}$, где матрица $\hat{q}_\infty^-$ определена в (2-15).

Доказательство. *i)* Подставляя (4-11) в (5-8), находим

$$Q_t^3(x,y) \equiv (2\pi)^{-2n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-ikx+ik'y}\ \hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{Q}_0^3(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')\,dkdk'$$

$$= (2\pi)^{-n-2}\pi i\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big[e^{-ikx+ik'y}\ \hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_0^3(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')\Big]\Big|_{k'=(\mathbf{k},k_n')} dk_n'dk. \quad (5\text{-}19)$$

Здесь введено обозначение

$$\hat{q}_0^3(k,k') := [\overline{\hat{\alpha}_+}(k_n'-k_n)\hat{q}_+(k) + \hat{\alpha}_+(k_n-k_n')\hat{q}_+(k')$$
$$-\overline{\hat{\alpha}_-}(k_n'-k_n)\hat{q}_-(k) - \hat{\alpha}_-(k_n-k_n')\hat{q}_-(k')]/(k_n-k_n'). \quad (5\text{-}20)$$

Подставим (5-20) в подинтегральное выражение в (5-19) и рассмотрим первый из возникающих интегралов,

$$I_t(x,y) := (2\pi)^{-n-2}\pi i\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} [e^{-ikx+ik'y}\ \hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_+(k)$$
$$\frac{\overline{\hat{\alpha}_+}(k_n'-k_n)}{k_n-k_n'}\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')]|_{k'=(\mathbf{k},k_n')}\,dk_n'dk. \quad (5\text{-}21)$$

После замены переменных $k_n' \to k_n'-k_n=\xi$ получаем, что

$$I_t(x,y) = -(2\pi)^{-n-2}\pi i \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)k}\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_+(k)J_+^*(t,y_n,k)\,dk, \quad (5\text{-}22)$$

где $J_+(t,y_n,k)$ - интеграл (5-12). Поэтому из равенств (5-22) и (9-4), предложения 5.5 и (4-5) вытекает, что для $x,y\in B_R$

$$|I_t(x,y)| \le C\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\hat{C}(k)|\big)\ |\hat{q}_+(k)|\ \big(1+|\hat{C}^T(k)|\big)\ dk \le C_1 < \infty,$$

что и доказывает пункт *i)* леммы 5.8.

ii) Согласно лемме 5.1, достаточно доказать пункт *ii)* леммы 5.8 для $\Psi\in\mathcal{S}_N$ с любым фиксированным $N\in\mathbb{N}$. Применяя формулу (5-19), получаем

$$\langle Q_t^3(x,y),\Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle = (2\pi)^{-2n}\langle\hat{Q}_t^3(k,k'),\hat{\Psi}(k)\otimes\overline{\hat{\Psi}}(k')\rangle$$
$$= (2\pi)^{-n-2}\pi i\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} [\overline{\hat{\Psi}}(k)\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}_0^3(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k')\hat{\Psi}(k')]|_{k'=(\mathbf{k},k_n')}dk_n'dk. \quad (5\text{-}23)$$

Подставим в (5-23) формулу (5-20) и рассмотрим, например, первое слагаемое $\langle I_t(x,y),\Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle$ с $\Psi\in\mathcal{S}_N$ и $I_t(x,y)$, определенным в

(5-21). Делая замену переменных $k_n' \to k_n' - k_n = \xi$, получаем, что

$$\begin{aligned} I_t(\Psi) &\equiv \langle I_t(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle \\ &= -(2\pi)^{-n-2}\pi i \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat\Psi}(k)\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat q_+(k) j_+^*(t,k)dk, \end{aligned} \tag{5-24}$$

где $j_+(t,k)$ определено в (5-16). Подставляя формулу (5-17) в интеграл, стоящий в правой части (5-24), получаем

$$I_t(\Psi) = (2\pi)^{-n-2}\pi^2 i \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat\Psi}(k)\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat q_+(k)\left[\sin|k|t - \cos|k|t\hat C^T(k)\right]\operatorname{sgn} k_n \hat\Psi(k)dk$$
$$+o(1), \quad t\to\infty.$$

Далее, применяя формулу (9-8) с $\hat q(k) = \hat q_+(k)$, заключаем, что при $t\to\infty$,

$$I_t(\Psi) = \frac{(2\pi)^{-n} i}{8}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat\Psi}(k)\left(\hat C(k)\hat q_+(k) - \hat q_+(k)\hat C^T(k)\right)\operatorname{sgn} k_n \hat\Psi(k)dk + o(1), \tag{5-25}$$

