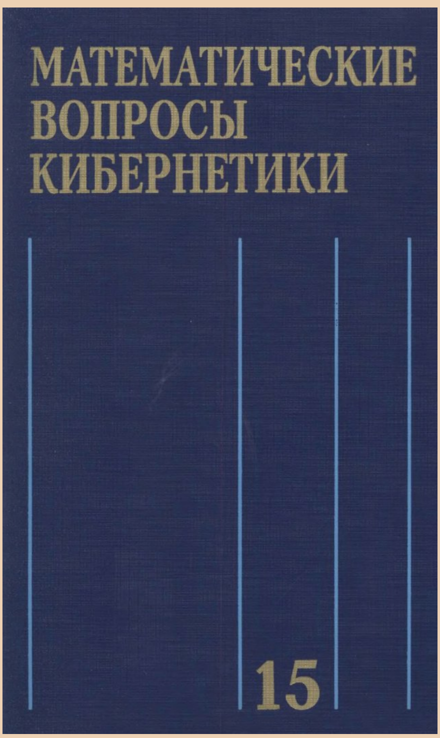

В. В. Кочергин

О сложности совместного вычисления трех одночленов от трех переменных

О СЛОЖНОСТИ СОВМЕСТНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРЕХ ОДНОЧЛЕНОВ ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ*)

В. В. КОЧЕРГИН

(МОСКВА)

Введение

Задача о сложности вычисления системы одночленов может быть сформулирована следующим образом. Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$ с неотрицательными коэффициентами без нулевых строк. Минимально возможное число операций умножения, достаточное для вычисления по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ и заданной матрице A системы одночленов

$$f_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, \quad f_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \quad \ldots, \quad f_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$$

(при этом допускается многократное использование промежуточных результатов) будем называть *сложностью вычисления* (или просто *сложностью*) множества одночленов $f_1, f_2, \ldots f_p$, и будем обозначать через $l(f_1, f_2, \ldots, f_p)$.

Введенную величину можно также определить на языке аддитивных цепочек [2]. *Аддитивной цепочкой* для целочисленной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ с неотрицательными коэффициентами без нулевых строк называется последовательность q-мерных векторов (наборов) вида

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{v}_q = (0, 0, \ldots, 1), \mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \ldots, \mathbf{v}_{q+r},$$

начинающаяся с q единичных векторов и удовлетворяющая условиям:

1) для каждого k, $q + 1 \leqslant k \leqslant q + r$, найдутся два натуральных числа (не обязательно различных) i и j, $1 \leqslant i \leqslant k - 1$, $1 \leqslant j \leqslant k - 1$, таких, что $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$ (сложение векторов покомпонентное);

2) $\{(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1q}), (a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2q}), \ldots, (a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pq})\} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \ldots, \mathbf{v}_{q+r}\}$.

Число r называется *длиной* цепочки. Очевидно, что минимальная длина таких аддитивных цепочек для матрицы A равна $l(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}})$.

Задача о сложности вычисления системы одночленов является обобщением задачи о наискорейшем возведении в степень (в наших обозначениях — случай $p=1$, $q=1$), т. е. нахождении величины $l(x^n)$ — минимального

*) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00994) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5400.2006.1).

числа операций умножения, достаточного для вычисления по переменной x величины x^n.

В 1939 г. А. Брауэром [21] была установлена асимптотическая формула для величины $l(x^n)$ (здесь и далее $\log x$ означает $\log_2 x$):

$$l(x^n) \sim \log n,$$

а также была получена верхняя оценка

$$l(x^n) \leqslant \log n + \frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\frac{\log n \log\log\log n}{(\log\log n)^2}\right).$$

В 1960 г. П. Эрдёш [24] показал, что для почти всех n вытекающая из предыдущего неравенства оценка величины $l(x^n) - \log n$ асимптотически неулучшаема.

После этого исследовались (как правило, на языке аддитивных цепочек) различные вопросы, связанные с задачей о наискорейшем возведении в степень — см, например, [23, 25, 31, 34, 35], а также обзоры [2, 20].

В 1963 г. Р. Беллман [19] сформулировал задачу о сложности вычисления одночлена от m переменных (случай $p = 1$), т. е. нахождения величины $l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_q^{n_q})$.

В 1969 г. Д. Кнут [2, разд. 4.6.3., упр. 32] поставил задачу о сложности вычисления m степеней одной переменной (случай $q = 1$), т. е. нахождения величины $l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_p})$.

Е. Страус [33] показал, что для любого фиксированного q

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_q^{n_q}) \sim \log(\max n_i).$$

А. Яо [36] установил, что для любого фиксированного p

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_p}) \sim \log(\max n_i).$$

Отдельно отметим результат работы [22], в которой установлено асимптотически точное значение сложности вычисления набора степеней для одного частного случая, упоминавшегося Д. Кнутом при постановке общей задачи о сложности вычисления набора степеней, — когда набор показателей степеней является последовательностью квадратов идущих подряд, начиная с единицы, натуральных чисел. С использованием результатов работы [32], показано, что

$$l\left(x^{1^2}, x^{2^2}, \ldots, x^{m^2}\right) \sim m,$$

причем

$$l\left(x^{1^2}, x^{2^2}, \ldots, x^{m^2}\right) \geqslant m + m^{2/3-\varepsilon}$$

для любого положительного ε при всех достаточно больших m.

Переходя к рассмотрению общего случая задач Р. Беллмана и Д. Кнута, необходимо сказать, что в 1981 г. независимо А. Ф. Сидоренко [18], Дж. Оливосом [28], а также Д. Кнутом и К. Пападимитриу [26] было доказано, что на самом деле задачи о сложности вычисления одночлена от m переменных и набора m степеней эквивалентны (и, следовательно, достаточно исследовать одну из них). На самом деле справедливо более сильное утверждение: сложность системы одночленов $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ от q переменных, заданной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$, и сложность двойственной системы одночленов $\{\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \ldots, \widehat{f}_q\}$ от p переменных, заданной транспонированной матрицей $A^T = (a_{ji})$ размера $q \times p$, для любой матрицы A без нулевых строк и столбцов связаны соотношением

$$l_2(f_1, f_2, \ldots, f_p) + p = l_2(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \ldots, \widehat{f}_q) + q.$$

Отсюда следует, что

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}) + 1 = l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}) + m.$$

Без ограничения общности можно считать, что все степени n_i, $i = 1, \ldots, m$, различны, так как если $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} = \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ и все числа r_i, $i = 1, \ldots, r$, различны, то, очевидно,

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}) = l(x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_s}),$$

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}) = l(x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_s^{r_s}) + m - s.$$

Из результатов работ [1, 3, 9] в предположении, что все степени n_i, $i = 1, \ldots, m$, различны и $n_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, m$, следует, что при $N = \prod n_i \to \infty$ имеют место соотношения

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}) \lesssim \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N} + c(n_1, n_2, \ldots, n_m)m,$$

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots x^{n_m}) \lesssim \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N} + (c(n_1, n_2, \ldots, n_m) - 1)m,$$

где $c(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенствам $0 \leqslant c(n_1, n_2, \ldots, n_m) < 1$, причем, как следует из [5], для почти всех наборов $\tilde{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ справедливы нижние оценки

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots, x_m^{n_m}) \geqslant \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N}\left(1 + o(1)\right),$$

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}) \geqslant \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N}\left(1 + o(1)\right) - m,$$

т. е. при выполнении условия $m = o\left(\log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N}\right)$ для почти всех наборов $\tilde{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ имеют место асимптотические равенства

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots, x_m^{n_m}) \sim \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N},$$

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}) \sim \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N}.$$

Таким образом, в задаче о сложности вычисления систем одночленов в случае, когда либо число одночленов равно единице (задача Р. Беллмана), либо число переменных равно единице (задача Д. Кнута), при слабых ограничениях получены асимптотически точные решения.

В общем виде задача о нахождении асимптотики роста сложности вычисления системы из p одночленов от q переменных (с ростом, например, суммы всех показателей степеней) представляется очень трудной.

Стоит сказать, что асимптотический рост величины $L(p, q, k)$ — максимума сложности вычисления системы одночленов, где максимум берется по всем системам из p одночленов от q переменных с показателями степеней, не превосходящими k, — при слабых ограничениях был установлен Н. Пиппенджером [30]:

$$L(p, q, k) = \min(p, q) \log k + \\ + \frac{pq \log(k+1)}{\log(pq \log(k+1))}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq\log(k+1))}{\log(pq\log(k+1))}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p, q)).$$

Отдельные оценки сложности вычислений систем одночленов можно найти в [6–8, 10].

Для дальнейшего продвижения в изучении этой задачи представляется важным исследовать асимптотическое поведение сложности вычисления систем одночленов «малой размерности», т. е. небольшого фиксированного количества одночленов от нескольких переменных.

В этом направлении были получены некоторые продвижения. В работе [11] рассмотрен случай $p=2$, $q=2$. Доказано, что при выполнении условия $\max\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}\to\infty$, имеет место соотношение

$$l(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}) \sim \log_2\left(|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}| + a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}\right).$$

Этот результат в [13] был следующим образом обобщен на случай, когда выполняется только одно из равенств $p=2$, $q=2$. Пусть $a_{11}=\max\{a_{11},\ldots$ $\ldots, a_{1q}, a_{21},\ldots,a_{2q}\}$ (или, соответственно, $a_{11}=\max\{a_{11}, a_{12},\ldots,a_{p1},a_{p2}\}$). Тогда при $a_{11}\to\infty$ выполняются соотношения

$$\log\left(a_{11}+\max|a_{11}a_{2i}-a_{1i}a_{21}|\right)+O(1)\leqslant l\left(x_1^{a_{11}}\ldots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}}\ldots x_q^{a_{2q}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\log\left(a_{11}+\max|a_{11}a_{2i}-a_{1i}a_{21}|\right)+O\left(\frac{q\log a_{11}}{\log\log a_{11}}\right),$$

$$\log\left(a_{11}+\max|a_{11}a_{2i}-a_{1i}a_{21}|\right)+O(1)\leqslant l\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}},\ldots,x^{a_{p1}}y^{a_{p2}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\log\left(a_{11}+\max|a_{11}a_{2i}-a_{1i}a_{21}|\right)+O\left(\frac{p\log a_{11}}{\log\log a_{11}}\right).$$

В данной работе исследуется случай $p=3$, $q=3$.

Прежде чем сформулировать основной результат работы, отметим, что в модели вычислений, допускающей помимо операции умножения использование операции деления (или обращения) изучение задачи о сложности вычисления систем одночленов (или в более естественной в этом случае аддитивной постановке — задачи о сложности вычисления систем целочисленных линейных форм) продвинулось существенно дальше — см., например, [4, 10, 12, 18].

Пусть A — матрица размера $p\times q$ с элементами a_{ij}, $i=1,2,\ldots,p$, $j=1,2,\ldots,q$, а число k удовлетворяет неравенствам $1\leqslant k\leqslant\min(p,q)$. Для наборов индексов $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ и $(j_1,j_2,\ldots,j_k)$, таких что $1\leqslant$ $\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant p$, $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_k\leqslant q$, обозначим через $A(i_1,i_2,\ldots,i_k;\ j_1,j_2,\ldots,j_k)$ квадратную матрицу порядка k, состоящую из элементов матрицы A, находящихся на пересечении k строк с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_k$ и k столбцов с номерами $j_1,j_2,\ldots,j_k$.

Положим

$$D(A)=\max_{k:\ 1\leqslant k\leqslant\min(p,q)}\left(\max_{(i_1,i_2,\ldots,i_k;\ j_1,j_2,\ldots,j_k)}|\det A(i_1,i_2,\ldots,i_k;\ j_1,j_2,\ldots,j_k)|\right).$$

Таким образом, $D(A)$ — это максимум абсолютных величин миноров матрицы A, где максимум берется по всем минорам.

Пусть теперь $A=(a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p\times q$ без нулевых строк. Через $l_2(f_1,f_2,\ldots,f_p)$, где функции $f_1,f_2,\ldots,f_p$ по-прежнему задаются равенствами $f_i=x_1^{a_{i1}}x_2^{a_{i2}}\ldots x_q^{a_{iq}}$, $i=1,2,\ldots,p$, обозначим минимально возможное число операций умножения и деления, достаточное для вычисления по переменным $x_1,x_2,\ldots,x_q$ и заданной матрице A системы функций $\{f_1,f_2,\ldots,f_p\}$.

В работе [12] установлены абсолютная нижняя оценка

$$l_2(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}})\geqslant\log D(A)$$

и верхняя оценка, из которой, в частности, следует, что для любых фиксированных (и даже медленно растущих) p и q при $D(A)\to\infty$ справедливо асимптотическое неравенство

$$l_2(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\dots x_q^{a_{pq}})\leqslant(1+o(1))\log D(A).$$

Если теперь отказаться от использования операции деления (при этом элементы матрицы показателей степеней переменных в одночленах должны быть снова неотрицательными), то нижняя оценка

$$l(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\dots x_q^{a_{pq}})\geqslant\log D(A)$$

сохраняется. Однако при доказательстве верхней оценки, в связи с тем, что в этом случае невозможно использование вычисленного одночлена с бо́льшим показателем степени какой-либо переменной для вычисления одночлена с меньшим показателем степени у этой переменной, возникают существенные трудности. В настоящей работе они преодолены в случае $p=3$, $q=3$, — установлена теорема, показывающая, что при выполнении условия $\max a_{ij}\to\infty$ справедливо соотношение

$$l\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\,x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\,x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})\sim\log D(A).$$

Доказательство именно этого утверждения является основной целью данной работы.

Вспомогательные утверждения

При доказательстве верхней оценки в качестве вычислительной модели удобно использовать схемы из функциональных элементов (см., например, [16, 17]). Будем говорить, что схема S с q входами, помеченными переменными $x_1, x_2,\dots, x_q$, все элементы которой являются двухвходовыми и вычисляют произведение функций, подаваемых на входы этих элементов, *реализует* или *вычисляет* систему функций

$$\{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\dots x_q^{a_{pq}}\}$$

с целочисленными неотрицательными показателями степеней, если для каждой функции системы найдется вершина (соответствующая функциональному элементу или входу) схемы, в которой вычисляется эта функция. Сложность $l(S)$ схемы S — это число функциональных элементов умножения в этой схеме. Очевидно, что

$$l(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\dots x_q^{a_{pq}})=\min l(S),$$

где минимум берется по всем схемам, реализующим систему одночленов

$$\{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\dots x_q^{a_{pq}}\}.$$

Кроме этого введем вспомогательную вычислительную модель. Положим

$$Q^*=\{0\}\cup\left([1;\infty)\cap\mathbb{Q}\right).$$

В отличие от обычных одночленов, аналогично [11], функции вида $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_q^{a_q}$, где $a_i\in Q^*$, $i=1,2,\dots,q$, $a_1+a_2+\dots+a_q>0$, будем называть *обобщенными одночленами*.

Также в отличие от обычных схем определим *обобщенную схему* или λ*-схему* как схему из функциональных элементов с q входами, на которые подаются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_q$, а элементы схемы подразделяются на двухвходовые и одновходовые; двухвходовые элементы реализуют произведение подаваемых на их входы обобщенных одночленов, а каждый одновходовый элемент реализует для некоторого r (вообще говоря, своего для каждого элемента), $r \in \mathbb{Q}$, $1 < r \leqslant 2$, r-ю степень подаваемого на вход элемента обобщенного одночлена. Определим λ-сложность обобщенной схемы S как число функциональных элементов в схеме S и обозначим ее через $\lambda(S)$.

Для произвольной системы обобщенных одночленов

$$\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\}$$

будем называть λ*-сложностью* этой системы величину

$$\lambda(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}) = \min l(S),$$

где минимум берется по всем λ-схемам, реализующим данную систему обобщенных одночленов. Нетрудно понять, что минимум действительно достигается — как альтернативный вариант можно в обобщенной схеме для системы обобщенных одночленов $\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\}$ разрешить использовать среди одновходовых элементов только такие элементы возведения в степень, у которых на показатель степени r кроме условий $r \in \mathbb{Q}$, $1 < r \leqslant 2$, наложено дополнительное ограничение — в представлении r в виде несократимой дроби p/q число q не превосходит величины $\max\{a_{ij}\}$.

В дальнейшем, если из контекста будет понятно о каких одночленах и схемах идет речь, будем опускать слова «обычный» и «обобщенный». Аналогично, если понятно, что речь идет о вычислении обобщенными схемами, будем называть λ-сложность схем просто сложностью.

Вспомогательная модель введена для того, чтобы разделить описание процесса вычисления систем одночленов на две составляющие — «содержательную» и «техническую». Поясним это на примере.

Пусть построена схема S_1, вычисляющая степень x^m; надо построить схему S, вычисляющую x^n, $n > m$.

Если речь идет о построении обобщенной схемы, то достаточно построить обобщенную схему $\widehat{S}_2$, вычисляющую обобщенный одночлен $x^{n/m}$ (это можно сделать с λ-сложностью $\lceil \log(n/m) \rceil$), и на вход схемы $\widehat{S}_2$ подать выход схемы S_1, т. е. степень x^m. Полученная таким образом обобщенная схема $\widehat{S}$ будет вычислять степень x^n, причем $\lambda(\widehat{S}) = l(S_1) + \lambda(\widehat{S}_2) = l(S_1) + \lceil \log(n/m) \rceil$.

Можно ли построить обычную схему S, с использованием схемы S_1 вычисляющую степень x^n со сложностью $l(S_1) + \log(n/m) + o(\log n)$, т. е. без асимптотического увеличения сложности по сравнению со случаем обобщенных схем? Если при этом использовать только выход схемы S_1 и переменную x, то это сделать, вообще говоря, нельзя — в случае, когда $n = 2m - 1$, при построении схемы S потребуется дополнительно к схеме S_1 не менее $\log(m-1)$ элементов умножения, при этом $\log(n/m) = O(1)$, а $\log(m-1) \sim \log n$. Однако, если использовать не только степень, реализованную на выходе схемы S_1, но и некоторые степени, вычисленные элементами схемы S_1, то можно добиться желаемого эффекта. Покажем как это можно сделать.

Запишем число n в таком виде:

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor m + \left(\frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right) m.$$

Положим $u = \lfloor \log\log n - 2\log\log\log n \rfloor$. Представим число $\lfloor n/m \rfloor$ в системе счисления по основанию 2^u:

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \mu_0 + \mu_1 2^u + \mu_2 2^{2u} + \ldots + \mu_{t-1} 2^{(t-1)u},$$

где $0 \leqslant \mu_i < 2^u$, $i = 0, 1, \ldots, t-1$; $\mu_{t-1} \neq 0$. Тогда справедливы неравенства $2^{(t-1)u} \leqslant \lfloor n/m \rfloor < 2^{tu}$.

Положим $s = \lfloor (\log m)/u \rfloor + 1$. Тогда выполняются соотношения $2^{(s-1)u} \leqslant \leqslant m < 2^{su}$. Для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, s-1$, через m_i обозначим наименьшее из чисел r, удовлетворяющих условиям: 1) $2^{iu} \leqslant r < 2^{iu+1}$; 2) в схеме S_1 есть элемент, вычисляющий степень x^r. Очевидно, что такое число существует. Тогда число $\left((n/m) - \lfloor n/m \rfloor\right) m$ можно представить в виде:

$$\left(\frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor\right) m = \nu_0 + \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \ldots + \nu_{s-1} m_{s-1},$$

где $0 \leqslant \nu_i < 2^{u+1}$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$.

Таким образом,

$$n = \sum_{i=0}^{t-1} \mu_i m 2^{iu} + \sum_{i=0}^{s-1} \nu_i m_i.$$

Построим схему S_2, которая по степеням $x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots, x^{m_{s-1}}, x^m$ и переменной x вычисляет степень x^n. Сначала, потратив $(t-1)u$ элементов умножения, последовательно возводим в квадрат степень x^m, реализуя тем самым степени $x^{m2^u}, x^{m2^{2u}}, \ldots, x^{m2^{(t-1)u}}$. После этого для вычисления степени x^n в силу представления

$$x^n = \prod_{i=0}^{t-1} \left(x^{m2^{iu}}\right)^{\mu_i} \times \prod_{i=0}^{s-1} \left(x^{m_i}\right)^{\nu_i}$$

достаточно $s + t + 2^{u+1}$ операций умножения. Действительно, вычислить одночлен $z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \ldots z_{s+t}^{\beta_{s+t}}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant 2^{u+1} - 1$, $i = 1, 2, \ldots, s+t$, от заданных выражений $z_1, z_2, \ldots, z_{s+t}$ можно следующим образом.

Положим

$$I_k = \{i\colon 1 \leqslant i \leqslant s+t,\ \beta_i = k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{u+1} - 1.$$

Очевидно, что $|I_1| + |I_2| + \ldots + |I_{2^{u+1}-1}| \leqslant s+t$.

Последовательно определим одночлены $f_{2^{u+1}-1}, f_{2^{u+1}-2}, \ldots, f_1$ от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_{s+t}$:

$$f_{2^{u+1}-1} = \prod_{i \in I_{2^{u+1}-1}} z_i; \qquad f_k = f_{k+1} \prod_{i \in I_k} z_i, \quad k = 2^{u+1} - 2, 2^u - 3, \ldots, 1.$$

Теперь, считая, что произведение пустого множества сомножителей по определению равно единице, вычислим последовательно все отличные от единицы одночлены

$$\prod_{i \in I_{2^{u+1}-1}} z_i, \ \prod_{i \in I_{2^{u+1}-2}} z_i, \ \ldots, \ \prod_{i \in I_1} z_i,$$

потратив на это не более $s + t - |\{I_k\colon |I_k| \neq 0\}|$ операций умножения. Далее с использованием не более $|\{I_k\colon |I_k| \neq 0\}|$ операций умножения можно вычислить все одночлены $f_{2^{u+1}-1}, f_{2^{u+1}-2}, \ldots, f_1$.

Окончательно, потратив еще не более $2^{u+1}-1$ операций умножения, получаем одночлен

$$f_{2^{u+1}-1}f_{2^{u+1}-2}\dots f_1=\left(\prod_{i\in I_{2^{u+1}-1}} z_i\right)^{2^{u+1}-1}\left(\prod_{i\in I_{2^{u+1}-2}} z_i\right)^{2^{u+1}-2}\dots\left(\prod_{i\in I_1} z_i\right)^{1}=$$
$$=\left(\prod_{i\in I_{2^{u+1}-1}} z_i^{\beta_i}\right)\left(\prod_{i\in I_{2^{u+1}-2}} z_i^{\beta_i}\right)\dots\left(\prod_{i\in I_1} z_i^{\beta_i}\right)=z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}\dots z_{s+t}^{\beta_{s+t}}.$$

Итак, для вычисления одночлена $z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}\dots z_{s+t}^{\beta_{s+t}}$ было потрачено не более $s+t+2^{u+1}$ операций умножения.

Таким образом,

$$l(S)=l(S_1)+l(S_2)\leqslant l(S_1)+(t-1)u+s+t+2^{u+1}.$$

Учитывая соотношения

$$(t-1)u\leqslant\log\left(\tfrac{n}{m}\right),\quad s\leqslant\frac{\log m}{u},\quad t\leqslant\frac{\log\left(\frac{n}{m}\right)}{u},$$

и подставляя значение параметра u, получаем:

$$l(S)=l(S_1)+\log\left(\tfrac{n}{m}\right)+\frac{\log n}{u}+2^{u+1}\leqslant l(S_1)+\log\left(\tfrac{n}{m}\right)+O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right),$$

следовательно,

$$l(S)=\lambda(\widehat{S})+O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

Приведенный пример иллюстрирует способ перехода от вычисления обобщенными схемами к вычислению обычными схемами без асимптотического увеличения сложности.

Отметим также, что при построении схемы S_1 информация о том, что выходы некоторых элементов схемы S_1 будут использованы при дальнейших вычислениях, может давать дополнительные преимущества (если не по сложности, то, по крайней мере, в удобстве использования) при переходе от обобщенных схем к обычным. Именно так и будем поступать в общем случае.

Итак, доказательство верхней оценки сложности вычисления обычными схемами системы из трех одночленов от трех переменных (на самом деле такой подход применим и при вычислении системы из p одночленов от q переменных) будет состоять из двух частей. Одна часть заключается в построении для данной системы одночленов обобщенной схемы требуемой сложности, причем эта схема должна иметь достаточно простую структуру, а именно, она должна допускать перестороение в обычную схему без асимптотического увеличения сложности. Другая часть доказательства как раз и заключается в том, что устанавливается возможность такого перестроения.

В данном разделе будет проделана вся подготовительная работа, включающая, в частности, во-первых, доказательство возможности построения в специальных случаях обобщенных схем, состоящих только из ограниченного числа подсхем двух видов — подсхем, возводящих подаваемый на вход обобщенный одночлен в некоторую степень, и подсхем, состоящих только из одного элемента умножения; во-вторых, доказательство возможности перестроения обобщенной схемы, состоящей из ограниченного числа подсхем трех видов — подсхем с двумя входами, на которые подаются переменные и тремя выходами, подсхем, возводящих подаваемый на вход обобщенный одночлен в некоторую степень, и подсхем, состоящих только из одного элемента умножения, — в обычную схему без асимптотического увеличения сложности.

В последнем разделе будет доказана требуемая верхняя оценка λ-сложности реализации системы из трех одночленов от трех переменных, при этом все обобщенные схемы, которые строятся в процессе доказательства, будут иметь вид, допускающий (в силу соответствующих лемм) перестроение в обычные схемы без асимптотического увеличения сложности, и, следовательно, будет доказана требуемая верхняя оценка для сложности реализации системы из трех одночленов от трех переменных обычными схемами.

Переходя к непосредственному доказательству вспомогательных утверждений, в первую очередь установим факт, имеющий помимо прочего и самостоятельное значение. Речь идет о том, что λ-сложность вычисления системы обобщенных одночленов, также как и сложность вычисления системы обычных одночленов, обладает свойством двойственности.

Лемма 1. *Пусть $A=(a_{ij})$ — матрица размера $p\times q$ с элементами из множества Q^*. Если в матрице A нет нулевых строк и столбцов, то имеет место равенство*

$$\lambda\left(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}}\right)+p=$$
$$=\lambda\left(y_1^{a_{11}}y_2^{a_{21}}\ldots y_p^{a_{p1}},\ y_1^{a_{12}}y_2^{a_{22}}\ldots y_p^{a_{p2}},\ \ldots,\ y_1^{a_{1q}}y_2^{a_{2q}}\ldots y_p^{a_{pq}}\right)+q.$$

Доказательство. Рассмотрим минимальную обобщенную схему с q входами, реализующую систему обобщенных одночленов $x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}}$, $x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}}$. Преобразуем эту схему в вентильную схему (определение вентильной схемы см., например, в [15, 29]) с q входами и p выходами следующим образом.

