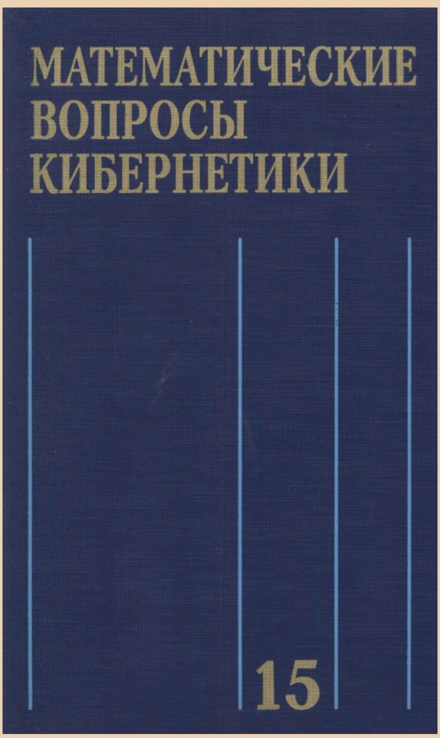

Н. Р. Закиров

О представлении произвольного алгебраического числа периодической ветвящейся цепной дробью

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ЧИСЛА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВЕТВЯЩЕЙСЯ ЦЕПНОЙ ДРОБЬЮ *)

Н. Р. ЗАКИРОВ

(МОСКВА)

Введение

Известно [5], что любое положительное действительное число α можно представить цепной дробью

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — целые числа, $a_0 \geqslant 0$, $a_k \geqslant 1$ при $k \geqslant 1$. По теореме Лагранжа [5] цепная дробь является периодической (т. е. существуют числа p, $p \geqslant 1$, и k_0 такие, что $a_{k+p} = a_k$ при всех $k \geqslant k_0$), тогда и только тогда, когда α является квадратичной иррациональностью: корнем многочлена степени 2 с целыми коэффициентами.

Одним из естественных обобщений цепных дробей являются ветвящиеся цепные дроби [4]. Понятие периодической цепной дроби легко обобщается на случай ветвящихся цепных дробей.

В [2] была предпринята попытка построить представление произвольного действительного алгебраического числа в виде периодической ветвящейся цепной дроби с целыми (не обязательно положительными) элементами. Однако предложенное в [2] представление носит формальный характер, в частности, вопрос о сходимости построенных ветвящихся цепных дробей для случая отрицательных элементов остался невыясненным.

Более того, существуют примеры, когда представление, построенное для данного алгебраического числа по предложенному в [2] алгоритму, сходится к другому алгебраическому числу.

Таким образом, проблема представления произвольного алгебраического числа периодической ветвящейся цепной дробью до сих пор оставалась открытой. В данной работе эта проблема решена: показано, что всякое положительное алгебраическое число можно представить ветвящейся цепной дробью с целыми положительными элементами. Предложен алгоритм построения такой ветвящейся цепной дроби, позволяющий выписывать ее

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00994), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-5400.2006.1) и Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

в явном виде по многочлену с целыми коэффициентами, корнем которого является заданное алгебраическое число. Полученный результат естественным образом распространяется на все действительные алгебраические числа: любое из них можно получить прибавлением некоторого целого к подходящему положительному алгебраическому числу.

§ 1. Определение ветвящейся цепной дроби

Понятие ветвящейся цепной дроби введено в [4]. *Ветвящейся цепной дробью* называется всякое выражение X вида

$$X = b + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N_{i_1}} \cfrac{a_{i_1 i_2}}{\ddots \, b_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} + \sum\limits_{i_k=1}^{N_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}} \cfrac{a_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{\ddots}}},$$

где $N, N_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ — натуральные, а $a_{i_1, i_2, \ldots, i_k}, b, b_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ — действительные числа. Всюду далее вместо «ветвящаяся цепная дробь» для краткости будем говорить «ветвящаяся дробь». Числа $N, N_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ называются *числами ветвления* ветвящейся дроби X, числа $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, b, $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — *элементами* этой дроби. Удобно считать, что число ветвления N и элемент b индексированы пустым набором индексов $i_1, \ldots, i_k$, соответствующим значению k равным нулю. При $k \geqslant 1$ элементы $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ветвящейся дроби X называются *частными числителями*, а элементы $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — *частными знаменателями* этой дроби.

Если все числа ветвления ветвящейся дроби ограничены сверху одним и тем же числом, то ветвящаяся дробь называется ветвящейся дробью *с ограниченным ветвлением.*

Две ветвящиеся дроби называются *графически равными*, если их числа ветвления и элементы с одинаковыми индексами совпадают.

Ветвящейся дробью *с натуральными элементами* называется ветвящаяся дробь, все элементы которой — натуральные числа, за исключением элемента b, который может быть равен нулю. Всюду далее будем рассматривать ветвящиеся дроби с натуральными элементами.

Ветвящаяся дробь называется *конечной*, если число ее элементов конечно, и *бесконечной* в противном случае.

Конечной ветвящейся дробью является, например, выражение

$$3 + \frac{4}{2} + \cfrac{2}{5 + \cfrac{7}{6 + \frac{2}{4} + \frac{3}{6}} + \frac{8}{16}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{4 + \frac{12}{10}}}.$$

Всякая конечная ветвящаяся дробь представляет некоторое рациональное число: результат выполнения операций сложения и деления, содержащихся в записи этой дроби. Например, указанная выше ветвящаяся дробь представляет число $\frac{2308}{403}$.

Пример бесконечной ветвящейся дроби дает выражение

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots} + \cfrac{2}{1 + \ldots}} + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots} + \cfrac{2}{1 + \ldots}}}}. \tag{1}$$

Бесконечные ветвящиеся дроби могут представлять произвольные положительные действительные числа. В частности, как будет показано, ветвящаяся дробь (1) представляет число $\sqrt[3]{2}-1$.

