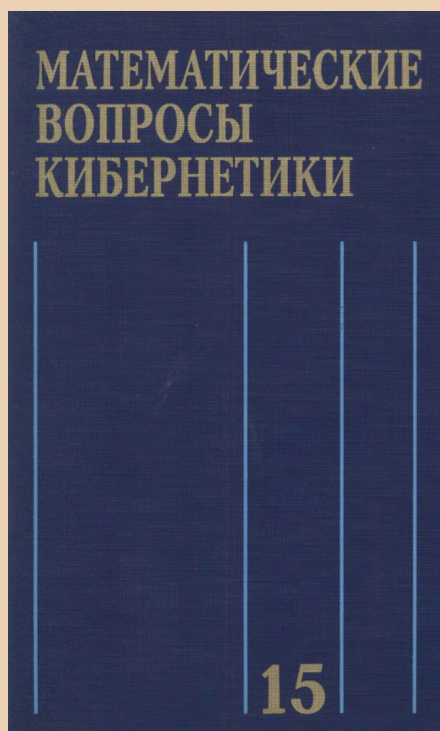




Е. Г. Красулина

**О сложности
реализации системы
всех симметрических
функций в классе
контактно-вентильных
схем**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Красулина Е. Г. О сложности реализации системы
всех симметрических функций в классе контактно-
вентильных схем // Математические вопросы кибернетики.
Вып. 15. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — С. 165–182. URL:
<http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2006-165>

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ВСЕХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ КОНТАКТНО-ВЕНТИЛЬНЫХ СХЕМ

Е. Г. КРАСУЛИНА

(МОСКВА)

Одной из основных задач теории синтеза схем является построение минимальных схем.

Известны результаты К. Э. Шеннона [6] и Дж. Риордана и К. Э. Шеннона [4] о том, что для почти всех булевых функций от n аргументов сложность минимальной схемы экспоненциально зависит от n .

Значительные трудности (см., например, [1–3]) возникают на этапе доказательства минимальности. Поэтому к настоящему времени далеко не для всех даже простых, но представляющих интерес схем установлена минимальность.

В настоящей работе рассматривается задача реализации всех симметрических функций в классе контактно-вентильных схем. Строится асимптотически минимальная контактно-вентильная схема, реализующая все симметрические функции.

Симметрической назовем функцию, которая не меняется ни при какой перестановке своих аргументов.

Число a называется рабочим числом симметрической функции f , если f равна единице на любом наборе, имеющем a единиц.

Пусть $\mathcal{A} \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Через $S_n^{\mathcal{A}}$ обозначим симметрическую функцию от n переменных, у которой множество рабочих чисел совпадает с $\mathcal{A}$.

Контактно-вентильной схемой называется граф без петель с выделенными вершинами, каждое ребро которого есть либо контакт с приписанной буквой из конечного алфавита $\{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$, либо вентиль (v, w) , проводящий в направлении от вершины v к вершине w . Выделенные вершины называются полюсами схемы.

Множество всех полюсов разобьем на два подмножества — входов и выходов.

Будем рассматривать реализацию симметрических функций в классе контактно-вентильных схем с одним входом. Элементом назовем контакт или вентиль. Через $v_{\mathcal{A}}$ обозначим полюс в контактно-вентильной схеме, где реализуется $S_n^{\mathcal{A}}$.

Пусть S — некоторая контактно-вентильная схема. Сложностью схемы S будем называть число элементов в схеме S и обозначать $L(S)$.

Символом Σ_n обозначим систему всех симметрических функций от n переменных, а символом $L(\Sigma_n)$ обозначим сложность Σ_n , которая определяется следующим образом:

$$L(\Sigma_n) = \min_{S \text{ реализует } \Sigma_n} L(S).$$

Теорема 1.

$$L(\Sigma_n) \leq 7 \cdot 2^{n-1} + n^2 - n - 3.$$

Доказательство. 1. Систему всех симметрических функций $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^n$ реализуем при помощи «решетки» (см. [5]), обозначим эту систему через Σ_0^n . Она имеет один вход и $n+1$ выходов $v_0, v_1, \dots, v_n$, где реализуются функции $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^n$ (рис. 1),

$$L(\Sigma_0^n) = n(n+1).$$

2. Функцию $S_n^{0,n}$ реализуем, добавляя к Σ_0^n два вентиля ($v_0, v_{0,n}$) и ($v_n, v_{0,n}$). Полученную схему обозначим через Σ_1^n ,

$$L(\Sigma_1^n) = n(n+1) + 2.$$

3. Всякую $S_n^{\mathfrak{A}}$ такую, что $\mathfrak{A} \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\mathfrak{A} = \{b, d\}$ (т. е. $\mathfrak{A}$ содержит два числа), получаем добавлением к схеме Σ_1^n двух вентилях ($v_b, v_{b,d}$), ($v_d, v_{b,d}$). Схему, реализующую все такие $S_n^{\mathfrak{A}}$, обозначим Σ_2^n ,

$$L(\Sigma_2^n) = n(n+1) + 2 + 2C_{n-1}^2.$$

4. Пусть уже построена схема Σ_r^n (содержащая в качестве подсхемы Σ_2^n), которая реализует все $S_n^{\mathfrak{B}_i}$ такие, что $\mathfrak{B}_i \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\mathfrak{B}_i$ содержит не более r чисел, $r \leq n-2$. Всякую $S_n^{\mathfrak{A}}$ ($\mathfrak{A} \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\mathfrak{A}$ содержит $r+1$ чисел, $r \leq n-2$) реализуем, добавляя два вентиля ($v_{\mathfrak{B}_i}, v_{\mathfrak{A}}$), ($v_{\mathfrak{B}_j}, v_{\mathfrak{A}}$), где $\mathfrak{B}_i \neq \emptyset$, $\mathfrak{B}_j \neq \emptyset$, $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_i \cup \mathfrak{B}_j = \mathfrak{A}$. Схему, реализующую все такие $S_n^{\mathfrak{A}}$, обозначим Σ_{r+1}^n . Очевидно, что

$$L(\Sigma_{r+1}^n) = L(\Sigma_r^n) + 2C_{n-1}^{r+1},$$

$$L(\Sigma_{n-1}^n) = L(\Sigma_2^n) + 2(C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + \dots + C_{n-1}^{n-1}).$$

5. Всякую тройку функций $S_n^{0,\mathfrak{A}}$, $S_n^{\mathfrak{A},n}$, $S_n^{0,\mathfrak{A},n}$ ($\mathfrak{A} \subset \{1, \dots, n-1\}$) реализуем, добавляя $2^{n-1} - 1$ раз к схеме Σ_{n-1}^n конструкции специального вида (рис. 2), состоящие из пяти элементов: двух контактов ($v_{0,\mathfrak{A}}, v_{0,\mathfrak{A},n}$) = $\bar{x}_n$, ($v_{\mathfrak{A},n}, v_{0,\mathfrak{A},n}$) = x_n и трех вентилях ($v_{\mathfrak{A}}, v_{0,\mathfrak{A}}$), ($v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A},n}$), ($v_{0,\mathfrak{A}}, v_{0,\mathfrak{A},n}$). В результате будут реализованы все симметрические функции, и

$$\begin{aligned} L(\Sigma_n^n) &= L(\Sigma_{n-1}^n) + 5(2^{n-1} - 1) = \\ &= L(\Sigma_2^n) + 2(C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) + 5(2^{n-1} - 1) = \\ &= n(n+1) + 2 + 2(C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) + 5(2^{n-1} - 1) = \\ &= n(n+1) + 2 + 2(2^{n-1} - 1 - (n-1)) + 5(2^{n-1} - 1) = \\ &= 7 \cdot 2^{n-1} + n^2 - n - 3. \end{aligned}$$

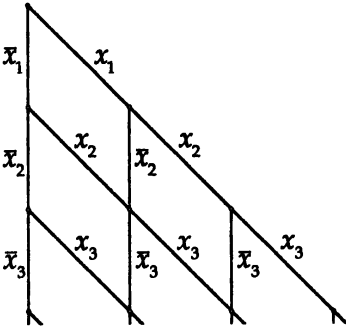


Рис. 1

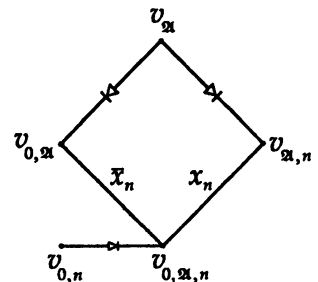


Рис. 2

Пусть $\Omega_n = \Sigma_n \setminus \{S_n^0, S_n^n, S_n^{0,n}, S_n^1, S_n^{0,1}, S_n^{1,n}, S_n^{0,1,n}, S_n^{n-1}, S_n^{0,n-1}, S_n^{n-1,n}, S_n^{0,n-1,n}, S_n^{1,\dots,n-1}, S_n^{0,\dots,n-1}, S_n^{1,\dots,n}, S_n^{0,\dots,n}\}$.

Всякую контактно-вентильную схему, реализующую Ω_n , будем называть схемой типа Δ_n , через W_n обозначим множество выходных полюсов такой схемы.

Будем говорить, что полюс v контактно-вентильной схемы обладает свойством *избыточности*, если к этому полюсу примыкает один ориентированный к v вентиль (w, v) и, быть может, вентили $(v, w_1), \dots, (v, w_t)$, проводящие в направлении от v , и не примыкает ни одного контакта.

Лемма 1. *Во всякой минимальной схеме типа Δ_n никакой выходной полюс v из W_n не обладает свойством избыточности.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. найдется минимальная схема Δ типа Δ_n , реализующая Ω_n , в которой существует полюс v из W_n , обладающий свойством избыточности. Тогда к нему примыкает один вентиль (w, v) и, быть может, еще вентили $(v, w_1), \dots, (v, w_t)$.

Если w — вход схемы, то в v будет реализовываться $S_n^{0,1,\dots,n}$, но в Ω_n этой функции нет. Получили противоречие.

Если w — отличная от входа вершина, то в v реализуется та же функция, что и в w . Поэтому вентиль (w, v) можно удалить, а вершины v и w отождествить. Функционирование схемы не изменится, а сложность уменьшится на единицу, что противоречит определению схемы Δ .

