Определение сингулярности потока и их типа в задаче газовой динамики

29 сентября 2005 г.

1 Введение

В данной работе представлены результаты развития подхода, предложенного в ([A], [B]). Как и в этих работах, мы изучаем задачу выделения и классификации особенностей газодинамических полей, полученных в результате численного моделирования на основе методов сквозного счета. Основным аппаратом в нашем подходе к решению этой задачи остается вейвлет-анализ газодинамических полей при помощи комплекснозначных вейвлетов. В ([A], [B]) в качестве детектора сингулярностей рассматривались главным образом линии уровня и линии скачков фазы комплексного ортогонального вейвлет-преобразования изучаемых полей. В настоящей работе мы применяли более сложные детекторы, использующие:

- симметричные комплексные ортогональные вейвлеты
- - "комплексификацию" вещественных ортогональных вейвлетов
- - оценку скорости изменения вейвлет-коэффициентов в окрестности сингулярности (эти же оценки позволяют различать сильные и слабые разрывы).

Идейно эти детекторы реализуют три подхода к поиску сингулярностей. Первый основан на аппроксимации сглаженного лапласиана от исходного

поля. Второй является прямым обобщением идеи ([A], [B]) об отслеживании скачков фазы комплексного вейвлет-преобразования на случай произвольных пар вещественных ортогональных вейвлетных фильтров. Третий детектор осуществлет классификацию точек поля (различая точки регулярности, точки сильных разрывов и точки слабых разрывов) на основе оценки локального показателя липшицевой регулярности.

В разделе 1 описан детектор, использующий симметричные комплексные вейвлеты Добеши. Сначала вещественная и мнимая части скейлингфильтра, порождающего эти вейвлеты, применяются к исходному полю по схеме обратного вейвлет-преобразования. Затем те же фильтры применяются к полученному полю (заданному уже на вдвое большей по каждому направлению сетке). Высокочастотная часть результата, благодаря специфической связи между вещественной и мнимой частями комплексной скейлинг-функции, служит приближением сглаженной второй производной исходного поля. В двумерном случае имеем три васокочастотных компоненты, две из которых служат приближениями сглаженных вторых производных по вертикальному и горизонтальному направлениям. В этом смысле данный метод аналогичен классическому в обработке изображений методу выделения краев (edge detection) "лапласиан-от-гауссиана", но требует значительно меньше вычислений.

В разделе 2 описан детектор, отслеживающий изменение фазы свертки исходного поля с комплексными фильтрами, построенными из двух независимых вещественных ортогональных вейвлетных фильтров, тем самым обобщается подход из ([А], [В]). Для основных пространственных ориентаций (горизонтальной, вертикальной и диагональной) подобраны подходящие комбинации фильтров, фаза свертки с которыми наиболее четко реагирует на сингулярности в этих направлениях.

В разделе 3 представлен алгоритм основанный на оценках локальной регулярности поля. Липшицевой регулярности 0 соответствуют сильные разрывы, ее значениям от 0 до 1 - слабые, значениям, большим 1 - регулярные точки поля. Оценка показателя липшицевой регулярности проводится по скорости изменения величины вейвлет-коэффициентов в зависимости от масштаба. Распределение значений этого параметра в области исследуемого поля представляет собой достаточно тонкий детектор сингулярностей. Важно, что для всех детекторов получены оценки порогов их величин,

опредедляющие, классифицировать ли точку как регулярную или сингулярную. Эти пороги выражены в терминах исходного поля.

Построенные детекторы были применены нами для оценки точности положения ударных волн, получаемых при вычислительном моделировании течений, в которых аналитически можно определить точное положение ударной волны. В частности, оказалось, что угол наклона ударной волны, вычисленной по разностной схеме и локализованной при помощи детектора на основе оценки липшицевой регулярности (50,82 град.) близок к теоретическому (49,12 град). В экспериментах с детекторами из пунктов 1 и 2 для другоого поля угол наклона вычисленной ударной волны оказался равен 47,2 град. при теоретическом значении 47,4 град.

Перейдем к подробному описанию построенных детекторов.

2 Детектор на основе симметричных комплексных вейвлетов Добеши

2.1 Симметричные вейвлеты Добеши

Известно, что не существует симметричных вещественнозначных ортогональных вейвлетов с компактным носителем. Однако комплекснозначные вейвлеты с этим свойством (точнее, скейлинг-функция симметрична, а вейвлет антисимметричен) были построены в [С] как частный случай классической конструкции Добеши. В той же работе были изучены свойства этих вейвлетов и численно установлено, что при количестве ненулевых коэффициентов уравнения рескейлинга, меньшем 20, для скейлинг-функции $\phi(x)$ с высокой точностью выполняется соотношение (в обозначениях [С]):

$$\phi(x) = u(x) + i * v(x) \approx (1 + i\alpha\partial_x^2)u(x)$$
(1)

Это соотношение проиллюстрировано в [C] log-log графиком, изображающим отношение $r(w) = -\frac{\widehat{v(w)}}{\widehat{u(w)}}$ Фурье-образов вещественной и мнимой частей.

Это отношение вещественно в силу симметричности функций. Из рисунка видно, что оно почти линейно с угловым коэффициентом 2.

(Смысл параметра J в том, что отличны от нуля коэффициенты уравнения рескейлинга с номерами от -J до J+1). Другими словами, Фурьеобразы мнимой и вещественной частей с хорошей точностью связаны соотношением $\widehat{v(w)} = -w^2\widehat{u(w)}$, откуда и вытекает (1).

Кроме того u(x), вещественная часть симметричной комплексной скейлингфункции, удовлетворяет соотношениям на моменты:

$$\int u(x)dx = 1 \text{ и } \int u(x)(x-1/2)^m dx = 0 \text{ (при m=1,2,3)}$$
 (2)

Эти соотношения аналогичны соотношениям на ортогональные скейлингфункции с вырожденными "сдвинутыми моментами" (так называемые койфлеты [coiflets]). Таким образом, свойства вещественной u(x) и мнимой $v(x) = \alpha \partial_x^2 u(x)$ части скейлинг-функции близки к свойствам вещественной скейлинг-функции $\phi(x)$ и связанного с ней вейвлета (в качестве другой аналогии можно привести гауссиан и его вторую производную, "сомбреро").