так как оставшиеся осциллирующие интегралы стремятся к нулю при $t\to\infty$ в силу теоремы Лебега-Римана и (4-5). Отсюда вытекает сходимость $I_t(\Psi)$ к пределу при $t\to\infty$. Аналогичный анализ дает пределы типа (5-25) для всех остальных членов в (5-23). Окончательно,

$$\begin{aligned} &\langle Q_t^3(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle \\ = \;&(2\pi)^{-n}\frac{i}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat\Psi}(k)\;\left(\hat C(k)\hat{\mathbf{q}}^-(k) - \hat{\mathbf{q}}^-(k)\hat C^T(k)\right)\operatorname{sgn} k_n \hat\Psi(k)\,dk \\ = \;&(2\pi)^{-n}\langle \hat q_\infty^-(k), \hat\Psi(k)\otimes\overline{\hat\Psi}(k)\rangle + o(1), \;\; t\to+\infty, \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{q}}^-(k) = (\hat q_+(k) - \hat q_-(k))/2$. □

Теперь предложение 5.2 вытекает из лемм 5.3, 5.4 и 5.8. □

6. Компактность семейства мер

Предложение 3.2 можно вывести из оценки (6-9), приведенной ниже, с помощью теоремы Прохорова (см. лемму 3.1 в [9, с.62]). Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 6.1. *Функция* $\nabla_x\cdot\nabla_y Q_t^{00}(x,y)$ *непрерывна и*

$$\sup_{t\ge 1}\sup_{x\in B_R}\left(\nabla_x\cdot\nabla_y Q_t^{00}(x,y)|_{x=y}\right) \le C < \infty, \;\; R>0. \tag{6-1}$$

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай когда $Y_0^0(x) \equiv 0$ п.н. (Общий случай $Y_0^0(x) \not\equiv 0$ доказывается аналогично). Тогда

$$\nabla_x \cdot \nabla_y Q_t^{00}(x,y) = (2\pi)^{-2n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-ikx+ik'y} k \cdot k' [\hat{\mathcal{G}}_t(k) \hat{Q}_0(k,k') \hat{\mathcal{G}}_t^T(k')]^{00}\, dk dk'$$

$$= (2\pi)^{-2n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-ikx+ik'y} \frac{\sin|k|t}{|k|} k \cdot k' \hat{Q}_0^{11}(k,k') \frac{\sin|k'|t}{|k'|} dk dk'. \tag{6-2}$$

Как и в доказательстве предложения 5.2, представим $\nabla_x \cdot \nabla_y Q_t^{00}(x,y)$ в виде суммы:

$$\nabla_x \cdot \nabla_y Q_t^{00}(x,y) = \sum_{j=1}^{3} \nabla_x \cdot \nabla_y [Q_t^j(x,y)]^{00}, \tag{6-3}$$

где каждое слагаемое $\nabla_x \cdot \nabla_y [Q_t^j(x,y)]^{00}$ определяется аналогично формуле (6-2), но с функцией $[\hat{Q}_0^j(k,k')]^{11}$ в подинтегральном выражении вместо $\hat{Q}_0^{11}(k,k')$. Далее оценим каждое слагаемое $\nabla_x \cdot \nabla_y [Q_t^j(x,y)]^{00}$ отдельно методами лемм 5.3, 5.4 и 5.8.

I. Из формул (4-9) и (6-2) получаем, что

$$\nabla_x \cdot \nabla_y [Q_t^1(x,y)]^{00} = (2\pi)^{-n} \frac{1}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ik(x-y)} (\hat{q}_+^{11}(k) + \hat{q}_-^{11}(k)) (\sin|k|t)^2\, dk.$$

Следовательно, в силу предложения 4.1, ii), заключаем, что функция $\nabla_x \cdot \nabla_y [Q_t^1(x,y)]^{00}$ непрерывна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того,

$$\sup_{t \ge 0} \left| \nabla_x \cdot \nabla_y [Q_t^1(x,y)]^{00} \big|_{y=x} \right| \le C \int (|\hat{q}_+^{11}(k)| + |\hat{q}_-^{11}(k)|)\, dk < \infty.$$

II. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (6-3) (ср. с (5-10)):

$$\nabla_x \cdot \nabla_y [Q_t^2(x,y)]^{00} = (2\pi)^{-n-2} \sum_{\pm} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} d\mathbf{k}\, dk_n\, dk_n' [e^{-ikx+ik'y} k \cdot k'$$

$$\frac{\sin|k|t}{|k|} \frac{\sin|k'|t}{|k'|} \mathrm{PV} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\alpha}_\pm(k_n - \xi)}{k_n - \xi} \frac{\overline{\hat{\alpha}_\pm(k_n' - \xi)}}{k_n' - \xi} \hat{q}_\pm^{11}(\mathbf{k}, \xi) d\xi] \big|_{k'=(\mathbf{k}, k_n')}.$$

После замены переменных получаем, что

$$\begin{aligned}\nabla_x \cdot \nabla_y [Q_t^2(x,y)]^{00} &= C \sum_{\pm} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ik(x-y)} (J_\pm^{01}(t, x_n, k) \overline{J_\pm^{01}(t, y_n, k)} |\mathbf{k}|^2 \\ &\qquad + \tilde{J}_\pm(t, x_n, k) \overline{\tilde{J}_\pm(t, y_n, k)}) \hat{q}_\pm^{11}(k)\, dk,\end{aligned}$$

где $J^{01}_{\pm}(t,x_n,k)$ определено в (5-12), и

$$\tilde J_{\pm}(t,x_n,k):=\mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x_n}\frac{\hat\alpha_{\pm}(\xi)}{\xi}\sin\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t\frac{k_n+\xi}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)}\,d\xi,$$

$\omega(k)=|k|$. Аналогично лемме 5.6, получаем оценку $|J^{01}_{\pm}(t,x_n,k)|\le C_1/|k|$. Так как

$$\left|\frac{k_n+\xi}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)}-\frac{k_n}{\omega(k)}\right|\le C|\xi|,$$

то

$$\sup_{t\ge 1,|x|\le R}|\tilde J_{\pm}(t,x_n,k)|\le C_1<\infty,$$

в силу леммы 5.6. Следовательно, в силу предложения 4.1, ii) функция $\nabla_x\cdot\nabla_y[Q^2_t(x,y)]^{00}$ непрерывна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того,

$$\left|\nabla_x\cdot\nabla_y[Q^2_t(x,y)]^{00}\Big|_{x=y}\right|\le\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{C_1|\mathbf{k}|^2}{\omega^2(k)}+C_2\right)\left(|\hat q^{11}_{+}(k)|+|\hat q^{11}_{-}(k)|\right)\,d\mathbf{k}dk_n<\infty.$$

III. Применяя (4-11) и (6-2), получаем (ср. (5-19))

$$\begin{aligned}&\nabla_x\cdot\nabla_y[Q^3_t(x,y)]^{00}\\ &=C_0\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}e^{-ixk+iyk'}\frac{\sin|k|t}{|k|}k\cdot k'[\hat q^3_0(k,k')]^{11}\frac{\sin|k'|t}{|k'|}\Big|_{k'=(\mathbf{k},k'_n)}dkdk'_n,\end{aligned}$$

где $C_0=(2\pi)^{-n-2}\pi i$, и $\hat q^3_0(k,k')$ определено в (5-20). Подставим (5-20) и оценим один из интегралов (для остальных интегралов доказательство аналогично).

$$I_t(x,y):=C_0\,\mathrm{PV}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}e^{-ixk+iyk'}\frac{\sin|k|t}{|k|}k\cdot k'\hat q^{11}_{+}(k)\frac{\sin|k'|t}{|k'|}\frac{\overline{\hat\alpha_{+}}(k'_n-k_n)}{k_n-k'_n}\Big|_{k'=(\mathbf{k},k'_n)}dkdk'_n.$$

После замены переменных $k'_n\to k'_n-k_n=\xi$ получаем, что

$$I_t(x,y)=-C_0\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x-y)k}\,\frac{\sin|k|t}{|k|}\hat q^{11}_{+}(k)J_2(t,y_n,k)\,dk,$$

где

$$J_2(t,y_n,k):=\mathrm{PV}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi y_n}\frac{\overline{\hat\alpha_{+}}(\xi)}{\xi}\sin\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)t\frac{k^2+k_n\xi}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)}\,d\xi,\qquad(6\text{-}4)$$

$\omega(k)=|k|$. Заметим, что

$$\left|\frac{k^2+k_n\xi}{\omega(\mathbf{k},k_n+\xi)}-\frac{k^2}{\omega(k)}\right|\le|\xi||k|.$$