Замечание 1. При подсчете числа вентилях, примыкающих к некоторому полюсу w контактно-вентильной схемы, учитываем только вентили, которые входят в полюс w и не учитываем вентили, которые проводят в направлении от полюса w .

Таким образом каждый вентиль в схеме будет учтен один раз.

Лемма 2. *В минимальной контактно-вентильной схеме типа Δ_n к каждому полюсу v из W_n примыкает не менее двух элементов, причем не менее чем через два из них проходят проводящие цепи от входа к этому полюсу.*

Доказательство. I. Пусть в некоторой минимальной схеме Δ типа Δ_n найдется такой полюс v из W_n , что к нему примыкает только один элемент.

1. Если этот элемент — вентиль, а он должен быть ориентирован к v (см. замечание 1), то полюс v обладает свойством избыточности, что согласно лемме 1 приводит к противоречию.

2. Если этот элемент — контакт $x_i^{\sigma_i}$, то в полюсе v из W_n должна быть реализована $S_n^{\mathfrak{A}}$, которую можно представить в виде $x_i^{\sigma_i} f$. Но так представлены могут быть только функции S_n^0 и S_n^n , а в схеме типа Δ_n эти функции не реализуются. Значит, к полюсу v не может примыкать только один элемент, являющийся контактом.

II. Пусть к некоторому полюсу $v_{\mathfrak{A}}$ из W_n ($\mathfrak{A} \subset 0, \dots, n$) примыкает не менее двух элементов, но проводящая цепь между входом, и $v_{\mathfrak{A}}$ проходит только через один из этих элементов e_1 . Тогда $S_n^{\mathfrak{A}}$ может быть представлена в виде $e_1 f$. Возникает ситуация, аналогичная рассмотренной в части I доказательства.

Лемма 3. *Если в минимальной контактно-вентильной схеме типа Δ_n к какому-либо выходному полюсу из W_n примыкают только два элемента, и оба элемента контакты, то это противоположные контакты одного переменного (см. замечание 1).*

Доказательство. Пусть найдется минимальная схема Δ типа Δ_n такая, что к некоторому полюсу v из W_n примыкает два элемента, и эти элементы — контакты $x_i^{\sigma_i}$ и $x_j^{\sigma_j}$, тогда в полюсе v из W_n реализуется функция

$$x_i^{\sigma_i} f_i \vee x_j^{\sigma_j} f_j.$$

Если $x_i^{\sigma_i} \neq x_j^{\sigma_j}$, то в таком виде можно представить только функции S_n^0 , S_n^1 , S_n^{n-1} , S_n^n , $S_n^{0,1}$, $S_n^{n-1,n}$, $S_n^{0,n}$, но этих функций в схеме типа Δ нет. Следовательно, $x_i^{\sigma_i} = x_j^{\sigma_j}$.

Лемма 4. Если в минимальной схеме типа Δ_n пара выходных полюсов из W_n соединена между собой контактом $x_i^{\sigma_i}$, то реализуемые в этих полюсах симметрические функции могут различаться только одним рабочим числом k , а именно: при $\sigma_i = 1$ числом $k = 0$, а при $\sigma_i = 0$ числом $k = n$.

Доказательство. Пусть найдется такая минимальная схема Δ типа Δ_n , в которой полюса $v_{\mathfrak{A}}$ и $v_{\mathfrak{B}}$ из W_n соединены контактом $x_i^{\sigma_i}$. По условию $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$. Значит, существует целое $k \geq 0$ такое, что $k \in \mathfrak{A}$ и $k \notin \mathfrak{B}$.

Если между $v_{\mathfrak{A}}$ и $v_{\mathfrak{B}}$ есть замыкающий контакт x_i ($\sigma_i = 1$), то на наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с k единицами таким, что $\alpha_i = 1$, в полюсе $v_{\mathfrak{B}}$ реализуется функция $S_n^{\mathfrak{B}}(\tilde{\alpha})$, равная единице, что приводит к неправильному функционированию в $v_{\mathfrak{B}}$, так как $k \notin \mathfrak{B}$. Значит, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ могут отличаться одним рабочим числом 0.

Если между $v_{\mathfrak{A}}$ и $v_{\mathfrak{B}}$ есть размыкающий контакт $\bar{x}_i$ ($\sigma_i = 0$), то на наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с k единицами таким, что $\alpha_i = 0$, в полюсе $v_{\mathfrak{B}}$ реализуется функция $S_n^{\mathfrak{B}}(\tilde{\alpha})$, равная единице, что приводит к неправильному функционированию в $v_{\mathfrak{B}}$, так как $k \notin \mathfrak{B}$. Значит, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ могут отличаться только одним рабочим числом n .

Следствие из леммы 4. Пусть $\mathfrak{A} \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$. В минимальной контактно-вентильной схеме типа Δ_n если пары полюсов $v_{\mathfrak{A}}$ и $v_{0,\mathfrak{A}}$; $v_{\mathfrak{A},n}$ и $v_{0,\mathfrak{A},n}$ соединены контактом, то это будет замыкающий контакт, а если соединены пары полюсов $v_{\mathfrak{A}}$ и $v_{\mathfrak{A},n}$; $v_{0,\mathfrak{A}}$ и $v_{0,\mathfrak{A},n}$, то это будет размыкающий контакт.

Пусть $\mathfrak{A} \subset \{1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим контактно-вентильную схему типа Δ_n . Символом $V_{\mathfrak{A}}$ обозначим четверку полюсов $V_{\mathfrak{A}} = \{v_{\mathfrak{A}}; v_{0,\mathfrak{A}}; v_{\mathfrak{A},n}; v_{0,\mathfrak{A},n}\}$ из W_n . Будем говорить, что к этим полюсам примыкает внутренний (внешний) элемент (v, w) , если $v \in V_{\mathfrak{A}}$, $w \notin V_{\mathfrak{A}}$ (соответственно, $v \in V_{\mathfrak{A}}$, $w \in V_{\mathfrak{A}}$).

Лемма 5. В минимальной контактно-вентильной схеме типа Δ_n к каждой четверке полюсов $V_{\mathfrak{A}}$ из W_n ($\mathfrak{A} \subset \{1, \dots, n-1\}$) примыкает не менее двух внутренних элементов.

Доказательство. Пусть найдется такая минимальная схема Δ типа Δ_n , в которой к каждой четверке полюсов $V_{\mathfrak{A}}$ из W_n примыкает только один внутренний элемент e .

1. Элемент e — контакт $x_i^{\sigma_i}$, тогда каждая функция из $V_{\mathfrak{A}}$ может быть представлена в виде $x_i^{\sigma_i} f_i$, и в полюсе $v_{0,\mathfrak{A},n}$ не может быть реализована функция $S_n^{0,\mathfrak{A},n}$, так как либо 0, либо n не будет являться рабочим числом $S_n^{0,\mathfrak{A},n}$.

2. Элемент e — вентиль. Тогда схема Δ может быть представлена в виде (рис. 3), где a — вход схемы, а v_1, v_2, v_3, v_4 — полюса из $V_{\mathfrak{A}}$. Покажем, что этот случай невозможен ввиду того, что такая схема не является минимальной. В самом деле, вентиль e исходит из некоторой вершины w , в w реализуется та же функция, что и в v_1 . Удалим e и склеим две вершины w и v_1 . Полученную схему обозначим через Σ (рис. 4).

Отличие функционирования Σ от Δ может возникнуть лишь в результате появления новых проводимостей, добавляемых из Σ_2 через вершину w в результате изъятия вентиля. Добавоч-

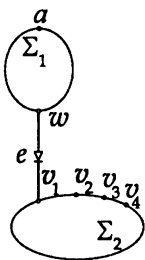


Рис. 3

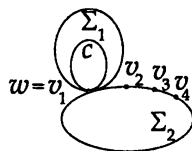


Рис. 4

ные проводимости, однако, возникнуть не могут, так как всякая добавочная цепь с из Σ_1 представляет петлю и не влияет на проводимость.

Лемма 6. Пусть $\mathfrak{A} \subset \{1, \dots, n\}$. В минимальной контактно-вентильной схеме типа Δ_n к каждой четверке полюсов $V_{\mathfrak{A}} = \{v_{\mathfrak{A}}, v_{0,\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A},n}, v_{0,\mathfrak{A},n}\}$ из W_n примыкает не менее шести элементов.

Доказательство. Пусть Δ — минимальная схема типа Δ_n . Рассмотрим произвольные полюса v^1, v^2, v^3, v^4 , и пусть в них реализуются функции $S_n^{\mathfrak{A}}, S_n^{0,\mathfrak{A}}, S_n^{\mathfrak{A},n}, S_n^{0,\mathfrak{A},n}$.

Из леммы 2 следует, что к каждому полюсу из W_n должны примыкать не менее двух элементов. Поэтому одного, двух, трех и четырех элементов не достаточно. Пусть к полюсам v^1, v^2, v^3, v^4 примыкает пять элементов. По лемме 2 по крайней мере три из этих пяти элементов контакты, соединяющие разные пары полюсов, и по лемме 5 по крайней мере два элемента e_1 и e_2 из пяти — это внутренние элементы. Таким образом эти пять элементов могут быть расположены так как показано на рис. 5. Из леммы 3 следует, что $x_i^{\sigma_i} = x_j^{\sigma_j}$ и $x_j^{\sigma_j} = x_k^{\sigma_k}$, и в v^2 реализуется функция $x_i^{\sigma_i} f$.

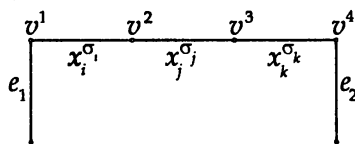


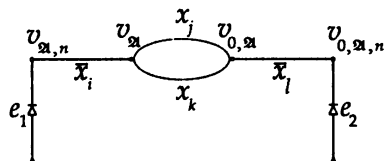
Рис. 5

Но так могут быть представлены только функции S_n^0 и S_n^n , а в схеме Δ их нет.

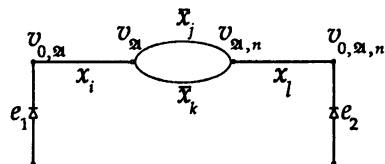
Лемма 7. В контактно-вентильной схеме типа Δ_n для полюсов из W_n не существует конфигураций вида, изображенных на рис. 6.