1. Заменим каждый элемент умножения на вершину с входной степенью 2 и припишем обоим входящим ребрам вес 1.

2. Заменим каждый элемент возведения в степень r, $1<r\leqslant 2$, на вершину с входящими в нее двумя кратными ребрами, которым припишем веса 1 и $r-1$.

В полученной по этим правилам вентильной схеме каждой паре вершин, одна из которых соответствует входу, можно сопоставить число, равное сумме по всем цепям, ведущим от данного входа к вершине, произведений весов, приписанных ребрам цепи. Легко проверить, например, индукцией по числу элементов в исходной схеме, что эта величина равна показателю степени соответствующей данному входу переменной в одночлене, вычисляемому в соответствующей вершине исходной схемы. Таким образом, получена вентильная схема, в которой паре из j-го входа, $1\leqslant j\leqslant q$, и i-го выхода, $1\leqslant i\leqslant p$, сопоставлено число a_{ij}. Кроме того, сложность исходной обобщенной схемы — величина $\lambda\left(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}}\right)$ — равна числу невходовых вершин вентильной схемы, т. е. разности числа ребер и числа невходовых вершин.

Теперь изменим направление всех ребер вентильной схемы на противоположное. Получим вентильную схему с p входами и q выходами, в которой паре из i-го входа, $1\leqslant i\leqslant p$, и j-го выхода, $1\leqslant j\leqslant q$, сопоставлено число a_{ij}.

Преобразуем полученную вентильную схему в обобщенную схему с p входами и q выходами следующим образом. Сначала каждую вершину с входной степенью k, $k\geqslant 2$, вместе со всеми входящими ребрами заменим на бинарное дерево с k листьями (и еще $k-1$ вершиной), причем в первую очередь в этом бинарном дереве будут «сливаться» кратные ребра (добавленным ребрам в дереве припишем вес 1), а затем вершинам, в которые входят ребра с приписанным весом 1, сопоставим операцию умножения, а вершинам, в которые входят кратные ребра с весами 1 и $r-1$, $1<r\leqslant 2$, сопоставим операцию возведения в степень r (по построению кратных ребер с весами r_1-1 и r_2-1, $1<r_1<2$, $1<r_2<2$, и некратных ребер с весами 1 и $r-1$, $1<r<2$, быть не может). Если на p входов полученной обобщенной схемы подать переменные $y_1, y_2, \ldots, y_p$, то на j-м выходе, $j=1,2,\ldots,q$, будет вычислен одночлен $y_1^{a_{1j}} y_2^{a_{2j}} \ldots y_p^{a_{pj}}$. Сложность полученной обобщенной схемы равна разности числа ребер и невходовых вершин, а эта величина при перестроении вентильной схемы в обобщенную схему не менялась. Поэтому

$$\lambda\left(y_1^{a_{11}} y_2^{a_{21}} \ldots y_p^{a_{p1}},\ y_1^{a_{12}} y_2^{a_{22}} \ldots y_p^{a_{p2}},\ \ldots,\ y_1^{a_{1q}} y_2^{a_{2q}} \ldots y_p^{a_{pq}}\right)+q \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right)+p.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lambda\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right)+p \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\left(y_1^{a_{11}} y_2^{a_{21}} \ldots y_p^{a_{p1}},\ y_1^{a_{12}} y_2^{a_{22}} \ldots y_p^{a_{p2}},\ \ldots,\ y_1^{a_{1q}} y_2^{a_{2q}} \ldots y_p^{a_{pq}}\right)+q.$$

Лемма 1 доказана.

Отметим, что, однако, не все меры сложности вычисления систем одночленов (точнее систем функций специального вида) обладают свойством двойственности. Одна из таких мер изучается в [14].

Из следующей леммы, в силу справедливости для любой системы обычных одночленов неравенства

$$l\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right),$$

непосредственно вытекает нижняя оценка сложности реализации систем одночленов обычными схемами. Стоит также заметить, что эта лемма используется и при доказательстве верхней оценки.

Лемма 2. *Пусть система обобщенных одночленов*

$$\left\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right\}$$

задана ненулевой матрицей $A=(a_{ij})$ размера $p\times q$ с элементами из множества Q^*. Тогда

$$\lambda\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right) \geqslant \log D(A).$$

Доказательство леммы 2 полностью аналогично доказательству теоремы 1 из [12] (подобные рассуждения содержатся также в [27]).

Теперь установим несколько утверждений технического плана, причем некоторые из них являются просто переформулировками известных фактов.

Лемма 3. *Для сложности вычисления системы ненулевых степеней $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_m}$ и сложности вычисления двойственного одночлена $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}$ справедливы оценки*

$$l\left(x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_m}\right)=l\left(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}\right)-m+1 \leqslant$$
$$\leqslant \log(\max a_i)+\frac{\log \prod\limits_{i:\ a_i\neq 0} a_i}{\log\log \prod\limits_{i:\ a_i\neq 0} a_i}\big(1+o(1)\big)+O(m).$$

Утверждение леммы является непосредственным следствием теоремы 1 из [1].

Теперь, в силу особой важности, сформулируем в виде отдельной леммы утверждение, которым уже пользовались при изучении примера использования обобщенных схем.

Лемма 4. *Для произвольного* $\alpha \in Q^*\backslash 0$ *справедливо равенство*

$$\lambda\,(x^\alpha) = \lceil \log \alpha \rceil\,.$$

Доказательство. Верхняя оценка очевидна. Нижняя оценка непосредственно вытекает из того факта, что с помощью k элементов можно реализовать только степень с показателем, не превышающим 2^k.

Непосредственным следствием леммы 4 можно считать следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *— ненулевой вектор с элементами из* Q^*. *Тогда при* $\max \alpha_i \to \infty$ *справедливы равенства*

$$\lambda(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_m}) = \log \max \alpha_i + O(m),\ \ \lambda(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}) = \log \max \alpha_i + O(m).$$

Лемма 6. *Пусть* $A = (a_{ij})$ *— целочисленная матрица размера* $m \times 2$ *с неотрицательными элементами без нулевых строк. Тогда при* $\max\{a_{ij}\} \to \infty$ *справедливо неравенство*

$$l\,(x^{a_{11}} y^{a_{12}},\ x^{a_{21}} y^{a_{22}},\ \ldots,\ x^{a_{m1}} y^{a_{m2}}) \leqslant \log D(A) + O\left(\frac{m \log \max\{a_{ij}\}}{\log\log \max\{a_{ij}\}}\right).$$

Утверждение леммы следует из [13, теорема 1].

Прежде чем сформулировать аналогичное утверждение для случая вычисления обобщенных одночленов, установим простой факт.

Лемма 7. *Пусть элементы матриц* $A = (\alpha_{ij})$ *и* $B = (\beta_{ij})$ *размера* 2×2 *удовлетворяют неравенствам* $|\alpha_{ij} - \beta_{ij}| \leqslant 2$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$. *Тогда при условии* $D(A) \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$|\det B| \leqslant 17 D(A).$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_{ij} = \beta_{ij} - \alpha_{ij}, \quad i = 1, 2,\ \ j = 1, 2.$$

Обозначим j-е столбцы матриц A и B через A_j и B_j соответственно, а через E_j обозначим вектор-столбец $(\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j})^T$, $j = 1, 2$. Тогда

$$|\det B| = |\det(B_1, B_2)| = |\det(A_1 + E_1, A_2 + E_2)| = |\det(A_1, A_2) + \\ + \det(E_1, A_2) + \det(A_1, E_2) + \det(E_1, E_2)| \leqslant 9D(A) + 8 \leqslant 17 D(A).$$

Лемма 7 доказана.

Далее для удобства, чтобы выражения вида $\log x$ были положительными для любых неотрицательных x, введем функцию $\overline{\log}\, x$ следующим образом:

$$\overline{\log}\, x = \begin{cases} \log x, & x \geqslant 2, \\ 1, & 0 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Лемма 8. *Пусть* $A = (\alpha_{ij})$ *— матрица размера* $m \times 2$ *с элементами из* Q^*. *Тогда при* $\max\{\alpha_{ij}\} \to \infty$ *справедливо неравенство*

$$\lambda\,(x^{\alpha_{11}} y^{\alpha_{12}},\ x^{\alpha_{21}} y^{\alpha_{22}},\ \ldots,\ x^{\alpha_{m1}} y^{\alpha_{m2}}) \leqslant \log D(A) + O\,(m)\,.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что, во-первых, $\alpha_{1m} = \max \alpha_{ij}$, а, во-вторых, одночлены $x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{12}}, x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{22}}, \ldots$ $\ldots, x^{\alpha_{m1}}y^{\alpha_{m2}}$ расположены в порядке возрастания показателей степеней переменной x (т. е. по возрастанию значений α_{i1}), а при одинаковых показателях степеней переменной x — в порядке возрастания показателей степеней переменной y (т. е. по возрастанию значений α_{i2}). Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $\{\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}\} \subset \{0\} \cup [2, \infty)$. Действительно, после вычисления системы обобщенных одночленов, в которой все одночлены вида $x^{\alpha_{i1}}y^{\alpha_{i2}}$, где $\alpha_{i2} \in [1, 2)$, заменены на степени $x^{\alpha_{i1}}$ (значения миноров матрицы показателей степеней при этом изменятся незначительно — см. лемму 7), для вычисления исходной системы в силу леммы 5 достаточно $O(m)$ операций умножения.

Сопоставим каждому одночлену $x^{\alpha_{i1}}y^{\alpha_{i2}}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, параметр φ_i следующим образом:

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{\max\{\alpha_{m2} - 1, 0\}}{\alpha_{m1}}, & \text{если } \alpha_{i1} = 0 \text{ или } \dfrac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i1}} \geqslant \dfrac{\alpha_{m2}}{\alpha_{m1}}; \\[2ex] \dfrac{\max\{\alpha_{i2} - 1, 0\}}{\alpha_{i1}}, & \text{если } \dfrac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i1}} < \dfrac{\alpha_{m2}}{\alpha_{m1}}. \end{cases}$$

Таким образом, для всех i справедливы неравенства $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$, а при $\alpha_{i1} \neq 0$ выполняется равенство $\varphi_i = \min\left\{\dfrac{\max\{\alpha_{i2} - 1, 0\}}{\alpha_{i1}}, \dfrac{\max\{\alpha_{m2} - 1, 0\}}{\alpha_{m1}}\right\}$.

Далее положим

$$\Phi(i) = \min_{j:\ i \leqslant j \leqslant m} \varphi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Очевидно, что функция $\Phi(i)$, заданная на множестве $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, является неубывающей, и ограничена сверху единицей. Отметим также справедливость при $\alpha_{i2} > 0$ соотношений

$$\alpha_{i2} - \alpha_{i1}\Phi(i) \geqslant \alpha_{i2} - \alpha_{i1}\varphi_i = \alpha_{i2} - \min\left\{\alpha_{i2} - 1, \alpha_{i1}\frac{\max\{\alpha_{m2} - 1, 0\}}{\alpha_{m1}}\right\} \geqslant 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Разобьем область определения M функции $\Phi(i)$ на участки «постоянства» $M_1, M_2, \ldots, M_v$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_v$;

2) $M_s \cap M_t = \varnothing$ при $s \neq t$;

3) $\Phi(i) = \Phi(j)$ для любых i и j из одного множества M_s, $s = 1, 2, \ldots, v$;

4) для любых s и t, $1 \leqslant s < t \leqslant v$, и для любых i и j, $i \in M_s$, $j \in M_t$, справедливо неравенство $\Phi(i) < \Phi(j)$.

Положим $k_i = |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_i|$, $i = 1, 2, \ldots, v$. Отметим, что $k_v = m$.

Перейдем непосредственно к описанию процесса вычисления системы обобщенных одночленов $\{x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{12}}, x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{22}}, \ldots, x^{\alpha_{m1}}y^{\alpha_{m2}}\}$ λ-схемой S.

Схема S будет состоять из подсхем S', $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_v$ и S''.

Подсхема S' вычисляет систему степеней

$$\{y^{\alpha_{i2} - \alpha_{i1}\Phi(i)} + \gamma_i \mid \alpha_{i2} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\} \cup$$
$$\cup \left\{y^{\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j) - \Phi(k_{j-1})) + \gamma_{k_{j-1}}} \mid \alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j) - \Phi(k_{j-1})) + \gamma_{k_{j-1}} \geqslant 1,\ j = 2, \ldots, v\right\},$$

где значения γ_i, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant \gamma_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, будут определены позже.

Подсхема S_0 при $\alpha_{11}\Phi(k_1)\geqslant 1$ вычисляет одночлен $x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{11}\Phi(k_1)}$, а при $0\leqslant\alpha_{11}\Phi(k_1)<1$ вычисляет степень $x^{\alpha_{11}}$.

Подсхема S_1 при $\alpha_{11}\Phi(k_1)\geqslant 1$ возводит одночлен $x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{11}\Phi(k_1)}$ в степени

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}, \ldots, \frac{\alpha_{k_1 1}}{\alpha_{11}},$$

тем самым, в силу равенств $\Phi(1)=\Phi(2)=\ldots=\Phi(k_1)$, вычисляя одночлены $x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{21}\Phi(2)}$, $x^{\alpha_{31}}y^{\alpha_{31}\Phi(3)}, \ldots, x^{\alpha_{k_1 1}}y^{\alpha_{k_1 1}\Phi(k_1)}$. В этом случае полагаем $\gamma_1=\gamma_2=\ldots$ $\ldots=\gamma_{k_1}=0$.

При $\alpha_{k_1 1}\Phi(k_1)<1$ (в этом случае справедливо также неравенство $\alpha_{11}\Phi(k_1)<1$) подсхема S_1 возводит одночлен $x^{\alpha_{11}}$ в степени

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}, \ldots, \frac{\alpha_{k_1 1}}{\alpha_{11}},$$

тем самым, вычисляя одночлены $x^{\alpha_{21}}, x^{\alpha_{31}}, \ldots, x^{\alpha_{k_1 1}}$. В этом случае полагаем $\gamma_i=\alpha_{i1}\Phi(k_1)=\alpha_{i1}\Phi(i)$, $i=1,2,\ldots,k_1$.

Пусть теперь справедливы соотношения $\alpha_{11}\Phi(k_1)<1$ и $\alpha_{k_1 1}\Phi(k_1)\geqslant 1$. Тогда найдется такое значение s, $1\leqslant s\leqslant k_1-1$, что выполняются неравенства $\alpha_{s1}\Phi(k_1)<1$ и $\alpha_{s+1,1}\Phi(k_1)\geqslant 1$, и, следовательно, $\alpha_{s1}<1/\Phi(k_1)\leqslant\alpha_{s+1}$. Подсхема S_1 в этом случае будет устроена следующим образом. Сначала одночлен $x^{\alpha_{11}}$ возводится в степени

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}, \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}, \ldots, \frac{\alpha_{s1}}{\alpha_{11}}, \frac{1}{\alpha_{11}\Phi(k_1)}.$$

Затем полученная степень $x^{1/\Phi(k_1)}$ домножается на y, и полученный одночлен возводится в степени $\alpha_{s+1,1}\Phi(k_1), \ldots, \alpha_{k_1 1}\Phi(k_1)$. Таким образом, подсхемой S_1 будут вычислены одночлены $x^{\alpha_{21}}, \ldots, x^{\alpha_{s1}}$, $x^{\alpha_{s+1,1}}y^{\alpha_{s+1,1}\Phi(s+1)}, \ldots$ $\ldots, x^{\alpha_{k_1 1}}y^{\alpha_{k_1 1}\Phi(k_1)}$. В этом случае полагаем $\gamma_i=\alpha_{i1}\Phi(k_1)=\alpha_{i1}\Phi(i)$, $i=1,2,\ldots$ $\ldots, s$; $\gamma_{s+1}=\ldots=\gamma_{k_1}=0$.

Таким образом, в любом случае подсхема S_1 вычисляет одночлены

$$x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{11}\Phi(1)-\gamma_1}, x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{21}\Phi(2)-\gamma_2}, \ldots, x^{\alpha_{k_1 1}}y^{\alpha_{k_1 1}\Phi(k_1)-\gamma_{k_1}}.$$

Далее последовательно для $j=2,\ldots,v$ определим схемы S_j следующим образом.

Подсхема S_j при $\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j)-\Phi(k_{j-1}))+\gamma_{k_{j-1}}\geqslant 1$ сначала перемножает одночлен $x^{\alpha_{k_{j-1}1}}y^{\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})-\gamma_{k_{j-1}}}$, вычисленный подсхемой S_1, и степень $y^{\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j)-\Phi(k_{j-1}))+\gamma_{k_{j-1}}}$, вычисленную подсхемой S', а затем полученный одночлен $x^{\alpha_{k_{j-1}1}}y^{\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_j)}$ возводит в степени

$$\frac{\alpha_{k_{j-1}+1,1}}{\alpha_{k_{j-1},1}}, \frac{\alpha_{k_{j-1}+2,1}}{\alpha_{k_{j-1},1}}, \ldots, \frac{\alpha_{k_j,1}}{\alpha_{k_{j-1},1}},$$

тем самым, в силу равенств $\Phi(k_{j-1}+1)=\Phi(k_{j-1}+2)=\ldots=\Phi(k_j)$, вычисляя одночлены

$$x^{\alpha_{k_{j-1}+1,1}}y^{\alpha_{k_{j-1}+1,1}\Phi(k_{j-1}+1)}, x^{\alpha_{k_{j-1}+2,1}}y^{\alpha_{k_{j-1}+2,1}\Phi(k_{j-1}+2)}, \ldots, x^{\alpha_{k_j,1}}y^{\alpha_{k_j,1}\Phi(k_j)}.$$

В этом случае полагаем $\gamma_{k_{j-1}+1}=\gamma_{k_{j-1}+2}=\ldots=\gamma_{k_j}=0$.

При $\alpha_{k_j 1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{k_j 1}/\alpha_{k_{j-1}1})<1$ (в этом случае справедливо также неравенство $\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}<1$) подсхема S_j возводит одночлен $x^{\alpha_{k_{j-1}1}}y^{\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})-\gamma_{k_{j-1}}}$ в степени

$$\frac{\alpha_{k_{j-1}+1,1}}{\alpha_{k_{j-1},1}},\ \frac{\alpha_{k_{j-1}+2,1}}{\alpha_{k_{j-1},1}},\ldots,\ \frac{\alpha_{k_j,1}}{\alpha_{k_{j-1},1}},$$

тем самым вычисляя одночлены

$$x^{\alpha_{k_{j-1}+1,1}}y^{\alpha_{k_{j-1}+1,1}\Phi(k_{j-1}+1)-\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{k_{j-1}+1,1}/\alpha_{k_{j-1}1})},$$
$$x^{\alpha_{k_{j-1}+2,1}}y^{\alpha_{k_{j-1}+2,1}\Phi(k_{j-1}+2)-\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{k_{j-1}+2,1}/\alpha_{k_{j-1}1})},\ldots,x^{\alpha_{k_j 1}}y^{\alpha_{k_j 1}\Phi(k_j)-\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{k_j 1}/\alpha_{k_{j-1}1})}.$$

В этом случае полагаем

$$\gamma_i=\alpha_{i1}\Phi(k_j)-\alpha_{i1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{k_{j-1}}}=\alpha_{i1}\Phi(i)-\alpha_{i1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{k_{j-1}}},$$
$$i=k_{j-1}+1,\ldots,k_j.$$

Очевидно, что $\gamma_i\geqslant 0$. Покажем, что $\gamma_i<1$. Из неравенства

$$\alpha_{k_j 1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{k_j 1}}{\alpha_{k_{j-1}1}}<1$$

вытекает соотношение

$$\alpha_{k_j 1}\Phi(k_j)+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{k_j 1}}{\alpha_{k_{j-1}1}}<\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+1,$$

и, следовательно, учитывая неравенство $\alpha_{i1}/\alpha_{k_j}\leqslant 1$, получаем требуемую оценку:

$$\alpha_{i1}\Phi(k_j)+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{k_{j-1}1}}<\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+1.$$

Пусть теперь справедливы соотношения $\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j)-\Phi(k_{j-1}))+\gamma_{k_{j-1}}<1$ и $\alpha_{k_j 1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{k_j 1}/\alpha_{k_{j-1}1})\geqslant 1$. Тогда найдется такое значение s, $k_{j-1}+1\leqslant s\leqslant k_j-1$, что выполняются неравенства

$$\alpha_{s1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{s1}}{\alpha_{k_{j-1}1}}<1,$$
$$\alpha_{s+1,1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{s+1,1}}{\alpha_{k_{j-1}1}}\geqslant 1,$$

и, следовательно,

$$\frac{\alpha_{s1}}{\alpha_{k_{j-1}1}}<\frac{1}{\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}}\leqslant\frac{\alpha_{s+1,1}}{\alpha_{k_{j-1}1}}.$$

Подсхема S_j в этом случае будет устроена следующим образом. Сначала одночлен $x^{\alpha_{k_{j-1}1}}y^{\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})-\gamma_{k_{j-1}}}$ возводится в степени

$$\frac{\alpha_{k_{j-1}+1,1}}{\alpha_{k_{j-1},1}},\ \frac{\alpha_{k_{j-1}+2,1}}{\alpha_{k_{j-1},1}},\ldots,\ \frac{\alpha_{s1}}{\alpha_{k_{j-1}1}},\ \frac{1}{\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}}.$$

Затем полученный одночлен

$$x^{\alpha_{k_{j-1}1}/(\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}})}y^{(\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})-\gamma_{k_{j-1}})/(\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_{j-1}1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}})}$$

домножается на y, и результат возводится в степени

$$\alpha_{s+1,1}\Phi(k_j)-\alpha_{s+1,1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{s+1,1}}{\alpha_{k_{j-1}}},\ldots$$
$$\ldots,\alpha_{k_j1}\Phi(k_j)-\alpha_{k_j1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{k_j1}}{\alpha_{k_{j-1}}},$$

тем самым подсхемой S_j будут вычислены одночлены

$$x^{\alpha_{k_{j-1}+1,1}}y^{\alpha_{k_{j-1}+1,1}\Phi(k_{j-1}+1)-\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{k_{j-1}+1,1}/\alpha_{k_{j-1}1})},\ldots,x^{\alpha_{s1}}y^{\alpha_{s1}\Phi(s)-\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{s1}/\alpha_{k_{j-1}1})},$$
$$x^{\alpha_{s+1,1}}y^{\alpha_{s+1,1}\Phi(s+1)-\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{s+1,1}/\alpha_{k_{j-1}1})},\ldots,x^{\alpha_{k_j1}}y^{\alpha_{k_j1}\Phi(k_j)-\gamma_{k_{j-1}}(\alpha_{k_j1}/\alpha_{k_{j-1}1})}.$$

В этом случае полагаем

$$\gamma_i=\alpha_{i1}\Phi(k_j)-\alpha_{i1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{k_{j-1}}}=\alpha_{i1}\Phi(i)-\alpha_{i1}\Phi(k_{j-1})+\gamma_{k_{j-1}}\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{k_{j-1}}},$$
$$i=k_{j-1}+1,\ldots,s;$$

$$\gamma_{s+1}=\gamma_{s+2}=\ldots=\gamma_{k_j}=0.$$

Для введенных величин γ_i выполняются неравенства $0\leqslant\gamma_i<1$, $i=k_{j-1}+1, k_{j-1}+2,\ldots,k_j$.

Итак, в любом случае подсхема S_j, $j=2,\ldots,v$, вычисляет одночлены

$$x^{\alpha_{k_{j-1}+1,1}}y^{\alpha_{k_{j-1}+1,1}\Phi(k_{j-1}+1)-\gamma_{k_{j-1}+1}},x^{\alpha_{k_{j-1}+2,1}}y^{\alpha_{k_{j-1}+2,1}\Phi(k_{j-1}+2)-\gamma_{k_{j-1}+2}},\ldots$$
$$\ldots,x^{\alpha_{k_j1}}y^{\alpha_{k_j1}\Phi(k_j)-\gamma_{k_j}}.$$

Наконец, подсхема S'' для каждого i, $i=1,2,\ldots,m$, перемножает одночлен $x^{\alpha_{i1}}y^{\alpha_{i1}\Phi(i)-\gamma_i}$, вычисленный одной из подсхем $S_0, S_1,\ldots,S_v$, и степень $y^{\alpha_{i2}-\alpha_{i1}\Phi(i)+\gamma_i}$, реализованную на одном из выходов подсхемы S'.