§ 2. Сходимость ветвящихся дробей

Оборвать на k-м этаже ветвящуюся дробь X означает отбросить все ее элементы с $k+1$ и более индексами, а элементы с меньшим количеством индексов оставить без изменения.

Для всякой ветвящейся дроби X построим конечные *подходящие дроби* X_m, обрывая дробь X на m-м этаже при $m=1,2,\ldots$:

$$X_m = b + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N_{i_1}} \cfrac{a_{i_1 i_2}}{\ddots\, b_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} + \sum\limits_{i_m=1}^{N_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}} \cfrac{a_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{b_{i_1 i_2 \ldots i_m}}}}.$$

По последовательности подходящих дробей исходная ветвящаяся дробь восстанавливается однозначно. Каждая подходящая дробь X_m представляет некоторое рациональное число, которое будем обозначать тем же символом X_m, если это не ведет к недоразумениям.

Будем говорить, что ветвящаяся дробь X *сходится* и *представляет число* α, если существует предел последовательности чисел X_m, представляемых ее подходящими дробями, и

$$\alpha = \lim_{m\to\infty} X_m.$$

В [4] доказано, что всякая дробь с ограниченным ветвлением и натуральными элементами сходится, но доказательство сходимости ветвящейся дроби с натуральными элементами для общего случая довольно сложно. В параграфе 5 будет приведено более простое независимое доказательство сходимости произвольных периодических ветвящихся дробей с натуральными элементами.

§ 3. Периодические ветвящиеся дроби

Ветвящаяся дробь X называется *простой*, если ее элемент b равен нулю и число ветвления без индексов N равно единице, т. е. простая ветвящаяся дробь — это дробь вида

$$X = \cfrac{a_1}{b_1 + \sum\limits_{i_2=1}^{N_1} \cfrac{a_{1i_2}}{\ddots\, b_{1i_2\ldots i_{k-1}} + \sum\limits_{i_k=1}^{N_{1i_2\ldots i_{k-1}}} \cfrac{a_{1i_2\ldots i_k}}{\ddots}}}. \tag{2}$$

Пусть X — произвольная ветвящаяся дробь. Фиксируем произвольную (возможно пустую) последовательность чисел $l_1,\ldots,l_m$ и отбросим все элементы ветвящейся дроби X, наборы индексов которых не начинаются последовательностью чисел $l_1,\ldots,l_m$. В полученной ветвящейся дроби X' изменим индексацию чисел ветвления и элементов по правилу: $N'_{1i_2\ldots i_k} = N_{l_1\ldots l_m i_2\ldots i_k}$, $a'_{1i_2\ldots i_k} = a_{l_1\ldots l_m i_2\ldots i_k}$ и $b'_{1i_2\ldots i_k} = b_{l_1\ldots l_m i_2\ldots i_k}$, где $k=1,2,\ldots$ (под набором $i_2,\ldots,i_k$ при $k=1$ здесь подразумевается пустой набор). Всякая ветвящаяся дробь X', полученная описанным выше способом из ветвящейся дроби X, называется *поддробью* дроби X.

Ветвящаяся дробь называется *периодической*, если она содержит конечное число попарно графически не равных поддробей. Пример периодической ветвящейся дроби дает ветвящаяся дробь (1), представляющая число $\sqrt[3]{2}-1$. Прибавив единицу к ветвящейся дроби (1), получаем периодическую ветвящуюся дробь, представляющую число $\sqrt[3]{2}$:

$$\sqrt[3]{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}+\cfrac{2}{1+\ldots}}+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}+\cfrac{2}{1+\ldots}}}}. \qquad (3)$$

Другое представление числа $\sqrt[3]{2}$ периодической ветвящейся дробью получено в [2]:

$$\sqrt[3]{2}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\ldots}+\cfrac{1}{12+\ldots}}+\cfrac{1}{12+\cfrac{10}{3+\ldots}+\cfrac{3}{12+\ldots}}}. \qquad (4)$$

В отличие от случая цепных дробей, одно и то же действительное число можно представить ветвящейся дробью, вообще говоря, многими способами.

Всякая конечная ветвящаяся дробь является периодической. Формальная сумма периодических ветвящихся дробей и всякая поддробь периодической ветвящейся дроби также являются периодическими ветвящимися дробями.

Как сказано выше, в [4] доказано, что произвольная ветвящаяся дробь с натуральными элементами и ограниченным ветвлением сходится. Периодическая ветвящаяся дробь является дробью с ограниченным ветвлением, поэтому всегда сходится.

§ 4. Символическая запись периодических ветвящихся дробей

Пусть X — простая периодическая ветвящаяся дробь, и $X^{(1)},\ldots$ $\ldots, X^{(n)}$ — все ее графически не равные поддроби, причем $X^{(1)}=X$. Тогда для каждого i, $1\leqslant i\leqslant n$, поддробь $X^{(i)}$ можно записать в виде символической простой конечной ветвящейся дроби, элементами которой являются натуральные числа и символы поддробей $X^{(1)},\ldots,X^{(n)}$. Например, простая дробь (1) содержит всего две графически не равных поддроби $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, и записываются они в виде символических дробей следующим образом:

$$\begin{cases} X^{(1)}=\dfrac{1}{2+X^{(1)}+X^{(2)}}, \\ X^{(2)}=\dfrac{2}{1+X^{(1)}}. \end{cases} \qquad (5)$$

В общем случае совокупность всех поддробей $X^{(i)}$ для всех i, $1\leqslant i\leqslant n$, ветвящейся дроби X записывается в виде следующей системы символических ветвящихся дробей

$$\begin{cases} X^{(1)}=\dfrac{a_1}{c_0^1+X_{11}+\ldots+X_{1l_1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^{(n)}=\dfrac{a_n}{c_0^n+X_{n1}+\ldots+X_{nl_n}}, \end{cases} \qquad (6)$$