Доказательство. Рассмотрим случай а) рис. 6. Очевидно, что в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ реализуется функция

$$S_n^{\mathfrak{A}} = \bar{x}_i S_n^{\mathfrak{A},n} \vee \bar{x}_i (x_j \vee x_k) S_n^{0,\mathfrak{A},n}.$$



а)



б)

Рис. 6

По определению системы симметрических функций Ω_n в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ реализуется функция, отличная от функций $S_n^1, S_n^{n-1}, S_n^1, \dots, S_n^{n-1}$. Поэтому в множестве $\mathfrak{A}$ существует число k , где $k \in \{2, \dots, n-2\}$.

Возьмем набор $\tilde{\alpha}$ длины n с k единицами такой, что $\alpha_i = \alpha_l = 1$, тогда в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ реализуется функция $S_n^{\mathfrak{A}}(\tilde{\alpha})$, равная нулю, что неверно, так как k — рабочее число $S_n^{\mathfrak{A}}$.

Рассмотрим случай б) рис. 6. Очевидно, что в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ реализуется функция

$$S_n^{\mathfrak{A}} = x_i S_n^{0,\mathfrak{A}} \vee x_l (\bar{x}_j \vee \bar{x}_k) S_n^{0,\mathfrak{A},n}.$$

По определению системы симметрических функций Ω_n в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ реализуется функция, отличная от функций $S_n^1, S_n^{n-1}, S_n^1, \dots, S_n^{n-1}$. Поэтому в множестве $\mathfrak{A}$ существует число k , где $k \in \{2, \dots, n-2\}$, которое является рабочим числом $S_n^{\mathfrak{A}}$. Возьмем набор $\tilde{\alpha}$ длины n с k единицами такой, что $\alpha_i = \alpha_l = 0$, тогда в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ реализуется функция $S_n^{\mathfrak{A}}(\tilde{\alpha})$, равная нулю, что неверно, так как k — рабочее число $S_n^{\mathfrak{A}}$.

Лемма 8. Если в минимальной контактно-вентильной схеме типа Δ_n к некоторой четверке полюсов $V_{\mathfrak{A}} = \{v_{\mathfrak{A}}, v_{0,\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A},n}, v_{0,\mathfrak{A},n}\}$ из W_n примыкают шесть элементов, то они могут быть расположены только так, как показано на рис. 7.

Доказательство. По лемме 6 к четверке полюсов $V_{\mathfrak{A}}$ примыкает не менее шести элементов. Пусть примыкает ровно шесть элементов. Так как только в двух из четырех полюсов в $v_{0,\mathfrak{A}}$ и $v_{0,\mathfrak{A},n}$ реализуются функции $S_n^{0,\mathfrak{A}}$ и $S_n^{0,\mathfrak{A},n}$, которые на нулевом наборе обращаются в единицу, то необходимо, чтобы в схеме существовал внутренний элемент $(*, v_{0,\mathfrak{A}})$ или $(*, v_{0,\mathfrak{A},n})$. Если такой элемент один, то должен существовать элемент между $v_{0,\mathfrak{A}}$ и $v_{0,\mathfrak{A},n}$.

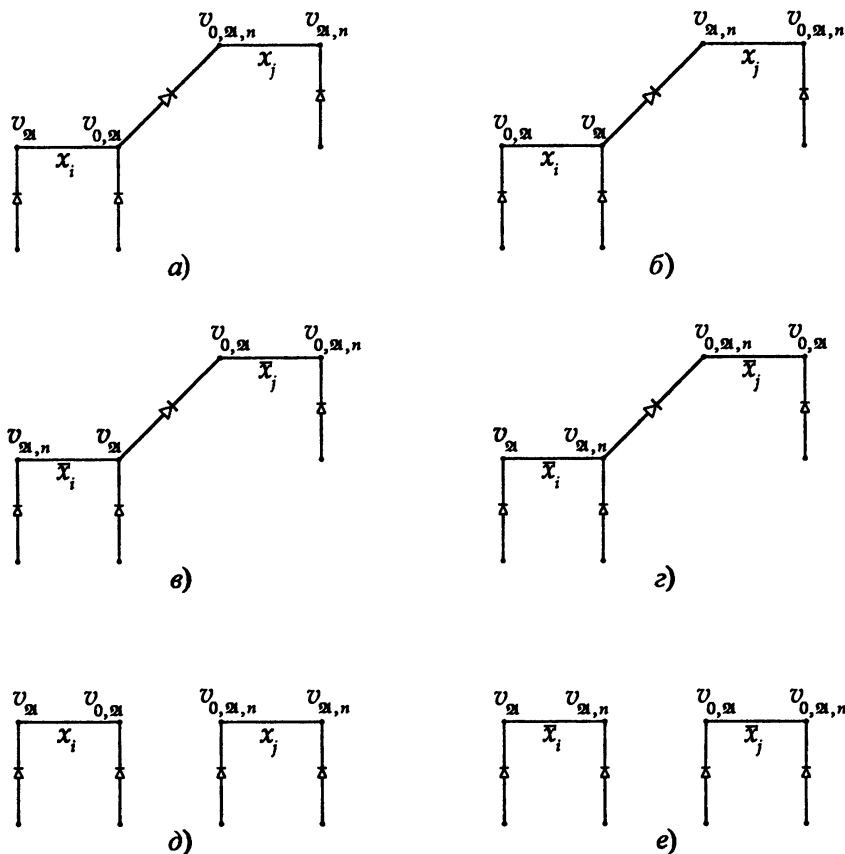


Рис. 7

Аналогично, так как только в двух из четырех полюсов в $v_{\mathfrak{A},n}$ и $v_{0,\mathfrak{A},n}$ реализуются функции $S_n^{\mathfrak{A},n}$ и $S_n^{0,\mathfrak{A},n}$, которые на нулевом наборе обращаются в единицу, то необходимо, чтобы в схеме существовал внутренний элемент $(*, v_{\mathfrak{A},n})$ или $(*, v_{0,\mathfrak{A},n})$. Если такой элемент один, то должен существовать элемент между $v_{\mathfrak{A},n}$ и $v_{0,\mathfrak{A},n}$.

Из сказанного выше следует, что для правильного функционирования в полюсах $v_{0,\mathfrak{A}}$, $v_{\mathfrak{A},n}$, $v_{0,\mathfrak{A},n}$ необходимо, чтобы к ним примыкали элементы одним из пяти способов, указанных на рис. 8.

З а м е ч а н и е 2. Так как только шесть элементов примыкают к четверке полюсов $V_{\mathfrak{A}}$, то два из них должны быть внешними. По следствию из леммы 4 это могут быть два контакта из четырех: $(v_{0,\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}})$, $(v_{0,\mathfrak{A}}, v_{0,\mathfrak{A},n})$, $(v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A},n})$, $(v_{\mathfrak{A},n}, v_{0,\mathfrak{A},n})$.

Рассмотрим каждый из пяти случаев рис. 8.

С л у ч а й 1. Элемент $e_3 = (v_{0,\mathfrak{A},n}, v_{\mathfrak{A},n})$ может быть только контактом x_i . По замечанию 2 к четверке полюсов $V_{\mathfrak{A}}$ должен примыкать еще один внешний элемент — контакт $e_4 = x_j^{\sigma_j}$. Возможны четыре способа расположения e_4 между полюсами из $V_{\mathfrak{A}}$.

- I.1. $e_4 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}}) = x_j$;
 I.2. $e_4 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_j$;
 I.3. $e_4 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_j$;
 I.4. $e_4 = (v_{0, \mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}, n}) = x_j$.

С л у ч а й I.1. По лемме 2 к полюсу $v_{\mathfrak{A}}$ должен примыкать $e_5 = (*, v_{\mathfrak{A}})$.
 Для элемента e_5 возможны три способа расположения:

- I.1.1. $e_5 = (*, v_{\mathfrak{A}})$ — внутренний элемент;
 I.1.2. $e_5 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}) = x_k$;
 I.1.3. $e_5 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_k$.

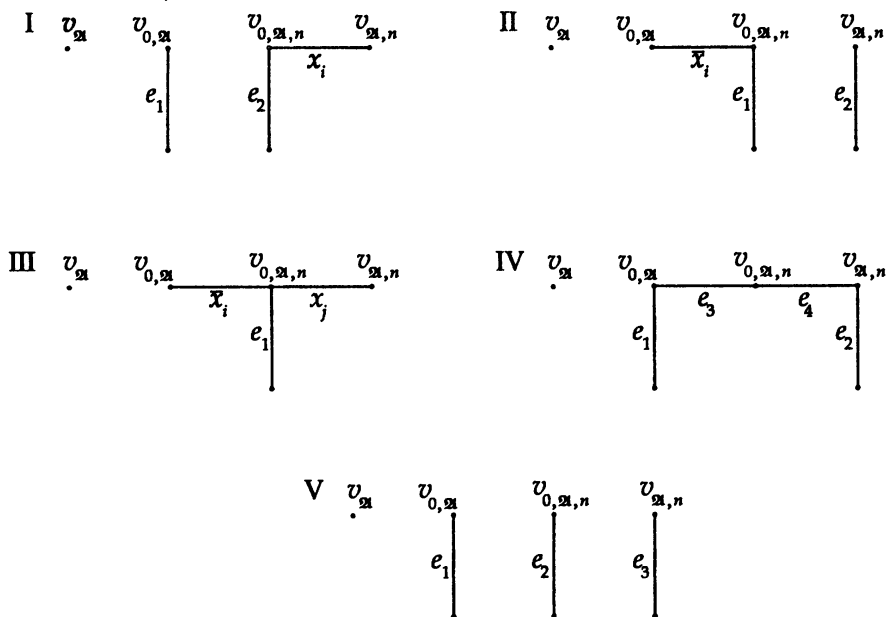


Рис. 8

С л у ч а й I.1.1. По лемме 2 к полюсу $v_{\mathfrak{A}, n}$ должен примыкать $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}, n})$. Для элемента $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}, n})$ возможны три способа расположения:

- I.1.1.1. $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}, n})$ — внутренний элемент;
 I.1.1.2. $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n})$;
 I.1.1.3. $e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}, n})$.

В случае I.1.1.1, если $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}, n}) = x_m^{\sigma_m}$, то по лемме 3 имеем $x_m = x_i$, и по лемме 2 в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}, n}$ нарушено правильное функционирование. Если же $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}, n})$ — вентиль, то элементы e_1, e_2, e_5 — вентили, и это случай д) рис. 7.