как для симметричных вейвлетов Добеши величина α в сравнительно мало (например, при J=2 и 4, т.е. в случае 6 и 10 ненулевых коэффициентов, α = -0.164 и -0.089, соответственно), то сдвиги u(x-k), с учетом 1 можно с точностью до "членов порядка α^2 " считать еще и ортогональными. Этим свойством мы воспользуемся в следующем пункте при построении детектора.

2.2

Пусть соотношения рескейлинга имеют вид:

$$\phi(x/2) = \sum_{n} h_n \phi(x - n),$$

$$\psi(x/2) = \sum_{n} g_n \phi(x - n),$$

Пусть теперь $h_k = \xi_k + i\eta_k$, тогда как эти соотношения имеют вид:

$$\begin{cases} u(x/2) = \sum_{n} \xi_{n} u(x-n) - \sum_{n} \eta_{n} v(x-n) \\ v(x/2) = \sum_{n} \eta_{n} u(x-n) - \sum_{n} \xi_{n} v(x-n). \end{cases}$$
(3)

Считая мнимую часть комплексной скейлинг-функции малой по сравнению с вещественной, получаем:

$$\begin{cases} u(x/2) \approx \sum_{n} \xi_n u(x-n) \\ v(x/2) \approx \sum_{n} \eta_n u(x-n). \end{cases}$$
 (4)

Эти соотношения аналогичны соотношениям рескейлинга для исходной функции, но соотношения ортогональности для функций u(x) и v(x) выполнены лишь приближенно. Тем не менее, мы используем фильтры ξ и η для построения детектора, как если бы они были настоящими вейвлетными низкочастотным и высокочастотным фильтрами. Однако, эти фильтры уже не обладают свойством ортоганальности.

Сначала производится обратное преобразование, которое позволяет получить значения исследуемой функции на сетке большего масштаба (в 2 раза).

Затем к полученным данным применяется прямое преобразование и анализируется высокочастотная часть результата. По сути полученные данные являются являются коэффициентами разложения исследуемой функции по системе функций v(x-k). (Тривиальный результат мы не получаем, так как пространства, образованные функциями u(x-k) и v(x-k)не ортоганальны.) Далее используем специфическую структуру функций v(x-k).

$$j_k^0 := \int_{\infty}^{\infty} v(x-k)f(x)dx = \alpha \int_{\infty}^{\infty} \partial_x^2 u(x-k)f(x) = \int_{\infty}^{\infty} u(x-k)(\alpha \partial_x^2 f(x))dx$$
(5)

Последнее равенство получается, если два раза применить интегрирование по частям и учесть финитность функции u(x).

Из выражения 5 следует, что коэффициенты j_n^0 являются коэффициентами разложения функции $\alpha \partial_x^2 f(x)$, по системе функций u(x-k).

Отсюда имеем, что коэффициенты $r_n^0 = j_n^0 \alpha$ являются дискретизацией сглаженной функции $\partial_x^2 f(x)$.

Таким образом, для функции f(x) можно вычислить хорошее приближение второй производной, дискретизация которой в узлах с целыми координатами задачтся коэффициентами r_n^0 . Связь коэффициентов c_n^0 и r_n^0 будем обозначать:

$$r_n^0 = d_x^2(c_n^0)$$

Рассмотрим теперь дискретную функцию l_n^0 , задаваемую второй разностью:

$$l_n^0 = \triangle^2 c_n^0 = c_{n+2}^0 - 2c_{n+1}^0 + c_n^0$$
.

Для ступеньки вида:

$$c_n^0 = \begin{cases} 1, n \le 0, \\ 2, n > 0. \end{cases}$$

получаем:

$$|l_n^0| = \begin{cases} 1, n = 0 \text{ if } n = 1, \\ 0, n < 0 \text{ if } n > 1. \end{cases}$$

Таким образом, отношением $i_n^0 = |l_n^0/c_n^0|\,$ можно характеризовать интенсивность разрыва функции.

Однако, если в расчете размазывается разрыв на несколько точек, то коэффициенты i_n^0 могут быть в несколько раз меньше интенсивности и требуется найти коэффициент A, который определяет связь между коэффициентами и интенсивностью разрывов функции в точке. Этот коэффициент зависит только от свойств разностной схемы, и его можно считать постоянным.

Если исследуемая функция достаточно гладкая и на неч не накладываются шумы, то $r_n^0 \approx l_n^0$, т.е. вычисления с вейвлет-коэффициентами дают практически тот же результат, что обычные вторые разности. В противном случае, чтобы избежать лишних шумов, для вычисления интенсивности разрыва лучше использовать коэффициенты $p_n^0 = |r_n^0/c_n^0|$. Как показали численные эксперименты, этот метод лучше действует в случае слабых разрывов.

В двумерном случае, рассуждая аналогично, получим дискретную функцию:

$d_y^2 c_{m,n}^0$	$d_y^2 d_x^2 c_{m,n}^0$
$c_{m,n}^0$	$d_{x}^{2}c_{m,n}^{0}$

Она состоит из четырех блоков, каждый из которых совпадает по размерности с исходной функцией $c_{m,n}^0$. Причем функция $p_{m,n}^x=|d_x^2c_{m,n}^0/c_{m,n}^0|$

пропорциональна интенсивности разрывов, направление которых не близко к горизонтальному. Аналогично функция $p_{m,n}^y = |d_y^2 c_{m,n}^0/c_{m,n}^0|$ пропорциональна интенсивности разрывов, направление которых не близко к вертикальному.