где для всякого i через $X_{i1}, \ldots, X_{il_i}$ обозначены символы $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$, расположенные в некотором порядке. (То есть символы поддробей $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ могут встречаться в знаменателях символических дробей в системе (6), вообще говоря, в любой последовательности и в любом количестве.) Если не обращать внимание на порядок расположения символов $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ в записи символической ветвящейся дроби, то система символических ветвящихся дробей (6) записывается в более простом виде

$$\left\{\begin{array}{l} X^{(1)} = \dfrac{a_1}{c_0^1 + c_1^1 X^{(1)} + c_2^1 X^{(2)} + \ldots + c_n^1 X^{(n)}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^{(n)} = \dfrac{a_n}{c_0^n + c_1^n X^{(1)} + c_2^n X^{(2)} + \ldots + c_n^n X^{(n)}}, \end{array}\right. \tag{7}$$

где a_k и c_i^k — некоторые целые числа, удовлетворяющие условиям

$$a_k > 0, \quad c_0^k > 0, \quad c_i^k \geqslant 0. \tag{8}$$

При этом $c_i^k X^{(i)}$ в записи символической дроби для поддроби $X^{(k)}$ в системе (7) означает сумму c_i^k символов $X^{(i)}$. В частности, если $c_i^k = 0$, то в записи символической ветвящейся дроби для поддроби $X^{(k)}$ символ $X^{(i)}$ отсутствует.

Очевидно, что всякая система соотношений вида (7) с целыми коэффициентами a_k, c_i^k, удовлетворяющими условиям (8), задает некоторую простую периодическую ветвящуюся дробь X равную $X^{(1)}$ с поддробями $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ (уже не обязательно графически не равными).

§ 5. Сходимость периодических ветвящихся дробей

Докажем, что произвольная периодическая ветвящаяся дробь с натуральными элементами сходится.

Рассмотрим задаваемую системой соотношений (7) простую периодическую ветвящуюся дробь X с поддробями $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$, причем $X = X^{(1)}$. Пусть $D_k^1, \ldots, D_k^n$ — k-е подходящие дроби для ветвящихся дробей $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ соответственно. Тогда числа $D_k^1, \ldots, D_k^n$, представляемые этими подходящими дробями, удовлетворяют следующей системе рекуррентных соотношений

$$\left\{\begin{array}{l} D_{k+1}^1 = \dfrac{a_1}{c_0^1 + c_1^1 D_k^1 + c_2^1 D_k^2 + \ldots + c_n^1 D_k^n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{k+1}^n = \dfrac{a_n}{c_0^n + c_1^n D_k^1 + c_2^n D_k^2 + \ldots + c_n^n D_k^n}, \end{array}\right. \tag{9}$$

с начальными условиями $D_0^j = 0$ при $j = 1, \ldots, n$.

Лемма 1. *Для чисел D_i^j, определяемых рекуррентными соотношениями* (9), *верна следующая цепочка неравенств:*

$$D_0^j \leqslant D_2^j \leqslant D_4^j \leqslant \ldots \leqslant D_{2k}^j \leqslant \ldots \leqslant D_{2k-1}^j \leqslant \ldots \leqslant D_3^j \leqslant D_1^j,$$

где $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Запишем для краткости рассматриваемую систему неравенств в виде

$$D_{2k-2}^j \leqslant D_{2k}^j, \quad D_{2k+1}^j \leqslant D_{2k-1}^j, \quad D_{2k}^j \leqslant D_{2k-1}^j,$$

где $k = 1, 2, \ldots; j = 1, \ldots, n$.

Докажем указанные неравенства индукцией по k. Сначала проверим базу индукции при $k=1$. Необходимо доказать, что для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$, выполняются неравенства

$$D_0^j \leqslant D_2^j, \quad D_3^j \leqslant D_1^j, \quad D_2^j \leqslant D_1^j.$$

Во-первых, для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$, верно, что $D_1^j = \dfrac{a_j}{c_0^j} > 0$. Отсюда следует, что для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$, выполняются неравенства

$$D_0^j = 0 < D_2^j = \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_1^1 + c_2^j D_1^2 + \ldots + c_n^j D_1^n} \leqslant \\ \leqslant \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j 0 + c_2^j 0 + \ldots + c_n^j 0} = D_1^j,$$

$$D_3^j = \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_2^1 + c_2^j D_2^2 + \ldots + c_n^j D_2^n} \leqslant \frac{a_j}{c_0^j} = D_1^j.$$

База индукции доказана.

Опишем индуктивный переход. Пусть для k, $1 \leqslant k \leqslant i-1$, утверждение уже доказано, докажем его для $k=i$. По предположению индукции для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, верно неравенство $D_{2i-3}^j \geqslant D_{2i-2}^j$. Следовательно,

$$D_{2i-2}^j = \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_{2i-3}^1 + c_2^j D_{2i-3}^2 + \ldots + c_n^j D_{2i-3}^n} \leqslant \\ \leqslant \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_{2i-2}^1 + c_2^j D_{2i-2}^2 + \ldots + c_n^j D_{2i-2}^n} = D_{2i-1}^j,$$

т. е. для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, верно неравенство $D_{2i-1}^j \geqslant D_{2i-2}^j$. Отсюда следует, что

$$D_{2i}^j = \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_{2i-1}^1 + c_2^j D_{2i-1}^2 + \ldots + c_n^j D_{2i-1}^n} \leqslant \\ \leqslant \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_{2i-2}^1 + c_2^j D_{2i-2}^2 + \ldots + c_n^j D_{2i-2}^n} = D_{2i-1}^j.$$