В случае I.1.1.2, если $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n}) = x_m^{\sigma_m}$, то по лемме 3 имеем $x_m = x_i$, и по лемме 2 в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}, n}$ нарушено правильное функционирование. Если же элемент $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n})$ — вентиль, то элементы e_1, e_2, e_5 могут быть только вентилями, и это случай б) рис. 7.

В случае I.1.1.3 элемент $e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}, n})$ может быть только контактом x_m , тогда по лемме 2 в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}, n}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й I.1.2. По лемме 2 в схеме должен быть $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}, n})$. По лемме 2 для правильного функционирования в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ элемент e_6 должен быть контактом $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_m$. По лемме 3 имеем $x_i = x_m$, и по лемме 2 в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}, n}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й I.1.3. Легко видеть, что $e_5 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_k$. Если e_6 — вентиль или внутренний элемент, примыкающий к одному из полюсов из $V_{\mathfrak{A}}$, то по

лемме 3 имеем $x_i = x_k$ или $x_j = x_k$, и по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}}$ или $v_{0, \mathfrak{A}, n}$. Если же e_6 — внешний контакт, то по следствию из леммы 4 для e_6 возможны четыре случая:

$$I.1.3.1. e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}}) = x_m;$$

$$I.1.3.2. e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_m;$$

$$I.1.3.3. e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_m;$$

$$I.1.3.4. e_6 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_m.$$

В случаях I.1.3.1, I.1.3.3, I.1.3.4 по лемме 3 имеем $x_k = x_j$ или $x_i = x_k$, и по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}}$ или $v_{0, \mathfrak{A}, n}$.

В случае I.1.3.2 элементы e_1 и e_2 могут быть только вентилями, и имеем случай б) рис. 6, который по лемме 7 не имеет места.

С л у ч а й I.2. По лемме 2 в схеме есть контакт $e_5 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k$, по лемме 2 в схеме есть также элемент $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$, для которого возможны три случая:

$$I.2.1. e_6 \text{ — внутренний элемент};$$

$$I.2.2. e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}) = x_m;$$

$$I.2.3. e_6 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_m.$$

В случаях I.2.1, I.2.2 по лемме 3 имеем $x_i = x_k$, и по лемме 2 в $v_{\mathfrak{A}}$ реализуется не $S_n^{\mathfrak{A}}$.

В случае I.2.3 в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$ реализуется функция вида $x_i f$, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$.

С л у ч а й I.3. По лемме 2 в схеме есть контакт $e_5 = (*, v_{\mathfrak{A}})$. Для элемента e_5 возможны три случая:

$$I.3.1 e_5 = (*, v_{\mathfrak{A}}) \text{ — внутренний элемент};$$

$$I.3.2 e_5 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}) = x_k;$$

$$I.3.3 e_5 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_k.$$

С л у ч а й I.3.1. По лемме 2 в схеме должен существовать элемент $e_6 = (*, v_{0, \mathfrak{A}})$. Для него возможны три случая: $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}})$; $e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}})$; $e_6 = (*, v_{0, \mathfrak{A}})$. Во всех случаях по лемме 3 имеем $x_i = x_j$, и по лемме 2 хотя бы в одном из полюсов в $v_{0, \mathfrak{A}, n}$ либо в $v_{\mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й I.3.2 аналогичен случаю I.1.3.

С л у ч а й I.3.3. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_6 = (*, v_{0, \mathfrak{A}})$. Для него возможны три случая:

$$I.3.3.1. e_6 = (*, v_{0, \mathfrak{A}}) \text{ — внутренний элемент};$$

$$I.3.3.2. e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}});$$

$$I.3.3.3. e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}}).$$

В случаях I.3.3.1, I.3.3.3 и в случае I.3.3.2, когда $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}})$ — вентиль, в $v_{\mathfrak{A}, n}$ реализуется функция вида $x_i f$, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$.

Случай I.3.3.2, когда $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}}) = x_i$ — контакт, совпадает со случаем б) рис. 6, который по лемме 7 невозможен.

С л у ч а й I.4. По лемме 2 в схеме есть элементы $e_5 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}}) = x_k$ и $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$, и для элемента $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$ возможны три случая:

$$I.4.1. e_6 \text{ — внешний элемент};$$

$$I.4.2. e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}) = x_m;$$

$$I.4.3. e_6 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_m.$$

В случаях I.4.1 и I.4.2 только через один элемент $e_2 = (*, v_{0, \mathfrak{A}, n})$ идет проводящая цепь ко входу от полюса $v_{0, \mathfrak{A}, n}$, что согласно лемме 2 приводит к неправильному функционированию в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}, n}$.

В случае I.4.3 по лемме 3 имеем $x_k = x_m$, и в полюсе $v_{0, \alpha}$ реализуется не $S_n^{0, \alpha}$.

С л у ч а й II (рис. 6). По замечанию 2 и следствию из леммы 4 в схеме должен быть контакт $e_4 = x_j^{\sigma_j}$. Возможны четыре случая расположения контакта $e_4 = x_j^{\sigma_j}$:

II.1. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{0, \alpha}) = x_j$;

II.2. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n}) = \bar{x}_j$.

II.3. $e_4 = (v_{\alpha, n}, v_{0, \alpha, n}) = x_j$;

II.4. $e_4 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n}) = \bar{x}_j$.

С л у ч а й II.1. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_5 = (*, v_{\alpha})$, и для него возможны три случая расположения:

II.1.1. $e_5 = (*, v_{\alpha})$ — внутренний элемент;

II.1.2. $e_5 = (v_{0, \alpha}, v_{\alpha}) = x_k$;

II.1.3. $e_5 = (v_{\alpha, n}, v_{\alpha}) = \bar{x}_k$.

С л у ч а й II.1.1. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_6 = (*, v_{\alpha, n})$, и для него существуют три возможности: $e_6 = (*, v_{\alpha, n})$ — внутренний элемент; $e_6 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n})$; $e_6 = (v_{0, \alpha, n}, v_{\alpha, n}) = x_k$. Во всех трех случаях по лемме 3 имеем $x_i = x_j$, и по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе v_{α} или $v_{0, \alpha, n}$.

С л у ч а й II.1.2. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_6 = (*, v_{0, \alpha, n})$, и для него возможны три случая:

II.1.2.1. $e_6 = (*, v_{0, \alpha})$ — внутренний элемент;

II.1.2.2. $e_6 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n})$;

II.1.2.3. $e_6 = (v_{0, \alpha, n}, v_{\alpha, n}) = x_i$.

В случаях II.1.2.1, II.1.2.3 в полюсе $v_{0, \alpha}$ реализуется функция вида $\bar{x}_i S_n^{0, \alpha, n}$, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v_{0, \alpha}$.

Случай II.1.2.2 совпадает со случаем а) рис. 6, который по лемме 7 не имеет места.

С л у ч а й II.1.3. По лемме 2 есть еще элемент e_6 . Если e_6 — вентиль или внутренний контакт, то по лемме 3 имеем $x_j = x_k$ или $x_j = x_i$, и по лемме 2 хотя бы в одном из полюсов $v_{\alpha, n}$ или $v_{0, \alpha, n}$ будет нарушено правильное функционирование. Если же e_6 — внешний контакт, то по следствию из леммы 4 возможны четыре случая расположения контакта $e_6 = x_m^{\sigma_m}$:

II.1.3.1. $e_6 = (v_{\alpha}, v_{0, \alpha}) = x_m$;

II.1.3.2. $e_6 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n}) = \bar{x}_m$.

II.1.3.3. $e_6 = (v_{0, \alpha, n}, v_{\alpha, n}) = x_m$;

II.1.3.4. $e_6 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n}) = \bar{x}_m$.

В случае II.1.3.1 имеем случай а) рис. 6, который по лемме 7 не имеет места. В случаях II.1.3.2–II.1.3.4 по лемме 3 имеем $x_k = x_j$ или $x_j = x_i$, и по лемме 2 хотя бы в одном из полюсов в $v_{\alpha, n}$, либо в v_{α} , либо в $v_{0, \alpha, n}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й II.2. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_5 = (*, v_{\alpha})$, и для него существуют три возможности:

II.2.1. $e_5 = (v_{0, \alpha}, v_{\alpha}) = x_k$;

II.2.2. $e_5 = (v_{\alpha, n}, v_{\alpha}) = \bar{x}_k$.

II.2.3. $e_5 = (*, v_{\alpha})$ — внутренний элемент;

С л у ч а й II.2.1 эквивалентен случаю II.1.3.

С л у ч а й II.2.2. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_6 = (*, v_{0, \alpha})$, и для него возможны три случая:

II.2.2.1. $e_6 = (*, v_{0, \alpha})$ — внутренний элемент;

II.2.2.2. $e_6 = (v_{\alpha}, v_{0,\alpha});$

II.2.2.3. $e_6 = (v_{0,\alpha,n}, v_{0,\alpha}) = \bar{x}_m.$

В случаях II.2.2.1, II.2.2.3 и в случае II.2.2.2, когда элемент $e_6 = (v_{\alpha}, v_{0,\alpha})$ — вентиль, по лемме 2 в полюсе $v_{\alpha,n}$ нарушено правильное функционирование.

В случае II.2.2.2, когда $e_6 = (v_{\alpha}, v_{0,\alpha}) = x_m$ — контакт, по лемме 3 имеем $x_m = x_i$, и в полюсе $v_{0,\alpha,n}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й II.2.3. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_6 = (*, v_{0,\alpha})$, и для него возможны три случая:

II.2.3.1. $e_6 = (*, v_{0,\alpha})$ — внутренний элемент;

II.2.3.2. $e_6 = (v_{\alpha}, v_{0,\alpha});$

II.2.3.3. $e_6 = (v_{0,\alpha,n}, v_{0,\alpha}) = \bar{x}_k.$

В случае II.2.3.1 элементы e_1, e_2, e_5, e_6 могут быть только вентилями, и имеем случай е) рис. 7.

В случае II.2.3.2, если e_6 — вентиль, то элементы e_1, e_2, e_5 могут быть только вентилями, и имеем случай в) рис. 7, если же $e_6 = (v_{\alpha}, v_{0,\alpha,n}) = x_k$, то по лемме 3 имеем $x_k = x_i$, и по лемме 2 в полюсе $v_{0,\alpha,n}$ нарушено правильное функционирование.