Считая, что подсхемы $S', S_0, S_1, S_2,\ldots,S_v$ минимальны, оценим их λ-сложность, используя обе части леммы 5:

$$\lambda(S')\leqslant\overline{\log}\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\alpha_{i2}-\alpha_{i1}\Phi(i)\},\ \max_{2\leqslant j\leqslant v}\{\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j)-\Phi(k_{j-1}))\}\right\}+$$
$$+O(m+v),$$

$$\lambda(S_0)\leqslant\overline{\log}\,\alpha_{11}+O(1),\quad \lambda(S_1)\leqslant\log\left(\frac{\alpha_{k_11}}{\alpha_{11}}\right)+O(k_1),$$

$$\lambda(S_j)\leqslant\log\left(\frac{\alpha_{k_j1}}{\alpha_{k_{j-1},1}}\right)+O(k_j-k_{j-1}),\ \ j=2,\ldots,v.$$

Поэтому, учитывая соотношения $v\leqslant m$ и $k_v=m$, имеем:

$$\lambda(S)=\lambda(S')+\sum_{i=0}^{m}\lambda(S_i)+O(m)\leqslant\log\alpha_{m1}+$$
$$+\overline{\log}\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\alpha_{i2}-\alpha_{i1}\Phi(i)\},\ \max_{2\leqslant j\leqslant v}\{\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j)-\Phi(k_{j-1}))\}\right\}+O(m).$$

Оценим величины $\alpha_{i2}-\alpha_{i1}\Phi(i)$, $i=1,2,\ldots,m$, и $\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j)-\Phi(k_{j-1}))$, $j=2,\ldots,v$. Положим

$$\beta_{i2}=\max\{\alpha_{i2}-1,\ 0\}.$$

Отметим, что для любого значения i, $i=1,2,\ldots,m$, найдется такое значение $i_0=i_0(i)$, $i_0\geqslant i$, что $\Phi(i)=\beta_{i_02}/\alpha_{i_01}$. Поэтому

$$\alpha_{i2}-\alpha_{i1}\Phi(i)=\alpha_{i2}-\alpha_{i1}\frac{\beta_{i_02}}{\alpha_{i_01}}\leqslant\beta_{i2}-\alpha_{i1}\frac{\beta_{i_02}}{\alpha_{i_01}}+1=$$

$$=\beta_{i2}-\alpha_{i1}\frac{\beta_{m2}}{\alpha_{m1}}+\alpha_{i1}\frac{\beta_{m2}}{\alpha_{m1}}-\alpha_{i1}\frac{\beta_{i_02}}{\alpha_{i_01}}+1=$$

$$=\frac{1}{\alpha_{m1}}\left(\alpha_{m1}\beta_{i2}-\alpha_{i1}\beta_{m2}\right)+\frac{1}{\alpha_{m1}}\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i_01}}\left(\alpha_{i_01}\beta_{m2}-\alpha_{m1}\beta_{i_02}\right)+1\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\alpha_{m1}}+\frac{1}{\alpha_{m1}}\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i_01}}\right)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\alpha_{m1}\beta_{i2}-\alpha_{i1}\beta_{m2}|+1\leqslant\frac{2}{\alpha_{m1}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\alpha_{m1}\beta_{i2}-\alpha_{i1}\beta_{m2}|+1.$$

Далее, пусть выполняются равенства $\Phi(k_j)=\beta_{s2}/\alpha_{s1}$, $\Phi(k_{j-1})=\beta_{t2}/\alpha_{t1}$, где $s\geqslant k_j>k_{j-1}$, $t\geqslant k_{j-1}$. Тогда

$$\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j)-\Phi(k_{j-1}))=\alpha_{k_{j-1}1}\left(\frac{\beta_{s2}}{\alpha_{s1}}-\frac{\beta_{t2}}{\alpha_{t1}}\right)=\alpha_{k_{j-1}1}\left(\frac{\beta_{s2}}{\alpha_{s1}}-\frac{\beta_{m2}}{\alpha_{m1}}+\frac{\beta_{m2}}{\alpha_{m1}}-\frac{\beta_{t2}}{\alpha_{t1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha_{m1}}\frac{\alpha_{k_{j-1}1}}{\alpha_{s1}}\left(\alpha_{m1}\beta_{s2}-\alpha_{s1}\beta_{m2}\right)+\frac{1}{\alpha_{m1}}\frac{\alpha_{k_{j-1}1}}{\alpha_{t1}}\left(\alpha_{t1}\beta_{m2}-\alpha_{m1}\beta_{t2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha_{m1}}\left(\frac{\alpha_{k_{j-1}1}}{\alpha_{s1}}+\frac{\alpha_{k_{j-1}1}}{\alpha_{t1}}\right)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\alpha_{m1}\beta_{i2}-\alpha_{i1}\beta_{m2}|\leqslant\frac{2}{\alpha_{m1}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\alpha_{m1}\beta_{i2}-\alpha_{i1}\beta_{m2}|.$$

Таким образом,

$$\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\alpha_{i2}-\alpha_{i1}\Phi(i)\},\ \max_{2\leqslant j\leqslant v}\{\alpha_{k_{j-1}1}(\Phi(k_j)-\Phi(k_{j-1}))\}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\alpha_{m1}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\alpha_{m1}\beta_{i2}-\alpha_{i1}\beta_{m2}|+1.$$

Поэтому, используя лемму 7, получаем:

$$\lambda\left(x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{12}},\ x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{22}},\ \ldots,\ x^{\alpha_{m1}}y^{\alpha_{m2}}\right)\leqslant\lambda(S)\leqslant$$
$$\leqslant\log\alpha_{m1}+\log\left\{\frac{2}{\alpha_{m1}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\alpha_{m1}\beta_{i2}-\alpha_{i1}\beta_{m2}|+1\right\}+O(m)\leqslant\log D(A)+O(m).$$

Лемма 8 доказана.

Стоит отметить, что доказательство леммы 8 по существу является переложением (с некоторыми упрощениями) доказательства теоремы 1 из [13] на случай вычисления обобщенных одночленов λ-схемами.

Следующие три леммы утверждают, что обобщенные схемы специального вида (именно из таких подсхем будут состоять схемы, которые будут строиться в последнем разделе при доказательстве теоремы) можно практически без увеличения λ-сложности заменить на обобщенные схемы, состоящие из ограниченного числа совсем простых схем.

Лемма 9. *Пусть*

$$\beta_i\in Q^*,\ \ i=1,2,3,4,\quad \beta_1+\beta_2>0,\ \ \beta_3+\beta_4>0.$$

Тогда для произвольных обобщенных одночленов $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ и $h(x,y,z)$ можно построить обобщенную схему S, на входы которой *подаются одночлены f, g и h, на выходах реализуются обобщенные одночлены $f^{\beta_1}h^{\beta_2}$ и $g^{\beta_3}h^{\beta_4}$, а сама схема S удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Схему S можно разбить на подсхемы двух типов: $S_1, \ldots, S_k$, где $k \leqslant 4$, и $E_1, \ldots, E_r$, где $r \leqslant 2$, так что каждая подсхема S_i, $i = 1, \ldots \ldots, k$, имеет один вход и один выход и, соответственно, вычисляет некоторую степень α_i подаваемого на вход подсхемы S_i одночлена, а каждая из подсхем E_j, $j = 1, \ldots r$, состоит ровно из одного элемента.*

2. *Для сложности схемы S справедливы равенства*

$$\lambda(S) = \sum_{i=1}^{k} \lambda\,(x^{\alpha_i}) + r = \log D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Доказательство. Из условий $\beta_1+\beta_2>0$ и $\beta_3+\beta_4>0$ следует, что

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \max\{\beta_2, \beta_4, \beta_1\beta_3, \beta_1\beta_4, \beta_2\beta_3\}.$$

Далее отдельно рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть выполняется соотношение

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} > \max\{\beta_1\beta_3, \beta_1\beta_4, \beta_2\beta_3\}.$$

Тогда справедливы равенства $\beta_1 = 0$ и $\beta_3 = 0$. Следовательно, $f^{\beta_1}h^{\beta_2} = h^{\beta_2}$ и $g^{\beta_3}h^{\beta_4} = h^{\beta_4}$. В этом случае схема S будет состоять из двух подсхем S_1 и S_2. Подсхема S_1 возводит одночлен h в степень $\min\{\beta_2, \beta_4\}$, а подсхема S_2 возводит одночлен $h^{\min\{\beta_2, \beta_4\}}$ в степень $\max\{\beta_2, \beta_4\}/\min\{\beta_2, \beta_4\}$. Тем самым будут вычислены одночлены $f^{\beta_1}h^{\beta_2}$ и $g^{\beta_3}h^{\beta_4}$, при этом для оценки сложности схемы S (здесь и далее в доказательстве леммы считаем, что обобщенные схемы, возводящие одночлен в какую-либо степень, минимальные) с использованием леммы 4 имеем:

$$\lambda(S) = \lceil \log\min\{\beta_2, \beta_4\}\rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\max\{\beta_2, \beta_4\}}{\min\{\beta_2, \beta_4\}}\right)\right\rceil =$$
$$= \log\max\{\beta_2, \beta_4\} + O(1) = \log D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Случай 2. Пусть выполняется соотношение

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \max\{\beta_1\beta_3, \beta_1\beta_4, \beta_2\beta_3\}.$$

Далее снова отдельно рассмотрим несколько случаев.

Случай 2.1. Пусть выполняется соотношение

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \beta_1\beta_3.$$

Тогда справедливы неравенства $\beta_1\beta_3 \geqslant \beta_2\beta_3$ и $\beta_1\beta_3 \geqslant \beta_1\beta_4$, следовательно, $\beta_1 \geqslant \beta_2$ и $\beta_3 \geqslant \beta_4$. В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1 (при $\beta_2 \neq 0$), S_2, S_3 (при $\beta_4 \neq 0$), S_4, E_1 (при $\beta_2 \neq 0$) и E_2 (при $\beta_4 \neq 0$).

Подсхема S_1 при $\beta_2 \neq 0$ возводит одночлен f в степень β_1/β_2.

Подсхема E_1 при $\beta_2 \neq 0$ по одночленам f^{β_1/β_2} и h вычисляет одночлен $f^{\beta_1/\beta_2}h$.

Подсхема S_2 при $\beta_2 \neq 0$ возводит одночлен $f^{\beta_1/\beta_2}h$ в степень β_2, а при $\beta_2 = 0$ возводит одночлен f в степень β_1.

Подсхема S_3 при $\beta_4 \neq 0$ возводит одночлен g в степень β_3/β_4.

Подсхема E_2 при $\beta_4 \neq 0$ по одночленам g^{β_3/β_4} и h вычисляет одночлен $g^{\beta_3/\beta_4}h$.

Подсхема S_4 при $\beta_4 \neq 0$ возводит одночлен $g^{\beta_3/\beta_4}h$ в степень β_4, а при $\beta_4 = 0$ возводит одночлен g в степень β_3.

При $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_4 \neq 0$ применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) = \left\lceil \log\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\right\rceil + \lceil \log \beta_2 \rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_3}{\beta_4}\right)\right\rceil + \lceil \log \beta_4 \rceil + 2 =$$
$$= \log(\beta_1\beta_3) + O(1) = \log D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Если условия $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_4 \neq 0$ не выполняются, то необходимые соотношения (с меньшим числом слагаемых в промежуточном выражении) получаются аналогично.

Случай 2.2. Пусть выполняется соотношение

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \max\{\beta_1\beta_4, \beta_2\beta_3\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\beta_1\beta_4 \geqslant \beta_2\beta_3$. Тогда

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \beta_1\beta_4,$$

и поэтому справедливы неравенства $\beta_4 \neq 0$ и $\beta_4 \geqslant \beta_3$. Теперь снова рассмотрим два случая.

Случай 2.2.1. Пусть выполняется соотношение $\beta_2\beta_3 \geqslant \beta_4$.

Отметим, что тогда $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$. В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4, E_1 и E_2.

Подсхема S_1 возводит одночлен f в степень $(\beta_1\beta_4)/(\beta_2\beta_3)$.

Подсхема S_2 возводит одночлен h в степень β_4/β_3.

Подсхема E_1 по одночленам $f^{(\beta_1\beta_4)/(\beta_2\beta_3)}$ и h^{β_4/β_3} вычисляет одночлен $f^{(\beta_1\beta_4)/(\beta_2\beta_3)}h^{\beta_4/\beta_3}$.

Подсхема S_3 возводит одночлен $f^{(\beta_1\beta_4)/(\beta_2\beta_3)}h^{\beta_4/\beta_3}$ в степень $(\beta_2\beta_3)/\beta_4$, тем самым реализуя одночлен $f^{\beta_1}h^{\beta_2}$.

Подсхема E_2 по одночленам g и h^{β_4/β_3} вычисляет одночлен gh^{β_4/β_3}.

Подсхема S_4 возводит одночлен gh^{β_4/β_3} в степень β_3.

Применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) = \left\lceil \log\left(\frac{\beta_1\beta_4}{\beta_2\beta_3}\right)\right\rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_4}{\beta_3}\right)\right\rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_4}\right)\right\rceil + \lceil \log \beta_3 \rceil + 2 =$$
$$= \log(\beta_1\beta_4) + O(1) = \log D\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Случай 2.2.2. Пусть выполняется соотношение $\beta_2\beta_3 < \beta_4$.

В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1 (при $\beta_1 \neq 0$), S_2 (при $\beta_2 \neq 0$), S_3 (при $\beta_3 \neq 0$), S_4, E_1 (при $\beta_1 \neq 0$ и $\beta_2 \neq 0$) и E_2 (при $\beta_3 \neq 0$).

Подсхема S_1 при $\beta_1 \neq 0$ возводит одночлен f в степень β_1.

Подсхема S_2 при $\beta_2 \neq 0$ возводит одночлен h в степень β_2.

Подсхема E_1 при $\beta_1 \neq 0$ и $\beta_2 \neq 0$ по одночленам f^{β_1} и h^{β_2} вычисляет одночлен $f^{\beta_1} h^{\beta_2}$.

Подсхема S_3 при $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 \neq 0$ возводит одночлен h^{β_2} в степень $\beta_4/(\beta_2\beta_3)$, а при $\beta_2 = 0$ и $\beta_3 \neq 0$ возводит одночлен h в степень β_4/β_3, вычисляя в обоих случаях одночлен h^{β_4/β_3}.

Подсхема E_2 при $\beta_3 \neq 0$ по одночленам g и h^{β_4/β_3} вычисляет одночлен gh^{β_4/β_3}.

Подсхема S_4 при $\beta_3 \neq 0$ возводит одночлен gh^{β_4/β_3} в степень β_3, при $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 = 0$ возводит одночлен h^{β_2} в степень β_4/β_2, а при $\beta_2 = 0$ и $\beta_3 = 0$ возводит одночлен h в степень β_4, вычисляя во всех трех случаях одночлен $g^{\beta_3} h^{\beta_4}$.

При $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$, применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) = \lceil \log \beta_1 \rceil + \lceil \log \beta_2 \rceil + \left\lceil \log \left(\frac{\beta_4}{\beta_2\beta_3} \right) \right\rceil + \lceil \log \beta_3 \rceil + 2 =$$

$$= \log(\beta_1\beta_4) + O(1) = \log D \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Если условия $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 \neq 0$ не выполняются, то необходимые соотношения (с меньшим числом слагаемых в промежуточном выражении) получаются аналогично.

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть*

$$\beta_i \in Q^*, \quad i = 1, 2, 3, \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_3, \quad \beta_1 \geqslant 1.$$

Тогда для произвольных обобщенных одночленов $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ и $h(x, y, z)$ можно построить обобщенную схему S, на входы которой подаются одночлены f, g и h, на выходе реализуется обобщенный одночлен $f^{\beta_1} g^{\beta_2} h^{\beta_3}$, а сама схема S удовлетворяет следующим условиям:

1. *Схему S можно разбить на подсхемы двух типов: $S_1, \ldots, S_k$, где $k \leqslant 3$, и $E_1, \ldots, E_r$, где $r \leqslant 2$, так что каждая подсхема S_i, $i = 1, \ldots, k$, имеет один вход и один выход и, соответственно, вычисляет некоторую степень α_i подаваемого на вход подсхемы S_i одночлена, а каждая из подсхем E_j, $j = 1, \ldots r$, состоит ровно из одного элемента.*

2. *Для сложности схемы S справедливы равенства*

$$\lambda(S) = \sum_{i=1}^{k} \lambda\,(x^{\alpha_i}) + r = \log \beta_1 + O(1).$$

Доказательство. Искомая обобщенная схема S будет состоять из подсхем S_1 (при $\beta_2 \neq 0$), S_2 (при $\beta_3 \neq 0$), S_3, E_1 (при $\beta_2 \neq 0$) и E_2 (при $\beta_3 \neq 0$).

Подсхема S_1 при $\beta_2 \neq 0$ возводит одночлен f в степень β_1/β_2.

Подсхема E_1 при $\beta_2 \neq 0$ по одночленам f^{β_1/β_2} и g вычисляет одночлен $f^{\beta_1/\beta_2} g$.

Подсхема S_2 при $\beta_3 \neq 0$ (в этом случае и $\beta_2 \neq 0$) возводит одночлен $f^{\beta_1/\beta_2} g$ в степень β_2/β_3.

Подсхема E_2 при $\beta_3 \neq 0$ по одночленам $f^{\beta_1/\beta_3} g^{\beta_2/\beta_3}$ и h вычисляет одночлен $f^{\beta_1/\beta_3} g^{\beta_2/\beta_3} h$.

Подсхема S_3 при $\beta_3 \neq 0$ возводит одночлен $f^{\beta_1/\beta_3} g^{\beta_2/\beta_3} h$ в степень β_3, при $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 = 0$ возводит одночлен $f^{\beta_1/\beta_2} g$ в степень β_2, а при $\beta_2 = 0$ и $\beta_3 = 0$

возводит одночлен f в степень β_1, вычисляя во всех трех случаях одночлен $f^{\beta_1}g^{\beta_2}h^{\beta_3}$.

При $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$, применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и считая, что эти схемы минимальны, получаем:

$$\lambda(S) = \left\lceil \log\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\right\rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_2}{\beta_3}\right)\right\rceil + \lceil \log \beta_3 \rceil + 2 = \log \beta_1 + O(1).$$

Если условия $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 \neq 0$ не выполняются, то необходимые соотношения (с меньшим числом слагаемых в промежуточном выражении) получаются аналогично.

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Пусть*

$$\beta_i \in Q^*, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0, \ \beta_3 + \beta_4 > 0.$$

Тогда для произвольных обобщенных одночленов $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ можно построить обобщенную схему S, на входы которой подаются одночлены f и g, на выходах реализуются обобщенные одночлены $f^{\beta_1}g^{\beta_2}$ и $f^{\beta_3}g^{\beta_4}$, а сама схема S удовлетворяет следующим условиям.

1. *Схему S можно разбить на подсхемы двух типов: $S_1, \ldots, S_k$, где $k \leqslant 4$, и $E_1, \ldots, E_r$, где $r \leqslant 3$, так что каждая подсхема S_i, $i = 1, \ldots, k$, имеет один вход и один выход и, соответственно, вычисляет некоторую степень α_i подаваемого на вход подсхемы S_i одночлена, а каждая из подсхем E_j, $j = 1, \ldots r$, состоит ровно из одного элемента.*

2. *Для сложности схемы S справедливы равенства*

$$\lambda(S) = \sum_{i=1}^{k} \lambda\left(x^{\alpha_i}\right) + r = \log D\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\beta_1 = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_1\}$. Тогда

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \max\{|\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3|, \beta_1\}.$$

Далее отдельно рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть выполняется соотношение

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\beta_4 - \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} \geqslant 1.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1.1. Пусть выполняется соотношение $\beta_2\beta_3 \geqslant \beta_1$.

Тогда справедливы неравенства $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_2 \neq 0$. В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4, E_1 и E_2.

Подсхема S_1 возводит одночлен f в степень β_1/β_2.

Подсхема E_1 по одночленам f^{β_1/β_2} и g вычисляет одночлен $f^{\beta_1/\beta_2}g$.

Подсхема S_2 возводит одночлен $f^{\beta_1/\beta_2}g$ в степень $\beta_2\beta_3/\beta_1$.

Подсхема S_3 возводит одночлен g в степень $\beta_4 - (\beta_2\beta_3/\beta_1)$.

Подсхема E_2 по одночленам $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$ и $g^{\beta_4-(\beta_2\beta_3/\beta_1)}$ вычисляет одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_4}$.

Подсхема S_4 возводит одночлен $f^{\beta_3} g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$ в степень β_1/β_3.

Применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4 (здесь и далее в доказательстве леммы считаем, что обобщенные схемы, возводящие одночлен в какую-либо степень, минимальные), получаем:

$$\lambda(S) = \left\lceil \log\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\right\rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}\right)\right\rceil + \left\lceil \log\left(\beta_4 - \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}\right)\right\rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_1}{\beta_3}\right)\right\rceil + 2 =$$
$$= \log\left(\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3\right) + O(1) = \log D\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Случай 1.2. Пусть выполняется соотношение $\beta_2\beta_3 < \beta_1$.

В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1 (при $\beta_3 \neq 0$), S_2, S_3 (при $\beta_2 \neq 0$), S_4, E_1 (при $\beta_3 \neq 0$) и E_2 (при $\beta_2 \neq 0$).

Подсхема S_1 при $\beta_3 \neq 0$ возводит одночлен f в степень β_3.

Подсхема S_2 возводит одночлен g в степень β_4.

Подсхема E_1 при $\beta_3 \neq 0$ по одночленам f^{β_3} и g^{β_4} вычисляет одночлен $f^{\beta_1} g^{\beta_4}$.

Подсхема S_3 при $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 \neq 0$ возводит одночлен f^{β_3} в степень $\beta_1/(\beta_2\beta_3)$, а при $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 = 0$ возводит одночлен f в степень β_1/β_2, вычисляя в обоих случаях одночлен f^{β_1/β_2}.

Подсхема E_2 при $\beta_2 \neq 0$ по одночленам f^{β_1/β_2} и g вычисляет одночлен $f^{\beta_1/\beta_2} g$.

Подсхема S_4 при $\beta_2 \neq 0$ возводит одночлен $f^{\beta_1/\beta_2} g$ в степень β_2, а при $\beta_2 = 0$ возводит одночлен f в степень β_1, вычисляя в обоих случаях одночлен $f^{\beta_1} g^{\beta_2}$.

При $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$, применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) = \lceil \log \beta_3 \rceil + \lceil \log \beta_4 \rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_1}{\beta_2\beta_3}\right)\right\rceil + \lceil \log \beta_2 \rceil + 2 = \log\left(\beta_1\beta_4\right) + O(1).$$

Учитывая условия изучаемого случая, имеем:

$$\beta_1\beta_4 = \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 + \beta_2\beta_3 < \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 + \beta_1 \leqslant 2(\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3).$$

Используя эти соотношения, а также очевидное неравенство $\beta_1\beta_4 \geqslant \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3$, получаем:

$$\lambda(S) = \log\left(\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3\right) + O(1) = \log D\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Если условия $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 \neq 0$ не выполняются, то необходимые соотношения (с меньшим числом слагаемых в промежуточном выражении) получаются аналогично.

Случай 2. Пусть выполняется соотношение

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_4.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} - \beta_4 \geqslant 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$, $\beta_3 \geqslant \beta_4$, $\beta_2\beta_3 \geqslant \beta_1$.

В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1 (при $\beta_4 \neq 0$), S_2, S_3, S_4, E_1 (при $\beta_4 \neq 0$) и E_2.

Подсхема S_1 при $\beta_4 \neq 0$ возводит одночлен f в степень β_3/β_4.

Подсхема E_1 при $\beta_4 \neq 0$ по одночленам f^{β_3/β_4} и g вычисляет одночлен $f^{\beta_3/\beta_4}g$.

Подсхема S_2 при $\beta_4 \neq 0$ возводит одночлен $f^{\beta_3/\beta_4}g$ в степень β_4, а при $\beta_4 = 0$ возводит одночлен f в степень β_3, вычисляя в обоих случаях одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_4}$.

Подсхема S_3 возводит одночлен g в степень $(\beta_2\beta_3/\beta_1)-\beta_4$.

Подсхема E_2 по одночленам $f^{\beta_3}g^{\beta_4}$ и $g^{(\beta_2\beta_3/\beta_1)-\beta_4}$ вычисляет одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$.

Подсхема S_4 возводит одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$ в степень β_1/β_3.

При $\beta_4 \neq 0$, применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) = \left\lceil \log\left(\frac{\beta_3}{\beta_4}\right)\right\rceil + \lceil \log \beta_4 \rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} - \beta_4\right)\right\rceil + \left\lceil \log\left(\frac{\beta_1}{\beta_3}\right)\right\rceil + 2 =$$
$$= \log(\beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_4) + O(1) = \log D\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Если условие $\beta_4 \neq 0$ не выполняется, то необходимые соотношения (с меньшим числом слагаемых в промежуточном выражении) получаются аналогично.

С л у ч а й 3. Пусть выполняется соотношение

$$D\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \beta_1.$$

Тогда $\beta_1 \geqslant |\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3|$, и, следовательно, $|\beta_4 - (\beta_2\beta_3/\beta_1)| \leqslant 1$.

С л у ч а й 3.1. Пусть выполняется соотношение $\beta_4 \geqslant 3$.

В этом случае справедливо неравенство $\beta_2\beta_3/\beta_1 \geqslant 2$, из которого, в свою очередь, следуют соотношения

$$\beta_2 \neq 0, \quad \beta_3 \neq 0, \quad \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} - 1 \geqslant 1.$$

С л у ч а й 3.1.1. Пусть выполняется соотношение

$$\beta_4 \geqslant \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}.$$

Тогда

$$\frac{\beta_3}{\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} - 1} \geqslant \frac{\beta_1}{\beta_2} \geqslant 1.$$

В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4, E_1, E_2 и E_3.

Подсхема S_1 возводит одночлен f в степень $\beta_3/((\beta_2\beta_3/\beta_1)-1)$.

Подсхема E_1 по одночленам $f^{\beta_3/((\beta_2\beta_3/\beta_1)-1)}$ и g вычисляет одночлен $f^{\beta_3/((\beta_2\beta_3/\beta_1)-1)}g$.

Подсхема S_2 возводит одночлен $f^{\beta_3/((\beta_2\beta_3/\beta_1)-1)}g$ в степень $(\beta_2\beta_3/\beta_1)-1$.

Подсхема S_3 возводит одночлен g в степень $\beta_4-((\beta_2\beta_3/\beta_1)-1)$.

Подсхема E_2 по одночленам $f^{\beta_3}g^{(\beta_2\beta_3/\beta_1)-1}$ и $g^{\beta_4-((\beta_2\beta_3/\beta_1)-1)}$ вычисляет одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_4}$.

Подсхема E_3 по одночленам $f^{\beta_3}g^{(\beta_2\beta_3/\beta_1)-1}$ и g вычисляет одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$.

Подсхема S_4 возводит одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$ в степень β_1/β_3.

Применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) =$$
$$= \left\lceil \log \frac{\beta_3}{\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} - 1} \right\rceil + \left\lceil \log \left(\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} - 1 \right) \right\rceil + \left\lceil \log \left(\beta_4 - \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} + 1 \right) \right\rceil + \left\lceil \log \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \right) \right\rceil + 3 =$$
$$= \log \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) + \log \left(\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} \right) + \log \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \right) + O(1) = \log \beta_1 + O(1) =$$
$$= \log D \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Случай 3.1.2. Пусть выполняется соотношение

$$\beta_4 < \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}.$$

Тогда

$$\frac{\beta_3}{\beta_4 - 1} \geqslant \frac{\beta_3}{\beta_4} > \frac{\beta_1}{\beta_2} \geqslant 1.$$

В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4, E_1, E_2 и E_3.

Подсхема S_1 возводит одночлен f в степень $\beta_3/(\beta_4 - 1)$.

Подсхема E_1 по одночленам $f^{\beta_3/(\beta_4-1)}$ и g вычисляет одночлен $f^{\beta_3/(\beta_4-1)}g$.

Подсхема S_2 возводит одночлен $f^{\beta_3/(\beta_4-1)}g$ в степень $\beta_4 - 1$.

Подсхема S_3 возводит одночлен g в степень $(\beta_2\beta_3/\beta_1) - \beta_4 + 1$.

Подсхема E_2 по одночленам $f^{\beta_3}g^{\beta_4-1}$ и g вычисляет одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_4}$.