Теперь мы можем сформулировать условия, по которым детектор находит точки, где могут быть сингулярности. Пусть A - коэффициент пропорциональности. Тогда, чтобы найти сильные разрывы с интенсивностью больше чем , достаточно выделить те точки, в которых выполняется соотношение:

$$(p_{m,n}^x > A\varepsilon) \vee (p_{m,n}^y > A\varepsilon).$$

Следует отметить, что с повышением чувствительности (уменьшением параметра ε), уже обнаруженные разрывы будут размазываться. При уменьшении параметра ε будут проявляться и слабые разрывы, однако связь их интенсивности с параметром чувствительности пока не установлена.

3 Детектор на основе "комплексификации" вещественных ортогональных вейвлетов

Опишем альтернативный подход к построению детектора на основе создания комплексного фильтра из пары вещественных (не отвечающие в общем случае никаким вейвлетам). Однак он приспособлен в большей степени для локализации разрывов преимущественно вертикального или горизонтального направлений. Кроме того, в отличие от детектора предыдущего пункта, результат (список "подозрительных на сингулярность" точек) задается на сетке с шагом вдвое большим шага исходной сетки.

Рассмотрим пару фильтров где h - низкочастотный, g - высокочастотный. Используя низкочастотный и высокочастотный фильтры, построим новые комплексные фильтры $H = h + gi\varepsilon$ и $G = g + hi\varepsilon$, мало.

Используя новые фильтры H и G, выполним двумерное преобразование, произведя свертку сначала по строкам, затем по столбцам. Операции, относящиеся к строкам и столбцам, будем обозначать '-' и '|' соответственно.

$$H^-f = h^-f + \varepsilon q^-fi, G^-f = q^-f + \varepsilon h^-fi,$$

$$\begin{cases} H^{|}H^{-}f=(h^{|}h^{-}f-\varepsilon^2g^{|}g^{-})+\varepsilon(h^{|}g^{-}f+g^{|}h^{-}f)i;\\ H^{|}G^{-}f=(h^{|}g^{-}f-\varepsilon^2g^{|}h^{-})+\varepsilon(h^{|}h^{-}f+g^{|}g^{-}f)i;\\ G^{|}H^{-}f=(g^{|}h^{-}f-\varepsilon^2h^{|}g^{-})+\varepsilon(h^{|}h^{-}f+g^{|}g^{-}f)i;\\ G^{|}G^{-}f=(g^{|}g^{-}f-\varepsilon^2h^{|}h^{-})+\varepsilon(h^{|}g^{-}f+g^{|}h^{-}f)i; \end{cases}$$

В трех первых выражениях при достаточно малом ε вторым слагаемым в первой скобке можно пренебречь. Вещественная часть четвертого выражения носит характер шумов (первое слагаемое) и ее взаимодействие с малой величиной $\varepsilon^2 h^\dagger h^-$ не позволяет использовать выражение в дальнейшем анализе.

Получим:

$$\begin{cases} H^{|}H^{-}f = (h^{|}h^{-}f - O(\varepsilon^{2})) + \varepsilon(h^{|}g^{-}f + g^{|}h^{-}f)i; \\ H^{|}G^{-}f = (h^{|}g^{-}f - O(\varepsilon^{2})) + \varepsilon(h^{|}h^{-}f + g^{|}g^{-}f)i; \\ G^{|}H^{-}f = (g^{|}h^{-}f - O(\varepsilon^{2})) + \varepsilon(h^{|}h^{-}f + g^{|}g^{-}f)i; \end{cases}$$

Опишем все выражения в правой части:

- 1. $h^{\dagger}h^{-}f \approx f_{cp}$ сглаженная по двум направлениям исходная функция;
- 2. $h^{\dagger}g^{-}f$ сглаженные по вертикали горизонтальные детали исходной функции;
- 3. $g^{|}h^{-}f$ сглаженные по горизонтали вертикальные детали исходной функции.
- 4. $g^{\dagger}g^{-}f$ вертикальные детали горизонтальных деталей исходной функции. Если исходная функция достаточно гладкая, и интенсивность разрывов мала, то это слагаемое по сравнению с $h^{\dagger}h^{-}f$ мало, им можно пренебречь.

На практике, можно заменить $Im(H^{\dagger}G^{-}f)=Im(G^{\dagger}H^{-}f)=(h^{\dagger}h^{-}f+g^{\dagger}g^{-}f)$ на $Re(H^{\dagger}H^{-}f)=(h^{\dagger}h^{-}f)+O(\varepsilon^{2})$. Все эти данные вычисляются при преобразовании, и подобная замена не влечет практического усложнения алгоритма.

Все эти данные вычисляются при преобразовании, и подобная замена не влечет практического усложнения алгоритма.

$$\begin{cases} H^{\dagger}H^{-}f = (h^{\dagger}h^{-}f - O(\varepsilon^{2})) + \varepsilon(h^{\dagger}g^{-}f + g^{\dagger}h^{-}f)i; \\ H^{\dagger}G^{-}f = (h^{\dagger}g^{-}f - O(\varepsilon^{2})) + \varepsilon(h^{\dagger}h^{-}f)i; \\ G^{\dagger}H^{-}f = (g^{\dagger}h^{-}f - O(\varepsilon^{2})) + \varepsilon(h^{\dagger}h^{-}f)i; \end{cases}$$

В качестве индикаторов сингулярностей можно рассматривать мнимую часть первого выражения и вещественную часть второго. Для локализации сингулярностей к ним можно, например, применять детектор Канни. Предположим теперь, что f(x,y)>0. Через Ωf обозначим абсолютную величину разрывов функции, описывающей течение. Если функция гладкая, то $\Omega f=0$. Соответственно для ее дискретизации $\Omega f_{\rm дискр\approx 0}$. Положим $C(x,y)=\frac{\Omega f}{f}$. Введем новые дискретные функции:

$$\begin{cases} dat_{xy} := |\frac{Im(H^{|}H^{-}f)}{Re(H^{|}H^{-}f)}| = \varepsilon|\frac{(h^{|}g^{-}f+g^{|}h^{-}f)}{(h^{|}h^{-})}| + O(\varepsilon^{2}); \\ dat_{x} := \varepsilon^{2}|\frac{Re(H^{|}G^{-}f)}{Im(H^{|}G^{-}f)})| = \varepsilon|\frac{(h^{|}g^{-}f)}{(h^{|}h^{-}f)})| + O(\varepsilon^{2}); \\ dat_{y} := \varepsilon^{2}|\frac{Re(G^{|}H^{-}f)}{Im(G^{|}H^{-}f)}| = \varepsilon|(\frac{(g^{|}h^{-}f)}{(h^{|}h^{-}f)}| + O(\varepsilon^{2}); \end{cases}$$