В случае II.2.3.3 по лемме 2 имеет место неправильное функционирование в полюсе $v_{0,\alpha,n}$.

С л у ч а й II.3. По лемме 2 в схеме есть элементы $e_5 = (v_{\alpha}, v_{0,\alpha}) = x_k$ и $e_6 = (*, v_{\alpha})$. Для $e_6 = (*, v_{\alpha})$ возможны три случая:

II.3.1. $e_6 = (*, v_{\alpha})$ — внутренний элемент;

II.3.2. $e_6 = (v_{0,\alpha}, v_{\alpha}) = x_m;$

II.3.3. $e_6 = (v_{\alpha,n}, v_{\alpha}) = \bar{x}_m.$

В случаях II.3.1, II.3.3 по лемме 3 имеем $x_k = x_i$ и по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе v_{α} .

В случае II.3.2 в полюсе $v_{0,\alpha}$ реализуется функция вида $\bar{x}_i f$, что по лемме 2 приводит к неправильному функционированию в полюсе $v_{0,\alpha}$.

С л у ч а й II.4. По лемме 2 в схеме есть элементы $e_5 = (v_{\alpha}, v_{\alpha,n}) = \bar{x}_k$ и $e_6 = (*, v_{\alpha})$. Для $e_6 = (*, v_{\alpha})$ возможны три случая:

II.4.1. $e_6 = (*, v_{\alpha})$ — внутренний элемент;

II.4.2. $e_6 = (v_{0,\alpha}, v_{\alpha}) = x_m;$

II.4.3. $e_6 = (v_{\alpha,n}, v_{\alpha}) = \bar{x}_m.$

В случаях II.4.1 и II.4.3 по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{0,\alpha,n}$.

В случае II.4.2 по лемме 3 имеем $x_m = x_k$, и по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\alpha,n}$.

С л у ч а й III (рис. 8). По лемме 5 в схеме к четверке полюсов $V_{\alpha} = \{v_{\alpha}, v_{0,\alpha}, v_{\alpha,n}, v_{0,\alpha,n}\}$ примыкает еще хотя бы один внутренний элемент e_4 , и для него возможны случаи:

III.1. $e_4 = (*, v_{\alpha});$

III.2. $e_4 = (*, v_{0,\alpha});$

III.3. $e_4 = (*, v_{0,\alpha,n});$

III.4. $e_4 = (*, v_{\alpha,n}).$

С л у ч а й III.1. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_5 = x_k^{\sigma}$. Для него возможны два случая:

III.1.1. $e_5 = (v_{\alpha}, v_{0,\alpha}) = x_k;$

III.1.2. $e_5 = (v_{\alpha}, v_{\alpha,n}) = \bar{x}_k.$

Случай III.1.1. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_6 = (*, v_{\alpha,n})$, и для него возможны три случая:

III.1.1.1. $e_6 = (v_{\alpha}, v_{\alpha,n});$

III.1.1.2. $e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_m$;

III.1.1.3. $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}, n})$ — внутренний элемент;

В случае III.1.1.1, когда $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_m$, по лемме 3 имеем $x_i = x_k$ и $x_m = x_i$, и по лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

В случаях III.1.1.2.1, III.1.1.3 и в случае III.1.1.1, когда $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n})$ — вентиль, по лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й III.1.2. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_6 = (*, v_{0, \mathfrak{A}})$, и для него возможны три случая:

III.1.2.1. $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}})$;

III.1.2.2. $e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}}) = \bar{x}_m$;

III.1.2.3. $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}, n})$ — внутренний элемент;

Случай III.1.2.1 при $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}}) = x_m$ совпадает со случаем III.1.1.1.

В случаях III.1.2.2, III.1.2.3 и в случае III.1.2.1, когда $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}})$ — вентиль, по лемме 3 имеем $x_m = x_j$, и по лемме 2 в $v_{\mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й III.2 совпадает со случаем I.2.

С л у ч а й III.3. По лемме 2 в схеме должны быть элементы $e_5 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}}) = x_k$ и $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_m$.

По лемме 3 имеем $x_i = x_k$ и $x_k = x_i$, и по лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й III.4 совпадает со случаем II.3.

С л у ч а й IV (рис. 6). По лемме 2 в схеме есть элемент $e_5 = (*, v_{\mathfrak{A}})$, и для него возможны три случая:

III.4.1. $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$ — внутренний элемент;

III.4.2. $e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}) = x_i$;

III.4.3. $e_6 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_i$.

С л у ч а й IV.1. По лемме 2 в схеме есть элемент $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$. Для $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$ возможны три случая:

IV.1.1. $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$ — внутренний элемент;

IV.1.2. $e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}) = x_j$;

IV.1.3. $e_6 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_j$.

С л у ч а й IV.1.1. По лемме 2 возможны три случая для элементов e_3 и e_4 :

IV.1.1.1. $e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$ — вентиль;

IV.1.1.2. $e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_k$, $e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$ — вентиль;

IV.1.1.3. $e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_k$, $e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_m$.

В случае IV.1.1.1 по лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$ нарушено правильное функционирование.

В случае IV.1.1.2 элементы e_1 , e_2 , e_6 могут быть только вентилями, и имеем случай а) рис. 7.

В случае IV.1.1.3 по лемме 3 имеем $x_k = x_m$, и по лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й IV.1.2. По лемме 2 возможны четыре случая для элементов e_3 и e_4 :

IV.1.2.1. $e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k$; $e_4 = (v_{0, \mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}, n}) = x_m$;

IV.1.2.2. $e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$, $e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$ — вентиля;

IV.1.2.3. $e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k$; $e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$ — вентиль;

IV.1.2.4. $e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$ — вентиль; $e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_m$.

В случае IV.1.2.1 по лемме 3 имеем $x_k = x_m$, и по лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$ нарушено правильное функционирование.

В случаях IV.1.2.2 и IV.1.2.3 по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$.

В случае IV.1.2.4 элементы e_1, e_2, e_5 могут быть только вентилями, и имеем случай а) рис. 7.

С л у ч а й IV.1.3. По лемме 2 возможны четыре случая для элементов e_3 и e_4 :

$$\text{IV.1.3.1. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k; e_4 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}, n}) = x_m;$$

$$\text{IV.1.3.2. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}), e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентили;}$$

$$\text{IV.1.3.3. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k; e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентиль;}$$

$$\text{IV.1.3.4. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентиль; } e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_m.$$

В случае IV.1.3.1 по лемме 3 имеем $x_k = x_m$, и по лемме 2 в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

В случаях IV.1.3.2 и IV.1.3.4 по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}}$.

В случае IV.1.3.3 элементы e_1, e_2, e_5 могут быть только вентилями, и имеем случай з) рис. 7.

С л у ч а й IV.2. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$. Для элемента $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$ возможны три случая:

$$\text{IV.2.1. } e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}}) \text{ — внутренний элемент;}$$

$$\text{IV.2.2. } e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}) = x_j;$$

$$\text{IV.2.3. } e_6 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_j.$$

С л у ч а й IV.2.1 совпадает со случаем IV.1.2.

С л у ч а й IV.2.2. По лемме 2 возможны четыре случая для элементов $e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$ и $e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$:

$$\text{IV.2.2.1. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ и } e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентили;}$$

$$\text{IV.2.2.2. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k \text{ и } e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_m;$$

$$\text{IV.2.2.3. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k; e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентиль;}$$

$$\text{IV.2.2.4. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентиль; } e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_m.$$

В случаях IV.2.2.1 и IV.2.2.3 по лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$ будет нарушено правильное функционирование.

В случае IV.2.2.2 по лемме 3 имеем $x_k = x_m$, и это по лемме 2 приводит к неправильному функционированию в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}}$.

В случае IV.2.2.4 по лемме 2 в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й IV.2.3. По лемме 3 имеем $x_i = x_j$. Возможны четыре случая для элементов $e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$ и $e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n})$:

$$\text{IV.2.3.1. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ и } e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентили;}$$

$$\text{IV.2.3.2. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k \text{ и } e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_m;$$

$$\text{IV.2.3.3. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = \bar{x}_k; e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентиль;}$$

$$\text{IV.2.3.4. } e_3 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) \text{ — вентиль; } e_4 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{0, \mathfrak{A}, n}) = x_m.$$

В случаях IV.2.3.1 и IV.2.3.3 по лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A}, n}$ нарушено правильное функционирование.

В случае IV.2.3.2 по лемме 3 имеем $x_k = x_m$, и по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}}$.

В случае IV.2.3.4 по лемме 2 в полюсе $v_{0, \mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й IV.3. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$. Для элемента $e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}})$ возможны три случая:

$$\text{IV.3.1. } e_6 = (*, v_{\mathfrak{A}}) \text{ — внутренний элемент;}$$

$$\text{IV.3.2. } e_6 = (v_{0, \mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}) = x_j;$$

$$\text{IV.3.3. } e_6 = (v_{\mathfrak{A}, n}, v_{\mathfrak{A}}) = \bar{x}_j.$$

С л у ч а й IV.3.1 совпадает со случаем IV.1.3.

С л у ч а й IV.3.2 совпадает со случаем IV.2.3.

С л у ч а й IV.3.3. Возможны три случая для элементов $e_3 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n})$ и $e_4 = (v_{\alpha, n}, v_{0, \alpha, n})$:

IV.3.3.1. $e_3 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n})$ — вентиль;

IV.3.3.2. $e_3 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n}) = \bar{x}_k$ и $e_4 = (v_{\alpha, n}, v_{0, \alpha, n}) = x_m$;

IV.3.3.3. $e_3 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n}) = \bar{x}_k$; $e_4 = (v_{\alpha, n}, v_{0, \alpha, n})$ — вентиль.

В случае IV.3.3.1 по лемме 2 в полюсе $v_{0, \alpha}$ нарушено правильное функционирование.

В случае IV.3.3.2 по лемме 3 имеем $x_k = x_m$, и по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{0, \alpha}$.