Подсхема E_3 по одночленам $f^{\beta_3}g^{\beta_4-1}$ и $g^{(\beta_2\beta_3/\beta_1)-\beta_4+1}$ вычисляет одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$.

Подсхема S_4 возводит одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$ в степень β_1/β_3.

Применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) = \left\lceil \log \frac{\beta_3}{\beta_4 - 1} \right\rceil + \lceil \log \beta_4 - 1 \rceil + \left\lceil \log \left(\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} - \beta_4 + 1 \right) \right\rceil + \left\lceil \log \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \right) \right\rceil + 3 =$$
$$= \log \left(\frac{\beta_3}{\beta_4} \right) + \log \beta_4 + \log \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \right) + O(1) = \log \beta_1 + O(1) = \log D \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Случай 3.2. Пусть выполняется соотношение $\beta_4 < 3$.

Тогда с учетом условия случая 1 имеем неравенство $\beta_2\beta_3/\beta_1 < 4$.

Случай 3.2.1. Пусть выполняется соотношение $\beta_2\beta_3 \geqslant \beta_1$.

Отметим, что тогда $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$. В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1, S_2 (при $\beta_4 \neq 0$), S_3, S_4, E_1 (при $\beta_4 \neq 0$) и E_2.

Подсхема S_1 возводит одночлен f в степень β_3.

Подсхема S_2 при $\beta_4 \neq 0$ возводит одночлен g в степень β_4.

Подсхема E_1 при $\beta_4 \neq 0$ по одночленам f^{β_3} и g^{β_4} вычисляет одночлен $f^{\beta_1}g^{\beta_4}$.

Подсхема S_3 возводит одночлен g в степень $\beta_2\beta_3/\beta_1$.

Подсхема E_2 по одночленам f^{β_3} и $g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$ вычисляет одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$.

Подсхема S_4 возводит одночлен $f^{\beta_3}g^{\beta_2\beta_3/\beta_1}$ в степень β_1/β_3.

При выполнении условия $\beta_4 \neq 0$, применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) = \lceil \log \beta_3 \rceil + \lceil \log \beta_4 \rceil + \left\lceil \log \left(\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} \right) \right\rceil + \left\lceil \log \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \right) \right\rceil + 2 =$$
$$= \log \beta_1 + \log \beta_4 + \log \left(\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1} \right) + O(1) = \log \beta_1 + O(1) = \log D \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Если условие $\beta_4 \neq 0$ не выполняется, то необходимые соотношения (с меньшим числом слагаемых в промежуточном выражении) получаются аналогично.

Случай 3.2.2. Пусть выполняется соотношение $\beta_2\beta_3 < \beta_1$.

В этом случае схема S будет состоять из подсхем S_1 (при $\beta_3 \neq 0$), S_2 (при $\beta_4 \neq 0$), S_3 (при $\beta_2 \neq 0$), S_4, E_1 (при $\beta_3 \neq 0$, $\beta_4 \neq 0$) и E_2 (при $\beta_2 \neq 0$).

Подсхема S_1 при $\beta_3 \neq 0$ возводит одночлен f в степень β_3.

Подсхема S_2 при $\beta_4 \neq 0$ возводит одночлен g в степень β_4.

Подсхема E_1 при $\beta_3 \neq 0$ и $\beta_4 \neq 0$ по одночленам f^{β_3} и g^{β_4} вычисляет одночлен $f^{\beta_1} g^{\beta_4}$.

Подсхема S_3 при $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 \neq 0$ возводит одночлен f^{β_3} в степень $\beta_1/(\beta_2\beta_3)$, а при $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 = 0$ возводит одночлен f в степень β_1/β_2, вычисляя в обоих случаях одночлен f^{β_1/β_2}.

Подсхема E_2 при $\beta_2 \neq 0$ по одночленам f^{β_1/β_2} и g вычисляет одночлен $f^{\beta_1/\beta_2} g$.

Подсхема S_4 при $\beta_2 \neq 0$ возводит одночлен $f^{\beta_1/\beta_2} g$ в степень β_2, а при $\beta_2 = 0$ возводит одночлен f в степень β_1, вычисляя в обоих случаях одночлен $f^{\beta_1} g^{\beta_2}$.

При выполнении условий $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$ и $\beta_4 \neq 0$, применяя лемму 4 для оценки сложности подсхем S_1, S_2, S_3 и S_4, получаем:

$$\lambda(S) = \lceil \log \beta_3 \rceil + \lceil \log \beta_4 \rceil + \left\lceil \log \left(\frac{\beta_1}{\beta_2\beta_3} \right) \right\rceil + \lceil \log \beta_2 \rceil + 2 = \log (\beta_1\beta_4) + O(1) =$$
$$= \log \beta_1 + O(1) = \log D \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} + O(1).$$

Если хотя бы одно из условий $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$ и $\beta_4 \neq 0$ не выполняется, то необходимые соотношения (с меньшим числом слагаемых в промежуточном выражении) получаются аналогично.

Лемма 11 доказана.

Следующие четыре леммы (три предварительные, и последняя основная) устанавливают возможность перестроения просто устроенных обобщенных схем, вычисляющих систему обычных одночленов, в обычные схемы без асимптотического увеличения сложности.

Пусть $x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}$ — обобщенный одночлен, u — некоторый натуральный параметр. Обозначим через $G_0(x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}, u)$ множество отличных от единицы одночленов

$$x^{\lfloor a_1 \rfloor} y^{\lfloor a_1 \rfloor} x^{\lfloor a_1 \rfloor},\ x^{\lfloor a_1/2^u \rfloor} y^{\lfloor a_1/2^u \rfloor} x^{\lfloor a_1/2^u \rfloor},\ \ldots,\ x^{\lfloor a_1/2^{ku} \rfloor} y^{\lfloor a_1/2^{ku} \rfloor} x^{\lfloor a_1/2^{ku} \rfloor},\ \ldots$$

Очевидно, что

$$|G_0(x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}, u)| = \lceil \log_{2^u} \max\{a_1, a_2, a_3\} \rceil = \left\lceil \frac{\log \max\{a_1, a_2, a_3\}}{u} \right\rceil.$$

По множеству $G_0(x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}, u)$ построим множество $G(x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}, u)$, добавив к исходному множеству одночленов все отличные от единицы одночлены с целочисленными неотрицательными показателями степеней, такие, что для каждого одночлена $x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$ из множества $G(x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}, u)$ найдется одночлен $x^{b_1'} y^{b_2'} z^{b_3'}$ из множества $G_0(x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}, u)$, удовлетворяющий условиям $|b_1 - b_1'| \leqslant 1$, $|b_2 - b_2'| \leqslant 1$, $|b_3 - b_3'| \leqslant 1$. Очевидно, что $|G(x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}, u)| \leqslant 27 |G_0(x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}, u)|$.

Лемма 12. *Пусть*

$$b_{11} + b_{12} > 0, \quad b_{21} + b_{22} > 0, \quad b_{31} + b_{32} > 0, \quad a_{11} \geqslant \max\{b_1, b_2, b_3\},$$
$$u = \left\lceil \frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}} \right\rceil \left\lceil (\log\log a_{11})^{1/d} \right\rceil,$$

где d — некоторая натуральная константа. Тогда для вычисления систем одночленов $G\left(x^{b_{11}}y^{b_{12}}, u\right)$, $G\left(x^{b_{21}}y^{b_{22}}, u\right)$ и $G\left(x^{b_{31}}y^{b_{32}}, u\right)$, можно построить схему S, сложность которой при условии $a_{11} \to \infty$ удовлетворяет соотношению

$$l(S) = \log D\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} + O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\left(x^{b_{11}}y^{b_{12}}, x^{b_{21}}y^{b_{22}}, x^{b_{31}}y^{b_{32}}\right) + O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}}\right).$$

Доказательство. Обозначим через B_G целочисленную матрицу размера

$$\left|G\left(x^{b_{11}}y^{b_{12}}, u\right) \cup G\left(x^{b_{21}}y^{b_{22}}, u\right) \cup G\left(x^{b_{31}}y^{b_{32}}, u\right)\right| \times 2,$$

строками которой являются показатели степеней переменных x и y в одночленах из множества $G\left(x^{b_{11}}y^{b_{12}}, u\right) \cup G\left(x^{b_{21}}y^{b_{22}}, u\right) \cup G\left(x^{b_{31}}y^{b_{32}}, u\right)$. Согласно лемме 6 для вычисления данной системы одночленов можно построить схему S, сложность которой удовлетворяет условию

$$l(S) \leqslant \log D(B_G) + $$
$$+ O\left(\left|G\left(x^{b_{11}}y^{b_{12}}, u\right) \cup G\left(x^{b_{21}}y^{b_{22}}, u\right) \cup G\left(x^{b_{31}}y^{b_{32}}, u\right)\right| \frac{\log\max\{b_i\}}{\log\log\max\{b_i\}}\right).$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$\log D(B_G) \leqslant \log D\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} + O(1).$$

Действительно, это соотношение очевидно, если значение $D(B_G)$ равно одному из элементов матрицы B_G. Если это не так, то достаточно применить лемму 7, взяв в качестве матрицы B' подматрицу матрицы B_G, абсолютная величина определителя которой равна $D(B_G)$, а в качестве матрицы B — матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{i_1,1}/2^{j_1 u} & b_{i_1,2}/2^{j_1 u} \\ b_{i_2,1}/2^{j_2 u} & b_{i_2,2}/2^{j_2 u} \end{pmatrix}$$

при соответствующих значениях i_1, i_2, j_1 и j_2.

Таким образом, учитывая соотношение

$$\left|G\left(x^{b_{11}}y^{b_{12}}, u\right) \cup G\left(x^{b_{21}}y^{b_{22}}, u\right) \cup G\left(x^{b_{31}}y^{b_{32}}, u\right)\right| = O\left(\frac{\log\max\{b_{ij}\}}{u}\right)$$

и условия леммы, получаем:

$$l(S) = \log D\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} + O\left(\frac{(\log\max\{b_i\})^2}{u\log\log\max\{b_i\}}\right) =$$

$$= \log D\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} + O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}}\right).$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 2. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть выполняются условия: u_2 делится на u_1, $b_{11}+b_{12}+b_{13} > 0$, $b_{21}+b_{22}+b_{23} > 0$. Тогда для вычисления по множествам* *одночленов* $G\left(x^{b_{11}}y^{b_{12}}z^{b_{13}}, u_1\right)$, $G\left(x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}, u_2\right)$ *и* $\{x, y, z\}$ *системы одночленов* $G\left(x^{b_{11}+b_{21}}y^{b_{12}+b_{22}}z^{b_{13}+b_{23}}, u_2\right)$ *можно построить схему* S, *сложность которой удовлетворяет соотношению*

$$l(S) \leqslant \frac{9}{8}\left|G\left(x^{b_{11}+b_{21}}y^{b_{12}+b_{22}}z^{b_{13}+b_{23}}, u_2\right)\right| + 23.$$

Доказательство. Заметим, что в силу условий леммы справедливо включение

$$G\left(x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}, u_2\right) \subseteq G\left(x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}, u_1\right).$$

Схема S сначала вычисляет все одночлены множества

$$H = \left\{x^{\beta_1}y^{\beta_2}z^{\beta_3} \mid \beta_i \in \{0,1,2\},\ i = 1,2,3\right\} \setminus \{x^0y^0z^0\}.$$

Для вычисления системы H достаточно 23 операций умножения.

Положим $v_j = 2^{ju_2}$, $j = 0, 1, \ldots, \left|G_0\left(x^{b_{11}+b_{21}}y^{b_{12}+b_{22}}z^{b_{13}+b_{23}}, u_2\right)\right| - 1$. Для получения одночлена

$$x^{\max\{\lfloor(b_{11}+b_{21})/v_j\rfloor - 1,\ 0\}}y^{\max\{\lfloor(b_{12}+b_{22})/v_j\rfloor - 1,\ 0\}}z^{\max\{\lfloor(b_{13}+b_{23})/v_j\rfloor - 1,\ 0\}}$$

в силу соотношений

$$\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{1i}}{v_j}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} + \max\left\{\left\lfloor\frac{b_{2i}}{v_j}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} \leqslant \max\left\{\left\lfloor\frac{b_{1i}+b_{2i}}{v_j}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \left\lfloor\frac{b_{1i}}{v_j} + \frac{b_{2i}}{v_j}\right\rfloor \leqslant \max\left\{\left\lfloor\frac{b_{1i}}{v_j}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} + \max\left\{\left\lfloor\frac{b_{2i}}{v_j}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} + 2, \quad i = 1,2,3,$$

достаточно умножить произведение одночленов

$$x^{\max\{\lfloor b_{i1}/v_j\rfloor - 1,\ 0\}}y^{\max\{\lfloor b_{i2}/v_j\rfloor - 1,\ 0\}}z^{\max\{\lfloor b_{i3}/v_j\rfloor - 1,\ 0\}}, \quad i = 1, 2,$$

на некоторый одночлен из множества H.

Очевидно, что для получения оставшихся одночленов из множества $G\left(x^{b_{11}+b_{21}}y^{b_{12}+b_{22}}z^{b_{13}+b_{23}}, u_2\right)$ (а их осталось по крайней мере в 7 раз больше, чем уже получено) достаточно использовать по одной операции умножения на каждый одночлен. Поэтому для сложности схемы S получаем такую оценку:

$$l(S) \leqslant \frac{9}{8}\left|G\left(x^{b_{11}+b_{21}}y^{b_{12}+b_{22}}z^{b_{13}+b_{23}}, u_2\right)\right| + 23.$$

Лемма 13 доказана.

Замечание 1. В силу неравенств

$$\left|G\left(x^{b_{11}+b_{21}}y^{b_{12}+b_{22}}z^{b_{13}+b_{23}}, u_2\right)\right| \leqslant 27\left|G_0\left(x^{b_{11}+b_{21}}y^{b_{12}+b_{22}}z^{b_{13}+b_{23}}, u_2\right)\right|,$$
$$\left|G_0\left(x^{b_{11}+b_{21}}y^{b_{12}+b_{22}}z^{b_{13}+b_{23}}, u_2\right)\right| \leqslant \frac{\log\max\{b_{11}+b_{21}, b_{12}+b_{22}, b_{13}+b_{23}\}}{u_2}$$

сложность схемы S из леммы 13 можно оценить таким образом:

$$l(S) = O\left(\frac{\log\max\{b_{11}+b_{21}, b_{12}+b_{22}, b_{13}+b_{23}\}}{u_2}\right).$$

Лемма 14. *Пусть*

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant 1, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3, \quad b_1 \geqslant 1, \quad a \geqslant \alpha_1 b_1,$$
$$u_1 = \left\lceil\frac{\log a}{\log\log a}\right\rceil\left(\left\lceil(\log\log a)^{1/d}\right\rceil\right)^{c-1},$$
$$u_2 = \left\lceil\frac{\log a}{\log\log a}\right\rceil\left(\left\lceil(\log\log a)^{1/d}\right\rceil\right)^{c},$$

где c и d — натуральные константы, удовлетворяющие условию $c \leqslant d - 2$. Тогда для вычисления по множеству одночленов $G\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}, u_1\right) \cup \cup \{x, y, z\}$ систем одночленов $G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_1}, u_2\right)$, $G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_2}, u_2\right)$ и $G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_3}, u_2\right)$ можно построить схему S, сложность которой при условии $a \to \infty$ удовлетворяет соотношениям

$$l(S) = \log \alpha_1 + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right) = \lambda\left(x^{\alpha_1}\right) + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right).$$

Доказательство. Обозначим через t_i, $i = 1, 2$, количество знаков в разложении числа $\lfloor \alpha_1 \rfloor$ по основанию 2^{u_i}, а через s_i, $i = 1, 2$, обозначим величину $\left|G_0\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}, u_i\right)\right|$. Очевидно, что $b_1 \leqslant 2^{s_i u_i}$. Тогда

$$\left\lfloor \frac{\alpha_1 b_1}{2^{(t_i+s_i)u_i}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha_1}{2^{t_i u_i}} \frac{b_1}{2^{s_i u_i}} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\alpha_1}{2^{t_i u_i}} \right\rfloor = 0, \quad i = 1, 2,$$

т. е. $\left|G_0\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_1}, u_i\right)\right| \leqslant s_i + t_i$, $i = 1, 2$.

Далее, если выполняется неравенство $s_2 + t_2 \leqslant (\log\log a)^{1/(2d)}$, то в качестве искомой схемы S можно взять схему, на входы которой подаются только переменные x, y и z, а сама схема раздельно вычисляет все одночлены из множеств $G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_1}, u_2\right)$, $G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_2}, u_2\right)$ и $G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_3}, u_2\right)$. Тогда

$$l(S) \leqslant O\left((s_2 + t_2)\log(\alpha_1 b_1)\right) \leqslant O\left((s_2 + t_2)^2 u_2\right) \leqslant O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right).$$

Таким образом далее можно считать, что выполняется неравенство $s_2 + t_2 > (\log\log a)^{1/(2d)}$. Отметим, что в этом случае при $a \to \infty$ выполняется условие $s_2 + t_2 \to \infty$, а следовательно и условие $s_1 + t_1 \to \infty$.

Зафиксируем p и q, удовлетворяющие условиям $1 \leqslant p \leqslant 3$, $0 \leqslant q \leqslant s_2 + t_2 - 1$. Положим

$$\beta_1 = \beta_1(p, q) = \max\left\{\left\lfloor \frac{\alpha_p b_1}{2^{q u_1}} \right\rfloor - 1,\ 0\right\}, \quad \beta_2 = \beta_2(p, q) = \max\left\{\left\lfloor \frac{\alpha_p b_2}{2^{q u_1}} \right\rfloor - 1,\ 0\right\},$$

$$\beta_3 = \beta_3(p, q) = \max\left\{\left\lfloor \frac{\alpha_p b_3}{2^{q u_1}} \right\rfloor - 1,\ 0\right\}.$$

Для всех $k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, t_1 - 1$ справедливы неравенства

$$\frac{\left\lceil b_1 2^{(k+1)u_1} \right\rceil}{\left\lceil b_1 2^{k u_1} \right\rceil} < \frac{b_1 2^{(k+1)u_1} + 1}{b_1 2^{k u_1}} \leqslant 2^{u_1} + 1.$$

Поэтому в силу соотношений $\beta_1 < \lfloor \alpha_p b_1 \rfloor \leqslant \alpha_1 b_1 < 2^{t_1 u_1} b_1$ величину β_1 можно представить в таком виде:

$$\beta_1 = \sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k \left\lceil b_1 2^{k u_1} \right\rceil,$$

где $0 \leqslant \rho_k \leqslant 2^{u_1}$, $k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, t_1 - 1$.

Далее, введем величину $\widetilde{\beta_2}=\widetilde{\beta_2}(p,q)$ следующим образом. Если $b_2=0$, то $\beta_2=0$, и в этом случае положим $\widetilde{\beta_2}=0$. Пусть теперь $b_2\neq 0$. Обозначив через s_1' наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $\lfloor b_2/2^{s_1'u_1}\rfloor=0$, положим

$$\widetilde{\beta_2}=\widetilde{\beta_2}(p,q)=\sum_{k=-(s_1'-1)}^{t_1-1}\rho_k\left(\lfloor b_2 2^{ku_1}\rfloor-1\right).$$

Очевидно, что $\widetilde{\beta_2}\geqslant 0$. Кроме того, если $\beta_1=0$, то $\widetilde{\beta_2}=\beta_2=0$, а при $\beta_1>0$ имеем:

$$\widetilde{\beta_2}=\sum_{k=-(s_1'-1)}^{t_1-1}\rho_k\left(\lfloor b_2 2^{ku_1}\rfloor-1\right)\leqslant\sum_{k=-(s_1'-1)}^{t_1-1}\rho_k b_2 2^{ku_1}-1=$$

$$=\frac{b_2}{b_1}\sum_{k=-(s_1'-1)}^{t_1-1}\rho_k b_1 2^{ku_1}-1\leqslant\frac{b_2}{b_1}\beta_1-1=\frac{b_2}{b_1}\left(\left\lfloor\frac{\alpha_p b_1}{2^{qu_1}}\right\rfloor-1\right)-1<\frac{\alpha_p b_2}{2^{qu_1}}-1.$$

Отсюда в силу целочисленности величины $\widetilde{\beta_2}$ получаем:

$$\widetilde{\beta_2}\leqslant\left\lfloor\frac{\alpha_p b_2}{2^{qu_1}}\right\rfloor-1=\beta_2.$$

С другой стороны,

$$\beta_2-\widetilde{\beta_2}\leqslant\frac{\alpha_p b_2}{2^{qu_1}}-\sum_{k=-(s_1'-1)}^{t_1-1}\rho_k\left(\lfloor b_2 2^{ku_1}\rfloor-1\right)<\frac{\alpha_p b_2}{2^{qu_1}}-\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1}\rho_k\left(b_2 2^{ku_1}-2\right)=$$

$$=\frac{b_2}{b_1}\left(\frac{\alpha_p b_2}{2^{qu_1}}-\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1}\rho_k b_1 2^{ku_1}\right)+2\left(\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1}\rho_k\right)<$$

$$<\frac{b_2}{b_1}\left((\beta_1+2)-\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1}\rho_k\left(\lceil b_1 2^{ku_1}\rceil-1\right)\right)+2\left(\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1}\rho_k\right)=$$

$$=\frac{b_2}{b_1}\left(2+\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1}\rho_k\right)+2\left(\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1}\rho_k\right)\leqslant 3\left(\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1}\rho_k\right)+2\leqslant 5(s_1+t_1-1)2^{u_1}.$$

Теперь аналогично величине $\widetilde{\beta_2}$ введем величину $\widetilde{\beta_3}=\widetilde{\beta_3}(p,q)$. При условии $b_3=0$ определим $\widetilde{\beta_3}=0$, а если $b_3>0$, то, обозначив через s_1'' наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $\lfloor b_3/2^{s_1''u_1}\rfloor=0$, положим

$$\widetilde{\beta_3}=\widetilde{\beta_3}(p,q)=\sum_{k=-(s_1''-1)}^{t_1-1}\rho_k\left(\lfloor b_3 2^{ku_1}\rfloor-1\right).$$

Для величины $\widetilde{\beta_3}$ также выполняются соотношения:

$$0\leqslant\widetilde{\beta_3}\leqslant\beta_3,\quad \beta_3-\widetilde{\beta_3}\leqslant 5(s_1+t_1-1)2^{u_1}.$$

Теперь для $k=-(s_1-1),-(s_1-2),\ldots,t_1-1$ введем обозначения

$$r_{1k}=\lceil b_1 2^{ku_1}\rceil,\quad r_{2k}=\max\left\{\lceil b_2 2^{ku_1}\rceil-1,0\right\},\quad r_{3k}=\max\left\{\lceil b_3 2^{ku_1}\rceil-1,0\right\}.$$

Заметим, что для $i = 1, 2, 3$ и $k = 0, 1, \ldots, t_1 - 2$, с одной стороны, справедливы соотношения

$$\lfloor b_i 2^{(k+1)u_1} \rfloor \geqslant \lfloor \lfloor b_i 2^{ku_1} \rfloor 2^{u_1} \rfloor = \lfloor b_i 2^{ku_1} \rfloor 2^{u_1},$$

а с другой — соотношения

$$\lfloor b_i 2^{(k+1)u_1} \rfloor - \lfloor \lfloor b_i 2^{ku_1} \rfloor 2^{u_1} \rfloor < b_i 2^{(k+1)u_1} - \left(b_i 2^{ku_1} - 1\right) 2^{u_1} = 2^{u_1}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\max\left\{\lfloor b_i 2^{ku_1} \rfloor - 1, 0\right\} 2^{u_1} \leqslant \max\left\{\lfloor b_i 2^{(k+1)u_1} \rfloor - 1, 0\right\} < \\ < \max\left\{\lfloor b_i 2^{ku_1} \rfloor - 1, 0\right\} 2^{u_1} + 2 \cdot 2^{u_1} - 1.$$

Таким образом, для $k = 0, 1, \ldots, t_1 - 2$ имеем:

$$\lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor 2^{u_1} \leqslant \lfloor b_1 2^{(k+1)u_1} \rfloor < \lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor 2^{u_1} + 2^{u_1}, \qquad r_{2k} 2^{u_1} \leqslant r_{2,k+1} < r_{2k} 2^{u_1} + 2 \cdot 2^{u_1} - 1,$$
$$r_{3k} 2^{u_1} \leqslant r_{3,k+1} < r_{3k} 2^{u_1} + 2 \cdot 2^{u_1} - 1,$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant \lfloor b_1 2^{(k+1)u_1} \rfloor - \lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor 2^{u_1} < 2^{u_1}, \qquad 0 \leqslant r_{2,k+1} - r_{2k} 2^{u_1} < 2 \cdot 2^{u_1} - 1,$$
$$0 \leqslant r_{3,k+1} - r_{3k} 2^{u_1} < 2 \cdot 2^{u_1} - 1.$$

Перейдем непосредственно к описанию процесса вычисления по множеству одночленов $G\left(x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}, u_1\right)$ системы одночленов

$$G\left(\left(x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}\right)^{\alpha_1}, u_2\right) \cup G\left(\left(x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}\right)^{\alpha_2}, u_2\right) \cup G\left(\left(x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}\right)^{\alpha_3}, u_2\right).$$

Это вычисление будет состоять из шести этапов. Обозначим через l_i число операций умножения, используемых на этапе с номером i.

Этап 1. Вычисление систем степеней

$$x^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1} \rfloor - \lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor 2^{u_1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, t_1 - 2;$$
$$y^{r_{2,k+1} - r_{2k} 2^{u_1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, t_1 - 2;$$
$$z^{r_{3,k+1} - r_{3k} 2^{u_1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, t_1 - 2.$$

Применяя лемму 3 и используя установленные оценки для показателей степеней систем, получаем:

$$l_1 \leqslant 3\left(\log\left(2^{u_1+1}\right) + \frac{\log\left(t_1 2^{u_1+1}\right)}{\log\log\left(t_1 2^{u_1+1}\right)}(1 + o(1)) + O(t_1)\right) = O(u_1 + t_1).$$

Этап 2. Вычисление системы одночленов

$$x^{r_{1k}} y^{r_{2k}} z^{r_{3k}}, \quad k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, t_1 - 1.$$

Система $G\left(x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}, u_1\right)$ для всех $k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, 0$ содержит одночлены $x^{\lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor} y^{r_{2k}} z^{r_{3k}}$ и $x^{\lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor + 1} y^{r_{2k}} z^{r_{3k}}$. Но величина $\lceil b_1 2^{ku_1} \rceil$ равна либо $\lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor$, либо $\lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor + 1$, и, следовательно, система $G\left(x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}, u_1\right)$ содержит одночлены $x^{r_{1k}} y^{r_{2k}} z^{r_{3k}}$ при $k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, 0$.