Взаимодействие слагаемых в числителе первого выражения может быть очень сильным, вплоть до полного сокращения. Пример:

$$f(x,y) = \{1, x > y3, x \le y.$$

Поэтому первое выражение можно эффективно применять, только если предполагается, что все разрывы близки к вертикальным и горизонтальным, в противном случае часть разрывов не будет обнаружена.

Если предположить, что разрывы не размазываются, то числитель второго выражения эквивалентен $a\Omega f$, там, где сильные разрывы не близки к горизонтальному направлению, и - нулю иначе. Аналогично числитель третьего выражения эквивалентен $a\Omega f$ (a>0 коэффициент подобия), там, где сильные разрывы не близки к вертикальному направлению, и - нулю иначе. Знаменатель $h^{\dagger}h^{-}f\sim f$. Можно сформулировать следующие

эвристические условия:

$$\begin{cases} dat_{xy} := \varepsilon |\frac{(h^|g^-f+g^|h^-f)}{(h^|h^-f)}| = \varepsilon \frac{\alpha \Omega f}{f} \approx a \varepsilon C(x,y) - \\ \text{ только горизонтальные и вертикальные разрывы } \\ dat_x := \varepsilon |\frac{(h^|g^-f)}{(h^|h^-f)}| = \varepsilon \frac{\alpha \Omega f}{f} \approx a \varepsilon C(x,y) - \\ \text{ нет горизонтальных разрывов } \\ dat_y := \varepsilon |\frac{(g^|h^-f)}{(h^|h^-f)}| = \varepsilon \frac{\alpha \Omega f}{f} \approx a \varepsilon C(x,y) - \\ \text{ нет вертикальных разрывов} \end{cases}$$

Определим функцию: $test(dat,c)_{i,j}:= \begin{cases} 1, dat_{i,j} \geq \alpha \varepsilon C \\ 0, dat_{i,j} < \alpha \varepsilon C. \end{cases}$ то есть для

каждого массива dat функция test отображают соответствующие разрывы интенсивности больше С.

Таким образом, чтобы получить все сильные разрывы с интенсивностью больше C, достаточно рассмотреть $res(C) = test(dat_x, C) \lor test(dat_y, C)$

4 Детектор на основе оценки "липшицевой регулярности" изучаемых полей

4.1 Липшицева регулярность функции и скорость убывания вейвлет-коэффициентов

Определим понятие вейвлет-преобразования. Функцию $\psi(x)$ будем называть вейвлетом (wavelet).

Определение 1 Будем предпологать, что $\psi(t) \in L^2(R)$, удовлетворяет соотношению допустимости

$$\int \psi(t) \, dt = 0$$

Образуем семейство вейвлетов

$$\psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \,\psi(\frac{x-b}{a}),\tag{6}$$

4 ДЕТЕКТОР НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ "ЛИПШИЦЕВОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ"ИЗУЧАЕМЫХ ПОЛЕЙ

4.2 Описание детектора на основе оценки показателя Липшица.

где $a,b \in R, a \neq 0$. Тогда непрерывное вейвлет-преобразование на этом семействе вейвлетов определено:

$$(T^{wav}f)(a,b) = \langle f, \psi^{a,b} \rangle = \int f(x) |a|^{-1/2} \overline{\psi(\frac{x-b}{a})}.$$

Параметры a и b можно считать коэффициентами масштабирования и сдвига исходного материнского вейвлета соответственно.

В работах Холшнайдера и Чамичана [1] разработана техника, для изучения свойств локальной регулярности недифференциреумой функции Римана при помощи вейвлетного преобразования. Разработанный алгоритм опирается на ниже приведенные теоремы.

Теорема 1 Предположим, что $\int dx(1+|x|) |\psi(x)| < \infty$ и $\widehat{\psi}(0) = 0$. Если ограниченная функция f непрерывна по Липшицу c показателем $\alpha, 0 \leq \alpha$ если существует полином p_{x_0} , $deg(p_{x_0}) = |\alpha|$, m. e.

$$|f(x) - p_{x_0}(x_0)| \le C |x - x_0|^{\alpha},$$

то ее вейвлет-преобразование удовлетворяет оценке

$$|T^{wav}(a,b)| = |\langle f, \psi^{a,b} \rangle| \le C' |a|^{\alpha + 1/2}. \tag{7}$$

И обратная теорема.

Теорема 2 Предположим, что ψ имеет компактный носитель. Преположим такжее, что $f \in L^2(R)$ ограниченная и непрерывна. Если для некоторого $\alpha \in]0,1[$ вейвлет-преобразование функции f удовлетворяет оценке

$$\left| \langle f, \psi^{a,b} \rangle \right| \le C \left| a \right|^{\alpha + 1/2} \tag{8}$$

то f непрерывна по Гелдеру c показателем α .

4.2 Описание детектора на основе оценки показателя Липшица.

В данной работе была рассмотрена задача об одномерном нестационарном течении газа с мгновенным выделением тепла на некотором внутреннем участке. Возникающие задачи о распаде разрыва рассчитываются

4 ДЕТЕКТОР НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ "ЛИПШИЦЕВОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ"ИЗУЧАЕМЫХ ПОЛЕЙ

4.2 Описание детектора на основе оценки показателя Липшица.