В случае IV.3.3.3 по лемме 2 в полюсе $v_{\alpha, n}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й V (рис. 6). Согласно замечанию 2 существуют семь случаев расположения двух контактов между четырьмя полюсами из V_{α} , причем один из двух элементов имеет вид $e_4 = (v_{\alpha}, *) = x_i^{\sigma_i}$:

V.1. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{0, \alpha}) = x_i$; $e_5 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n}) = \bar{x}_j$;

V.2. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{0, \alpha}) = x_i$; $e_5 = (v_{0, \alpha, n}, v_{\alpha, n}) = x_j$;

V.3. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{0, \alpha}) = x_i$; $e_5 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n}) = \bar{x}_j$;

V.4. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n}) = \bar{x}_i$; $e_5 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n}) = \bar{x}_j$;

V.5. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n}) = \bar{x}_i$; $e_5 = (v_{0, \alpha, n}, v_{\alpha, n}) = x_j$;

V.6. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{0, \alpha}) = x_i$; $e_5 = (v_{\alpha}, v_{0, \alpha}) = x_j$;

V.7. $e_4 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n}) = \bar{x}_i$; $e_5 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n}) = \bar{x}_j$.

С л у ч а й V.1. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (v_{\alpha}, v_{\alpha, n}) = \bar{x}_k$. По лемме 3 имеем $x_i = x_k$, и по лемме 2 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\alpha, n}$.

С л у ч а й V.2. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (*, v_{\alpha})$. Для $e_6 = (*, v_{\alpha})$ возможны три случая:

V.2.1. $e_6 = (*, v_{\alpha})$ — внутренний элемент;

V.2.2. $e_6 = (v_{0, \alpha}, v_{\alpha}) = x_k$;

V.2.3. $e_6 = (v_{\alpha, n}, v_{\alpha}) = \bar{x}_k$.

В случае V.2.1 элементы e_1, e_2, e_3, e_6 могут быть только вентилями, и имеем случай д) рис. 7.

В случае V.2.2 по лемме 2 в полюсе $v_{0, \alpha}$ нарушено правильное функционирование.

В случае V.2.3 по лемме 3 имеем $x_i = x_j$, и по лемме 2 в полюсе $v_{0, \alpha}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й V.3. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (*, v_{0, \alpha, n})$, для которого возможны три случая: $e_6 = (*, v_{0, \alpha, n})$ — внутренний элемент; $e_6 = (v_{0, \alpha}, v_{0, \alpha, n})$; $e_6 = (v_{\alpha, n}, v_{0, \alpha, n})$. По лемме 3 имеем $x_i = x_j$, и по лемме 2 либо в полюсе $v_{0, \alpha}$, либо в полюсе $v_{\alpha, n}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й V.4. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (*, v_{\alpha})$, для которого возможны три случая:

V.4.1. $e_6 = (*, v_{\alpha})$ — внутренний элемент;

V.4.2. $e_6 = (v_{0, \alpha}, v_{\alpha}) = x_k$;

V.4.3. $e_6 = (v_{\alpha, n}, v_{\alpha}) = \bar{x}_k$.

В случае V.4.1 элементы e_1, e_2, e_3, e_6 могут быть только вентилями, и имеем случай е) рис. 7.

В случае V.4.2 по лемме 3 имеем $x_k = x_i$, и по лемме 2 в полюсе $v_{\alpha, n}$ нарушено правильное функционирование.

В случае V.4.3 по лемме 2 в полюсе $v_{\alpha, n}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й V.5. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (v_{\mathfrak{A}}, v_{0,\mathfrak{A}}) = x_k$. По лемме 3 имеем $x_i = x_k$, и по лемме 2 в полюсе $v_{0,\mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й V.6. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (v_{0,\mathfrak{A},n}, v_{\mathfrak{A},n}) = x_k$. По лемме 2 в полюсе $v_{0,\mathfrak{A}}$ нарушено правильное функционирование.

С л у ч а й V.7. По лемме 2 в схеме должен быть элемент $e_6 = (v_{0,\mathfrak{A}}, v_{0,\mathfrak{A},n}) = \bar{x}_k$. По лемме 2 в полюсе $v_{\mathfrak{A},n}$ нарушено правильное функционирование.

Таким образом все пять случаев рис. 8 рассмотрены.

Пусть $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathfrak{B}_1 \neq \mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}_2\} \cup \{\mathfrak{B}_2 \setminus \mathfrak{B}_1\}$.

Л е м м а 9. Рассмотрим минимальную контактно-вентильную схему Ω_n , реализующую Δ_n . Пусть $v_{\mathfrak{B}_1}$ и $v_{\mathfrak{B}_2}$ — выходные полюса из W_n , и они соединены с некоторой вершиной v контактами

$$x_i^{\sigma_i} = (v_{\mathfrak{B}_1}, v), \quad x_j^{\sigma_j} = (v_{\mathfrak{B}_2}, v).$$

Пусть $i = j$, тогда $\mathfrak{B} = 0$, если $\sigma_i = \sigma_j = 1$ и $\mathfrak{B} = n$, если $\sigma_i = \sigma_j = 0$. Если же $i \neq j$, то $\mathfrak{B} \in \{0, n\}$, если $\sigma_i = \bar{\sigma}_j$; $\mathfrak{B} \in \{0, 1\}$, если $\sigma_i = \sigma_j = 1$; $\mathfrak{B} \in \{n-1, n\}$, если $\sigma_i = \sigma_j = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathfrak{B}_1 \neq \mathfrak{B}_2$, то ради определенности пусть $l \in \mathfrak{B}_1$ и $l \notin \mathfrak{B}_2$.

Пусть $i = j$. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha}$ длины n с l единицами такой, что $\alpha_i = \sigma_i$. Пусть $l \neq 0$, если $\sigma_i = \sigma_j = 1$ или $l \neq n$, если $\sigma_i = \sigma_j = 0$, тогда функция $S_n^{\mathfrak{B}_2}(\tilde{\alpha})$ равна единице, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$, так как $l \notin \mathfrak{B}_2$.

Пусть $i \neq j$. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha}$ длины n с l единицами такой, что $\alpha_i = \sigma_i$, $\alpha_j = \sigma_j$. Пусть $l \notin \{0, n\}$, если $\sigma_i = \bar{\sigma}_j$ или $l \notin \{0, 1\}$, если $\sigma_i = \sigma_j = 1$ или $l \notin \{n-1, n\}$, если $\sigma_i = \sigma_j = 0$, тогда функция $S_n^{\mathfrak{B}_2}(\tilde{\alpha})$ равна единице, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$, так как $l \notin \mathfrak{B}_2$.

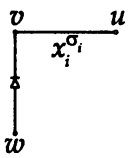


Рис. 9

Л е м м а 10. Пусть $u, v, w \in V_{\mathfrak{A}}$ — полюса схемы типа Δ_n , и пусть между полюсами u и v есть контакт $(v, u) = x_i^{\sigma_i}$, а между полюсами v и w есть вентиль (w, v) (см. рис. 9).

Если к w примыкают только контакты (w^*, w) , где $w^* \notin V_{\mathfrak{A}}$, то среди них найдется контакт (z, w) такой, что $z \notin W_n$. (Вентили $(w, *)$ согласно замечанию 1 не учитываются.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в полюсе v реализуется функция $S_n^{\mathfrak{B}}$. Предположим противное, т. е. к w примыкают только контакты $(w, v_{\mathfrak{B}_s})$ ($s = 1, \dots, r$) такие, что в полюсе $v_{\mathfrak{B}_s}$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_s}$, т. е. $v_{\mathfrak{B}_s} \in W_n$ и $v_{\mathfrak{B}_s} \notin V_{\mathfrak{A}}$.

Из леммы 9 и того факта, что $v_{\mathfrak{B}_1}, \dots, v_{\mathfrak{B}_r} \notin V_{\mathfrak{A}}$ следует

З а м е ч а н и е 2. 1. $\mathfrak{B}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_r \subset \{\mathfrak{B} \cup 0 \cup n\}$;

2. Для любого $i = 1, \dots, r$ существует $l_i \notin \{0, n\}$ такое, что $l_i \in \mathfrak{B}$ и $l_i \notin \mathfrak{B}_i$.

Пусть к w примыкает единственный контакт $x_j^{\sigma_j} = (w, v_{\mathfrak{B}_j})$, и в $v_{\mathfrak{B}_j}$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_j}$. Согласно замечанию 2 существует $l_1 \notin \{0, n\}$ такое, что $l_1 \in \mathfrak{B}$ и $l_1 \notin \mathfrak{B}_1$. Тогда на наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с l_1 единицами таком, что $\alpha_i = \bar{\sigma}_i$, функция $S_n^{\mathfrak{B}}(\tilde{\alpha})$ обращается в ноль, что приводит к неправильному функционированию в полюсе v , так как $l_1 \in \mathfrak{B}$.

Значит, к w примыкает еще контакт $x_k^{\sigma_k} = (w, v_{\mathfrak{B}_2})$ такой, что в $v_{\mathfrak{B}_2}$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_2}$, и $l_1 \in \mathfrak{B}_2$.

Из замечания 2 следует, что существует $l_2 \notin \{0, n\}$ такое, что $l_2 \in \mathfrak{B}$ и $l_2 \notin \mathfrak{B}_2$.

Возможны два случая: I. $l_2 \in \mathfrak{B}_1$ и II. $l_2 \notin \mathfrak{B}_1$.

С л у ч а й I. Пусть $l_2 \in \mathfrak{B}_1$, тогда $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ отличаются двумя рабочими числами $l_1, l_2 \notin \{0, n\}$, и по лемме 9 $x_j^{\sigma_j}$ и $x_k^{\sigma_k}$ могут быть противоположными контактами одного переменного, т. е. $j = k$ и $\sigma_j = \bar{\sigma}_k$. Возможны четыре подслучая:

I.1. $i = j, \sigma_i = \sigma_j$;

I.2. $i = j, \sigma_i = \bar{\sigma}_j$;

I.3. $i \neq j, \sigma_i = \sigma_j$;

I.4. $i \neq j, \sigma_i = \bar{\sigma}_j$.

Рассмотрим случай I.1. На наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с l_2 единицами таким, что $\alpha_i = \bar{\sigma}_i$ функция $S_n^{\mathfrak{B}}(\tilde{\alpha})$ обращается в ноль, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v = v_{\mathfrak{B}}$. Значит, в схеме существует контакт $x_m^{\sigma_m} = (w, v_{\mathfrak{B}_3})$ такой, что в $v_{\mathfrak{B}_3}$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_3}$, $l_2 \in \mathfrak{B}_3$ и $x_m^{\sigma_m} \neq x_i^{\sigma_i}$. Возможны два случая: I.1.1. $l_1 \notin \mathfrak{B}_3$; I.1.2. $l_1 \in \mathfrak{B}_3$.