Вычислим одночлены $x^{r_{1k}} y^{r_{2k}} z^{r_{3k}}$ при $k = 1, 2, \ldots, t_1 - 1$.

Отметим, что среди элементов множества $G\left(x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}, u_1\right)$ есть одночлен $x^{\lfloor b_1 \rfloor} y^{r_{20}} z^{r_{30}}$.

Пусть уже вычислен одночлен $x^{\lfloor b_1 2^{ku_1} \rfloor} y^{r_{2k}} z^{r_{3k}}$ $(0 \leqslant k \leqslant t_1 - 2)$. Покажем, как тогда можно вычислить одночлен $x^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1} \rfloor} y^{r_{2,k+1}} z^{r_{3,k+1}}$.

Сначала одночлен $x^{\lfloor b_1 2^{ku_1}\rfloor} y^{r_{2k}} z^{r_{3k}}$ возведем u_1 раз в квадрат. Получим одночлен

$$\left(x^{\lfloor b_1 2^{ku_1}\rfloor} y^{r_{2k}} z^{r_{3k}}\right)^{2^{u_1}} = \left(x^{\lfloor b_1 2^{ku_1}\rfloor 2^{u_1}} y^{r_{2k}2^{u_1}} z^{r_{3k}2^{u_1}}\right).$$

Далее, для вычисления одночлена $x^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1}\rfloor} y^{r_{2,k+1}} z^{r_{3,k+1}}$ с использованием степеней, вычисленных на первом этапе, достаточно не более трех операций умножения.

Таким образом, для каждого k, $0 \leqslant k \leqslant t_1-2$, на вычисление следующего одночлена $x^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1}\rfloor} y^{r_{2,k+1}} z^{r_{3,k+1}}$ с помощью уже вычисленных, требуется не более u_1+3 операций умножения. Еще одна операция умножения может потребоваться для того, чтобы по одночлену $x^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1}\rfloor} y^{r_{2,k+1}} z^{r_{3,k+1}}$ получить одночлен $x^{r_{2,k+1}} y^{r_{2,k+1}} z^{r_{3,k+1}}$. Следовательно,

$$l_2 \leqslant (t_1-1)(u_1+3).$$

Этап 3. Вычисление системы одночленов

$$x^{\beta_1(p,q)} y^{\widetilde{\beta}_2(p,q)} z^{\widetilde{\beta}_3(p,q)}, \quad p=1,2,3, \ \ q=-(s_2-1), -(s_2-2), \ldots, t_2-1.$$

При вычислении одночлена $x^{\beta_1(p,q)} y^{\widetilde{\beta}_2(p,q)} z^{\widetilde{\beta}_3(p,q)}$, для каждых p и q, $p = 1, 2, 3$, $q=-(s_2-1), -(s_2-2), \ldots, t_2-1$, воспользуемся равенством

$$x^{\beta_1} y^{\widetilde{\beta}_2} z^{\widetilde{\beta}_3} = \prod_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \left(x^{r_{1,k}} y^{r_{2,k}} z^{r_{3,k}}\right)^{\rho_k}.$$

Одночлены $x^{r_{1,k}} y^{r_{2,k}} z^{r_{3,k}}$, $k=-(s_1-1), -(s_1-2), \ldots, t_1-1$, уже вычислены на втором этапе. Поэтому, используя лемму 3, получаем:

$$l_3 \leqslant 3(s_2+t_2-1)\left(\log\left(2^{u_1}\right) + \frac{\log\left((s_1+t_1-1)2^{u_1}\right)}{\log\log\left((s_1+t_1-1)2^{u_1}\right)}(1+o(1)) + O(s_1+t_1-1)\right) =$$
$$= O\left((s_2+t_2)(u_1+s_1+t_1)\right).$$

Этап 4. Вычисление системы одночленов

$$y^{\beta_2(p,q)-\widetilde{\beta}_2(p,q)} z^{\beta_3(p,q)-\widetilde{\beta}_3(p,q)}, \quad p=1,2,3, \ \ q=-(s_2-1), -(s_2-2), \ldots, t_2-1.$$

В силу неравенств $0 \leqslant \beta_2(p,q)-\widetilde{\beta}_2(p,q) \leqslant 5(s_1+t_1-1)2^{u_1}$ и $0 \leqslant \beta_3(p,q)- \widetilde{\beta}_3(p,q) \leqslant 5(s_1+t_1-1)2^{u_1}$ из леммы 3 следует, что для вычисления каждой из систем степеней

$$y^{\beta_2(p,q)-\widetilde{\beta}_2(p,q)}, \quad p=1,2,3, \ \ q=-(s_2-1), -(s_2-2), \ldots, t_2-1,$$
$$z^{\beta_3(p,q)-\widetilde{\beta}_3(p,q)}, \quad p=1,2,3, \ \ q=-(s_1-1), -(s_2-2), \ldots, t_2-1,$$

достаточно

$$\log(5(s_1+t_1)2^{u_1}) + \frac{\log\left((s_2+t_2)(s_1+t_1)2^{u_1}\right)}{\log\log\left((s_2+t_2)(s_1+t_1)2^{u_1}\right)}(1+o(1)) + O(s_2+t_2)$$

операций умножения. Далее для получения нужной системы одночленов достаточно потратить не более одной операции умножения на каждый из $3(s_2+t_2-1)$ одночленов. Таким образом,

$$l_4 = O\left(u_1+s_2+t_2+\log(s_1+t_1)\right).$$

Этап 5. Вычисление системы одночленов

$$G_0\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_1}, u_2\right) \cup G_0\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_2}, u_2\right) \cup G_0\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_3}, u_2\right).$$

С использованием одночленов, вычисленных на третьем и четвертом этапах, нужную систему можно получить, потратив не более $3(s_2+t_2-1)$ операций умножения, т. е. $l_5=O(s_2+t_2)$.

Этап 6. Вычисление системы одночленов

$$G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_1}, u_2\right) \cup G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_2}, u_2\right) \cup G\left(\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}\right)^{\alpha_3}, u_2\right).$$

С использованием одночленов, вычисленных на пятом этапе, нужную систему можно получить, потратив не более $26\times 3(s_2+t_2-1)$ операций умножения, т. е. $l_6=O(s_2+t_2)$.

Таким образом, можно построить схему S, на вход которой подаются переменные x, y, z и множество одночленов $G\left(x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}, u_1\right)$, реализующую систему одночленов

$$G\left(x^{\alpha_1 b_1}y^{\alpha_1 b_2}z^{\alpha_1 b_3}, u_2\right) \cup G\left(x^{\alpha_2 b_1}y^{\alpha_2 b_2}z^{\alpha_2 b_3}, u_2\right) \cup G\left(x^{\alpha_3 b_1}y^{\alpha_3 b_2}z^{\alpha_3 b_3}, u_2\right),$$

причем величину $l(S)$ можно оценить так:

$$l(S) \leqslant l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6 = u_1t_1 + O\left((s_2+t_2)(u_1+s_1+t_1)\right).$$

Тогда в силу неравенств

$$2^{(t_1-1)u_1} \leqslant \alpha_1, \quad 2^{(s_1+t_1-1)u_1} \leqslant \alpha_1 b_1, \quad 2^{(s_2+t_2-1)u_2} \leqslant \alpha_1 b_1$$

справедливы соотношения

$$l(S) = \log\alpha_1 + O\left(\frac{\log(\alpha_1 b_1)}{u_2}\left(u_1 + \frac{\log(\alpha_1 b_1)}{u_1}\right)\right).$$

Теперь, подставив значения параметров u_1 и u_2 и используя неравенство $\alpha_1 b_1 \leqslant a$, получаем:

$$l(S) = \log\alpha_1 + O\left(\log(\alpha_1 b_1)\frac{u_1}{u_2}\right) = \log\alpha_1 + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right).$$

Для завершения доказательства осталось применить лемму 4. Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *Пусть обобщенную схему S, реализующую систему обычных одночленов*

$$\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\},$$

можно разбить на подсхемы трех типов: $T_1,\ldots,T_m$; $S_1,\ldots,S_k$; $E_1,\ldots,E_r$, где $m+k\leqslant d-2$, $r\leqslant d-2$ (d — некоторая заданная константа) таким образом, что каждая подсхема T_i, $i=1,\ldots,m$, имеет два входа, на которые подаются переменные, и три выхода, и, соответственно, вычисляет три обобщенных одночлена от двух переменных, каждая подсхема S_i, $i=1,\ldots,k$, имеет один вход и один выход и, соответственно, вычисляет некоторую степень подаваемого на вход подсхемы обобщенного одночлена, а каждая из подсхем E_i, $i=1,\ldots r$, состоит ровно из одного элемента. Тогда при $\max a_{ij}\to\infty$ справедливо неравенство

$$l\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant \lambda(S) + O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}}\right).$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что, во-первых, $a_{11}=\max a_{ij}$, а во-вторых, подсхемы $T_1,\ldots,T_m$ и $S_1,\ldots,S_k$ минимальны.

Введем естественным образом сплошную нумерацию $P_1, P_2, \ldots, P_{m+k+r}$ схем $T_1, \ldots, T_m$, $S_1, \ldots, S_k$, $E_1, \ldots, E_r$ (при этой нумерации никакая цепь, ведущая от входа обобщенной схемы S к ее выходу, при $i > j$ не может проходить сначала через подсхему P_i, а потом через подсхему P_j). По последовательности $P_1, P_2, \ldots, P_{m+k+r}$ однозначно определяется последовательность $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m+k}$ схем из множества $\{T_1, \ldots, T_m, S_1, \ldots, S_k\}$.

Построим по обобщенной схеме S обычную схему S' следующим образом. Для $i = 1, 2, \ldots, m+k+r$ последовательно заменим (в соответствии с одной из лемм 12, 13 или 14) обобщенную схему P_i на обычную схему, при этом если $P_i = S_j$ для некоторого j, т. е. при замене используется лемма 14, то в этой лемме полагаем

$$u_1 = \left\lceil \frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a_{11})^{1/d} \right\rceil \right)^{t-1},$$
$$u_2 = \left\lceil \frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a_{11})^{1/d} \right\rceil \right)^{t},$$

где t определяется из условия $P_i = Q_t$.

Построение схемы S' корректно в силу справедливости для произвольного обобщенного одночлена $x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$ при условии $t_1 > t_2$ включения

$$G\left(x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}, \left\lceil \frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a_{11})^{1/d} \right\rceil \right)^{t_1}\right) \subseteq$$
$$\subseteq G\left(x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}, \left\lceil \frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a_{11})^{1/d} \right\rceil \right)^{t_2}\right).$$

Согласно замечанию 1 (к лемме 13) каждая из обобщенных схем $E_1, \ldots$ $\ldots, E_r$ при перестроении схемы S в схему S' заменяется на обычную схему сложности $O(\log\log a_{11})$. Поэтому, используя оценки из лемм 12 и 14, получаем:

$$l(S') \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda(T_i) + O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}} \right) \right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda(S_i) + O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}} \right) \right) + \sum_{i=1}^{r} \left(O(\log\log a_{11}) \right).$$

Отсюда с использованием условий леммы имеем:

$$l\left(x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda(T_i) + \sum_{i=1}^{k} \lambda(S_i) + O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}} \right) \leqslant \lambda(S) + O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}} \right).$$

Лемма 15 доказана.

Замечание 2. Вместо леммы 12 можно было бы доказать лемму, аналогичную лемме 11, но для трех (а не для двух) одночленов $f^{\beta_1} g^{\beta_2}$, $f^{\beta_3} g^{\beta_4}$ и $f^{\beta_5} g^{\beta_6}$. Доказательство такой леммы не отличалось бы принципиально от доказательства леммы 11, однако пришлось бы рассматривать существенно больше случаев. В дальнейшем будет использоваться только частный случай, когда одночлены f и g являются переменными. Именно этот случай и рассмотрен в лемме 12 (при этом получен остаточный член по порядку меньший, чем после применения аналога леммы 11 и леммы 14). Все же для полноты картины следует отметить, что и в этом случае обобщенную схему, вычисляющую одночлены $x^{\beta_1}y^{\beta_2}$, $x^{\beta_3}y^{\beta_4}$ и $x^{\beta_5}y^{\beta_6}$, без асимптотического увеличения сложности можно заменить на композицию конечного числа подсхем, каждая из которых либо вычисляет некоторую степень подаваемого на вход одночлена, либо состоит из одного элемента умножения.

Замечание 3. Формально, для доказательства леммы 15 (а также лемм 12, 13 и 14, на которые это доказательство опирается) достаточно было бы использовать множества $G_0(x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}, u)$, не вводя множества $G(x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}, u)$. Однако приведенное, в некотором смысле «избыточное», доказательство обладает, и это важно для дальнейшего, тем свойством, что минимальные естественные изменения в этом доказательстве дают верхнюю оценку величины $l(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})$, в которой вместо суммы сложностей подсхем исходной обобщенной схемы S (т. е. вместо величины $\lambda(S)$) фигурирует сумма сложностей обобщенных схем, вычисляющих одночлены, «похожие» на одночлены, реализуемые подсхемами исходной обобщенной схемы S, а не обязательно эти самые одночлены. Более точно, справедливо неравенство

$$l(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\lambda(T_i')+\sum_{j=1}^{k}\lambda(S_j')+O\left(\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^{1/d}}\right),$$

где T_i', $i=1,\ldots,m$, — произвольная обобщенная схема с двумя входами и тремя выходами, вычисляющая систему из трех обобщенных одночленов, обладающих тем свойством, что показатель степени каждой из трех переменных в каждом из одночленов отличается от показателя степени той же переменной в соответствующем одночлене, вычисляемом подсхемой T_i исходной схемы S, не более, чем на 1, а S_j', $j=1,\ldots,k$, — произвольная обобщенная схема с одним входом и одним выходом, вычисляющая степень подаваемого на вход одночлена, показатель которой отличается от показателя степени, в которую возводит подаваемый на вход одночлен подсхема S_j исходной схемы S, не более, чем на 1.

Наконец, установим справедливость утверждения, которое потребуется при доказательстве верхней оценки λ-сложности реализации систем из трех обобщенных одночленов от трех переменных при сведении некоторых случаев соотношения показателей степеней к уже рассмотренным случаям.

Пусть s и t удовлетворяют неравенствам $1\leqslant s\leqslant 3$ и $1\leqslant t\leqslant 3$. Положим

$$D_{st}(A)=\max\left\{|a_{st}|,\ \max_{\substack{(i_1,i_2;\,j_1,j_2):\\ s\in\{i_1,i_2\},\ t\in\{j_1,j_2\}}}|\det A(i_1,i_2;\,j_1,j_2)|,\ |\det A|\right\}.$$

Таким образом, $D(A)$ — это максимум абсолютных величин миноров матрицы A, где максимум берется по всем минорам матрицы A, соответствующим всем подматрицам, содержащим s-ю строку и t-й столбец матрицы A.

Лемма 16. *Пусть $A=(a_{ij})$ — матрица размера 3×3 с неотрицательными элементами, и для некоторых s и t, $1\leqslant s\leqslant 3$, $1\leqslant t\leqslant 3$, выполнены условия:*

1) $a_{st}\geqslant 1$;

2) для любых i и j таких, что $1\leqslant i\leqslant 3$, $i\neq s$, $1\leqslant j\leqslant 3$, $j\neq t$, либо $a_{ij}=0$, либо $a_{ij}\geqslant 1$.

Тогда

$$D(A)\leqslant 4\frac{\max a_{ij}}{a_{st}}D_{st}(A).$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $s=1$, $t=1$.

Утверждение леммы очевидно в следующих случаях:

а) если $D(A)=|\det A|$;

б) если $D(A)=|a_{ij}|$ для некоторых i и j, $1\leqslant i\leqslant 3$, $1\leqslant j\leqslant 3$;

в) если $D(A)=|\det A(1,\, i;\ 1,\, j)|$ для некоторых i и j, $2\leqslant i\leqslant 3$, $2\leqslant j\leqslant 3$.

Осталось установить утверждение леммы в случае, когда $D(A)=|\det A(i_1,\, i_2;\ j_1,\, j_2)|$ для некоторых i_1, i_2, j_1, j_2, удовлетворяющих условиям $1\leqslant i_1\leqslant 3$, $1\leqslant i_2\leqslant 3$, $1\leqslant j_1\leqslant 3$, $1\leqslant j_2\leqslant 3$, $i_1+j_1\geqslant 3$.

Оценим сверху величину $|\det A(i_1,\, i_2;\ j_1,\, j_2)|$ в каждом из оставшихся случаев отдельно.

Пусть $D(A)=|a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}|$. Тогда

$$D(A)=\left|\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}a_{32}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}a_{31}+\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}a_{21}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{11}a_{22}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{21}}{a_{11}}\,|a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}|+\frac{a_{31}}{a_{11}}\,|a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}|\leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}\max|a_{11}a_{ij}-a_{1j}a_{i1}|\leqslant 2\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}D_{11}(A).$$

Пусть $D(A)=|a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}|$. Тогда

$$D(A)=\left|\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}a_{33}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}a_{31}+\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}a_{21}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{11}a_{23}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{21}}{a_{11}}\,|a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}|+\frac{a_{31}}{a_{11}}\,|a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}|\leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}\max|a_{11}a_{ij}-a_{1j}a_{i1}|\leqslant 2\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}D_{11}(A).$$

Пусть $D(A)=|a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}|$. Тогда

$$D(A)=\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{11}a_{23}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{13}a_{21}+\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{12}a_{21}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{11}a_{22}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{12}}{a_{11}}\,|a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}|+\frac{a_{13}}{a_{11}}\,|a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}|\leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}\max|a_{11}a_{ij}-a_{1j}a_{i1}|\leqslant 2\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}D_{11}(A).$$

Пусть $D(A)=|a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}|$. Тогда

$$D(A)=\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{11}a_{33}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{13}a_{31}+\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{12}a_{31}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{11}a_{32}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{12}}{a_{11}}\,|a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}|+\frac{a_{13}}{a_{11}}\,|a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}|\leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}\max|a_{11}a_{ij}-a_{1j}a_{i1}|\leqslant 2\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}D_{11}(A).$$

Пусть $D(A)=|a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}|$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{12}=\max\{a_{12},\, a_{13},\, a_{21},\, a_{31}\}$. Далее полагаем, что справедливо неравенство $a_{12}\geqslant 1$, так как при $a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{31}=0$ имеем:

$$D(A)=|a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}|\leqslant a_{11}\,|a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}|=|\det A|\leqslant D_{11}(A).$$

Учитывая неравенство $a_{13}\leqslant a_{12}$, получаем:

$$D(A)=\left|\frac{a_{22}}{a_{12}}a_{12}a_{33}-\frac{a_{22}}{a_{12}}a_{13}a_{32}+\frac{a_{32}}{a_{12}}a_{12}a_{23}-\frac{a_{32}}{a_{12}}a_{13}a_{22}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{22}}{a_{12}}\,|a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}|+\frac{a_{32}}{a_{12}}\,|a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{22}}{a_{12}}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\,|a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}|+\frac{a_{13}}{a_{11}}\,|a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}|\right)+$$
$$+\frac{a_{32}}{a_{12}}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\,|a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}|+\frac{a_{13}}{a_{11}}\,|a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}|\right)\leqslant$$
$$\leqslant 4\frac{\max\{a_{22},\, a_{32}\}}{a_{11}}\max|a_{11}a_{ij}-a_{1j}a_{i1}|\leqslant 4\frac{\max a_{ij}}{a_{11}}D_{11}(A).$$

Лемма 16 доказана.

Доказательство основного утверждения

Теорема. *Найдется такая константа d, $d>0$, что для любой последовательности $A(n)=(a_{ij}(n))$ ненулевых матриц размера 3×3 с неотрицательными целыми коэффициентами, удовлетворяющей условию $\max a_{ij}\to\infty$ при $n\to\infty$, справедливы неравенства:*

$$\log D(A)\leqslant l\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})\leqslant$$
$$\leqslant \log D(A)+O\left(\frac{\log\max a_{ij}}{\left(\log\log\max a_{ij}\right)^{1/d}}\right).$$

Доказательство. Нижняя оценка

$$l\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})\geqslant \log D(A)$$

в силу очевидного неравенства

$$l\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})\geqslant \lambda\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})$$

непосредственно следует из леммы 2.

Верхняя оценка. Для доказательства верхней оценки достаточно для произвольной системы обобщенных одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$ построить обобщенную схему S, реализующую эту систему и удовлетворяющую следующим условиям.

1) Схему S можно разбить на подсхемы трех типов: а) подсхемы с двумя входами, на которые подаются пременные, и тремя выходами (такие подсхемы вычисляют систему из трех обобщенных одночленов от двух переменных); б) подсхемы с одним входом и одним выходом (такие подсхемы вычисляют некоторую степень подаваемого на вход подсхемы обобщенного одночлена); в) подсхемы, состоящие из одного элемента умножения; причем число схем первого и второго типа, а также число схем третьего типа не превосходит $d-2$.

2) Для λ-сложности схемы S выполняется неравенство

$$\lambda(S)\leqslant \log D(A)+O(1).$$

Действительно, после построения такой обобщенной схемы в случае, когда система $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$ является системой обычных одночленов, для получения нужной верхней оценки достаточно применить лемму 15, учитывая при необходимости замечание 3.

Перейдем к описанию процесса построения обобщенной схемы S с требуемыми свойствами.

Не ограничивая общности будем считать, что выполняется условие

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant 3} a_{ij}=a_{11}.$$

Положим

$$d_{ij}=a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}},\quad \delta_{ij}=\left|a_{ij}-d_{ij}\right|;\qquad i=2,3,\ \ j=2,3.$$

Эти обозначения будут действовать на протяжении всего доказательства верхней оценки. Остальные вводимые обозначения будут действовать только в рамках того случая, в условиях которого они введены.

Отметим, что для доказательства неравенства $\lambda(S) \leqslant \log D(A) + O(1)$ в силу соотношений

$$\log a_{11} + \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} =$$
$$= \log a_{11} + \log \max\{|(a_{22} - a'_{22})(a_{33} - a'_{33}) - (a_{23} - a'_{23})(a_{32} - a'_{32})|,$$
$$|a_{22} - a'_{22}|,\ |a_{23} - a'_{22}|,\ |a_{22} - a'_{22}|,\ |a_{22} - a'_{22}|,\ 2\} =$$
$$= \log \max\{|a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}|,$$
$$|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|,\ |a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}|,\ |a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}|,\ |a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}|,\ 2a_{11}\} \leqslant$$
$$\leqslant \log D_{11}(A) + 1 \leqslant \log D(A) + 1$$

достаточно установить оценку

$$\lambda(S) \leqslant \log a_{11} + \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Далее отдельно будем рассматривать различные случаи в зависимости от того, какое из равенств $\delta_{ij} = a_{ij} - a'_{ij}$ или $\delta_{ij} = a'_{ij} - a_{ij}$ выполняется для каждой пары (i, j), $i = 2, 3$, $j = 2, 3$. Всего принципиально различных (т. е. не получающихся один из другого путем переименования переменных и/или перенумерацией одночленов) случаев — семь:
случай 1 — выполняются неравенства $a_{22} \geqslant a'_{22}$, $a_{23} \geqslant a'_{23}$, $a_{32} \geqslant a'_{32}$, $a_{33} \geqslant a'_{33}$;
случай 2 — выполняются неравенства $a_{22} < a'_{22}$, $a_{23} < a'_{23}$, $a_{32} \geqslant a'_{32}$, $a_{33} \geqslant a'_{33}$;
случай 3 — выполняются неравенства $a_{22} < a'_{22}$, $a_{23} \geqslant a'_{23}$, $a_{32} \geqslant a'_{32}$, $a_{33} \geqslant a'_{33}$;
случай 4 — выполняются неравенства $a_{22} < a'_{22}$, $a_{23} < a'_{23}$, $a_{32} < a'_{32}$, $a_{33} < a'_{33}$;
случай 5 — выполняются неравенства $a_{22} < a'_{22}$, $a_{23} \geqslant a'_{23}$, $a_{32} < a'_{32}$, $a_{33} \geqslant a'_{33}$;
случай 6 — выполняются неравенства $a_{22} < a'_{22}$, $a_{23} \geqslant a'_{23}$, $a_{32} \geqslant a'_{32}$, $a_{33} < a'_{33}$;
случай 7 — выполняются неравенства $a_{22} < a'_{22}$, $a_{23} \geqslant a'_{23}$, $a_{32} < a'_{32}$, $a_{33} < a'_{33}$.
В соотетствии с замечанием 3 ничего принципиально не изменится, если в условиях случаев какие-либо строгие неравенства заменить на нестрогие и наоборот.

Отметим, что для величины $D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix}$ в условиях случаев 1, 2, 4, 5 и 6 выполняются равенства

$$D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} =$$
$$= \max\{\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{32}, \delta_{33}, |\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}\delta_{32}|\},$$

а в условиях случаев 3 и 7 — равенства

$$D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} =$$
$$= \max\{\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{32}, \delta_{33}, \delta_{22}\delta_{33} + \delta_{23}\delta_{32}\}.$$

Прежде чем перейти к непосредственному рассмотрению случаев, договоримся о том, что под вычислением обобщенного одночлена вида $x^a y^b z^\varepsilon$ при $0 \leqslant \varepsilon < 1$ будем понимать вычисление обобщенного одночлена $x^a y^b$.

С л у ч а й 1. Пусть выполняются неравенства

$$a_{22} \geqslant a'_{22},\ a_{23} \geqslant a'_{23},\ a_{32} \geqslant a'_{32},\ a_{33} \geqslant a'_{33}.$$

Без ограничения общности в условиях данного случая будем считать, что $a_{21} \geqslant a_{31}$.

Схематичное изображение случая 1 представлено на рис. 1.

В предположении, что выполняется включение $\{\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{32}, \delta_{33}\} \subset Q^*$, построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 при $a_{31} \neq 0$ по переменным x, y и z вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ (здесь как раз пользуемся договоренностью о том, что, например, при выполнении условия $a'_{32} < 1$ под вычислением одночлена $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ понимается вычисление одночлена $x^{a_{31}}z^{a'_{33}}$).

Подсхема S_2 при $a_{31} \neq 0$ по одночлену $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ и, быть может, переменным y и z вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$, а при $a_{21} \neq 0$, $a_{31} = 0$ по переменным x, y и z вычисляет тот же одночлен $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$.