Третье неравенство доказано для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Далее, по предположению индукции для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, верно неравенство $D_{2i-3}^j \geqslant D_{2i-1}^j$. Отсюда видно, что

$$D_{2i-2}^j = \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_{2i-3}^1 + c_2^j D_{2i-3}^2 + \ldots + c_n^j D_{2i-3}^n} \leqslant \\ \leqslant \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_{2i-1}^1 + c_2^j D_{2i-1}^2 + \ldots + c_n^j D_{2i-1}^n} = D_{2i}^j.$$

Таким образом, первое неравенство доказано для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Только что доказано, что для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, верно неравенство $D_{2i}^j \geqslant D_{2i-2}^j$. Но тогда

$$D_{2i+1}^j = \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_{2i}^1 + c_2^j D_{2i}^2 + \ldots + c_n^j D_{2i}^n} \leqslant \\ \leqslant \frac{a_j}{c_0^j + c_1^j D_{2i-2}^1 + c_2^j D_{2i-2}^2 + \ldots + c_n^j D_{2i-2}^n} = D_{2i-1}^j.$$

Наконец, второе неравенство доказано для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Лемма доказана.

Значит, каждая из последовательностей D^j_{2k-1} и D^j_{2k} сходится при $k \to \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Но, вообще говоря, не исключено, что последовательность D^j_n по четным n сходится к иному числу, нежели по нечетным n. Покажем, что обе последовательности D^j_{2k-1} и D^j_{2k} сходятся к одному числу.

Лемма 2. *При любом фиксированном j, $1 \leqslant j \leqslant n$, последовательности D^j_{2k-1} и D^j_{2k} сходятся к одному числу при $k \to \infty$, т. е.*

$$\lim_{k \to \infty} D^j_{2k-1} = \lim_{k \to \infty} D^j_{2k}.$$

Доказательство леммы основано на следующем простом утверждении.

Лемма 3. *Пусть $x = \dfrac{b_1 + \ldots + b_n}{c_1 + \ldots + c_n}$, где b_i, c_i — произвольные положительные числа. Тогда выполнение неравенства $\dfrac{b_i}{c_i} > x$ ($\dfrac{b_i}{c_i} < x$) для некоторого i влечет выполнение для некоторого j неравенства $\dfrac{b_j}{c_j} < x$ (соответственно $\dfrac{b_j}{c_j} > x$).*

Доказательство. Докажем утверждение от противного. Пусть $\dfrac{b_i}{c_i} > x$ и $\dfrac{b_j}{c_j} \geqslant x$, для всех j, $j \neq i$, тогда $b_1 + \ldots + b_n > c_1 x + \ldots + c_n x$, так как $b_i > c_i x$ и $b_j \geqslant c_j x$, для всех j, $j \neq i$. Значит, $\dfrac{b_1 + \ldots + b_n}{c_1 + \ldots + c_n} > x$, что противоречит условию леммы. Аналогично рассматривается случай $\dfrac{b_i}{c_i} < x$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим последовательности векторов $(D^1_{2k-1}, \ldots, D^n_{2k-1})$ и $(D^1_{2k}, \ldots, D^n_{2k})$. Пусть эти последовательности сходятся при $k \to \infty$ к векторам $(D^1, \ldots, D^n)$ и $(d^1, \ldots, d^n)$ соответственно. Тогда верны следующие системы уравнений

$$\begin{cases} D^1 = \dfrac{a_1}{c^1_0 + c^1_1 d^1 + c^1_2 d^2 + \ldots + c^1_n d^n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^n = \dfrac{a_n}{c^n_0 + c^n_1 d^1 + c^n_2 d^2 + \ldots + c^n_n d^n}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^1 = \dfrac{a_1}{c^1_0 + c^1_1 D^1 + c^1_2 D^2 + \ldots + c^1_n D^n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^n = \dfrac{a_n}{c^n_0 + c^n_1 D^1 + c^n_2 D^2 + \ldots + c^n_n D^n}. \end{cases}$$

Разделим соответствующие уравнения этих систем друг на друга. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{D^1}{d^1} = \dfrac{c^1_0 + c^1_1 D^1 + c^1_2 D^2 + \ldots + c^1_n D^n}{c^1_0 + c^1_1 d^1 + c^1_2 d^2 + \ldots + c^1_n d^n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{D^n}{d^n} = \dfrac{c^n_0 + c^n_1 D^1 + c^n_2 D^2 + \ldots + c^n_n D^n}{c^n_0 + c^n_1 d^1 + c^n_2 d^2 + \ldots + c^n_n d^n}. \end{cases} \tag{10}$$

Из леммы 1 следует, что $D^i \geqslant d^i$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Выберем такой номер s, $1 \leqslant s \leqslant n$, что число $\frac{D^s}{d^s}$ принимает максимальное значение. Допустим, что $\frac{D^s}{d^s} > 1$. Рассмотрим уравнение из системы уравнений (10) под номером s:

$$\frac{D^s}{d^s} = \frac{c_0^s + c_1^s D^1 + c_2^s D^2 + \ldots + c_n^s D^n}{c_0^s + c_1^s d^1 + c_2^s d^2 + \ldots + c_n^s d^n}.$$

По лемме 3 из выполнения неравенства $\frac{c_0^s}{c_0^s} < \frac{D^s}{d^s}$ следует выполнение неравенства $\frac{c_l^s D^l}{c_l^s d^l} > \frac{D^s}{d^s}$ для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant n$. Но неравенство $\frac{D^l}{d^l} > \frac{D^s}{d^s}$ противоречит выбору s. Поэтому предположение $\frac{D^s}{d^s} > 1$ не верно, т. е. равенство $D^l = d^l$ выполняется для любого l, $1 \leqslant l \leqslant n$. Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 следует, что всякая простая периодическая ветвящаяся дробь сходится, а значит и произвольная периодическая ветвящаяся дробь сходится.