методом сквозного счута по схеме Годунова первого порядка точности. Далее к полученным численным массивам D-плотности, V-скорости, Т- температуры, P-давления потока применяются различные методы выявления неоднородностей данных, в том числе исследуемый в данной работе метод выделения особенностей с помощью комплекснозначного вейвлетного преобразования . Рассматривались стандартное вейвлет-преобразование (с прореживанием коэффициентов вдвое) и метод без прореживания. Нетрудно показать, что "лишние" коэффициенты, возникающие при вейвлетразложения без прореживания есть различные функции от коэффициентов с прореживанием. Обозначим $c_{n,j}$ - стандартные коэффициенты, и $\tilde{c}_{n,j}$ - смешанные, или "полуцелые". Очевидно, что при n=2N $\tilde{c}_{2N,j}=c_{N,j}$, в случае если n=2N+1:

$$\tilde{c}_{2N+1,j} = \langle f(x); \psi(\frac{x}{2} - \frac{2N+1}{2}) \rangle = \langle f(x); \sum_{k} \langle \psi(\frac{x}{2} - \frac{2N+1}{2}); \psi(\frac{x}{2} - \frac{2k}{2}) \rangle \ \psi(\frac{x}{2} - k) \rangle$$

$$+ \sum_{k} \langle \psi(\frac{x}{2} - \frac{2N+1}{2}); \phi(\frac{x}{2} - \frac{2k}{2}) \rangle \ \phi(\frac{x}{2} - k) \rangle$$

$$= \langle f(x); \sum_{k} a_{2N+1,k} \psi(\frac{x}{2} - k) + \sum_{k} b_{2N+1,k} \phi(\frac{x}{2} - k) \rangle,$$

где $a_{2N+1.k} = ($ пользуясь соотношением двойственности)

$$\begin{split} &= \langle \psi(\frac{x}{2} - \frac{2N+1}{2}); \psi(\frac{x}{2} - \frac{2k}{2}) \rangle \\ &= \langle \sum_{l} g[l] \ \psi(x - (2N+1) - l); \sum_{m} g[m] \ \psi(x - 2k - m) \rangle \\ &= \sum_{l} g[l] \ g[2N - 2k + l + 1] = g * g(2k - 2N - 1); \end{split}$$

аналогично получаем выражения для $b_{2N+1,k}$:

$$b_{2N+1,k} = q * h(2k-2N-1);$$

Тогда
$$\tilde{c}_{2N+1,j} = \sum_{k} a_{2N+1,k} c_{k,j-1} + \sum_{k} b_{2N+1,k} d_{k,j-1}$$
 (9)

Аналогично получаем соотношения для "полуцелого" скейлинг-разложения соотношения на коэффициенты:

$$\begin{split} \dot{d}_{2N+1,j} &= \\ &= \langle f(x); \sum_{k} p_{2N+1,k} \psi(\frac{x}{2}-k) + \sum_{k} q_{2N+1,k} \phi(\frac{x}{2}-k) \rangle, \\ \text{где } p_{2N+1,k} &= h * g(2k-2N-1); \\ q_{2N+1,k} &= h * h(2k-2N-1); \\ \text{Соответственно } \tilde{d}_{2N+1,j} &= \sum_{k} p_{2N+1,k} c_{k,j-1} + \sum_{k} q_{2N+1,k} d_{k,j-1} \end{split} \tag{10}$$

Иными словами "полуцелые" коэффициенты не должны приносить дополнительной информации о поведении функции. Заметим также, что введение этих коэффициентов, хотя они и не несут новой информации, делает работу детектор более точной.

По результатам теоретических исследований, на Matlab 6.5, был реализован алгоритм, позволяющий находить точки сингулярностей газодинамических величин с любой, наперед заданной точностью, а так же определять их типы в смысле непрерывности по Липшищу.

4.3 Описание алгоритма

Программа логически разбита на две независимые части: реализация классического многоуровневого вейвлет-разложения с прореживанием вдвое исходных коэффициентов на каждом уровне, и пробный метод декомпозиции без прореживания. К полученному массиву данных применяется детектор сингулярности одиноковый в обоих случаях. Сперва происходит отбор некоторого множества точек, в которых скорость роста функции больше заданного ε - edge_detector, далее, к полученному "подозрительному" множеству применяется метод классификации точек, основанный на Липшецевой регулярности функции - type_detector. Такой подход ускоряет работу детектора в целом, type_detector применяется к "подозрительному" множеству вместо всего массива. Основной принцип работы type_detector отбор тех точек газодинамического поля данных, в которых показатель Липшецевой регулярности α соответствует заданному наперед значению, или промежутку значений. В терминах вейвлет-преобразований

4.3 Описание алгоритма

это означает, что при рескейлинге с параметром a коэффициенты вейвлет-преобразования растут пропорционально $|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}$ (Теорема 2). В случае реализации дискретного вейвлет-преобразования коэффициент рескейлинга равен 2 при переходе с предыдущего уровня к последующему. То есть считаем что $\left|\langle f,\psi^{2^i,b}\rangle\right|$ порядка $C\left|2^i\right|^{\alpha+1/2}$.

Тогда показатель α при переходе с предыдущего уровня к последующему можно численно определить как:

$$\alpha \approx log \left| \frac{\langle f, \psi^{2^{i+1}, b} \rangle}{\langle f, \psi^{2^{i}, b} \rangle} \right| - \frac{1}{2}$$
 (11)

В качестве материала для опытов выбрана последовательность вейвлет-разложений до 3 уровня. Для пары вейвлет-преобразований (WT) 3-го и 2-го уровней высчитывается значения показателя $\alpha = \alpha_{3,2}$ (WTLevel 3 \mapsto WTLevel 2) по формуле (11). Для поиска ударных волн в экспериментах выбирались границы из интервала $-1 < \alpha < 0$; в тех областях, где можно аналитически рассчитать теоретический угол наклона ударной волны, он равен $\varphi \approx 49.1$, угол наклона УВ подсчитанный на полученных численных значениях $\varphi \approx 50.0$.