I.1.1. Если $l_1 \notin \mathfrak{B}_3$, то множества $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ отличаются двумя рабочими числами $l_1, l_2 \notin \{0, n\}$, и по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$.

I.1.2. Если $l_1 \in \mathfrak{B}_3$, то при $\sigma_m = \sigma_i$ по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $\mathfrak{B}_2$ отличается от $\mathfrak{B}_3$ рабочим числом $l_2 \notin \{0, n\}$, а при $\sigma_m = \bar{\sigma}_i$ по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $\mathfrak{B}_1$ отличается от $\mathfrak{B}_3$ рабочим числом $l_1 \notin \{0, n\}$.

Рассмотрим случай I.2. На наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с l_1 единицами таким, что $\alpha_i = \bar{\sigma}_i$ функция $S_n^{\mathfrak{B}}(\tilde{\alpha})$ обращается в ноль, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v = v_{\mathfrak{B}}$. Значит, в схеме существует контакт $x_m^{\sigma_m} = (w, v_{\mathfrak{B}_3})$ такой, что в $v_{\mathfrak{B}_3}$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_3}$, $l_1 \in \mathfrak{B}_3$ и $x_m^{\sigma_m} \neq x_i^{\sigma_i}$. Возможны два случая:

I.2.1. $l_2 \notin \mathfrak{B}_3$; I.2.2. $l_2 \in \mathfrak{B}_3$.

I.2.1. Если $l_2 \notin \mathfrak{B}_3$, то $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_3$ отличаются двумя рабочими числами $l_1, l_2 \notin \{0, n\}$, и по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$.

I.2.2. Если $l_2 \in \mathfrak{B}_3$, то при $\sigma_m = \sigma_i$ по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $\mathfrak{B}_2$ отличается от $\mathfrak{B}_3$ рабочим числом $l_2 \notin \{0, n\}$, а при $\sigma_m = \bar{\sigma}_i$ по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $\mathfrak{B}_1$ отличается от $\mathfrak{B}_3$ рабочим числом $l_1, l_1 \notin \{0, n\}$.

Рассмотрим случай I.3. На наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с l_1 единицами таким, что $\alpha_i \neq \sigma_i$ функция $S_n^{\mathfrak{B}}(\tilde{\alpha})$ обращается в ноль, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v = v_{\mathfrak{B}}$. Значит, в схеме существует контакт $x_m^{\sigma_m} = (w, v_{\mathfrak{B}_3})$ такой, что в полюсе $v_{\mathfrak{B}_3}$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_3}$, $l_1 \in \mathfrak{B}_3$ и $x_m^{\sigma_m} \neq x_j^{\sigma_j}$. Возможны два случая:

I.3.1. $l_2 \notin \mathfrak{B}_3$; I.3.2. $l_2 \in \mathfrak{B}_3$.

I.3.1. Если $l_2 \notin \mathfrak{B}_3$, то $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_3$ отличаются двумя рабочими числами $l_1, l_2, l_1, l_2 \notin \{0, n\}$, и по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$.

I.3.2. Если $l_2 \in \mathfrak{B}_3$, то при $\sigma_m = \sigma_i$ по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $\mathfrak{B}_2$ отличается от $\mathfrak{B}_3$ ра-

бочим числом l_2 , $l_2 \notin \{0, n\}$, а при $\sigma_m = \bar{\sigma}_i$ по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $\mathfrak{B}_1$ отличается от $\mathfrak{B}_3$ рабочим числом l_1 , $l_1 \notin \{0, n\}$.

Рассмотрим случай I.4. На наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с l_2 единицами таким, что $\alpha_i = \bar{\sigma}_i$ функция $S_n^{\mathfrak{B}}(\tilde{\alpha})$ обращается в ноль, что приводит к неправильному функционированию в полюсе $v = v_{\mathfrak{B}}$. Значит, в схеме существует контакт $x_m^{\sigma_m} = (w, v_{\mathfrak{B}_3})$ такой, что в $v_{\mathfrak{B}_3}$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_3}$, $l_2 \in \mathfrak{B}_3$ и $x_m^{\sigma_m} \neq x_j^{\sigma_j}$. Возможны два случая:

I.4.1. $l_1 \notin \mathfrak{B}_3$; I.4.2. $l_1 \in \mathfrak{B}_3$.

I.4.1. Если $l_1 \notin \mathfrak{B}_3$, то $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ отличаются двумя рабочими числами l_1, l_2 , $l_1, l_2 \notin \{0, n\}$, и по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$.

I.4.2. Если $l_1 \in \mathfrak{B}_3$, то при $\sigma_m = \sigma_i$ по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $\mathfrak{B}_1$ отличается от $\mathfrak{B}_3$ рабочим числом $l_1 \notin \{0, n\}$, а при $\sigma_m = \bar{\sigma}_i$ по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$ или $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $\mathfrak{B}_2$ отличается от $\mathfrak{B}_3$ рабочим числом $l_2 \notin \{0, n\}$.

С л у ч а й II. Пусть $l_2 \notin \mathfrak{B}_1$. Так как $l_2 \in \mathfrak{B}$, необходимо, чтобы к полюсу w примыкал контакт $x_m^{\sigma_m} = (w, v_{\mathfrak{B}_3})$ такой, что в полюсе $v_{\mathfrak{B}_3}$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_3}$ и $l_2 \in \mathfrak{B}_3$. Возможны два случая:

II.1. $l_1 \in \mathfrak{B}_3$; II.2. $l_1 \notin \mathfrak{B}_3$.

Рассмотрим случай II.1. Пусть $l_1 \in \mathfrak{B}_3$. Тогда $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_3$ отличаются двумя рабочими числами $l_1, l_2 \notin \{0, n\}$. Чтобы не нарушалось правильное функционирование в полюсах $v_{\mathfrak{B}_1}$ и $v_{\mathfrak{B}_3}$ согласно лемме 9 необходимо, чтобы $x_j^{\sigma_j}$ и $x_m^{\sigma_m}$ были противоположными контактами одного переменного, т. е. $j = m$ и $\sigma_j = \bar{\sigma}_m$.

Возможны подслучаи II.1.1. $j = k$; II.1.2. $j \neq k$.

II.1.1. Пусть $j = k$, тогда если $\sigma_j = \sigma_k$, то по лемме 9 в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$ нарушено правильное функционирование, так как $l_1 \notin \mathfrak{B}_1$, $l_1 \in \mathfrak{B}_2$ и $l_1 \notin \{0, n\}$. Если же $\sigma_j = \bar{\sigma}_k$, то по лемме 9 в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$ нарушено правильное функционирование, так как $l_2 \in \mathfrak{B}_3$, $l_2 \notin \mathfrak{B}_2$ и $l_2 \notin \{0, n\}$.

II.1.2. Пусть $j \neq k$, тогда если $\sigma_j = \sigma_k$, по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$, так как $l_2 \in \mathfrak{B}_3$, $l_2 \notin \mathfrak{B}_1$ и $l_2 \notin \{0, n\}$. Если же $\sigma_j = \bar{\sigma}_k$, то по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$, так как $l_1 \in \mathfrak{B}_2$, $l_1 \notin \mathfrak{B}_1$ и $l_1 \notin \{0, n\}$.

Рассмотрим случай II.2. Пусть $l_1 \notin \mathfrak{B}_3$. Тогда $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ отличаются двумя рабочими числами $l_1, l_2 \notin \{0, n\}$. Чтобы не нарушалось правильное функционирование в полюсах $v_{\mathfrak{B}_2}$ и $v_{\mathfrak{B}_3}$ согласно лемме 9 необходимо, чтобы $x_k^{\sigma_k}$ и $x_m^{\sigma_m}$ были противоположными контактами одного переменного, т. е. $k = m$ и $\sigma_k = \bar{\sigma}_m$.

Возможны подслучаи II.2.1. $j = k$; II.2.2. $j \neq k$.

II.2.1. Пусть $j = k$, тогда если $\sigma_j = \sigma_k$, то по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$, так как $l_1 \notin \mathfrak{B}_2$, $l_1 \in \mathfrak{B}_1$ и $l_1 \notin \{0, n\}$. Если же $\sigma_j = \bar{\sigma}_k$, то по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_3}$, так как $l_2 \in \mathfrak{B}_3$, $l_2 \notin \mathfrak{B}_1$ и $l_2 \notin \{0, n\}$.

II.2.2. Пусть $j \neq k$, тогда если $\sigma_j = \sigma_k$, по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_1}$, так как $l_2 \in \mathfrak{B}_3$, $l_2 \notin \mathfrak{B}_1$ и $l_2 \notin \{0, n\}$. Если же $\sigma_j = \bar{\sigma}_k$, то по лемме 9 нарушено правильное функционирование в полюсе $v_{\mathfrak{B}_2}$, так как $l_1 \in \mathfrak{B}_2$, $l_1 \notin \mathfrak{B}_1$ и $l_1 \notin \{0, n\}$.

Теорема 2.

$$L(\Omega_n) \geq 7(2^{n-1} - 4).$$

Доказательство. Все множество симметрических функций Ω_n разобьем на четверки $S_{\mathfrak{A}} = \{S_n^{\mathfrak{A}}, S_n^{0, \mathfrak{A}}, S_n^{0, \mathfrak{A}, n}, S_n^{\mathfrak{A}, n}\}$, где $\mathfrak{A} \subset \{1, \dots, n-1\}$. В схеме их будет $2^{n-1} - 4$. Покажем, что каждая четверка функций $S_{\mathfrak{A}}$ из Ω_n требует для своей реализации не менее 7 элементов.