Аналогично лемме 5.6, получаем оценку $\sup\limits_{t\ge1,|y_n|\le R}|J_2(t,y_n,k)|\le C|k|$. Поэтому, из (6-4) и предложения 4.1, ii) вытекает, что функция $\nabla_x\cdot\nabla_y[Q_t^3(x,y)]^{00}$ непрерывна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того,

$$\sup_{t\ge1,x\in B_R}|I_t(x,x)|\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\sin(|k|t)\,\hat q_+^{11}(k)|\,dk\le C\|\hat q_+^{11}\|_{L^1}<\infty.\quad\Box$$

Обозначим

$$e_t(x,x'):=Q_t^{00}(x,x')+\nabla_x\cdot\nabla_{x'}Q_t^{00}(x,x')+Q_t^{11}(x,x').$$

Лемма 6.2.

$$E\|U_0(t)Y_0(\cdot)\|_R^2=\int\limits_{|x|<R}e_t(x,x)\,dx,\quad t\in\mathbb{R}.\tag{6-5}$$

Доказательство. Из оценки (2-1) для $U_0(t)Y_0=Y(x,t)=(Y^0(x,t),Y^1(x,t))$ вытекает, что

$$E\|Y(\cdot,t)\|_R^2\le C(t)E\|Y_0(\cdot)\|_{R+t}^2<\infty,\tag{6-6}$$

в силу условия **S2** и теоремы Фубини. Следовательно, математическое ожидание $E\|Y(\cdot,t)\|_R^2$ конечно для любых $R>0$, $t\ge0$. Отсюда, в свою очередь, по теореме Фубини получаем, что

$$E(|Y^0(x,t)|^2+|\nabla Y^0(x,t)|^2+|Y^1(x,t)|^2)<\infty,\quad x\in X\subset\mathbb{R}^n,$$

где $\mathrm{mes}\,(\mathbb{R}^n\setminus X)=0$. Следовательно, по неравенству Коши - Буняковского, для $x,x'\in X$

$$E(|Y^0(x,t)Y^0(x',t)|+|\nabla_xY^0(x,t)\cdot\nabla_{x'}Y^0(x',t)|+|Y^1(x,t)Y^1(x',t)|)<\infty.\tag{6-7}$$

Возьмем $\theta_k(x)=k^n\theta(kx)$, где $\theta(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int\theta(x)dx=1$ и $\theta(x)\ge0$. Тогда по определению корреляционных функций (2-4),

$$E\|\theta_k*Y(\cdot,t)\|_R^2=\int\limits_{|x|\le R}dx\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}\theta_k(x-y)\theta_k(x-y')e_t(y,y')\,dydy'.\tag{6-8}$$

Очевидно, $\theta_k(x) \to \delta(x)$ при $k \to \infty$. Поэтому правая часть равенства (6-8) сходится к $\int\limits_{|x|\le R} e_t(x,x)\,dx$, поскольку $e_t(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, а левая - к $E\|Y(\cdot,t)\|_R^2$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Действительно, $\|\theta_k * Y(\cdot,t)\|_R \to \|Y(\cdot,t)\|_R$ при $k \to \infty$, и

$$\|\theta_k * Y(\cdot,t)\|_R \le \|Y(\cdot,t)\|_{R+R(\theta)},$$

причем $\|Y(\cdot,t)\|_{R+R(\theta)}^2$ является суммируемой мажорантой в силу (6-6). Таким образом, из (6-8) при $k \to \infty$ вытекает (6-5). $\Box$

Лемма 6.3. *Пусть выполнены условия* **S0**–**S3**. *Тогда*

$$\sup_{t\ge 0} E\|U_0(t)Y_0\|_R^2 < \infty, \quad R > 0. \tag{6-9}$$

Доказательство. Из леммы 6.2 вытекает, что

$$E\|Y(\cdot,t)\|_R^2 = \int\limits_{|x|<R} e_t(x,x)\,dx.$$

Из пункта *i)* предложения 5.2 и леммы 6.1 вытекает, что для любого $R > 0$

$$\sup_{t\ge 1, x\in B_R} e_t(x,x) \le \bar{e} < \infty.$$

Следовательно,

$$E\|U_0(t)Y_0\|_R^2 = \int\limits_{B_R} e_t(x,x)\,dx \le \bar{e}|B_R| < \infty. \quad \Box$$

7. Сходимость характеристических функционалов

7.1. Метод Бернштейна для волнового уравнения

Для доказательства предложения 3.3 мы применяем метод "комнат - коридоров" Бернштейна. Мы используем стандартное интегральное представление для решений, делим область интегрирования на "комнаты" и "коридоры" и оцениваем их вклад. В результате, $\langle U_0(t)Y_0, \Psi\rangle$ представляется как сумма слабо зависимых случайных величин.