Стоит пояснить как работает edge_detector: результатом данного метода является бинарное поле, где 1 - соответствуют "подозрительные" точки, в которых предположительно наблюдается нерегулярность и 0 - регулярные точки в рамках заданной точности ε . Особо стоит отметить что, параметр ε должен быть задан соответственно поставленной задаче. Выбор ε обуславливается ростом функции вблизи выбранной точки. Как показывают результаты, $Im(\varphi)$ чувствительна к областям ударных волн, волн разряжения и контактных разрывов, то есть значение коэффициентов $c_{j,k}$ гораздо больше в точках сингулярности числового поля чем в гладких областях.

$$c_{j,k} = Im(\langle f(x), \varphi_{j,k}(x) \rangle)$$
(12)

Тогда рассмотрим мнимую часть коэффициента scale-разложения для линейной функции x:

$$C_{j,k} = Im(\langle x, \varphi_{j,k}(x) \rangle) \tag{13}$$

В данной работе в качестве ε предлагается взять отношение

$$\varepsilon = \frac{c_{j,k}(x_0)}{C_{j,k}(x_0)};$$

которое характеризует скорость роста функции вблизи точки относительно линейной функции. Такое поведение функции $Im(\varphi)$ обуславливается декомпозицией комплексной scale-функции на действительную и мнимую части, которые в своем роде сами по себе играют роль пары scale-функции и вейвлета соответственно.

На рисунках Рис.4.1 и Рис.4.2 представлен окончательный результат всего алгоритма в целом (edge_detector, и type_detector). Рис.4.1. - при классической реализации вейвлет-разложения, Рис.4.2 - при пробном методе. Интенсивность цвета соответствует Липшецеву показателю регулярности, рассчитаному при переходе от WTLevel3 к WTLevel2 по формуле (11) для всех точек газодинамического поля. Метод классической реализации преобразование дает ускорение в 16 раз по сравнению с пробным методом без прореживания. В то время как второй метод позволяет более четко выявить границы разрывов. На рисунках приведенных в конце текста, показан результат работы edge_detector для различных значений параметра ε . Рис.5.1 - соответствует первому уровню вейвлет-преобразования, в случае классической реализации, Рис.5.2 - второй уровень. Аналогичные результаты показаны на Рис.5.3 и 5.4 для пробного метода.

5 Описание опытов.

Рассматривается двумерная стационарная задача о сверхзвуковом обтекании тонкого клина в узкой трубе.

Используя описанные выше методы, попытаемся установить расположение разрывов в исследуемом течении. Однако, в некоторых областях течения, можно получить аналитическое решение.

Аналитическое решение, позволяющее определить расположение ударной волны в вершине клина изложенио в [Л. И. Седов. Механика сплошной

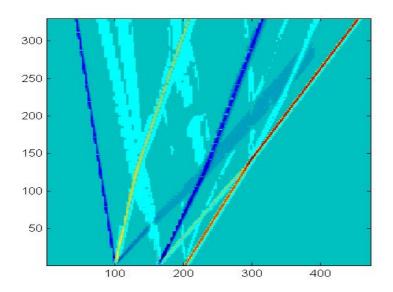


Рис. 4.1 Основной результат работы детектора сингулярности. Классический алгоритм.

среды. Наука, 1970г. Том 1. Стр. 388-392.(потом надо вынести в библиографию)], а угол наклона β ударной волны находится из уравнения (6.37). В данной задаче угол наклона вычисленной ударной волны оказался равен 47,2 град. при теоретическом значении 47,4 град.

Положение волны разрежения находится при решении задачи Прандтля-Мейера и определяется местной скоростью звука. Отклонение вычисленных углов наклона границ волны разрежения от теоретических оказалось в пределах 2 град.

5.1 Результаты, полученные по первому методу.

Использовался комплексный симметричный вейвлет Добеши с шестью ненулевыми коэффициентами. Далее в этом пункте $C^* = A\alpha\varepsilon$.

Из рисунков 1.1 и 1.2 видно, что сначала проявляются ударные волна,

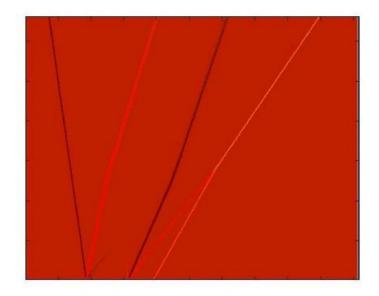


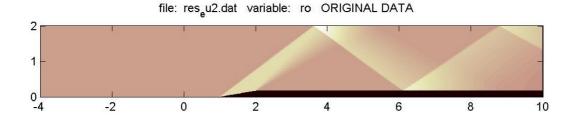
Рис. 4.2 Основной результат работы детектора сингулярности. Пробный алгоритм.

особенно в той области, где они не взаимодействуют с волнами разрежения.

Далее (рисунки 1.3-1.6) начинает проявляться волна разрежения, причем, чем выше чувствительность, тем дальше можно проследить еч границы, но и шумов появляется больше.

5.2 Результаты, полученные по второму методу.

Хотя основной целью работы является создание детектора, который можно будет ис-пользовать внутри вычислительных алгоритмов, без участия аналитика, на практике мо-жет потребоваться быстрый алгоритм, который позволяет определить некоторые свойства исследуемого течения. Напомним, что второй метод позволяет исследовать течения с помощью произвольных вейвлетов, однако не позволяет (на данном этапе исследо-



Распределение плотности в области изучаемого течения.

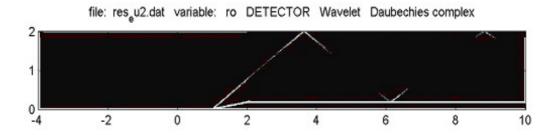


Рис. 1.1 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,003$.

ваний) ус-тановить связь между порогом чувствительности ($C^*=\alpha C$) и интенсивностью разрывов и выдает результат на сетке вдвое меньшего масштаба. Для начала рассмотрим вейвлет Хаара: $h=[0.5,\,0.5];\,g=[0.5,\,-0.5]$. Для всех дальнейших опытов $\varepsilon=0,0001$.