Если к четверке полюсов $V_{\mathfrak{A}}$ примыкает семь или более элементов, то считаем, что для этой четверки все доказано. Так как если рассмотреть две четверки $V_{\mathfrak{A}}$ и $V_{\mathfrak{B}}$ ($\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \{1, \dots, n-1\}$), то по лемме 2 между полюсами из разных четверок нет контактов. Если же между этими полюсами $V_{\mathfrak{A}}$ и $V_{\mathfrak{B}}$ есть вентиль $e = (v_{\mathfrak{A}^1}, v_{\mathfrak{B}^1})$, где $v_{\mathfrak{A}^1} \in V_{\mathfrak{A}}$ и $v_{\mathfrak{B}^1} \in V_{\mathfrak{B}}$, то согласно замечанию 1 этот вентиль учитываем только в одной из четверок, а именно в $V_{\mathfrak{B}}$. Значит, все семь или более элементов будут подсчитаны только в одной четверке.

По лемме 6 к каждой четверке $V_{\mathfrak{A}}$ примыкает не менее шести элементов, а по лемме 8, если примыкает ровно шесть элементов, то они могут быть расположены только так, как показано на рис. 7. Поэтому для произвольной четверки полюсов $V_{\mathfrak{A}} = \{v_{\mathfrak{A}}^1, u_{\text{frakA}}^1, v_{\mathfrak{A}}^2, u_{\mathfrak{A}}^2\}$ возможны шесть случаев:

- 1) $v_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}}; \quad u_{\mathfrak{A}}^1 = v_{0, \mathfrak{A}}; \quad v_{\mathfrak{A}}^2 = v_{\mathfrak{A}, n}; \quad u_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}, n};$
- 2) $v_{\mathfrak{A}}^1 = v_{0, \mathfrak{A}}; \quad u_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}}; \quad v_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}, n}; \quad u_{\mathfrak{A}}^2 = v_{\mathfrak{A}, n};$
- 3) $v_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}, n}; \quad u_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}}; \quad v_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}, n}; \quad u_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}};$
- 4) $v_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}, n}; \quad u_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}}; \quad v_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}}; \quad u_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}, n};$
- 5) $v_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}}; \quad u_{\mathfrak{A}}^1 = v_{0, \mathfrak{A}}; \quad v_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}, n}; \quad u_{\mathfrak{A}}^2 = v_{\mathfrak{A}, n};$
- 6) $v_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}}; \quad u_{\mathfrak{A}}^1 = v_{\mathfrak{A}, n}; \quad v_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}}; \quad u_{\mathfrak{A}}^2 = v_{0, \mathfrak{A}, n}.$

Символом $w_{\mathfrak{A}}^i$ ($i = 1, 2$) обозначим начало вентиля ($w_{\mathfrak{A}}^i, v_{\mathfrak{A}}^i$).

Рассмотрим вентили ($w_{\mathfrak{A}}^1, v_{\mathfrak{A}}^1$) и ($w_{\mathfrak{A}}^2, v_{\mathfrak{A}}^2$).

Покажем, что $w_{\mathfrak{A}}^1 \neq w_{\mathfrak{A}}^2$, т. е. что начало вентиля не совпадает. Предположим противное, т. е. $w_{\mathfrak{A}}^1 = w_{\mathfrak{A}}^2$. Тогда в случаях 1), 2), 5) на наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с n единицами функции, реализующиеся в $v_{\mathfrak{A}}^1$ и $v_{\mathfrak{A}}^2$ обращаются в единицу, что приводит к неправильному функционированию в $v_{\mathfrak{A}}^1$. В случаях 3), 4), 6) на наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с n нулями функции, реализующиеся в $v_{\mathfrak{A}}^1$ и $v_{\mathfrak{A}}^2$ обращаются в единицу, что приводит к неправильному функционированию в $v_{\mathfrak{A}}^1$. Значит, $w_{\mathfrak{A}}^1 \neq w_{\mathfrak{A}}^2$.

Рассмотрим две произвольные четверки полюсов $V_{\mathfrak{A}} = \{v_{\mathfrak{A}}^1, u_{\mathfrak{A}}^1, v_{\mathfrak{A}}^2, u_{\mathfrak{A}}^2\}$ и $V_{\mathfrak{B}} = \{v_{\mathfrak{B}}^1, u_{\mathfrak{B}}^1, v_{\mathfrak{B}}^2, u_{\mathfrak{B}}^2\}$ ($\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \{1, \dots, n-1\}$). Пусть $i, j \in \{1, 2\}$. Тогда $(w_{\mathfrak{A}}^i, v_{\mathfrak{A}}^i)$, $(w_{\mathfrak{B}}^j, v_{\mathfrak{B}}^j)$ — внешние вентили, $(u_{\mathfrak{A}}^i, v_{\mathfrak{A}}^i) = x_{k_i}^{\sigma_{k_i}}$, $(u_{\mathfrak{B}}^j, v_{\mathfrak{B}}^j) = x_{m_j}^{\sigma_{m_j}}$ — контакты. Пусть в $v_{\mathfrak{A}}^i$ реализуется $S_n^{\mathfrak{A}_i}$ ($\mathfrak{A}_i \subset \{0, \mathfrak{A}, n\}$), а в $v_{\mathfrak{B}}^j$ реализуется $S_n^{\mathfrak{B}_j}$ ($\mathfrak{B}_j \subset \{0, \mathfrak{B}, n\}$). Покажем, что $w_{\mathfrak{A}}^i \neq w_{\mathfrak{B}}^j$. Предположим противное, т. е. $w_{\mathfrak{A}}^i = w_{\mathfrak{B}}^j$. Множество $\mathfrak{A}_i$ отличается от $\mathfrak{B}_j$ по крайней мере одним рабочим числом l , $l \notin \{0, n\}$, пусть ради определенности $l \in \mathfrak{A}_i$, $l \notin \mathfrak{B}_j$. На наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с l единицами таким, что $\alpha_i = \sigma_{k_i}$ функция $S_n^{\mathfrak{B}_j}(\tilde{\alpha})$ обращается в единицу, что приводит к неправильному функционированию в $v_{\mathfrak{B}_j}$, так как $l \notin \mathfrak{B}_j$. Значит, $w_{\mathfrak{A}}^i \neq w_{\mathfrak{B}}^j$.

Покажем, что в $w_{\mathfrak{A}}^i$ не может быть реализована функция из другой четверки $S_{\mathfrak{B}}$. Предположим противное, т. е. в $w_{\mathfrak{A}}^i$ реализуется функция из $S_{\mathfrak{B}}$.

Пусть существует число l , $l \in \{1, \dots, n-1\}$ такое, что $l \in \mathfrak{A}$, $l \notin \mathfrak{B}$. Тогда на наборе $\tilde{\alpha}$ длины n с l единицами таким, что $\alpha_i = \bar{\sigma}_{k_i}$ функция, реализующаяся в полюсе $v_{\mathfrak{A}}^i$, обращается в ноль, что приводит к неправильному функционированию в этом полюсе.

Пусть к $w_{\mathfrak{A}}^1$ или $w_{\mathfrak{A}}^2$ примыкает хотя бы один вентиль, проводящий в направлении к $w_{\mathfrak{A}}^1$ или $w_{\mathfrak{A}}^2$, то согласно замечанию 1 он будет учтен один раз и только в данной четверке $V_{\mathfrak{A}}$, так как в $w_{\mathfrak{A}}^i$ ($i = 1, 2$) не может быть реализована функция из другой четверки $V_{\mathfrak{B}}$ ($\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$).

Если же к $w_{\mathfrak{A}}^1$ и $w_{\mathfrak{A}}^2$ примыкают только контакты и вентили, проводящие в направлении от $w_{\mathfrak{A}}^1$ и $w_{\mathfrak{A}}^2$, то по лемме 10 существуют контакты $(w_{\mathfrak{A}}^1, z^1)$ и $(w_{\mathfrak{A}}^2, z^2)$ такие, что $z^1, z^2 \notin W_n$. Эти контакты не совпадают, так как $w_{\mathfrak{A}}^1 \neq w_{\mathfrak{A}}^2$, и их концы $w_{\mathfrak{A}}^1$ и $w_{\mathfrak{A}}^2$ будут принадлежать только одной четверке $V_{\mathfrak{A}}$, поскольку $w_{\mathfrak{A}}^i \neq w_{\mathfrak{B}}^j$ ($i, j = 1, 2$), и в $w_{\mathfrak{A}}^i$ не может быть реализована функция из другой четверки $S_{\mathfrak{B}}$ ($\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$). В сумме эти два контакта дадут сложность 1.

Таким образом получили, что к каждой четверке полюсов из $V_{\mathfrak{A}}$ примыкает либо более шести элементов, либо шесть, но тогда к концам этих шести элементов примыкает еще один элемент, который считается только в этой четверке: вентиль считается один раз согласно замечанию 1, а контакт можно подсчитать два раза, так как у него два конца, но таких контактов у каждой четверки два. Поэтому два конца (один из которых принадлежит одному контакту, а другой — другому) двух контактов можно подсчитать за один элемент.

Следовательно, каждая четверка функций $S_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \subset \{1, \dots, n-1\}$, требует для своей реализации семь элементов, а во всей схеме не менее $7(2^{n-1} - 4)$ элементов.

Теорема 3. *Для реализации всех симметрических функций от n переменных контактно-вентильной схемой требуется асимптотически $7 \cdot 2^{n-1}$ элементов.*

Доказательство следует из теорем 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кричевский Р. Е. О сложности параллельно-последовательных контактных схем, использующих одну последовательность булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 12. — М.: Наука, 1964. — С. 45–55.
2. Марков А. А. О минимальных контактно-вентильных двуполусниках для монотонных симметрических функций // Проблемы кибернетики. Вып. 8. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 117–121.
3. Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algebre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. des Télécommunications. — V. 7. — № 2. — 1952. — P. 75–84.
4. Riordan J., Shannon C. E. The number of two-terminal series parallel networks // Journal Math. and Phys. — V. 21. — № 2. — 1942. — P. 83–93. [Русский перевод: Число двухполюсных параллельно-последовательных сетей // в сб. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике // М.: ИЛ. — 1963. — С. 46–58.]
5. Shannon C. E. A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. AIEE. — V. 57. — 1938. — P. 713–722. [Русский перевод: Символический анализ релейных и переключаемых схем // в сб. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике // М.: ИЛ. — 1963. — С. 9–45.]
6. Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell. Syst. Techn. J. — V. 28. — № 1. — 1949. — P. 59–98. [Русский перевод: Синтез двухполюсных переключаемых схем // в сб. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике // М.: ИЛ. — 1963. — С. 59–105.]

Поступило в редакцию 1 IV 2005