§ 6. Связь между периодическими ветвящимися дробями и системами уравнений

Свяжем со всякой простой периодической ветвящейся дробью систему уравнений специального вида. Всякая простая периодическая ветвящаяся дробь задается символической ветвящейся дробью с помощью системы соотношений (7). Сопоставим системе соотношений (7) систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{a_1}{c_0^1 + c_1^1 y_1 + c_2^1 y_2 + \ldots + c_n^1 y_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \dfrac{a_n}{c_0^n + c_1^n y_1 + c_2^n y_2 + \ldots + c_n^n y_n}, \end{array}\right. \tag{11}$$

с n переменными $y_1, \ldots, y_n$. Очевидно, что, и наоборот, всякой системе вида (11) с целыми коэффициентами a_k и c_i^k, удовлетворяющими условиям (8), соответствует система соотношений вида (7), задающая некоторую простую периодическую ветвящуюся дробь X.

Положительным решением системы уравнений будем называть решение с положительными компонентами.

Лемма 4. *Всякая система уравнений вида* (11) *с целыми коэффициентами* a_k, c_i^k, *удовлетворяющими условиям* (8), *имеет единственное положительное решение* $y_1 = \alpha_1, \ldots, y_n = \alpha_n$, *где каждое из чисел* α_j *представляется периодической ветвящейся дробью с натуральными элементами.*

Доказательство. Из сопоставления с системой соотношений (7) следует, что система (11) имеет положительное решение $y_j = X^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (ветвящиеся дроби $X^{(j)}$ сходятся при всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$, по леммам 1 и 2).

Существование положительного решения системы уравнений (11) доказано. Докажем его единственность.

Допустим, что система уравнений (11) имеет два отличных друг от друга положительных решения $(y_1, \ldots, y_n)$ и $(y'_1, \ldots, y'_n)$. Тогда верна следующая система равенств

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_1}{y_1'} = \dfrac{c_0^1 + c_1^1 y_1' + c_2^1 y_2' + \ldots + c_n^1 y_n'}{c_0^1 + c_1^1 y_1 + c_2^1 y_2 + \ldots + c_n^1 y_n}, \\ \dfrac{y_1'}{y_1} = \dfrac{c_0^1 + c_1^1 y_1 + c_2^1 y_2 + \ldots + c_n^1 y_n}{c_0^1 + c_1^1 y_1' + c_2^1 y_2' + \ldots + c_n^1 y_n'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{y_n}{y_n'} = \dfrac{c_0^n + c_1^n y_1' + c_2^n y_2' + \ldots + c_n^n y_n'}{c_0^n + c_1^n y_1 + c_2^n y_2 + \ldots + c_n^n y_n}, \\ \dfrac{y_n'}{y_n} = \dfrac{c_0^n + c_1^n y_1 + c_2^n y_2 + \ldots + c_n^n y_n}{c_0^n + c_1^n y_1' + c_2^n y_2' + \ldots + c_n^n y_n'}. \end{array}\right. \tag{12}$$

Выберем из множества положительных чисел $\left(\frac{y_1}{y_1'}, \frac{y_1'}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_n'}, \frac{y_n'}{y_n}\right)$ максимальный элемент. Без ограничения общности будем считать, что это число $\frac{y_1}{y_1'}$. Максимальный элемент $\frac{y_1}{y_1'}$ больше единицы, иначе решения $(y_1, \ldots, y_n)$ и $(y_1', \ldots, y_n')$ системы уравнений (11) были бы равны. Рассмотрим первое равенство в системе (12). Число $\frac{c_0^1}{c_0^1}$ равно единице, а число $\frac{y_1}{y_1'}$ больше единицы, значит $\frac{c_0^1}{c_0^1} < \frac{y_1}{y_1'}$. Тогда по лемме 3 существует такой номер j, что $\frac{c_0^j y_j'}{c_0^j y_j} > \frac{y_1}{y_1'}$, т. е. $\frac{y_j'}{y_j} > \frac{y_1}{y_1'}$. Но это невозможно по причине максимальности элемента $\frac{y_1}{y_1'}$ в множестве $\left(\frac{y_1}{y_1'}, \frac{y_1'}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_n'}, \frac{y_n'}{y_n}\right)$. Мы пришли к противоречию, поэтому первоначально сделанное допущение ложно, т. е. у системы уравнений (11) нет двух различных положительных решений. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Другое доказательство единственности положительного решения системы (11) извлекается непосредственно из лемм 1 и 2. Идея этого доказательства несложна, но ее реализация требует громоздких выкладок. Можно показать, что компонента под номером j любого положительного решения системы уравнений (11) не больше, чем каждый член последовательности D^j_{2k-1}, и не меньше, чем каждый член последовательности D^j_{2k}. По лемме 2 для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, пределы последовательностей D^j_{2k-1} и D^j_{2k} совпадают, поэтому положительное решение системы уравнений (11) единственно.

Итак, установлено соответствие между системами уравнений вида (11) и простыми периодическими ветвящимися дробями.

§ 7. Основная теорема. Доказательство для специального случая

Основной результат данной работы содержится в следующем утверждении.

Т е о р е м а. *Всякое положительное алгебраическое число можно представить периодической ветвящейся дробью с натуральными элементами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем теорему для алгебраических чисел, удовлетворяющих уравнению специального вида. А именно, построим периодическую ветвящуюся дробь, представляющую положительный корень многочлена

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x - a_0, \tag{13}$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — натуральные числа и $n > 1$. После доказательства теоремы для специального случая перейдем к построению периодических ветвящихся дробей, сходящихся к произвольным наперед заданным алгебраическим числам.

Положительный корень многочлена (13) единственный, поскольку по правилу Декарта [3] количество положительных корней многочлена $q_n x^n + \ldots + q_0$ не больше, чем количество перемен знака в последовательности $q_0, \ldots, q_n$ его коэффициентов, и отличается от количества перемен знака на четное число.