Как видно из рисунка 2.1, даже этот простейший вейвлет позволяет определить распо-ложение ударных волн. Однако, границы волны разрежения (рисунки 2.2 и 2.3) постепен-но закругляются, что не соответствует действительности. Этот результат уступает полу-ченным ранее. Наиболее же интересный результат заключается в том, что при сравнительно большом пороге чувствительности можно выделить все области, в которых действуют ударные волны или волны разрежения (рисунки 2.4 и 2.5). Од-

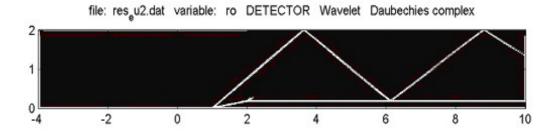


Рис. 1.2 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,001$.

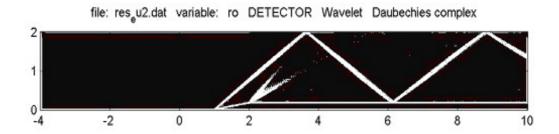


Рис. 1.3 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0007$.

нако следует отметить, что ударные волны уже немного размазываются, что видно при сравнении рисунков 2.1 и 2.4.

Вообще говоря, второй метод может быть весьма полезным, если удастся так подоб-рать вейвлет, что, при изменении порога чувствительности в широком диапазоне, будут отображаться одни и те же особенности функции. Сравним результаты, полученные с использованием вещественных вейвлетов Добеши (нет свойства симметрии) с 4, 10 и 20 коэффициентами.

• 4 коэффициента (рисунки 2.6, 2.7, 2.8). Результаты качественно близки к полученным по первому методу, но более зашумленные.

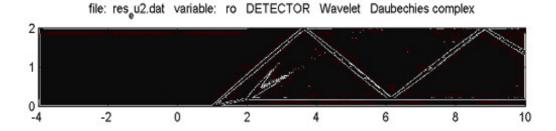


Рис. 1.4 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0007$ (границы).

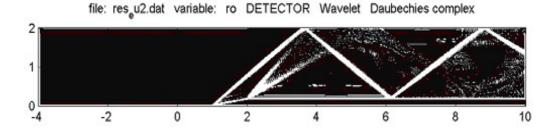


Рис. 1.5 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0004$.

- 10 коэффициентов(рисунки 2.9, 2.10, 2.11). Видны только ударные волны.
- 20 коэффициентов (рисунки 2.12, 2.13, 2.14). Видны только ударные волны, но они сильно размазаны.

Таким образом, если надо выделить только ударные волны или разделить ударные волны и волны разрежения, оптимальным для использования является фильтр с 10 коэффициентами. Этот результат можно объяснить следующим образом: исходная функция локально апроксимируется полиномами, приччм волна разрежения апроксимируется полиномами

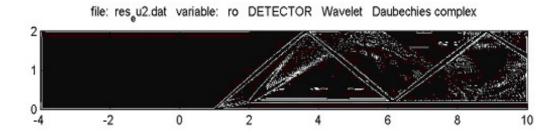


Рис. 1.6 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0004$ (границы).

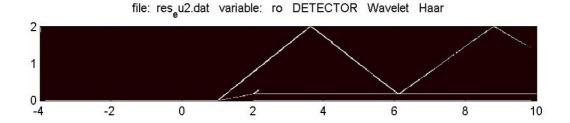


Рис. 2.1 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,02$.

меньшей степени, чем ударная волна. Вейвлет, фильтр которого имеет 10 ненулевых коэффициентов, обладает достаточным числом нулевых моментов, чтобы не замечать волну разрежения, но реагирует на ударную волну и имеет недостаточно мощный носитель, что-бы сильно размазать разрыв.

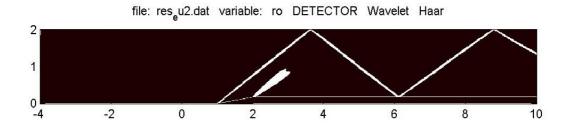


Рис. 2.2 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,004$.

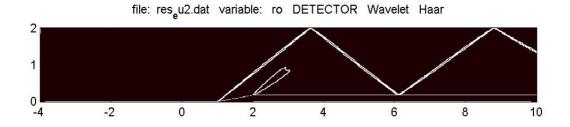


Рис. 2.3 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,004,$ только границы.

6 Список используемой литературы

- 1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Москва-Ижевск:НИЦ "Регулярная и хоатическая динамика", 2004,464стр.
- 2. Stephane Mallat. A Wavelet Tour Of Signal Processing.
- 3. X.-P. Zhang, M. Desai, Y.-N. Peng. Orthogonal Complex Filter Banks and Wavelets: Some Properties amd Design.
- 4. Adhemar Bultheel. Learning To Swim in Sea of Wavelets.

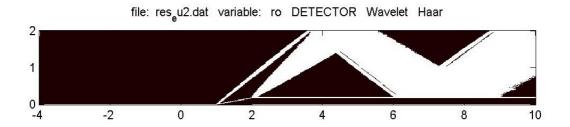


Рис. 2.4 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0004$.

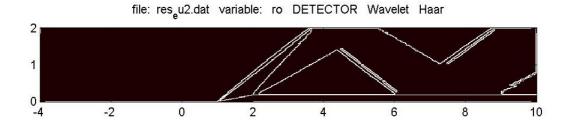


Рис. 2.5 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0004,$ только границы.

5. Chung-Liang Du and Wen-Liang Hwang. Singularity Detection and Characterization with Complex-Valued Wavelets and their Applications.

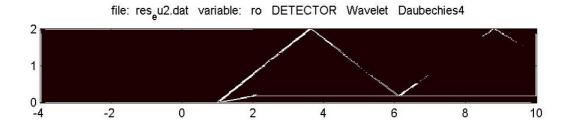


Рис. 2.6 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,008,$ только границы.