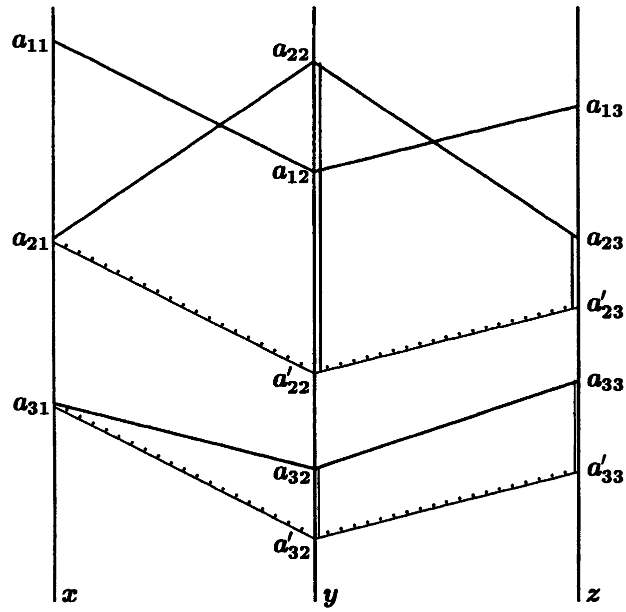

Рис. 1

Подсхема S_3 при $a_{21} \neq 0$ по одночлену $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$ и, быть может, переменным y и z вычисляет одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, а при $a_{21} = 0$ по переменным x, y и z вычисляет тот же одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$.

Подсхема S_4 по переменным y и z вычисляет одночлены $y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}}$ и $y^{a_{22}-a'_{22}}z^{a_{23}-a'_{23}}$.

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ и $y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Подсхема S_6, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$ и $y^{a_{22}-a'_{22}}z^{a_{23}-a'_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Опишем строение схем S_2 и S_3. Подсхема S_2 при $a_{31} \neq 0$, $\{a'_{32}, a'_{33}\} \subset Q^*$ просто возводит обобщенный одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ в степень a_{21}/a_{31}. Однако в случае, когда $a_{31} \neq 0$, $0 < a'_{32} < 1$ и/или $0 < a'_{33} < 1$, для вычисления обобщенного одночлена $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$ подсхема S_2 должна иметь несколько более сложную конструкцию. Это связано с тем, что под одночленом $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$ в этом случае понимается один из обобщенных одночленов $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}$, $x^{a_{21}}z^{a'_{23}}$ или $x^{a_{21}}$.

Покажем, как устроена подсхема S_2, когда, например, выполняются условия $a_{31} \neq 0$, $0 < a'_{32} < 1$, $a'_{22} \geqslant 1$, $0 < a'_{23} < 1$. Тогда: а) справедливы соотношения $a_{21} \neq 0$, $0 < a'_{33} < 1$; б) подаваемый на вход подсхемы S_2 одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ на самом деле будет обобщенным одночленом $x^{a_{31}}$; в) вычисляемый подсхемой S_2 одночлен $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$ на самом деле будет обобщенным одночленом $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}$. В этом случае подсхема S_2 сама состоит из нескольких подсхем и устроена следующим образом. Подаваемый на вход одночлен $x^{a_{31}}$ сначала возводится в степень $1/a'_{32}$, потом домножается на y, а затем полученный одночлен возводится в степень a'_{22}; получающийся после этих вычислений обобщенный одночлен в силу равенства $a_{31}a'_{22}/a'_{32} = a_{21}$ является одночленом $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}$.

Аналогично строится подсхема S_2 при $a_{31} \neq 0$, $\{a'_{32}, a'_{33}\} \not\subset Q^*$ в остальных случаях, а также подсхема S_3 при $a_{21} \neq 0$, $\{a'_{22}, a'_{23}\} \not\subset Q^*$.

На самом деле, в соответствии с замечанием 3 можно считать, что подсхемы S_2 и S_3 при $a_{31} \neq 0$ и $a_{21} \neq 0$ просто возводят подаваемые на входы обобщенные одночлены в степени a_{21}/a_{31} и a_{11}/a_{21} соответственно. В дальнейшем, как правило, будем обходиться в аналогичных ситуациях ссылкой на замечание 3.

Считая, что подсхемы S_1, S_2, S_3 и S_4 — минимальные, оценим их сложность.

В силу соотношений

$$a_{31} \leqslant a'_{32} \leqslant a'_{33}, \quad a_{11} \leqslant a'_{21} \leqslant a'_{31},$$

применяя оба утверждения леммы 5, при выполнении условия $a_{31} \neq 0$ (и, следовательно, условия $a_{21} \neq 0$), получаем:

$$\lambda(S_1) \leqslant \log a_{31} + O(1), \quad \lambda(S_2) \leqslant \log \frac{a_{21}}{a_{31}} + O(1), \quad \lambda(S_3) \leqslant \log \frac{a_{11}}{a_{21}} + O(1).$$

Таким образом,

$$\lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \lambda(S_3) \leqslant \log a_{11} + O(1).$$

При выполнении условия $a_{31} = 0$ справедливо такое же неравенство:

$$\lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \lambda(S_3) \leqslant \log a_{11} + O(1).$$

Далее, применяя лемму 8, имеем:

$$\lambda(S_4) \leqslant \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Поэтому окончательно имеем такую оценку:

$$\begin{aligned} &\lambda\left(x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}\right) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \lambda(S_3) + \lambda(S_4) + \lambda(S_5) + \lambda(S_6) \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \log a_{11} + \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} + O(1). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства в случае 1 достаточно отметить, что предположение о выполнении включения $\{\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{32}, \delta_{33}\} \subset Q^*$ снова в силу замечания 3 не ограничивает общности рассуждений.

Случай 1 разобран.

С л у ч а й 2. Пусть выполняются неравенства

$$a_{22} < a'_{22}, \quad a_{23} < a'_{23}, \quad a_{32} \geqslant a'_{32}, \quad a_{33} \geqslant a'_{33}.$$

Отметим, что в этом случае выполняется неравенство $a_{21} \geqslant 1$, так как при $a_{21} = 0$ невозможно выполнение условия $a_{22} < a'_{22}$.

Будем считать, что справедливо включение $\{\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{32}, \delta_{33}\} \subset Q^*$.

С л у ч а й 2.1. Пусть выполняется неравенство $a_{21} \geqslant a_{31}$.

Положим

$$a''_{32} = a_{31} \frac{a_{22}}{a_{21}}, \quad a''_{33} = a_{31} \frac{a_{23}}{a_{21}}.$$

В силу соотношения $a_{22} \leqslant a'_{22}$ справедливо неравенство $a_{12} \geqslant (a_{11} a_{22})/a_{21}$. Поэтому

$$a'_{32} = a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}} \geqslant a_{31} \frac{a_{11} a_{22}}{a_{11} a_{21}} = a''_{32}.$$

Аналогично, в силу соотношения $a_{23} \leqslant a'_{23}$ справедливо неравенство $a_{13} \geqslant (a_{11}a_{23})/a_{21}$. Поэтому

$$a'_{33} = a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} \geqslant a_{31}\frac{a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{21}} = a''_{33}.$$

Таким образом,

$$a_{32} \geqslant a'_{32} \geqslant a''_{32}, \quad a_{33} \geqslant a'_{33} \geqslant a''_{33}.$$

Схематичное изображение случая 2.1 представлено на рис. 2.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

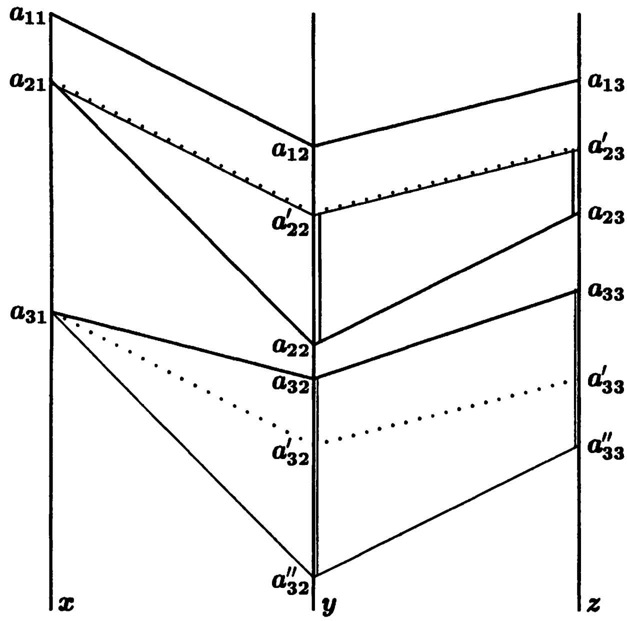

Рис. 2

Подсхема S_1 при $a_{31} \neq 0$ по переменным x, y и z вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a''_{33}}$.

Подсхема S_2 при $a_{31} = 0$ по переменным x, y и z вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$, а при $a_{31} \neq 0$ по одночлену $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a''_{33}}$ и, может быть, переменным y и z вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$, при этом подсхема S_2 сама состоит из нескольких подсхем и устроена следующим образом. При $\{a''_{32}, a''_{33}\} \subset Q^*$ одночлен $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a''_{33}}$ возводится в степень a_{21}/a_{31}. При $0 < a''_{32} < 1$, $a''_{33} \in Q^*$ подсхема S_2 вычисляемый в этом случае подсхемой S_1 одночлен $x^{a_{31}}z^{a''_{33}}$ сначала возводит в степень $1/a''_{32}$, затем домножает на y, а потом возводит в степень a_{22}, вычисляя тем самым одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$. При $0 < a''_{32} \leqslant a''_{33} < 1$ подсхема S_2 вычисленный в этом случае подсхемой S_1 одночлен $x^{a_{31}}$ возводит в степень $1/a''_{33}$, затем домножает на z, возводит в степень a''_{33}/a''_{32}, домножает на y и, наконец, возводит в степень a_{22}, вычисляя тем самым одночлен $\left(\left((x^{a_{31}})^{1/a''_{33}} z\right)^{a''_{33}/a''_{32}} y\right)^{a_{22}} = x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$. Аналогично подсхемой S_2 вычисляется одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$ также в случаях $a''_{32} \in Q^*$, $0 < a''_{33} < 1$ и $0 < a''_{33} < a''_{32} < 1$.

Подсхема S_3 по переменным y и z вычисляет одночлены $y^{a_{32}-a''_{32}}z^{a_{33}-a''_{33}}$ и $y^{a'_{22}-a_{22}}z^{a'_{23}-a_{23}}$.

Подсхема S_4, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a''_{33}}$ и $y^{a_{32}-a''_{32}}z^{a_{33}-a''_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$ и $y^{a'_{22}-a_{22}}z^{a'_{23}-a_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$.

Подсхема S_6 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$ в степень a_{11}/a_{21}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$.

Считая, что подсхемы S_1, S_2, S_3 и S_5 — минимальные, оценим их сложность.

В силу соотношений

$$a_{31} = \max\{a_{31}, a''_{32}, a''_{33}\}, \quad \left(x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a''_{33}}\right)^{a_{21}/a_{31}} = x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}} \text{ (при } a_{31} \neq 0),$$

из леммы 5 следует оценка

$$\lambda(S_1)+\lambda(S_2)\leqslant \log a_{21}+O(1).$$

Далее, используя очевидное неравенство

$$\lambda\left(y^{a_{32}-a''_{32}}z^{a_{33}-a''_{33}},\, y^{a'_{22}-a_{22}}z^{a'_{23}-a_{23}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant \lambda\left(y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}},\, y^{a'_{32}-a''_{32}}z^{a'_{33}-a''_{33}},\, y^{a'_{22}-a_{22}}z^{a'_{23}-a_{23}}\right)+1$$

и применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_2)\leqslant \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\\ a'_{32}-a''_{32} & a'_{33}-a''_{33}\\ a'_{22}-a_{22} & a'_{23}-a_{23}\end{pmatrix}+O(1).$$

Следовательно, учитывая соотношения

$$a'_{32}-a''_{32}=\frac{a_{31}}{a_{21}}\left(a'_{22}-a_{22}\right), \qquad a'_{33}-a''_{33}=\frac{a_{31}}{a_{21}}\left(a'_{23}-a_{23}\right),$$

имеем

$$\lambda(S_3)\leqslant \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}+O(1).$$

Для оценки сложности схемы S_6 опять применяем лемму 5:

$$\lambda(S_6)\leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right)+O(1).$$

Таким образом, в случае 2.1 имеем такую оценку:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1)+\lambda(S_2)+\lambda(S_3)+\lambda(S_4)+\lambda(S_5)+\lambda(S_6)\leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11}+\log D\begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}+O(1).$$

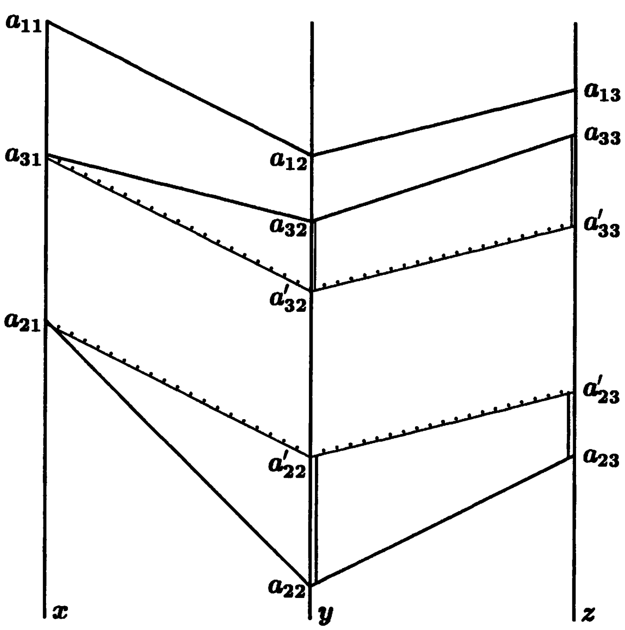

Рис. 3

Случай 2.2. Пусть выполняется неравенство $a_{21}<a_{31}$.

Схематичное изображение случая 2.2 представлено на рис. 3.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 по переменным x, y и z вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Подсхема S_2 по переменным y и z вычисляет одночлены $y^{a'_{22}-a_{22}}z^{a'_{23}-a_{23}}$ и $y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}}$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$ и $y^{a'_{22}-a_{22}}z^{a'_{23}-a_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$.

Подсхема S_4 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{21}}y^{a'_{22}}z^{a'_{23}}$ в степени a_{31}/a_{21} и a_{11}/a_{21}, тем самым вычисляя одночлены $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ и $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$.

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ и $y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Считая, что подсхемы S_1, S_2 и S_4 — минимальные, оценим их сложность.

Из леммы 5 следует оценка

$$\lambda(S_1) \leqslant \overline{\log}\, a_{21} + O(1).$$

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Для оценки сложности схемы S_4 опять применяем лемму 5:

$$\lambda(S_4) \leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1).$$

Таким образом, и в случае 2.2 имеем такую же окончательную оценку:

$$\lambda\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant \lambda(S_1)+\lambda(S_2)+\lambda(S_3)+\lambda(S_4)+\lambda(S_5) \leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11} + \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Осталось отметить, что предположение о выполнении включения $\{\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{32}, \delta_{33}\} \subset Q^*$ в силу замечания 3 не ограничивает общности рассуждений. Случай 2 разобран.

Случай 3. Пусть выполняются неравенства

$$a_{22} < a'_{22},\quad a_{23} \geqslant a'_{23},\quad a_{32} \geqslant a'_{32},\quad a_{33} \geqslant a'_{33}.$$

Отметим, что в этом случае $a_{12}a_{21} \geqslant 1$.

Положим

$$\widetilde{a}_{21} = a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}},\quad \widetilde{a}_{23} = a_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}};\qquad \widetilde{a}_{31} = a_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}},\quad \widetilde{a}_{33} = a_{32}\frac{a_{13}}{a_{12}}.$$

В силу неравенства $a_{22} < a'_{22}$ справедливы соотношения

$$\widetilde{a}_{21} < a'_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}} = a_{21},\quad \widetilde{a}_{23} < a'_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}} = a'_{23}.$$

Аналогично, в силу неравенства $a_{32} \geqslant a'_{32}$ справедливы соотношения

$$\widetilde{a}_{31} \geqslant a'_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}} = a_{31},\quad \widetilde{a}_{33} \geqslant a'_{32}\frac{a_{13}}{a_{12}} = a'_{33}.$$

Таким образом, в условиях случая 3

$$a_{21} > \widetilde{a}_{21},\quad a_{23} \geqslant a'_{23} > \widetilde{a}_{23};$$
$$a_{31} \leqslant \widetilde{a}_{31},\quad a_{33} \geqslant a'_{33},\quad a'_{33} \leqslant \widetilde{a}_{33}.$$

Далее отдельно рассмотрим два случая, в зависимости от того выполняется ли неравенство $a_{33} \geqslant \widetilde{a}_{33}$ или нет.

Отметим, что в силу соотношений

$$\delta_{33} = a_{33} - a'_{33}, \quad \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} = \frac{a_{13}}{a_{12}}\left(a_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{32}\frac{a_{13}}{a_{12}} - a'_{33} = \widetilde{a}_{33} - a'_{33}$$

неравенство $a_{33} \geqslant \widetilde{a}_{33}$ равносильно соотношению

$$\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} \leqslant \delta_{33}.$$

С л у ч а й 3.1. Пусть выполняется неравенство

$$\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} \leqslant \delta_{33}.$$

В этом случае $a_{33} \geqslant \widetilde{a}_{33}$.

С л у ч а й 3.1.1. Пусть выполняется неравенство $a_{12} < a_{13}$.

Схематичное изображение этого случая представлено на рис. 4. Отметим, что при выполнении неравенства $a'_{32} < 1$ справедливы соотношения

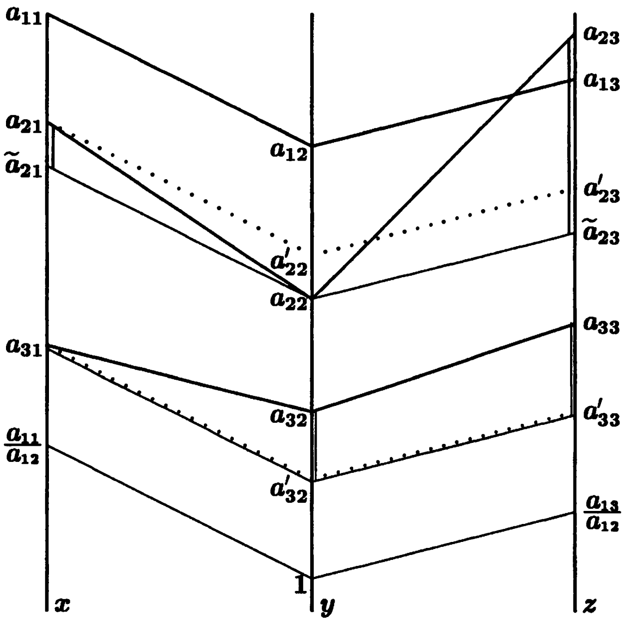

Рис. 4

$$a_{31} = a'_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}} < \frac{a_{11}}{a_{12}},$$

$$a'_{33} = a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} < \frac{a_{13}}{a_{12}},$$

а при выполнении неравенства $a'_{32} \geqslant 1$ — соотношения

$$a_{31} = a'_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}} \geqslant \frac{a_{11}}{a_{12}},$$

$$a'_{33} = a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} \geqslant \frac{a_{13}}{a_{12}}.$$

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 при $0 < a'_{32} < 1$ по переменным x и z вычисляет одночлен $x^{a_{31}}z^{a'_{33}}$, тем самым будет вычислен одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ в силу того, что вычисление одночлена $x^a y^\varepsilon z^c$ при $\varepsilon < 1$ означает вычисление одночлена $x^a z^c$. Отметим также, что при $a'_{33} < 1$ на самом деле будет вычислен одночлен $x^{a_{31}}$.

Подсхема S_2 при $0 < a'_{33} < 1$ возводит одночлен $x^{a_{31}}$ в степень $1/a'_{33}$, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{11}/a_{13}}$.

Подсхема S_3, при $0 < a'_{33} < 1$ состоящая из одного элемента умножения, по одночлену $x^{a_{11}/a_{13}}$ и переменной z вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{13}}z$.

Подсхема S_4 при $0 < a'_{33} < 1$ возводит одночлен $x^{a_{11}/a_{13}}z$ в степень a'_{33}/a'_{32}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}$, при выполнении условий $a'_{33} \geqslant 1$ и $a'_{32} < 1$ возводит одночлен $x^{a_{31}}z^{a'_{33}}$ в степень $1/a'_{32}$, тем самым вычисляя тот же одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}$, и, наконец, при $a'_{32} \geqslant 1$ по переменным x и z вычисляет опять же одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}$.

Подсхема S_5 по одночлену $x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}$ и переменным y и z вычисляет одночлены $\left(x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}\right)^{a'_{22} - a_{22}} z^{a_{23} - a'_{23}}$ (этот одночлен равен одночлену $x^{a_{21} - \widetilde{a}_{21}}z^{a_{23} - \widetilde{a}_{23}}$) и $y^{a_{32} - a'_{32}}z^{a_{33} - a'_{33}}$, при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{a'_{22}-a_{22},\ a_{23}-a'_{23},\ a_{32}-a'_{32},\ a_{33}-a'_{33}\}\subset Q^*$.

Подсхема S_6, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}$ и y вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}yz^{a_{13}/a_{12}}$.

Подсхема S_7 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}yz^{a_{13}/a_{12}}$ в степени a_{12} и a_{22}, а при $a'_{32}\geqslant 1$ еще и в степень a'_{32}, тем самым вычисляя одночлены $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ и $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$, а при $a'_{32}\geqslant 1$ еще и $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$.

Подсхема S_8, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Подсхема S_9, состоящая при $a'_{32}\neq 0$ из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ и $y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$. При $a'_{32}=0$ в силу соотношений $a_{13}>a_{12}\geqslant 1$ справедливы равенства $a_{31}=0$ и $a'_{33}=0$. В этом случае одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$ равен одночлену $y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}}$, вычисленному подсхемой S_5.

Считая, что подсхемы S_1, S_2, S_4, S_5 и S_7 — минимальные, оценим их сложность.

Из леммы 5 следует оценка

$$\lambda(S_1)+\lambda(S_2)+\lambda(S_3)+\lambda(S_4)\leqslant\log\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)+O(1).$$

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_5)\leqslant\overline{\log}\,D\begin{pmatrix} a'_{22}-a_{22} & 0 & a_{23}-a'_{23}\\ 0 & a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix}+O(1)=$$

$$=\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}\delta_{22} & 0 & \delta_{23}\\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}+O(1).$$

Для оценки сложности схемы S_4 опять применяем лемму 5:

$$\lambda(S_7)\leqslant\log\max\{a_{12},a_{22},a'_{32}\}+O(1).$$

Но в условиях случая 3 справедливы соотношения

$$a_{22}<a'_{22}=a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\leqslant a_{12},\qquad a'_{32}=a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}\leqslant a_{12}.$$

Поэтому

$$\lambda(S_7)\leqslant\log a_{12}+O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\lambda\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\,x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\,x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})\leqslant$$

$$\leqslant\lambda(S_1)+\lambda(S_2)+\lambda(S_3)+\lambda(S_4)+\lambda(S_5)+\lambda(S_6)+\lambda(S_7)+\lambda(S_8)+\lambda(S_9)\leqslant$$

$$\leqslant\log a_{11}+\overline{\log}\,\max\left\{D\begin{pmatrix}a_{22}-a'_{22} & a_{23}-a'_{23}\\ a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix},\ \delta_{22}\delta_{32}\right\}+O\left(\frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}}\right).$$

В условиях случая 3.1.1 справедливы соотношения

$$\delta_{22}\delta_{32}\leqslant\frac{a_{12}}{a_{13}}\delta_{22}\delta_{33}\leqslant\delta_{22}\delta_{33}\leqslant D\begin{pmatrix}a_{22}-a'_{22} & a_{23}-a'_{23}\\ a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\lambda\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\,x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\,x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})\leqslant$$

$$\leqslant\log a_{11}+\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}a_{22}-a'_{22} & a_{23}-a'_{23}\\ a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix}+O\left(\frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}}\right).$$

Случай 3.1.2. Пусть выполняется неравенство $a_{12} \geqslant a_{13}$.

Далее рассмотрим два подслучая, в зависимости от того выполняется неравенство $a_{13} \min\{\delta_{22}, \delta_{32}\} < a_{12}$ или нет.

Случай 3.1.2.1. Пусть выполняется неравенство $a_{13}\min\{\delta_{22}, \delta_{32}\} < a_{12}$.

Пока будем считать, что справедливы соотношения $\delta_{22} \neq 0$, $\delta_{32} \neq 0$ (можно также считать, что при $\delta_{22} = 0$ выполняются условия случая 1, а при $\delta_{32} = 0$ — условия случая 5).

Тогда положим

$$a_{10} = \frac{a_{12}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{32}\}};$$

$$a'_{20} = a_{10}\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad a'_{30} = a_{10}\frac{a_{31}}{a_{11}};$$

$$a''_{20} = a_{10}\frac{a_{22}}{a_{12}}; \quad a''_{30} = a_{10}\frac{a_{32}}{a_{12}}.$$

Из соотношений

$$\frac{a_{12}}{a_{10}} = \min\{\delta_{22}, \delta_{32}\} \geqslant 1, \quad a_{13} < \frac{a_{12}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{32}\}}$$

следуют неравенства $a_{13} < a_{10} \leqslant a_{12}$.

Схематичное изображение случая 3.1.2.1 представлено на рис. 5.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

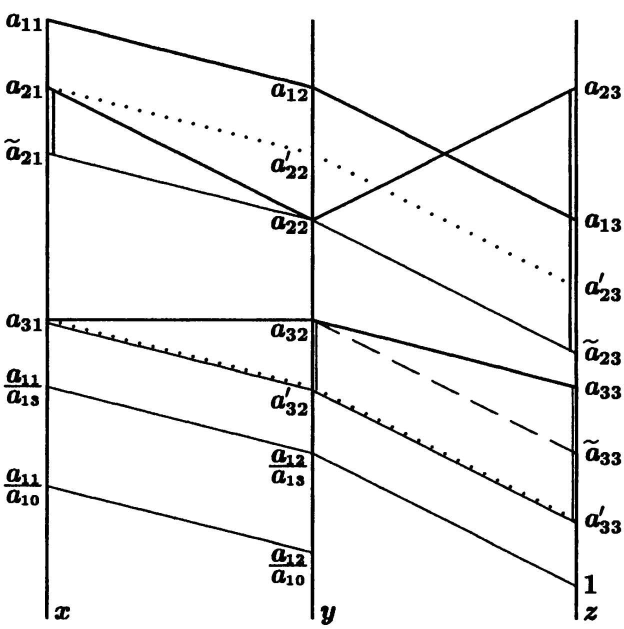

Рис. 5

Подсхема S_1 по переменным x, y и z вычисляет одночлены $x^{a_{11}/a_{10}}$, $y^{a_{12}/a_{10}}$, $x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$, $x^{\tilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\tilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{31}} y^{a'_{32}} z^{a'_{33}}$, причем схема S_1 в свою очередь сама будет состоять из следующих λ-подсхем.