Пусть x_0 — положительный корень уравнения $a_n x^n + \ldots + a_1 x = a_0$. Тогда

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{a_0}{a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^{n-1}}, \\ x_0^2 = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{x_0} + a_2 + a_3 x_0 + \ldots + a_n x_0^{n-2}}, \\ x_0^3 = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{x_0^2} + \dfrac{a_2}{x_0} + a_3 + \ldots + a_n x_0^{n-3}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_0^{n-1} = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{x_0^{n-2}} + \dfrac{a_2}{x_0^{n-3}} + \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{x_0} + a_{n-1} + a_n x_0}. \end{cases}$$

Введем переменные $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Из выписанных равенств видно, что вектор $(x_0, x_0^2, \ldots, x_0^{n-1})$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_0}{a_1 + a_2 y_1 + a_3 y_2 + \ldots + a_n y_{n-1}}, \\ y_2 = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{y_1} + a_2 + a_3 y_1 + \ldots + a_n y_{n-2}}, \\ y_3 = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{y_2} + \dfrac{a_2}{y_1} + a_3 + \ldots + a_n y_{n-3}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{y_{n-2}} + \dfrac{a_2}{y_{n-3}} + \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{y_1} + a_{n-1} + a_n y_1}. \end{cases} \tag{14.1}$$

Перейдем от системы уравнений (14.1) к эквивалентной ей системе уравнений ($14.n-1$), сделав $n-2$ шагов эквивалентных преобразований исходной системы. На первом шаге во все уравнения системы (14.1), начиная со второго, вместо одного из вхождений y_1: того, которое стоит под дробной чертой при коэффициенте a_{i-1} в i-м уравнении, подставим правую часть 1-го уравнения системы (14.1); второе вхождение переменной y_1 в i-м уравнении оставим без изменений. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_0}{a_1 + a_2 y_1 + a_3 y_2 + \ldots + a_n y_{n-1}}, \\ y_2 = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{a_0}(a_1 + a_2 y_1 + \ldots + a_n y_{n-1}) + a_2 + a_3 y_1 + \ldots + a_n y_{n-2}}, \\ y_3 = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{y_2} + \dfrac{a_2}{a_0}(a_1 + a_2 y_1 + \ldots + a_n y_{n-1}) + a_3 + a_4 y_1 + \ldots + a_n y_{n-3}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = \\ = \dfrac{a_0}{\dfrac{a_1}{y_{n-2}} + \dfrac{a_2}{y_{n-3}} \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{a_0}(a_1 + a_2 y_1 \ldots + a_n y_{n-1}) + a_{n-1} + a_n y_1}. \end{cases} \tag{14.2}$$

Поскольку первое уравнение сохранилось неизменным, то возможна обратная подстановка, и полученная система уравнений эквивалентна исходной. (Далее в ходе преобразований будем раскрывать скобки в правых частях уравнений и производить соответствующее переобозначение коэффициентов.)

На k-м шаге аналогичным образом во все уравнения системы $(14.k)$, начиная с $(k+1)$-го, вместо одного из вхождений y_k: того, которое стоит под дробной чертой при коэффициенте a_{i-k} в i-м уравнении, подставим правую часть k-го уравнения системы $(14.k)$; второе вхождение переменной y_k в i-м уравнении оставим без изменений. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_0}{c_0^1 + c_1^1 y_1 + c_2^1 y_2 + \ldots + c_{n-1}^1 y_{n-1}}, \\ y_2 = \dfrac{a_0}{c_0^2 + c_1^2 y_1 + c_2^2 y_2 + \ldots + c_{n-1}^2 y_{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = \dfrac{a_0}{c_0^k + c_1^k y_1 + c_2^k y_2 + \ldots + c_{n-1}^k y_{n-1}}, \\ y_{k+1} = \\ = \dfrac{a_0}{\frac{a_1}{a_0}(c_0^k + \ldots + c_{n-1}^k y_{n-1}) + b_{0,k}^{k+1} + b_{1,k}^{k+1} y_1 + \ldots + b_{n-1,k}^{k+1} y_{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = \\ = \dfrac{a_0}{\frac{a_1}{y_{n-2}} + \ldots + \frac{a_{n-1-k}}{a_0}(c_0^k + \ldots + c_{n-1}^k y_{n-1}) + \ldots + b_{0,k}^{n-1} + \ldots + b_{n-1,k}^{n-1} y_{n-1}}. \end{cases} \tag{14.$k+1$}$$

Уравнение с номером k на k-м шаге сохраняется, поэтому всегда возможен обратный переход от системы уравнений $(14.k+1)$ к системе уравнений $(14.k)$.

По окончании процедуры получится равносильная (14.1) система уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_1}{c_0^1 + c_1^1 y_1 + c_2^1 y_2 + \ldots + c_{n-1}^1 y_{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = \dfrac{a_n}{c_0^{n-1} + c_1^{n-1} y_1 + c_2^{n-1} y_2 + \ldots + c_{n-1}^{n-1} y_{n-1}}, \end{cases} \tag{14.$n-1$}$$

где c_j^i и a_i — некоторые положительные рациональные числа для всех i, j, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Числа c_j^i и a_i без ограничения общности можно считать натуральными, иначе домножим все числа c_j^i и a_i на некоторое целое число и перейдем к эквивалентной системе уравнений с натуральными коэффициентами.

По лемме 4 система уравнений $(14.n-1)$ имеет единственное положительное решение. Следовательно, исходная система уравнений (14.1) также имеет единственное положительное решение.

По системе уравнений $(14.n-1)$ построим простую ветвящуюся дробь X, представляющую первую компоненту положительного решения системы уравнений $(14.n-1)$ (а значит, и системы уравнений (14.1)): число x_0.

Итак, положительный корень всякого многочлена вида (13) можно представить периодической ветвящейся дробью с натуральными элементами.

§ 8. Переход к общему случаю

Теперь построим периодическую ветвящуюся дробь для представления произвольного положительного алгебраического числа α.