Сначала оценим $\langle Y(t), \Psi\rangle$ в (3-4), используя двойственную группу. Для $t \in \mathbb{R}$ введем формально "сопряженные" операторы $U_0'(t)$, $U'(t)$ из пространства $\mathcal{S}$ в подходящее пространство распределений:

$$\langle Y, U_0'(t)\Psi\rangle = \langle U_0(t)Y, \Psi\rangle, \quad \Psi \in \mathcal{S}, \quad Y \in \mathcal{H}. \tag{7-1}$$

Обозначим $\Phi(\cdot,t)=U_0'(t)\Psi$. Тогда (7-1) можно переписать в виде

$$\langle Y(t),\Psi\rangle=\langle Y_0,\Phi(\cdot,t)\rangle,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{7-2}$$

Сопряженные группы допускают простое описание. Лемма 7.1 показывает, что действие групп $U_0'(t)$, $U'(t)$ совпадает, соответственно, с действием групп $U_0(t)$, $U(t)$ с точностью до порядка компонент. В частности, $U_0'(t)$, $U'(t)$ - непрерывные группы операторов из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

Лемма 7.1. *Для* $\Psi=(\Psi^0,\Psi^1)\in\mathcal{S}$,

$$U_0'(t)\Psi=(\dot\phi(\cdot,t),\phi(\cdot,t)),\quad U'(t)\Psi=(\dot\psi(\cdot,t),\psi(\cdot,t)), \tag{7-3}$$

где $\phi(x,t)$ *- решение уравнения (3-1) с начальными данными* $(u_0,v_0)=(\Psi^1,\Psi^0)$, *а* $\psi(x,t)$ *- решение уравнения (1-1) с начальными данными* $(u_0,v_0)=(\Psi^1,\Psi^0)$.

Доказательство. Дифференцируя (7-1) по t с $Y,\Psi\in\mathcal{S}$, получаем

$$\langle Y,\dot U_0'(t)\Psi\rangle=\langle\dot U_0(t)Y,\Psi\rangle. \tag{7-4}$$

Группа $U_0(t)$ имеет генератор $\mathcal{A}_0$ (см. (3-3)). Генератор группы $U_0'(t)$ - сопряженный оператор к $\mathcal{A}_0$,

$$\mathcal{A}_0'=\begin{pmatrix}0&\Delta\\1&0\end{pmatrix}. \tag{7-5}$$

Следовательно, уравнение (7-3) справедливо с $\ddot\psi=\Delta\psi$. Для группы $U'(t)$ доказательство аналогично. □

Сходимость (3-4) также достаточно доказать только для $\Psi\in\mathcal{S}_0$. Это следует из следующей леммы.

Лемма 7.2. *Характеристические функционалы* $\hat\mu_t(\Psi)$, $t\in\mathbb{R}$, *равномерно непрерывны в* $\mathcal{S}_V$.

Доказательство. Это утверждение вытекает из неравенства Коши-Шварца:

$$\begin{aligned}|\hat\mu_t(\Psi_1)-\hat\mu_t(\Psi_2)| &= \Big|\int(e^{i\langle Y,\Psi_1\rangle}-e^{i\langle Y,\Psi_2\rangle})\mu_t(dY)\Big|\\ &\le \int|\langle Y,\Psi_1-\Psi_2\rangle|\mu_t(dY)\le\sqrt{\int|\langle Y,\Psi_1-\Psi_2\rangle|^2\mu_t(dY)}\\ &= \sqrt{\mathcal{Q}_t(\Psi_1-\Psi_2,\Psi_1-\Psi_2)}\le C\|\Psi_1-\Psi_2\|_V.\end{aligned}$$

□

Лемма 7.3. *(см. [6]) Пусть* $\Psi \in \mathcal{S}_0$, $n \ge 4$ *и четное. Тогда* $\forall N \in \mathbb{N}$ *справедлива следующая оценка*

$$|\Phi(x,t)| \le C(N,\Psi)\frac{t^{-(n-1)/2}}{|t-|x||^N+1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 1. \tag{7-6}$$

Разобьем шар $|x| \le 2t$ на ”комнаты” и ”коридоры”. Для данного $t > 0$ выберем $d \equiv d_t \ge 1$ и $\rho \equiv \rho_t > 0$ следующим образом: $\rho_t \sim t^{1-\delta}$ с $0 < \delta < 1$, $d_t \sim t/\log t$, $t \to \infty$. Положим $h = d + \rho$ и

$$a^j = -2t + (j-1)h, \quad b^j = a^j + d, \quad 1 \le j \le N_t, \quad N_t \sim \frac{t}{h}. \tag{7-7}$$

Назовем слои $R_t^j = \{x \in B_{2t} : \ a^j \le x_n \le b^j\}$ ”комнатами”, слои $C_t^j = \{x \in B_{2t} : \ b^j \le x_n \le a_{j+1}\}$ - коридорами”. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, d - ширина комнаты, и ρ - коридора.