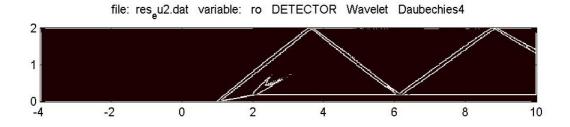


Рис. 2.7 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0004,$ только границы.

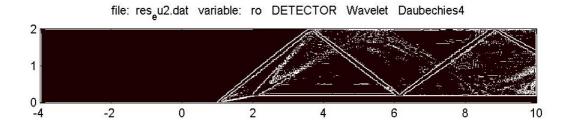


Рис. 2.8 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,00015,$ только границы.

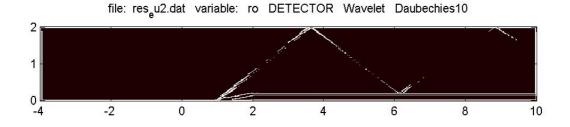


Рис. 2.9 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,004,$ только границы.

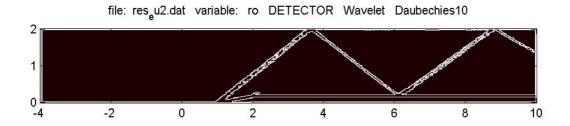


Рис. 2.10 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0004,$ только границы.

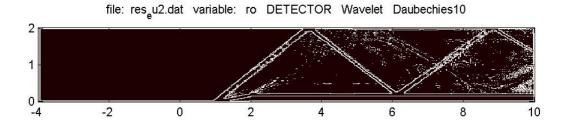


Рис. 2.11 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,00015,$ только границы.

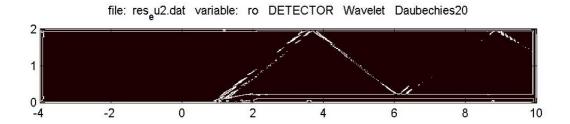


Рис. 2.12 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,002,$ только границы.

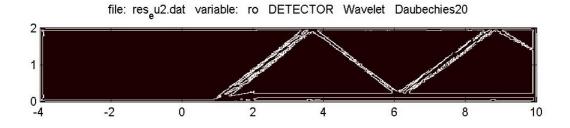


Рис. 2.13 Применение детектора с чувствительностью $C^*=0,0004,$ только границы.

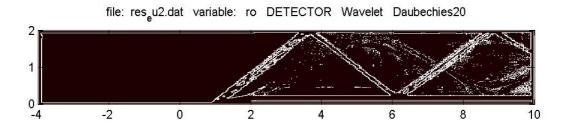


Рис. 2.14 Применение детектора с чувствительностью С*=0,00015, только границы.

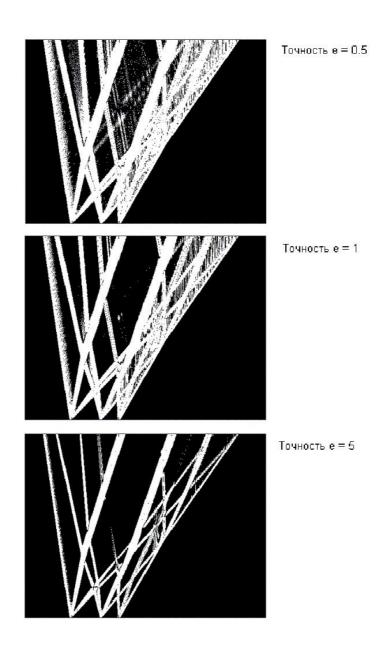


Рис. 5.1 Результат работы детектора сингулярности. Классический алгоритм, первый уровень.

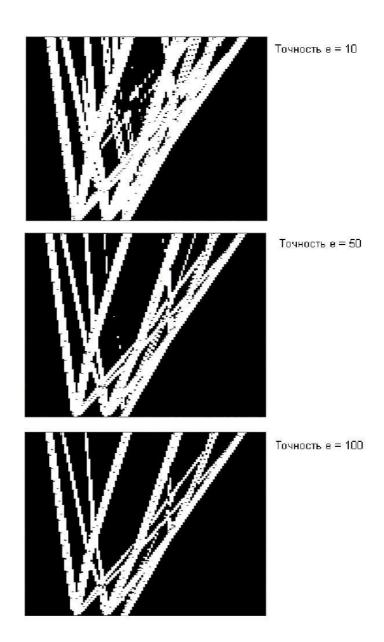


Рис. 5.2 Результат работы детектора сингулярности. Классический алгоритм, второй уровень.

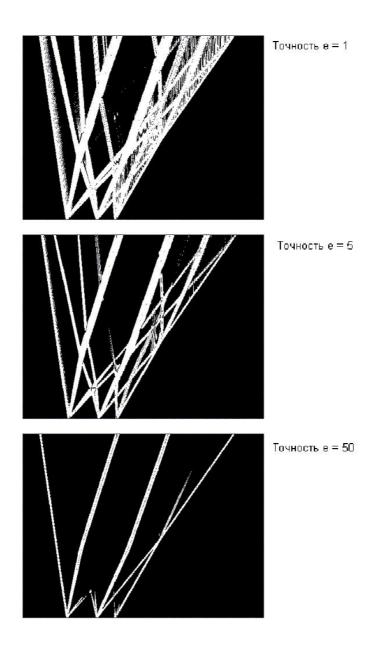


Рис. 5.3 Результат работы детектора сингулярности. Пробный алгоритм, первый уровень.

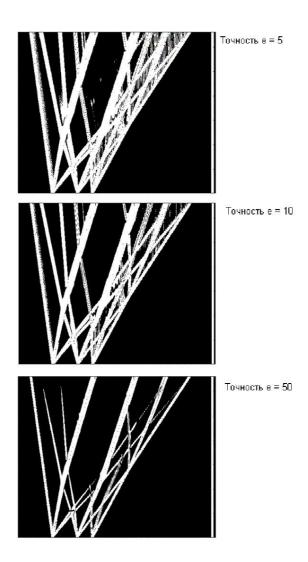


Рис. 5.4 Результат работы детектора сингулярности. Пробный алгоритм, второй уровень.