Обозначим через A преобразование, которое всякий многочлен $g^0(x)$ степени n, такой что $g^0(0)\neq 0$, переводит в многочлен $g^1(x)$, той же степени n, определяемый соотношением $g^1(x)=g^0(\frac{1}{x})x^n$. Если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — все комплексные корни многочлена $g^0(x)$, то $\frac{1}{\xi_1},\ldots,\frac{1}{\xi_n}$ — все комплексные корни многочлена $g^1(x)$.

Для любого действительного числа c обозначим через B_c преобразование, которое всякий многочлен $g^0(x)$ степени n переводит в многочлен $g^1(x)$, той же степени n, определяемый соотношением $g^1(x)=g^0(x+c)$. Если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — все комплексные корни многочлена $g^0(x)$, то $\xi_1-c,\ldots,\xi_n-c$ — все комплексные корни многочлена $g^1(x)$.

Лемма 5. *Для любого положительного алгебраического числа α, являющегося корнем многочлена $f(x)$ степени n с целыми коэффициентами, существуют такие положительные рациональные числа q_1, q_2, q_3, что многочлен $f_1(x)$, той же степени n, определяемый соотношением $f_1(x)=q_3B_{q_2}(A(B_{q_1}(f(x))))$, имеет вид* (13), *и все его коэффициенты — натуральные числа. Причем, если δ — положительный корень многочлена $f_1(x)$, то алгебраическое число α выражается в виде $\alpha=q_1+\dfrac{1}{\delta+q_2}$.*

Доказательство. Пусть α является положительным корнем многочлена с рациональными коэффициентами $f(x)$, $f(x)=r_nx^n+\ldots+r_1x+r_0$.

Найдем такое положительное рациональное число q_1, что $q_1<\alpha$, и нет корня многочлена $f(x)$, действительная часть которого лежала бы на полуинтервале $[q_1,\alpha)$. Для этого достаточно выбрать положительное рациональное q_1 между двумя числами: числом α и ближайшим слева к нему числом, которое является действительной частью корня многочлена $f(x)$.

Перейдем к новому многочлену с рациональными коэффициентами $B_{q_1}(f(x))$,

$$B_{q_1}(f(x))=r_n(x+q_1)^n+\ldots+r_1(x+q_1)+r_0=r_n^{(1)}x^n+\ldots+r_1^{(1)}x+r_0^{(1)}.$$

Число $\alpha-q_1$ является корнем многочлена $B_{q_1}(f(x))$, и это ближайший к нулю корень указанного многочлена с положительной действительной частью, причем $B_{q_1}(f(0))\neq 0$.

Построим еще один многочлен с рациональными коэффициентами: $A(B_{q_1}(f(x)))$,

$$A(B_{q_1}(f(x)))=r_n^{(1)}+\ldots+r_1^{(1)}x^{n-1}+r_0^{(1)}x^n=r_n^{(2)}x^n+\ldots+r_1^{(2)}x+r_0^{(2)};$$

здесь $r_i^{(2)}=r_{n-i}^{(1)}$ при всех i, $1\leqslant i\leqslant n$. Корни многочлена $A(B_{q_1}(f(x)))$ — числа, обратные к корням многочлена $B_{q_1}(f(x))$. Поэтому положительное число $\dfrac{1}{\alpha-q_1}$ является корнем многочлена $A(B_{q_1}(f(x)))$, и у этого многочлена нет других корней, действительная часть которых была бы больше или равна числу $\dfrac{1}{\alpha-q_1}$.

Найдем такое положительное рациональное число p, что $p<\dfrac{1}{\alpha-q_1}$, и нет корня многочлена $A(B_{q_1}(f(x)))$, действительная часть которого лежала бы на полуинтервале $[p, \frac{1}{\alpha - q_1})$. Рассмотрим многочлен $B_p(A(B_{q_1}(f(x))))$,

$$B_p(A(B_{q_1}(f(x)))) = r_n^{(2)}(x+p)^n + \ldots + r_1^{(2)}(x+p) + r_0^{(2)} = r_n^{(3)}x^n + \ldots + r_1^{(3)}x + r_0^{(3)}.$$

Коэффициенты $r_i^{(3)}$ этого многочлена — рациональные числа. Положительное число λ, $\lambda = \frac{1}{\alpha - q_1} - p$, является корнем многочлена $B_p(A(B_{q_1}(f(x))))$, и число λ — единственный корень этого многочлена с неотрицательной действительной частью. Таким образом, все отличные от λ действительные корни многочлена $B_p(A(B_{q_1}(f(x))))$ — отрицательные числа. Обозначим абсолютные величины этих корней через $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Коэффициенты рассматриваемого многочлена — действительные числа, поэтому сопряженное число к каждому комплексному корню этого многочлена тоже является его корнем. Обозначим корни рассматриваемого многочлена с ненулевой мнимой частью через $\theta_1, \bar{\theta}_1, \ldots, \theta_m, \bar{\theta}_m$ (для всех i, $1 \leqslant i \leqslant m$, числа θ_i и $\bar{\theta}_i$ комплексно сопряжены) и запишем разложение этого многочлена на множители в виде

$$\begin{aligned} &B_p(A(B_{q_1}(f(x)))) = \\ &\quad = C(x-\lambda)(x+\mu_1)\ldots(x+\mu_k)(x-\theta_1)(x-\bar{\theta}_1)\ldots(x-\theta_m)(x-\bar{\theta}_m) = \\ &= C(x-\lambda)(x+\mu_1)\ldots(x+\mu_k)(x^2-(\theta_1+\bar{\theta}_1)x+\theta_1\bar{\theta}_1)\ldots(x^2-(\theta_m+\bar{\theta}_m)x+\theta_m\bar{\theta}_m), \end{aligned}$$

где $C = r_n^{(3)}$.