Обозначим через χ_t^j , ξ_t^j и η_t характеристические функции множеств R_t^j , C_t^j и $\mathbb{R}^n \setminus B_{2t}$. Рассмотрим случайные величины r_t^j , c_t^j и l_t , где

$$r_t^j = \langle Y_0, \chi_t^j \Phi(\cdot,t)\rangle, \quad c_t^j = \langle Y_0, \xi_t^j \Phi(\cdot,t)\rangle, \quad 1 \le j \le N_t, \quad l_t = \langle Y_0, \eta_t \Phi(\cdot,t)\rangle. \tag{7-8}$$

Тогда из (7-2) вытекает, что

$$\langle U_0(t)Y_0, \Psi\rangle = \sum_{j=1}^{N_t}(r_t^j + c_t^j) + l_t. \tag{7-9}$$

Лемма 7.4. *Пусть* $n \ge 4$ *, четное, и выполнены условия* **S0–S3**. *Тогда при* $t > 1$ *справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} &E|r_t^j|^2 \le C(\Psi)\ d_t/t, \quad E|c_t^j|^2 \le C(\Psi)\ \rho_t/t, \quad 1 \le j \le N_t, \qquad (7\text{-}10)\\ &E|l_t|^2 \le C(\Psi)\ t^{-p}, \quad \forall p > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Выразим $E|r_t^j|^2$ через корреляционные матрицы. Из определения (7-8) и условия **S2** следует, в силу теоремы Фубини, что

$$E|r_t^j|^2 = \langle \chi_r^j(x_n)\chi_r^j(y_n)Q_0(x,y), \Phi(x,t)\otimes\Phi(y,t)\rangle. \tag{7-11}$$

Применяя (7-6) к равенству (7-11), получаем, что

$$E|r_t^j|^2 \le Ct^{-n+1}\int\limits_{R_t^j}\frac{1}{(t-|x|)^2+1}(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|Q_0(x,y)\|dy)\,dx, \tag{7-12}$$

где $\|Q_0(x,y)\|$ обозначает норму матрицы $\left(Q_0^{ij}(x,y)\right)$. Следующая оценка доказана в [6, формула (5.21)]:

$$\int\limits_{R_t^j} \frac{dx}{(t-|x|)^2+1} \le C dt^{n-2}.$$

Следовательно, из пункта *i)* предложения 4.1 вытекает первая оценка из (7-10). Остальные оценки в (7-10) доказываются аналогично. □

7.2. Доказательство предложения 3.3

Если $\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi) = 0$, то предложение 3.3 справедливо в силу (5-7). Таким образом, мы можем допустить, что

$$\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi) \ne 0. \tag{7-13}$$

Аналогично методу из [1]-[3], применяя неравенство треугольника, получаем

$$|\hat\mu_t(\Psi) - \hat\mu_\infty(\Psi)| \le o(1) + |\prod_{j=1}^{N_t} E\exp\{ir_t^j\} - \exp\{-\frac{1}{2}{\textstyle\sum_t} E(r_t^j)^2\}|, \quad t\to\infty,$$

где обозначание $\sum_t$ заменяет $\sum\limits_{j=1}^{N_t}$. Остается проверить, что

$$|\prod_{j=1}^{N_t} E\exp\{ir_t^j\} - \exp\{-\frac{1}{2}{\textstyle\sum_t} E(r_t^j)^2\}| \to 0, \quad t\to\infty. \tag{7-14}$$

Согласно стандартному утверждению центральной предельной теоремы (см., например, [11, теорема 4.7]) достаточно проверить условие Линдеберга: $\forall\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\sigma_t}{\textstyle\sum_t} E_{\varepsilon\sqrt{\sigma_t}}|r_t^j|^2 \to 0, \quad t\to\infty. \tag{7-15}$$

Здесь $\sigma_t \equiv \sum_t E|r_t^j|^2$, и $E_\delta f \equiv E(X_\delta f)$, где X_δ - индикатор события $|f| > \delta^2$. Заметим, что из сходимости (5-7) и условия (7-13) вытекает, что

$$\sigma_t \to \mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi) \ne 0, \quad t\to\infty.$$

