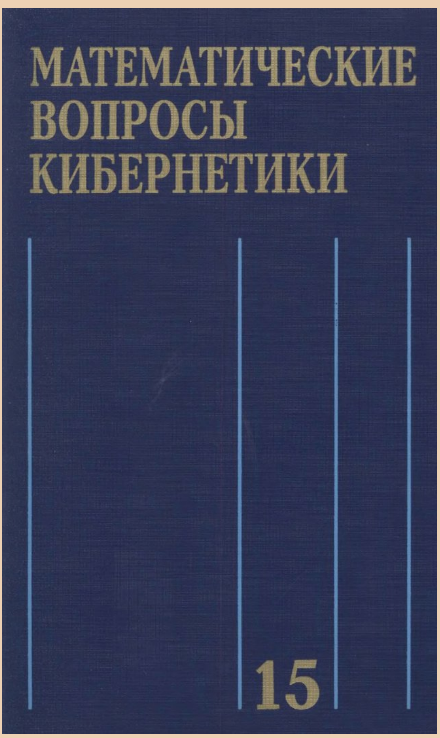

Т. Г. Петросян

О размере максимального множества, свободного от произведений, в группах

О РАЗМЕРЕ МАКСИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА, СВОБОДНОГО ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ, В ГРУППАХ

Т. Г. ПЕТРОСЯН

(МОСКВА)

В работе получен размер максимального множества, свободного от произведений, в группе G, содержащей подгруппу простого индекса p, $p \equiv 2 \pmod 3$, и такой, что в G нет подгрупп индекса меньшего чем p.

1. Основные понятия

Будем называть $M \subset G$ *множеством, свободным от произведений,* (МСП) если не существует $(x, y, z) \in M^3$, таких, что $xy = z$. Обозначим семейство всех МСП группы G через $\mathrm{PF}(G)$. Множество M, свободное от произведений, называется *максимальным,* если $|M| \geqslant |T|$ для любого T из $\mathrm{PF}(G)$. Обозначим через $\lambda(G)$ размер максимального МСП в группе G. Пусть $\mu(G) = \lambda(G)/|G|$.

В классе абелевых групп задача нахождения размера максимального МСП окончательно решена в работе [3].

Разобьем класс конечных абелевых групп на три подкласса и определим на этих подклассах функцию $\nu(G)$.

Класс 1: n делится на простое $p \equiv 2 \pmod 3$, $\nu(G) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3p}$, где p — наименьшее такое простое число;

Класс 2: n не делится ни на какое простое $p \equiv 2 \pmod 3$, но $3|n$, $\nu(G) = \frac{1}{3}$;

Класс 3: n делится только на простые $p \equiv 1 \pmod 3$, $\nu(G) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3m}$, где m является экспонентой G.

Теорема 1 (Грин-Ружа [3]). *Для любой абелевой группы G выполняется $\mu(G) = \nu(G)$.*

По данной проблеме практически нет работ, относящихся к произвольным конечным группам. Первый результат, по-видимому, получен в [2].

Теорема 2 (Дянанда-Яп [2]). *Пусть $|G| = 3q$, где q — простое число и $q \equiv 1 \pmod 3$. Тогда $\mu(G) = 1/3$.*

В [6] изучена структура максимальных МСП в группах порядка $3p$, $p \equiv 1 \pmod 3$. Получен следующий результат.

Теорема 3 (Яп [6]). *Пусть G произвольная группа порядка $3p$, где p — простое число, и $p \equiv 1 \pmod 3$. Если S — максимальное МСП в G, то тогда оно является смежным классом по некоторой подгруппе H порядка p группы G.*

В работе автора [1] получено обобщение теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть G группа порядка pq и $p \neq 3k+1$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\lambda(G) = q,$$

если $p = 3$, и

$$\lambda(G) = \frac{q(p+1)}{3},$$

если $p \equiv 2 \pmod 3$.

Здесь доказывается более общее утверждение.

Теорема 5. *Пусть G — группа порядка n, содержащая нормальную подгруппу H индекса p, $p \equiv 2 \pmod 3$. Если в G нет нормальной подгруппы индекса меньшего чем p, то*

$$\lambda(G) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3p}\right) n.$$

2. Вспомогательные утверждения

В работе используются следующие теоремы.

Теорема 6 (Олсон [4]). *Пусть A и B являются конечными непустыми подмножествами группы G, тогда существует подмножество F множества AB и подгруппа H группы G, такие, что $|F| \geqslant |A|+|B|-|H|$, и либо $FH = F$, либо $HF = F$.*

Теорема 7 (Яп [5]). *Пусть $S \in MPF(\mathbb{Z}_p)$, $p=3k+2$. Тогда $-S=S$ и любое максимальное МСС при некотором автоморфизме группы $\mathbb{Z}_p$ имеет вид*

$$\{k+1,\ k+2, \ldots, 2k+1\}.$$

3. Доказательство теоремы 5

Рассмотрим фактор-группу G/H. Из теоремы 7 следует существование МСП S, $S \subset G/H$, порядка $\frac{p+1}{3}$. Ясно, что полный прообраз S при каноническом гомоморфизме φ: $G \to G/H$ является МСП. Таким образом,

$$\mu(G) \geqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3p}.$$

Пусть $M \in \mathrm{PF}(G)$. Из теоремы 6 следует, что

$$|MM| \geqslant 2|M| - |H|, \tag{1}$$

где H — подгруппа группы G. Поскольку $MM \cap M = \varnothing$, то из (1) получаем

$$3|M| - |H| \leqslant |MM| + |M| \leqslant |G|.$$

Таким образом,

$$|M| \leqslant \frac{|G|+|H|}{3} \leqslant \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3|G\colon H|}\right) n. \tag{2}$$

Из теоремы 6 следует существование множества $F \subseteq MM$, содержащего смежный класс (правый или левый) по подгруппе H. Предположим, что $H = G$. Тогда $|MM| = |G|$, но это противоречит тому, что $M \cap MM = \varnothing$. Таким образом, $|G\colon H| \geqslant p$. Отсюда и из (2) следует, что

$$|M| \leqslant \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3p}\right) n.$$

Итак, $\lambda(G) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3p}\right) n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Т. Г. Размер максимального множества, свободного от произведений, в группах порядка pq // Материалы XVI Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ. — 2006. — С. 85–88.
2. Diananda P. H., Yap H. P. Maximal Sum-Free Sets of Elements of Finite Groups // Proc. Japan Acad. — 1969. — V. 45, № 1. — P. 1–5.
3. Green B., Ruzsa I. Z. Sum-free sets in abelian groups // Israel J. Math. — 2005. — V. 147. — P. 157–189.
4. Olson J. E. On the sum of two sets in a group // Journal of Number Theory. — 1984. — V. 18. — P. 110–120.
5. Yap H. P. The number of maximal sum-free sets in C_p // Nanta Math. — 1968. — V. 2, № 1. — P. 68–71.
6. Yap H. P. Structure of maximal sum-free sets in groups of order $3p$ // Proc. Japan Acad. — 1970. — V. 46. — P. 758–762.

Поступило в редакцию 1 IX 2006