Подсхема S_{11} по переменной x вычисляет одну или несколько степеней переменной x, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен $x^{a_{11}/a_{10}}$.

Подсхема S_{12} по переменной y вычисляет одну или несколько степеней переменной y, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен $y^{a_{12}/a_{10}}$.

Подсхема S_{13}, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{11}/a_{10}}$ и $y^{a_{12}/a_{10}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}$.

Подсхема S_{14} при $a_{13} \neq 0$ вычисляет одну или несколько степеней одночлена $x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}$, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}\right)^{a_{10}/a_{13}} = x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}}.$$

Подсхема S_{15}, состоящая из одного элемента умножения, при $a_{13} \neq 0$ по одночленам $x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}}$ и z вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z$.

Подсхема S_{16} при $a_{13} \neq 0$ вычисляет одну или несколько степеней одночлена $x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z$, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z\right)^{a_{13}} = x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}},$$

а при $a_{13} = 0$ вычисляет одну или несколько степеней одночлена $x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}$, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}\right)^{a_{10}} = x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}.$$

Покажем, как в схеме S_1 вычисляются одночлены $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{31}} y^{a'_{32}} z^{a'_{33}}$.

Сначала покажем, как вычисляется одночлен $x^{a_{31}} y^{a'_{32}} z^{a'_{33}}$.

Пусть выполняется неравенство $a'_{32} < a_{12}/a_{10}$. Тогда

$$a_{31} = a'_{32} \frac{a_{11}}{a_{12}} < \frac{a_{11}}{a_{10}}, \quad a'_{33} = a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}} < \frac{a_{13}}{a_{10}} < 1.$$

В этом случае подсхемы S_{11} и S_{12} помимо одночленов $x^{a_{11}/a_{10}}$ и $y^{a_{12}/a_{10}}$ будут вычислять также одночлены $x^{a_{31}}$ и $y^{a'_{32}}$ соответственно, а дополнительная подсхема S_{17}, состоящая из одного элемента умножения, будет вычислять одночлен $x^{a_{31}} y^{a'_{32}}$.

Теперь пусть выполняются соотношения $a_{13} \neq 0$ и $a_{12}/a_{10} \leqslant a'_{32} < a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\frac{a_{11}}{a_{10}} \leqslant a_{31} = a'_{32} \frac{a_{11}}{a_{12}} < \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad a'_{33} = a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}} < 1.$$

В этом случае подсхема S_{14} помимо одночлена $x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}}$ будет вычислять одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}\right)^{a'_{32}(a_{10}/a_{12})} = x^{a_{31}} y^{a'_{32}}.$$

Тем самым в этих двух случаях будет вычислен одночлен $x^{a_{31}} y^{a'_{32}} z^{a'_{33}}$ в силу того, что вычисление одночлена $x^a y^b z^\varepsilon$ при $\varepsilon < 1$ означает вычисление одночлена $x^a y^b$.

Далее, пусть выполняются соотношения $a'_{32} \geqslant a_{12}/a_{10}$ и $a_{13} = 0$. Тогда $a'_{33} = 0$. В этом случае подсхема S_{16} помимо одночлена $x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$ будет вычислять одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}\right)^{a'_{32}(a_{10}/a_{12})} = x^{a_{31}} y^{a'_{32}} z^{a'_{33}}.$$

Пусть, наконец, выполняются соотношения $a_{13} \neq 0$ и $a'_{32} \geqslant a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$a_{31} = a'_{32} \frac{a_{11}}{a_{12}} \geqslant \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad a'_{33} = a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}} \geqslant 1.$$

В этом случае подсхема S_{16} помимо одночлена $x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$ будет вычислять одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z\right)^{a'_{33}} = x^{a_{31}} y^{a'_{32}} z^{a'_{33}}.$$

При вычислении одночлена $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}$ поступаем аналогично.

Пусть выполняется неравенство $a_{22} < a_{12}/a_{10}$. Тогда

$$\widetilde{a}_{21} = a_{22} \frac{a_{11}}{a_{12}} < \frac{a_{11}}{a_{10}}, \quad \widetilde{a}_{23} = a_{22} \frac{a_{13}}{a_{12}} < \frac{a_{13}}{a_{10}} < 1.$$

В этом случае подсхемы S_{11} и S_{12} будут вычислять еще и одночлены $x^{\widetilde{a}_{21}}$ и $y^{a_{22}}$ соответственно, а дополнительная подсхема $\widetilde{S}_{18}$, состоящяя из одного элемента умножения, будет вычислять одночлен $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}}$.

Теперь пусть выполняются соотношения $a_{13} \neq 0$ и $a_{12}/a_{10} \leqslant a_{22} < a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\frac{a_{11}}{a_{10}} \leqslant \widetilde{a}_{21} = a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}} < \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad \widetilde{a}_{23} = a_{22}\frac{a_{13}}{a_{11}} < 1.$$

В этом случае подсхема S_{14} будет вычислять еще и одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}\right)^{a_{22}(a_{10}/a_{12})} = x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}}.$$

Тем самым в этих двух случаях будет вычислен одночлен $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}$, так как $\widetilde{a}_{23} < 1$.

Далее, пусть выполняются соотношения $a_{22} \geqslant a_{12}/a_{10}$ и $a_{13} = 0$. Тогда $a'_{33} = 0$. В этом случае подсхема S_{16} будет вычислять еще и одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{10}} y^{a_{12}/a_{10}}\right)^{a_{22}(a_{10}/a_{12})} = x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}.$$

Пусть, наконец, выполняются соотношения $a_{13} \neq 0$ и $a_{22} \geqslant a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\widetilde{a}_{21} = a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}} \geqslant \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad \widetilde{a}_{23} = a_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}} \geqslant 1.$$

В этом случае подсхема S_{16} будет вычислять еще и одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z\right)^{\widetilde{a}_{23}} = x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}.$$

Итак полностью описана подсхема S_1 схемы S, которая по переменным x, y и z вычисляет одночлены $x^{a_{11}/a_{10}}$, $y^{a_{12}/a_{10}}$, $x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$, $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{31}} y^{a'_{32}} z^{a'_{33}}$.

Далее, подсхема S_2 по одночленам $x^{a_{11}/a_{10}}$ и $y^{a_{12}/a_{10}}$, и переменной z вычисляет одночлены $\left(x^{a_{11}/a_{10}}\right)^{a'_{20} - a''_{20}} z^{a_{23} - \widetilde{a}_{23}}$ и $\left(y^{a_{12}/a_{10}}\right)^{a''_{30} - a'_{30}} z^{a_{33} - a'_{33}}$, где

$$\left(x^{a_{11}/a_{10}}\right)^{a'_{20} - a''_{20}} z^{a_{23} - \widetilde{a}_{23}} = x^{a_{21} - \widetilde{a}_{21}} z^{a_{23} - \widetilde{a}_{23}}, \quad \left(y^{a_{12}/a_{10}}\right)^{a''_{30} - a'_{30}} z^{a_{33} - a'_{33}} = y^{a_{32} - a'_{32}} z^{a_{33} - a'_{33}},$$

при этом, в силу замечания 3, без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{a'_{20} - a''_{20},\ a_{23} - \widetilde{a}_{23},\ a''_{30} - a'_{30},\ a_{33} - a'_{33}\} \subset Q^*$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{21} - \widetilde{a}_{21}} z^{a_{23} - \widetilde{a}_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}$.

Подсхема S_4, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}} y^{a'_{32}} z^{a'_{33}}$ и $y^{a_{32} - a'_{32}} z^{a_{33} - a'_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}$.

Считая, что подсхемы S_{11}, S_{12}, S_{14}, S_{16} и S_2 — минимальные, оценим их сложность.

Из леммы 5 следуют оценки

$$\lambda(S_{11}) \leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{10}}\right) + O(1), \quad \lambda(S_{12}) \leqslant \log\left(\frac{a_{12}}{a_{10}}\right) + O(1),$$
$$\lambda(S_{14}) + \lambda(S_{16}) \leqslant \log a_{10} + O(1).$$

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a'_{20} - a''_{20} & 0 & a_{23} - \widetilde{a}_{23} \\ 0 & a''_{30} - a'_{30} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} + O(1) =$$
$$= \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} \frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{22} & 0 & \delta_{23} + \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} \\ 0 & a\frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_{11})+\lambda(S_{12})+\lambda(S_{14})+\lambda(S_{16})+\lambda(S_2)+O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11} + \log\left(\frac{a_{12}}{a_{10}}\right) + \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} \frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{22} & 0 & \delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} \\ 0 & a\frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix} + O(1).$$

Используя сначала соотношения

$$\frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{22} = \frac{\delta_{22}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{32}\}} \geqslant 1, \quad \frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{32} = \frac{\delta_{32}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{32}\}} \geqslant 1,$$

а затем равенство $(a_{10}/a_{12})\delta_{22}\delta_{32} = \max\{\delta_{22}, \delta_{32}\}$ (оно следует, в свою очередь, из равенства $\min\{\delta_{22}, \delta_{32}\} = a_{12}/a_{10}$), получаем:

$$D\begin{pmatrix} \frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{22} & 0 & \delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} \\ 0 & a\frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix} =$$
$$= \max\left\{\frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{22}, \frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{32}, \frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{22}\frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{32}, \frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{33}, \left(\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\right)\frac{a_{10}}{a_{12}}\delta_{32}\right\} =$$
$$= \frac{a_{10}}{a_{12}}\max\left\{\delta_{22}, \delta_{32}, \delta_{22}\delta_{33}, \delta_{23}\delta_{32}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{32}\right\}.$$

Поэтому, учитывая справедливое в условиях случая 3.1 неравенство $(a_{13}/a_{12})\delta_{22}\delta_{32} \leqslant \delta_{22}\delta_{33}$ (можно также воспользоваться соотношениями $(a_{13}/a_{12})\delta_{22}\delta_{32} \leqslant (a_{10}/a_{12})\delta_{22}\delta_{32} = \max\{\delta_{22}, \delta_{32}\}$), имеем:

$$l\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11} + \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} a_{22}-a'_{22} & a_{23}-a'_{23} \\ a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix} + O(1).$$

Осталось отметить, что предположение о справедливости неравенств $\delta_{22} \neq 0$ и $\delta_{32} \neq 0$, в силу замечания 3 не ограничивает общности рассуждений.

Случай 3.1.2.2. Пусть выполняется неравенство $a_{13}\min\{\delta_{22}, \delta_{32}\} \geqslant a_{12}$.

Отметим, что тогда в силу неравенства $a_{12} > 0$ справедливо неравенство $a_{13} \geqslant 1$.

Схематичное изображение случая 3.1.2.2 представлено на рис. 6.

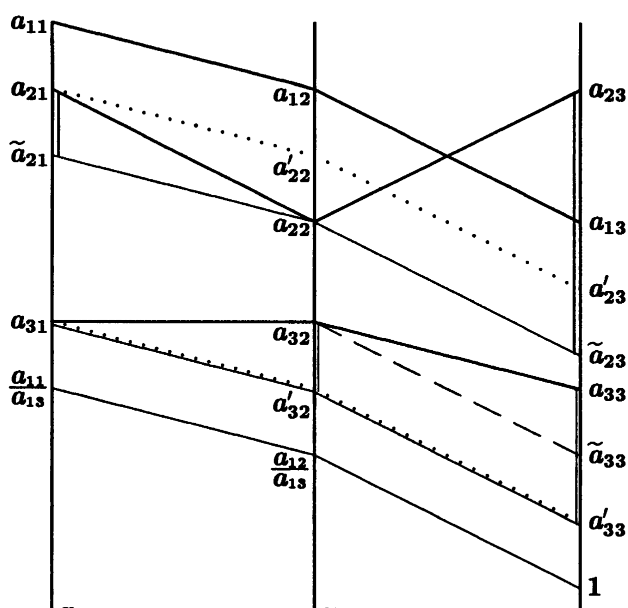

Рис. 6

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 по переменным x, y и z вычисляет одночлены $x^{a_{11}/a_{13}}$, $y^{a_{12}/a_{13}}$, $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, $x^{\tilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\tilde{a}_{23}}$ и

$x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$, причем схема S_1 в свою очередь сама будет состоять из следующих λ-подсхем.

Подсхема S_{11} по переменной x вычисляет одну или несколько степеней переменной x, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен $x^{a_{11}/a_{13}}$.

Подсхема S_{12} по переменной y вычисляет одну или несколько степеней переменной y, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен $y^{a_{12}/a_{13}}$.

Подсхема S_{13}, состоящая из одного элемента умножения, по одночлену $x^{a_{11}/a_{13}}$ и переменной z вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{13}}z$.

Подсхема S_{14}, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{11}/a_{13}}z$ и $y^{a_{12}/a_{13}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{13}}y^{a_{12}/a_{13}}z$.

Подсхема S_{15} вычисляет одну или несколько степеней одночлена $x^{a_{11}/a_{13}}y^{a_{12}/a_{13}}z$, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}}y^{a_{12}/a_{13}}z\right)^{a_{13}} = x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}.$$

Опишем, как в схеме S_1 вычисляются одночлены $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$.

Сначала покажем, как реализуется одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$.

Пусть выполняется неравенство $a'_{32} < a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$a_{31} = a'_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}} < \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad a'_{33} = a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} < 1.$$

В этом случае подсхемы S_{11} и S_{12} помимо одночленов $x^{a_{11}/a_{13}}$ и $y^{a_{12}/a_{13}}$ будут вычислять еще и одночлены $x^{a_{31}}$ и $y^{a'_{32}}$ соответственно, а дополнительная подсхема S_{16}, состоящая из одного элемента умножения, будет вычислять одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}$. Тем самым будет вычислен одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$, так как $a'_{33} < 1$.

Пусть теперь выполняется неравенство $a'_{32} \geqslant a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$a_{31} = a'_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}} \geqslant \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad a'_{33} = a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} \geqslant 1.$$

В этом случае подсхема S_{15} помимо одночлена $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ будет вычислять одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}}y^{a_{12}/a_{13}}z\right)^{a'_{33}} = x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}.$$

При вычислении одночлена $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ поступаем аналогично.

Пусть выполняется неравенство $a_{22} < a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\widetilde{a}_{21} = a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}} < \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad \widetilde{a}_{23} = a_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}} < 1.$$

В этом случае подсхемы S_{11} и S_{12} будут вычислять еще и одночлены $x^{\widetilde{a}_{21}}$ и $y^{a_{22}}$ соответственно, а дополнительная подсхема $\underset{\sim}{S}_{18}$, состоящяя из одного элемента умножения, будет вычислять одночлен $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}$. Тем самым будет вычислен одночлен $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$, так как $\widetilde{a}_{23} < 1$.

Пусть теперь выполняется неравенство $a_{22} \geqslant a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\widetilde{a}_{21} = a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}} \geqslant \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad \widetilde{a}_{23} = a_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}} \geqslant 1.$$

В этом случае подсхема S_{15} будет вычислять еще и одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}}y^{a_{12}/a_{13}}z\right)^{\widetilde{a}_{23}} = x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}.$$

Итак, полностью описана подсхема S_1 схемы S, которая по переменным x, y и z вычисляет одночлены $x^{a_{11}/a_{13}}$, $y^{a_{12}/a_{13}}$, $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$.

Далее, подсхема S_2 по одночленам $x^{a_{11}/a_{13}}z$ и $y^{a_{12}/a_{13}}$, а также переменной z вычисляет одночлены $\left(x^{a_{11}/a_{13}}z\right)^{a'_{23}-\widetilde{a}_{23}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}$ и $\left(y^{a_{12}/a_{13}}\right)^{\widetilde{a}_{33}-a'_{33}}z^{a_{33}-a'_{33}}$, где

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}}z\right)^{a'_{23}-\widetilde{a}_{23}}z^{a_{23}-a'_{23}}=x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}},\qquad \left(y^{a_{12}/a_{13}}\right)^{\widetilde{a}_{33}-a'_{33}}z^{a_{33}-a'_{33}}=y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}},$$

при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{a'_{23}-\widetilde{a}_{23},\ a_{23}-a'_{23},\ \widetilde{a}_{33}-a'_{33},\ a_{33}-a'_{33}\}\subset Q^*$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Подсхема S_4, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ и $y^{a_{32}-a'_{32}}z^{a_{33}-a'_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Считая, что подсхемы S_{11}, S_{12}, S_{15} и S_2 — минимальные, оценим их сложность.

Из леммы 5 следуют оценки

$$\lambda(S_{11})\leqslant\log\left(\frac{a_{11}}{a_{13}}\right)+O(1),\quad \lambda(S_{12})\leqslant\log\left(\frac{a_{12}}{a_{13}}\right)+O(1),\quad \lambda(S_{15})\leqslant\log a_{13}+O(1).$$

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_2)\leqslant\overline{\log}\,D\begin{pmatrix} a'_{23}-\widetilde{a}_{23} & 0 & a_{23}-a'_{23}\\ 0 & \widetilde{a}_{33}-a'_{33} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix}+O(1)=$$

$$=\overline{\log}\,D\begin{pmatrix} \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} & 0 & \delta_{23}\\ 0 & a\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}+O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right)\leqslant\lambda(S_{11})+\lambda(S_{12})+\lambda(S_{15})+\lambda(S_2)+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant\log a_{11}+\log\left(\frac{a_{12}}{a_{13}}\right)+\overline{\log}\,D\begin{pmatrix} \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} & 0 & \delta_{23}\\ 0 & a\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}+O(1).$$

Используя справедливые в условиях случая 3.1.2.2 неравенства

$$\delta_{22}\geqslant\frac{\delta_{12}}{a_{13}},\qquad \delta_{32}\geqslant\frac{\delta_{12}}{a_{13}},$$

получаем:

$$D\begin{pmatrix} \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} & 0 & \delta_{23}\\ 0 & a\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}=$$

$$=\max\left\{\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22},\ \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32},\ \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32},\ \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{33},\ \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{23}\delta_{32}\right\}=$$

$$=\frac{a_{13}}{a_{12}}\max\left\{\delta_{22},\ \delta_{32},\ \delta_{22}\delta_{33},\ \delta_{23}\delta_{32},\ \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{32}\right\}.$$

Поэтому, используя условие $(a_{13}/a_{12})\delta_{22}\delta_{32} \leqslant \delta_{22}\delta_{33}$, имеем:

$$l\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant \\ \leqslant \log a_{11} + \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} a_{22}-a'_{22} & a_{23}-a'_{23} \\ a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix} + O(1).$$

Случай 3.2. Пусть выполняется неравенство

$$\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} > \delta_{33}.$$

В условиях этого случая $\delta_{32} > 0$, и поэтому $a_{32} \geqslant 1$.

Положим

$$\xi_i = \begin{cases} \frac{a_{3i}}{a_{32}}, & \text{если } a_{3i} > a_{32}, \\ 0, & \text{если } a_{3i} \leqslant a_{32}, \end{cases} \qquad i = 1, 3.$$

Докажем справедливость неравенств

$$\xi_1\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant 1, \quad \xi_3\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant 1, \quad \left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}} - \xi_3\right| \leqslant 2 + \frac{\delta_{33}}{a_{32}},$$

которые потребуются для получения оценок в этом случае 3.2. Действительно, учитывая что в условиях случая 3 выполняется неравенство $a_{32} \geqslant a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}$ и следовательно $\frac{a_{31}a_{12}}{a_{32}a_{11}} \leqslant 1$, получаем

$$\xi_1\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant \frac{a_{31}a_{12}}{a_{32}a_{11}} \leqslant 1.$$

Далее, условие случая 3.2 равносильно неравенству

$$\frac{a_{13}}{a_{12}}\left(a_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) > a_{33} - a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}.$$

Поэтому $a_{13}a_{32} > a_{12}a_{33}$. Учитывая это, получаем:

$$\xi_3\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant \frac{a_{33}}{a_{32}}\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant \frac{a_{13}}{a_{11}} \leqslant 1.$$

Кроме того,

$$\left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}} - \xi_3\right| = \left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{31}}{a_{32}}\frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{1}{a_{32}}a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{1}{a_{32}}a_{33} + \frac{a_{33}}{a_{32}} - \xi_3\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{a_{13}}{a_{11}}\left|\xi_1 - \frac{a_{31}}{a_{32}}\right| + \frac{1}{a_{32}}\left|a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} - a_{33}\right| + \left|\xi_3 - \frac{a_{33}}{a_{32}}\right| \leqslant 2 + \frac{\delta_{33}}{a_{32}}.$$

В силу условия $a_{22} \leqslant a_{21}\frac{a_{21}}{a_{11}}$ выполняется неравенство $a_{22} \leqslant a_{12}$. Поэтому для величины a_{32} выполняется одно из трех условий: $a_{32} \leqslant a_{22}$, $a_{22} < a_{32} \leqslant a_{12}$, $a_{12} < a_{32}$. Рассмотрим эти три случая отдельно.

Случай 3.2.1. Пусть выполняется неравенство $a_{32} \leqslant a_{22}$.

Схематичное изображение случая 3.2.1 представлено на рис. 7.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 по переменным x и z вычисляет одночлены $x^{\xi_1}z^{\xi_3}$ (при условии $\xi_1+\xi_3>0$), $x^{\widetilde{a}_{31}-a_{31}}z^{\widetilde{a}_{33}-a_{33}}$ и $x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}$, при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{\widetilde{a}_{31}-a_{31},\ \widetilde{a}_{33}-a_{33},\ a_{21}-\widetilde{a}_{21},\ a_{23}-\widetilde{a}_{23}\}\subset Q^*$.

Подсхема S_2 по переменным x (если $\xi_1=0$), y и z (если $\xi_3=0$), а также одночлену $x^{\xi_1}z^{\xi_3}$ (если $\xi_1+\xi_3>0$), вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$ и $x^{\widetilde{a}_{31}-a_{31}}z^{\widetilde{a}_{33}-a_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}}y^{a_{32}}z^{\widetilde{a}_{33}}$.

Подсхема S_4 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}}y^{a_{32}}z^{\widetilde{a}_{33}}$ в степени a_{22}/a_{32} и a_{12}/a_{32}, тем самым вычисляя одночлены $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$.

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

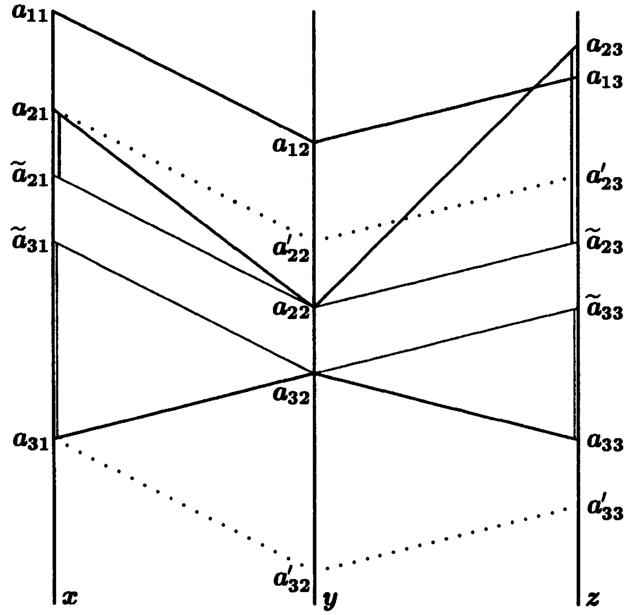

Рис. 7

Считая, что подсхемы S_1, S_2, и S_4 — минимальные, оценим их сложность.

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_1)\leqslant\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \widetilde{a}_{31}-a_{31} & \widetilde{a}_{33}-a_{33}\\ a_{21}-\widetilde{a}_{21} & a_{23}-\widetilde{a}_{23}\end{pmatrix}+O(1)=$$

$$=\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32} & \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22} & \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\delta_{23}\end{pmatrix}+O(1).$$

Для оценки сложности схем S_2 и S_4 применяем лемму 5:

$$\lambda(S_2)\leqslant\log a_{32}+O(1),\qquad \lambda(S_4)\leqslant\log\left(\frac{a_{12}}{a_{32}}\right)+O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right)\leqslant\lambda(S_1)+\lambda(S_2)+\lambda(S_3)+\lambda(S_4)+\lambda(S_5)\leqslant$$

$$\leqslant\log a_{12}+\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22} & \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\delta_{23}\\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32} & \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\end{pmatrix}+O(1)=$$

$$=\log a_{12}+\overline{\log}\left(\max\left\{\xi_1,\ \xi_3,\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22},\ \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\delta_{23},\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32},\ \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33},\right.\right.$$
$$\left|\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)-\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\delta_{23}\right)\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32}\right|,\ \left|\xi_1\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\delta_{23}\right)-\xi_3\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}\right|,$$
$$\left.\left.\left|\xi_1\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)-\xi_3\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32}\right|\right\}\right)+O(1).$$

Оценим сверху эту величину, используя доказанные ранее неравенства и очевидное неравенство $\delta_{32} \leqslant a_{32}$:

$$\xi_1 \leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}; \quad \xi_3 \leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}; \quad \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} + \delta_{23} \leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}(\delta_{22} + \delta_{23}); \quad \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} - \delta_{33} \leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32};$$

$$\left|\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} - \delta_{33}\right) - \left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} + \delta_{23}\right)\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32}\right| =$$
$$= \frac{a_{11}}{a_{12}}\left|\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{32} - \delta_{22}\delta_{33} - \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{32} - \delta_{23}\delta_{32}\right| =$$
$$= \frac{a_{11}}{a_{12}}\left|\delta_{22}\delta_{33} + \delta_{23}\delta_{32}\right|;$$

$$\left|\xi_1\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} + \delta_{23}\right) - \xi_3\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}\right| = \frac{a_{11}}{a_{12}}\left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} - \xi_3 a_{22} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_1\delta_{23}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}\left(\delta_{22}\left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}} - \xi_3\right| + \delta_{23}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}\left(\delta_{22}\left(2 + \frac{\delta_{33}}{a_{32}} + \delta_{23}\right)\right) \leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}(2\delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{22}\delta_{33});$$

$$\left|\xi_1\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} - \delta_{33}\right) - \xi_3\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32}\right| = \frac{a_{11}}{a_{12}}\left|\delta_{32}\left(\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}} - \xi_3\right) - \xi_1\frac{a_{12}}{a_{11}}\delta_{33}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}\left(\delta_{32}\left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}} - \xi_3\right| + \xi_1\frac{a_{12}}{a_{11}}\delta_{33}\right) \leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}\left(\delta_{32}\left(2 + \frac{\delta_{33}}{a_{32}}\right) + \delta_{33}\right) \leqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}(2\delta_{32} + 2\delta_{33}).$$

Таким образом,

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11} + \log\max\{\delta_{22}\delta_{33} + \delta_{23}\delta_{32}, \delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{32}, \delta_{33}, 1\} + O(1) =$$
$$= \log a_{11} + \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33}\end{pmatrix} + O(1).$$

С л у ч а й 3.2.2. Пусть выполняются неравенства $a_{22} < a_{32} \leqslant a_{12}$.