Следовательно, остается проверить, что $\forall\varepsilon > 0$

$$ {\textstyle\sum_t} E_\varepsilon|r_t^j|^2 \to 0, \quad t\to\infty. \tag{7-16}$$

Доказательство сходимости (7-16) может быть сведено к случаю, когда для некоторого $\Lambda \geq 0$ мы имеем, почти всюду, что

$$|Y_0(x)| \leq \Lambda, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

В силу неравенства Чебышева доказательство (7-16) сводится к доказательству сходимости

$$\sum_t E|r_t^j|^4 \to 0, \quad t \to \infty. \tag{7-17}$$

В свою очередь, (7-17) вытекает из оценки

$$E|r_t^j|^4 \leq C(\Psi)\Lambda^4\, d_t^2/t^2, \quad t > 1,$$

которая доказывается аналогично формуле (7.3) из [6]. Это завершает доказательство предложения 3.3. □

8. Волновое уравнение с переменными коэффициентами

Теорема 2.6 вытекает из предложений 8.2 и 8.3, приведенных ниже, используя метод [2, 6]. Метод основан на теории рассеяния для решений бесконечной энергии.

Рассмотрим операторы $U'(t)$, $U_0'(t)$ в пространстве H_0 (см. (2-17)). В силу следствия 9.1 из [6, с.23], существует константа $C > 0$ такая, что $\forall \Psi \in H_0$:

$$\|U_0'(t)\Psi\|_{H_0} = \|\Psi\|_{H_0}, \quad \|U'(t)\Psi\|_{H_0} \leq C\|\Psi\|_{H_0}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 8.1. *(см. [6, Теорема 9.1]) Пусть* $n \geq 4$*, четное, и выполнены условия* **E1-E2** *и* **S0-S3**. *Тогда существует изоморфизм* $W : H_0 \to H_0$ *такой, что для* $\Psi \in H_0$ *имеем*

$$U'(t)\Psi = U_0'(t)W\Psi + r(t)\Psi, \;\; t \geq 0,$$

и

$$\begin{aligned} \|r(t)\Psi\|_{H_0} &\to 0 \quad t \to \infty, \\ E|\langle Y_0, r(t)\Psi\rangle|^2 &\to 0 \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Наконец, теорема 2.6 вытекает из следующих двух предложений:

Предложение 8.2. *Семейство мер* $\{\mu_t, t \in \mathbb{R}\}$ *слабо компактно в* $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$.

Предложение 8.3. *Существует плотное подпространство* Π *в* H_0 *такое, что для любых* $\Psi \in \Pi$

$$\hat{\mu}_t(\Psi) \equiv \int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\ \mu_t(dY) \to \exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(W\Psi, W\Psi)\},\ \ t \to \infty. \quad (8\text{-}1)$$

Эти предложения доказываются аналогично методу из [6].

9. Дополнение: Преобразование Фурье

Рассмотрим динамику и корреляционные функции системы (3-2). Через $F\ :\ \ w \mapsto \hat{w}$ обозначим преобразование Фурье обобщенных функций $w \in D'(\mathbb{R}^n)$. Мы используем это обозначение для векторно- и матричнозначных функций.

В преобразовании Фурье система (3-2) становится $\dot{\hat{Y}}(k,t) = \hat{\mathcal{A}}_0(k)\hat{Y}(k,t)$, следовательно,

$$\hat{Y}(k,t) = \hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{Y}_0(k), \quad \hat{\mathcal{G}}_t(k) = \exp(\hat{\mathcal{A}}_0(k)t). \quad (9\text{-}1)$$

Здесь

$$\hat{\mathcal{A}}_0(k) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -|k|^2 & 0 \end{array}\right), \qquad \hat{\mathcal{G}}_t(k) = \left(\begin{array}{cc} \cos|k|t & \dfrac{\sin|k|t}{|k|} \\ -|k|\sin|k|t & \cos|k|t \end{array}\right). \quad (9\text{-}2)$$

Обозначим через I единичную матрицу и

$$\hat{C}(k) \equiv (\hat{C}^{ij}(k))_{i,j=0}^{1} := \left(\begin{array}{cc} 0 & |k|^{-1} \\ -|k| & 0 \end{array}\right). \quad (9\text{-}3)$$