Обозначим через $P(x)$ многочлен

$$(x+\mu_1)\ldots(x+\mu_k)(x^2-(\theta_1+\bar{\theta}_1)x+\theta_1\bar{\theta}_1)\ldots(x^2-(\theta_m+\bar{\theta}_m)x+\theta_m\bar{\theta}_m),$$

т. е. $P(x) = \frac{B_p(A(B_{q_1}(f(x))))}{C(x-\lambda)}$. Тогда верно равенство $B_p(A(B_{q_1}(f(x)))) = C(P(x)x - P(x)\lambda)$. Для всех i, $1 \leqslant i \leqslant m$, из выполнения неравенства*) $\mathrm{Re}(\theta_i) < 0$ следует выполнение неравенств $-(\theta_i + \bar{\theta}_i) > 0$ и $\theta_i\bar{\theta}_i = |\theta_i|^2 > 0$. Значит, все коэффициенты многочлена $P(x)$ — положительные действительные числа.

Фиксируем произвольное число δ, такое что $0 < \delta < \frac{\lambda}{2}$, и число $\lambda - \delta$ рационально. Число δ — единственный корень с положительной действительной частью многочлена $g(x)$, $g(x) = r_n^{(3)}(x+\lambda-\delta)^n + \ldots + r_1^{(3)}(x+\lambda-\delta) + r_0^{(3)}$, который получается из многочлена $B_p(A(B_{q_1}(f(x))))$ сдвигом всех корней влево на положительное рациональное число $\lambda - \delta$, т. е.

$$\begin{aligned} g(x) = r_n^{(3)}(x+\lambda-\delta)^n + \ldots + r_1^{(3)}(x+\lambda-\delta) + r_0^{(3)} &= \\ = C(P(x+\lambda-\delta)(x+\lambda-\delta) - P(x+\lambda-\delta)\lambda) &= \\ = C(P(x+\lambda-\delta)x - P(x+\lambda-\delta)\delta)&. \end{aligned}$$

Коэффициенты многочлена $g(x)$ — рациональные числа, так как рациональными числами являются коэффициенты $r_i^{(3)}$ и число $\lambda - \delta$.

В многочлене $P(x+\beta)$ при любом фиксированном β, $\beta > 0$, все коэффициенты — положительные действительные числа. Таким образом, в многочленах $P(x + \frac{\lambda}{2})$, $P(x+\lambda)$, $P(x+\lambda-\delta)$ все коэффициенты являются положительными числами. Рассмотрим многочлен $g^{(1)}(x)$,

*) Как обычно, через $\mathrm{Re}\,\gamma$ обозначается действительная часть комплексного числа γ.

$g^{(1)}(x) = C(P(x+\frac{\lambda}{2})x - P(x+\lambda)\delta)$. Перед вторым слагаемым выражения $C(P(x+\frac{\lambda}{2})x - P(x+\lambda)\delta)$ стоит знак «минус», поэтому свободный член рассматриваемого многочлена — отрицательное число. Если число δ достаточно мало, то все коэффициенты многочлена $g^{(1)}(x)$, кроме свободного члена, — положительные числа. С другой стороны все коэффициенты этого многочлена при натуральных степенях x (т. е. не считая свободный член) меньше, чем соответствующие коффициенты многочлена $g(x)$, ибо $0<\frac{\lambda}{2}<\lambda-\delta<\lambda$. Таким образом, если число δ достаточно мало, то коэффициенты многочлена $g(x)$ при натуральных степенях x положительные, а свободный член так же, как и в $g^{(1)}(x)$, — отрицательное число, т. е. многочлен $g(x)$ имеет вид $a_n x^n+\ldots+a_1x-a_0$, где $a_0,\ldots,a_n$ — положительные рациональные числа.

Найдем такое целое положительное число q_3, чтобы все коэффициенты многочлена $f_1(x)$, $f_1(x)=q_3g(x)$, были натуральными числами. Тогда многочлен $f_1(x)$ имеет вид $a_nx^n+\ldots+a_1x-a_0$, где $a_0,\ldots,a_n$ — натуральные числа.

Обозначим выражение $p+(\lambda-\delta)$ через q_2, тогда выполняются равенства $g(x)=B_{q_2}(A(B_{q_1}(f(x))))$ и $f_1(x)=q_3B_{q_2}(A(B_{q_1}(f(x))))$. Итак, найдены такие рациональные числа q_1, q_2, q_3, что многочлен $f_1(x)=q_3B_{q_2}(A(B_{q_1}(f(x))))$ имеет вид (13), все его коэффициенты — натуральные числа, и единственным положительным корнем многочлена $f_1(x)$ является число δ, причем $\delta=\frac{1}{\alpha-q_1}-q_2$. Тогда $\alpha=q_1+\frac{1}{\delta+q_2}$. Лемма доказана.

Используя лемму 5, легко построить ветвящуюся дробь с натуральными элементами, представляющую заданное положительное алгебраическое число α. Если $q_1=\frac{m_1}{n_1}$, $q_2=\frac{m_2}{n_2}$, то ветвящаяся дробь, представляющая число α, получается подстановкой ветвящейся дроби, построенной по описанному в параграфе 7 способу для многочленов вида (13), в выражение $q_1+\frac{1}{\delta+q_2}=\frac{m_1}{n_1}+\frac{n_2}{n_2\delta+m_2}$ на место δ. Теорема доказана.

Автор хотел бы выразить благодарность О. М. Касим-Заде за постоянную поддержку и ценные советы и Д. А. Жукову за полезные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Закиров Н. Р. О представлении алгебраических чисел периодическими ветвящимися дробями // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2007.
2. Марченков С. С. Конечные автоматы и периодические разложения действительных чисел // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. — М.: Наука, 1999 — С. 304–311.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — Изд. 9-е. М.: Наука. Физматлит, 1968.
4. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — М.: Наука, 1983.
5. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1949.

Поступило в редакцию 12 IV 2006