Тогда

$$\hat{\mathcal{G}}_t(k) = \cos|k|t\, I + \sin|k|t\, \hat{C}(k). \quad (9\text{-}4)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{Q}(k,k')\hat{\mathcal{G}}_t^T(k') \\ &= \cos|k|t\ \cos|k'|t\ \hat{Q}(k,k') + \sin|k|t\ \sin|k|t\ \hat{C}(k)\hat{Q}(k,k')\hat{C}^T(k') \\ &\quad + \cos|k|t\ \sin|k'|t\ \hat{Q}(k,k')\hat{C}^T(k') + \cos|k|t\ \sin|k'|t\ \hat{C}(k)\hat{Q}(k,k') \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\pm}\{\cos(|k| \pm |k'|)t\ (\hat{Q}(k,k') \mp \hat{C}(k)\hat{Q}(k,k')\hat{C}^T(k')) \\ &\qquad + \sin(|k| \pm |k'|)t\ (\hat{C}(k)\hat{Q}(k,k') \pm \hat{Q}(k,k')\hat{C}^T(k'))\}. \end{aligned} \quad (9\text{-}5)$$

В частном случае, когда $\hat{Q}(k,k') = \delta(k-k')\hat{q}(k)$, получаем

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}(k)\hat{\mathcal{G}}_t^T(k) \;&=\; \frac{1}{2}\{\hat{q}(k)+\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}\\
&+\frac{1}{2}\cos 2|k|t\ \{\hat{q}(k)-\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}\\
&+\frac{1}{2}\sin 2|k|t\ \{\hat{C}(k)\hat{q}(k)+\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}. \qquad (9\text{-}6)
\end{aligned}
$$

Следующие формулы используются в доказательствах лемм 5.4 и 5.8, соответственно:

i) $[\sin|k|t\,I-\cos|k|t\,\hat{C}(k)]\,\hat{q}(k)\,[\sin|k|t\,I-\cos|k|t\,\hat{C}^T(k)]$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\{\hat{q}(k)+\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}-\frac{1}{2}\cos 2|k|t\ \{\hat{q}(k)-\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}\\
&-\frac{1}{2}\sin 2|k|t\ \{\hat{C}(k)\hat{q}(k)+\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}, \qquad (9\text{-}7)
\end{aligned}
$$

ii) $\hat{\mathcal{G}}_t(k)\hat{q}(k)\,[\sin|k|t\,I-\cos|k|t\,\hat{C}^T(k)]$

$$
\begin{aligned}
=\;&\frac{1}{2}\{\hat{C}(k)\hat{q}(k)-\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}-\frac{1}{2}\cos 2|k|t\ \{\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)+\hat{C}(k)\hat{q}(k)\}\\
&+\frac{1}{2}\sin 2|k|t\ \{\hat{q}(k)-\hat{C}(k)\hat{q}(k)\hat{C}^T(k)\}. \qquad (9\text{-}8)
\end{aligned}
$$

Литература

[1] Dudnikova T.V., Komech A.I., Kopylova E.A., Suhov Yu.M.: On convergence to equilibrium distribution, I. The Klein-Gordon equation with mixing, *Comm. Math. Phys.* **225** (2002), no.1, 1-32. ArXiv: math-ph/0508042.

[2] Dudnikova T.V., Komech A.I., Ratanov N.E., Suhov Yu.M.: On convergence to equilibrium distribution, II. The wave equation in odd dimensions, with mixing, *J. Stat. Phys.* **108** (2002), no.4, 1219-1253. ArXiv: math-ph/0508039.

[3] Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H.: On a two-temperature problem for wave equation, *Markov Processes and Related Fields* **8** (2002), 43-80. ArXiv: math-ph/0508044.

[4] Dudnikova T., Komech A., Mauser N.: On two-temperature problem for harmonic crystals, *J. Stat. Phys.* **114** (2004), no.3/4, 1035-1083. ArXiv: math-ph/0211017.

[5] Дудникова Т.В., Комеч А.И.: О двух-температурной задаче для уравнения Клейна-Гордона, принята в *Теория вероятностей и ее применения*, 2005.

[6] Komech A., Kopylova E., Mauser N.: On convergence to equilibrium distribution for wave equation in even dimensions, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24** (2004), 547-576.

[7] Михайлов В.П.: Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.

[8] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.: Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.

[9] Вишик М.И., Фурсиков А.В.: Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980, 442 с.

[10] Вайнберг Б.Р.: Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во Московского ун-та, 1982, 296 с.

[11] Petrov V.V.: Limit Theorems of Probability Theory. Clarendon Press, Oxford, 1995.