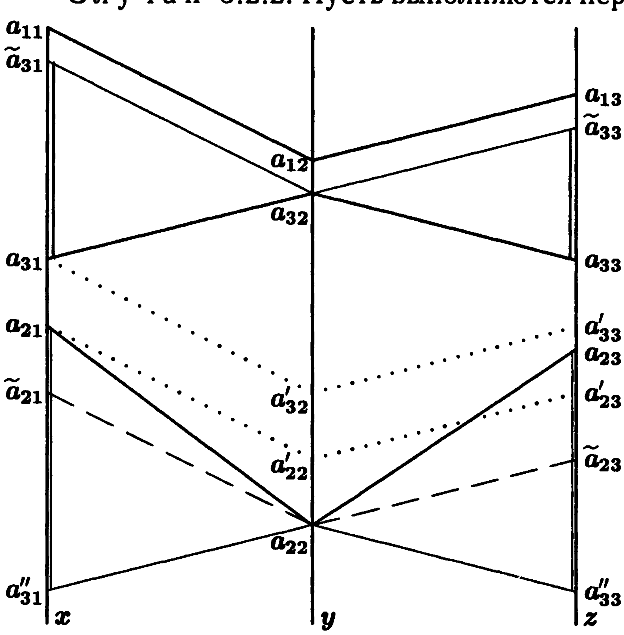

Рис. 8

Положим

$$a''_{21} = a_{22}\frac{a_{31}}{a_{32}}, \quad a''_{23} = a_{22}\frac{a_{33}}{a_{32}}.$$

Схематичное изображение случая 3.2.2 представлено на рис. 8.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 по переменным x и z вычисляет одночлены $x^{\xi_1}z^{\xi_3}$ (при условии $\xi_1 + \xi_3 > 0$), $x^{\widetilde{a}_{31} - a_{31}}z^{\widetilde{a}_{33} - a_{33}}$ и $x^{a_{21} - a''_{21}}z^{a_{23} - a''_{23}}$, при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{\widetilde{a}_{31} - a_{31}, \widetilde{a}_{33} - a_{33}, a_{21} - a''_{21}, a_{23} - a''_{23}\} \subset Q^*$.

Подсхема S_2 по переменным x (если $\xi_1=0$), y и z (если $\xi_3=0$), а также одночлену $x^{\xi_1}z^{\xi_3}$ (если $\xi_1+\xi_3>0$), вычисляет одночлен $x^{a''_{21}}y^{a_{22}}z^{a''_{23}}$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a''_{21}}y^{a_{22}}z^{a''_{23}}$ и $x^{a_{21}-a''_{21}}z^{a_{23}-a''_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Подсхема S_4 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a''_{21}}y^{a_{22}}z^{a''_{23}}$ в степень $\frac{a_{32}}{a_{22}}$, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$ и $x^{\widetilde{a}_{31}-a_{31}}z^{\widetilde{a}_{33}-a_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}}y^{a_{32}}z^{\widetilde{a}_{33}}$.

Подсхема S_6 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}}y^{a_{32}}z^{\widetilde{a}_{33}}$ в степень a_{12}/a_{32}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$.

Считая, что подсхемы S_1, S_2, S_4 и S_6 — минимальные, оценим их сложность.

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_1)\leqslant \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \widetilde{a}_{31}-a_{31} & \widetilde{a}_{33}-a_{33} \\ \delta_{21}-a''_{21} & a_{23}-a''_{23}\end{pmatrix}+O(1)=$$

$$=\overline{\log}\, D\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32} & \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33} \\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32} & \delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\end{pmatrix}+O(1).$$

Для оценки сложности схем S_2, S_4 и S_6 применяем лемму 5:

$$\lambda(S_2)\leqslant \log a_{22}+O(1),\qquad \lambda(S_4)\leqslant \log\left(\frac{a_{32}}{a_{22}}\right)+O(1),\qquad \lambda(S_6)\leqslant \log\left(\frac{a_{12}}{a_{32}}\right)+O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \lambda(S_1)+\lambda(S_2)+\lambda(S_3)+\lambda(S_4)+\lambda(S_5)+\lambda(S_6)\leqslant$$

$$\leqslant \log a_{12}+\overline{\log}\, D\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32} & \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33} \\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32} & \delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\end{pmatrix}+O(1)=$$

$$=\log a_{12}+\overline{\log}\,\Bigg(\max\Bigg\{\xi_1,\ \xi_3,\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32},\ \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33},\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32},\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32},$$
$$\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right),\ \left|\xi_1\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)-\xi_3\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32}\right|,$$
$$\left|\xi_1\left(\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right)-\xi_3\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\right)\right|,$$
$$\Bigg|\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32}\left(\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right)-$$
$$-\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\right)\Bigg|\Bigg\}\Bigg)+O(1).$$

Оценим сверху эту величину, используя доказанные ранее неравенства:

$$\xi_1\leqslant\frac{a_{11}}{a_{12}};\quad \xi_3\leqslant\frac{a_{11}}{a_{12}};\quad \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\leqslant\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32};\quad \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\leqslant\frac{a_{11}}{a_{12}}(\delta_{22}+\delta_{32});$$

$$\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{12}}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{11}}\delta_{22}+\frac{a_{13}}{a_{11}}\delta_{32}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{12}}(\delta_{22}+\delta_{23}+\delta_{32}).$$

Далее,

$$\left|\xi_1\left(\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)-\xi_3\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32}\right|=\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\left|\left(\xi_1\tfrac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right)\delta_{32}-\xi_1\tfrac{a_{12}}{a_{11}}\delta_{33}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\left(\left|\xi_1\tfrac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right|\delta_{32}+\xi_1\tfrac{a_{12}}{a_{11}}\delta_{33}\right)\leqslant\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\left(\left(2+\tfrac{\delta_{33}}{\delta_{32}}\right)\delta_{32}+\delta_{33}\right)\leqslant\tfrac{a_{11}}{a_{12}}(2\delta_{32}+2\delta_{33});$$

$$\left|\xi_1\left(\delta_{23}+\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\left(\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right)-\xi_3\left(\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\left|\tfrac{a_{12}}{a_{11}}\xi_1\delta_{23}+\left(\xi_1\tfrac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right)\delta_{22}+\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\left(\xi_1\tfrac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right)\delta_{32}-\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\xi_1\delta_{33}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\left(\tfrac{a_{12}}{a_{11}}\xi_1\delta_{23}+\left|\xi_1\tfrac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right|\delta_{22}+\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\left|\xi_1\tfrac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right|\delta_{32}+\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\xi_1\delta_{33}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\left(\delta_{23}+\left(2+\tfrac{\delta_{33}}{a_{32}}\right)\delta_{22}+\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\left(2+\tfrac{\delta_{33}}{a_{32}}\right)\delta_{32}+\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{33}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\tfrac{a_{11}}{a_{12}}(\delta_{22}\delta_{33}+2\delta_{22}+\delta_{23}+2\delta_{32}+2\delta_{33});$$

$$\left|\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32}\left(\delta_{23}+\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\left(\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right)-\left(\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\left(\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\right)\right|=$$
$$=\tfrac{a_{11}}{a_{12}}\left|\delta_{23}\delta_{32}+\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{32}+\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\left(\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)-\right.$$
$$\left.-\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{32}+\delta_{22}\delta_{33}-\tfrac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\left(\tfrac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right|=\tfrac{a_{11}}{a_{12}}|\delta_{22}\delta_{33}+\delta_{23}\delta_{32}|.$$

Следовательно,

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\log a_{11}+\log\max\{\delta_{22}\delta_{33}+\delta_{23}\delta_{32},\ \delta_{22},\ \delta_{23},\ \delta_{32},\ \delta_{33},\ 1\}+O(1)=$$
$$=\log a_{11}+\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}a_{22}-a'_{22} & a_{23}-a'_{23}\\ a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix}+O(1).$$

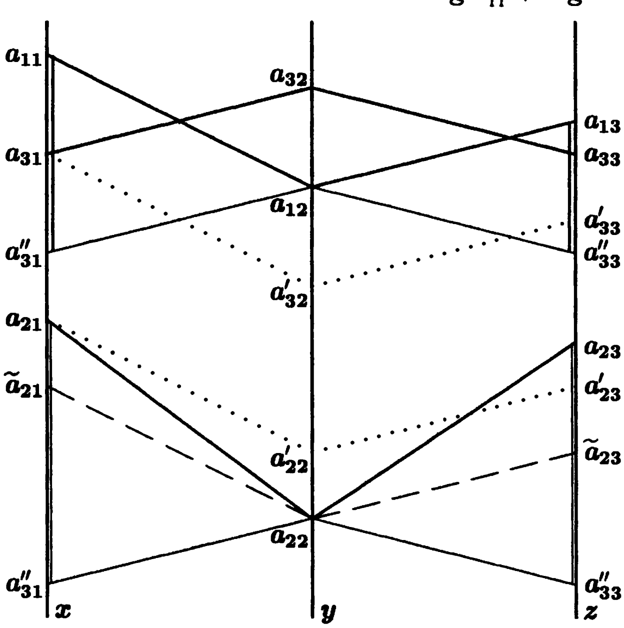

Рис. 9

Случай 3.2.3. Пусть выполняется неравенство $a_{12}<a_{32}$.

Положим

$$a''_{11}=a_{12}\frac{a_{31}}{a_{32}},\qquad a''_{13}=a_{12}\frac{a_{33}}{a_{32}};$$
$$a''_{21}=a_{22}\frac{a_{31}}{a_{32}},\qquad a''_{23}=a_{22}\frac{a_{33}}{a_{32}}.$$

Схематичное изображение случая 3.2.3 представлено на рис. 9.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 по переменным x и z вычисляет одночлены $x^{\xi_1}z^{\xi_3}$ (при условии $\xi_1+\xi_3>0$), $x^{a_{11}-a''_{11}}z^{a_{13}-a''_{13}}$ и $x^{a_{21}-a''_{21}}z^{a_{23}-a''_{23}}$, при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{a_{11}-a''_{11},\ a_{13}-a''_{13},\ a_{21}-a''_{21},\ a_{23}-a''_{23}\}\subset Q^*$.

Подсхема S_2 по переменным x (если $\xi_1=0$), y и z (если $\xi_3=0$), а также одночлену $x^{\xi_1}z^{\xi_3}$ (если $\xi_1+\xi_3>0$), вычисляет одночлен $x^{a''_{21}}y^{a_{22}}z^{a''_{23}}$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a''_{21}}y^{a_{22}}z^{a''_{23}}$ и $x^{a_{21}-a''_{21}}z^{a_{23}-a''_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Подсхема S_4 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a''_{21}}y^{a_{22}}z^{a''_{23}}$ в степени a_{12}/a_{22} и a_{32}/a_{22}, тем самым вычисляя одночлены $x^{a''_{11}}y^{a_{12}}z^{a''_{13}}$ и $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a''_{11}}y^{a_{12}}z^{a''_{13}}$ и $x^{a_{11}-a''_{11}}z^{a_{13}-a''_{13}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$.

Считая, что подсхемы S_1, S_2 и S_4 — минимальные, оценим их сложность.

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_1)\leqslant\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ a_{11}-a''_{11} & a_{13}-a''_{13}\\ \delta_{21}-a''_{21} & a_{23}-a''_{23}\end{pmatrix}+O(1)=$$

$$=\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \frac{a_{12}}{a_{32}}\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32} & \frac{a_{12}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32} & \delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\end{pmatrix}+O(1).$$

Для оценки сложности схем S_2 и S_4 применяем лемму 5:

$$\lambda(S_2)\leqslant\log a_{22}+O(1),\qquad \lambda(S_4)\leqslant\log\left(\tfrac{a_{32}}{a_{22}}\right)+O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right)\leqslant\lambda(S_1)+\lambda(S_2)+\lambda(S_3)+\lambda(S_4)+\lambda(S_5)\leqslant$$

$$\leqslant\log a_{32}+\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \frac{a_{12}}{a_{32}}\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32} & \frac{a_{12}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32} & \delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\end{pmatrix}+O(1)=$$

$$=\log a_{32}+\overline{\log}\,\Bigg(\max\Bigg\{\xi_1,\ \xi_3,\ \frac{a_{11}}{a_{32}}\delta_{32},\ \frac{a_{12}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right),\ \frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32},$$
$$\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{32},\ \delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right),\ \left|\xi_1\frac{a_{12}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)-\xi_3\frac{a_{11}}{a_{32}}\delta_{32}\right|,$$
$$\left|\xi_1\left(\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right)-\xi_3\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\right)\right|,$$
$$\Bigg|\frac{a_{11}}{a_{32}}\delta_{32}\left(\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right)-$$
$$-\frac{a_{12}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\right)\Bigg|\Bigg\}\Bigg)+O(1).$$

Оценим сверху эту величину, используя доказанные ранее соотношения, неравенство $\frac{a_{32}}{a_{12}}\leqslant 1+\frac{\delta_{32}}{a_{12}}$, которое следует из цепочки соотношений

$$\frac{a_{32}}{a_{12}}=\frac{a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}+a_{32}-a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}}{a_{12}}\leqslant\frac{a_{12}+\delta_{32}}{a_{12}}=1+\frac{\delta_{32}}{a_{12}},$$

и неравенство $\delta_{22}\leqslant a_{12}$:

$$\xi_1\leqslant\frac{a_{31}}{a_{32}}\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}};\quad \xi_3\leqslant\frac{a_{33}}{a_{32}}\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}};\quad \frac{a_{12}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\leqslant\frac{a_{13}}{a_{32}}\delta_{32}\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\delta_{32};$$

Продолжая оценивать, имеем:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\frac{a_{32}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{12}}\delta_{32}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\delta_{22}+\frac{\delta_{22}\delta_{32}}{a_{12}}+\delta_{32}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}(\delta_{22}+2\delta_{32});$$

$$\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\frac{a_{32}}{a_{11}}\delta_{23}+\frac{a_{32}}{a_{11}}\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{11}}\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{11}}\left(1+\frac{\delta_{12}}{a_{12}}\delta_{22}\right)+\frac{a_{13}}{a_{11}}\frac{a_{22}}{a_{12}}\delta_{32}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}(\delta_{22}+\delta_{23}+2\delta_{32});$$

$$\left|\xi_1\frac{a_{12}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)-\xi_3\frac{a_{11}}{a_{32}}\delta_{32}\right|=\frac{a_{11}}{a_{32}}\left|\left(\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right)\delta_{32}-\xi_1\frac{a_{12}}{a_{11}}\delta_{33}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right|\delta_{32}+\xi_1\frac{a_{12}}{a_{11}}\delta_{33}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\left(2+\frac{\delta_{33}}{\delta_{32}}\right)\delta_{32}+\delta_{33}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}(2\delta_{32}+2\delta_{33});$$

$$\left|\xi_1\left(\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right)-\xi_3\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left|\frac{a_{32}}{a_{11}}\xi_1\delta_{23}+\frac{a_{32}}{a_{12}}\left(\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right)\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{12}}\left(\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right)\delta_{32}-\frac{a_{22}}{a_{11}}\xi_1\delta_{33}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\frac{a_{32}}{a_{11}}\xi_1\delta_{23}+\frac{a_{32}}{a_{12}}\left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right|\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{12}}\left|\xi_1\frac{a_{13}}{a_{11}}-\xi_3\right|\delta_{32}+\frac{a_{22}}{a_{11}}\xi_1\delta_{33}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\delta_{23}+\frac{a_{32}}{a_{12}}\left(2+\frac{\delta_{33}}{a_{32}}\right)\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{12}}\left(2+\frac{\delta_{33}}{a_{32}}\right)\delta_{32}+\frac{a_{22}}{a_{12}}\delta_{33}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(\delta_{23}+\frac{a_{32}}{a_{12}}2\delta_{22}+\frac{\delta_{22}}{a_{12}}\delta_{33}+2\delta_{32}+\frac{\delta_{32}}{a_{32}}\delta_{33}+\delta_{33}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}\left(2\left(1+\frac{\delta_{32}}{a_{12}}\right)\delta_{22}+\delta_{23}++2\delta_{32}+3\delta_{33}\right)\leqslant\frac{a_{11}}{a_{32}}(2\delta_{22}+\delta_{23}+4\delta_{32}+3\delta_{33});$$

$$\left|\frac{a_{11}}{a_{32}}\delta_{32}\left(\delta_{23}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right)-\frac{a_{12}}{a_{32}}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\frac{a_{11}}{a_{12}}\left(\delta_{22}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\right)\right|=$$
$$=\frac{a_{11}}{a_{32}}\left|\delta_{23}\delta_{32}+\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{32}+\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)-\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22}\delta_{32}+\right.$$
$$\left.+\delta_{22}\delta_{33}-\frac{a_{22}}{a_{32}}\delta_{32}\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32}-\delta_{33}\right)\right|=\frac{a_{11}}{a_{32}}|\delta_{22}\delta_{33}+\delta_{23}\delta_{32}|.$$

Таким образом,

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\log a_{11}+\log\max\{\delta_{22}\delta_{33}+\delta_{23}\delta_{32},\,\delta_{22},\,\delta_{23},\,\delta_{32},\,\delta_{33},\,1\}+O(1)=$$
$$=\log a_{11}+\overline{\log}\,D\begin{pmatrix}a_{22}-a'_{22} & a_{23}-a'_{23}\\ a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33}\end{pmatrix}+O(1).$$

Случай 3 разобран полностью.

Случай 4. Пусть выполняются неравенства

$$a_{22}<a'_{22},\quad a_{23}<a'_{23},\quad a_{32}<a'_{32},\quad a_{33}<a'_{33}.$$

Без ограничения общности в этом случае будем считать, что $a_{21}\geqslant a_{31}$. Отметим, что в условиях этого случая справедливо неравенство $a_{21}\geqslant 1$, так как при $a_{21}=0$ невозможно неравенство $a_{22}<a_{21}a_{12}/a_{11}$.

Схематичное изображение случая 4 представлено на рис. 10.

Определим матрицу $B=(b_{ij})$ размера 3×3 равенством

$$\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{21} & a'_{22} & a'_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы B удовлетворяют следующим условиям:

$$b_{11} = b_{12} = \max b_{ij},$$

$$b_{22} > b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \quad b_{23} > b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}}.$$

Далее, если оба соотношения

$$b_{32} \geqslant b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \quad b_{33} \geqslant b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}}$$

выполняются, то матрица B удовлетворяет условиям случая 1; если оба не выполняются, то — условиям случая 2.2; а если одно из них выполняется, а другое нет, то — условиям случая 3. Поэтому можно построить λ-схему S_1, вычисляющую систему одночленов $\{x^{b_{11}}y^{b_{12}}z^{b_{13}},\ x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}},\ x^{b_{31}}y^{b_{32}}z^{b_{33}}\}$ со сложностью

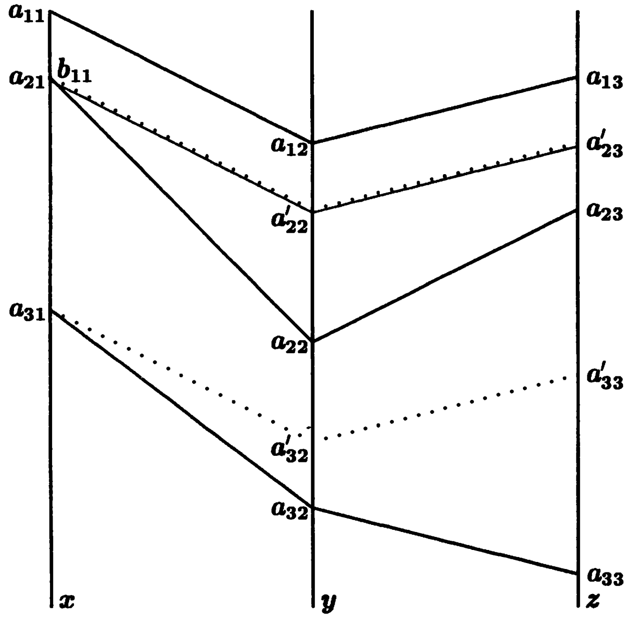

Рис. 10

$$\lambda(S_1) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + O(1).$$

Отметим, что в силу замечания 3 в случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий $b_{22} \geqslant 1$ и $b_{23} \geqslant 1$, λ-схему S_1 можно строить точно так же, как и в случае выполнения этих условий.

Теперь при выполнении условия $\{b_{22}, b_{23}\} \subset Q^*$, добавив к λ-схеме S_1 λ-схему S_2, возводящую подаваемый на вход одночлен $x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}$ в степень a_{11}/a_{21} и тем самым вычисляющую одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, получим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$.

В случае, когда условие $\{b_{22}, b_{23}\} \subset Q^*$ не выполняется, λ-подсхема S_2 λ-схемы S, реализующая недостающий одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ по вычисленному подсхемой S_1 одночлену $x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}$ и, может быть, переменным y и z, устроена следующим образом. При $0 < b_{22} < 1$, $b_{23} \in Q^*$ подсхема S_2 вычисляемый в этом случае подсхемой S_1 одночлен $x^{b_{21}}z^{b_{23}}$ сначала возводит в степень $1/b_{22}$, затем домножает на y, а потом возводит в степень a_{12}, вычисляя тем самым одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$. При $0 < b_{22} \leqslant b_{23} < 1$ подсхема S_2 вычисленный в этом случае подсхемой S_1 одночлен $x^{b_{21}}$ возводит в степень $1/b_{23}$, затем домножает на z, возводит в степень b_{23}/b_{22}, домножает на y и, наконец, возводит в степень a_{12}, вычисляя тем самым одночлен $\left(\left(\left(x^{b_{21}}\right)^{1/b_{23}} z\right)^{b_{23}/b_{22}} y\right)^{a_{12}} = x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$. Аналогично подсхемой S_2 вычисляется одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ также в случаях $b_{22} \in Q^*$, $0 < b_{23} < 1$ и $0 < b_{23} < b_{22} < 1$.

Таким образом, используя лемму 5 с учетом равенства $a_{12}/b_{22} = a_{11}/a_{21}$, в любом случае имеем оценку:

$$\lambda(S_2) \leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1).$$

Поэтому

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1).$$

Применяя лемму 16, получаем:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant \overline{\log}\,(4D_{21}(B)) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\log}\,(4D_{11}(A)) + O(1) = \log D(A) + O(1).$$

Случай 4 разобран.

С л у ч а й 5. Пусть выполняются неравенства

$$a_{22} < a'_{22},\quad a_{23} \geqslant a'_{23},\quad a_{32} < a'_{32},\quad a_{33} \geqslant a'_{33}.$$

Отметим, что в этом случае $a_{12}a_{21} \geqslant 1$.

В условиях случая 5 без ограничения общности можно считать, что выполняется неравенство $a_{21} \geqslant a_{31}$.

Положим

$$\widetilde{a}_{21} = a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}},\qquad \widetilde{a}_{23} = a_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}},\qquad \widetilde{a}_{31} = a_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}},\qquad \widetilde{a}_{33} = a_{32}\frac{a_{13}}{a_{12}}.$$

В силу неравенств $a_{22} < a'_{22}$ и $a_{32} < a'_{32}$ справедливы соотношения

$$\widetilde{a}_{21} < a'_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}} = a_{21},\qquad \widetilde{a}_{23} < a'_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}} = a'_{23},\qquad \widetilde{a}_{31} < a'_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}} = a_{31},\qquad \widetilde{a}_{33} < a'_{32}\frac{a_{13}}{a_{12}} = a'_{33}.$$

Таким образом, в условиях случая 5

$$a_{21} > \widetilde{a}_{21},\qquad a_{23} \geqslant a'_{23} > \widetilde{a}_{23},\qquad a_{31} > \widetilde{a}_{31},\qquad a_{33} \geqslant a'_{33} > \widetilde{a}_{33}.$$

С л у ч а й 5.1. Пусть выполняется неравенство $a_{12} \geqslant a_{13}$.

Схематичное изображение этого случая представлено на рис. 11.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

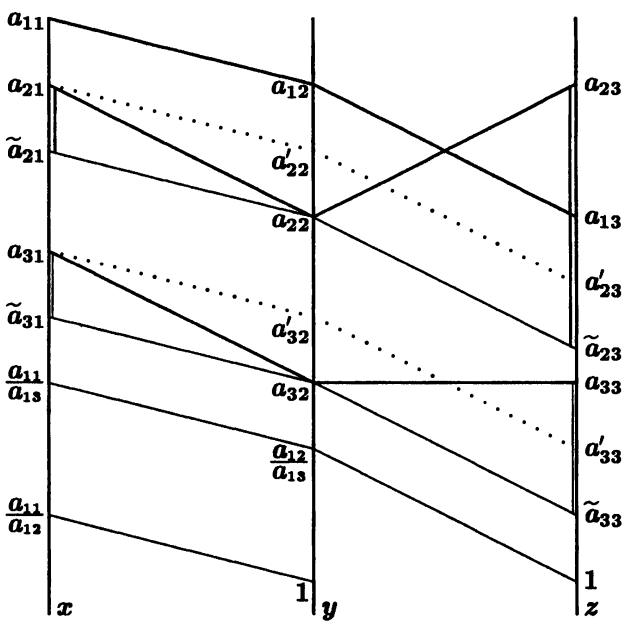

Рис. 11

Подсхема S_1 возводит подаваемую на вход переменную x в степень a_{11}/a_{12}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}$.

Подсхема S_1 по переменным x, y и z вычисляет одночлены $x^{a_{11}/a_{12}}$, $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{\widetilde{a}_{31}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{33}}$, причем схема S_1 в свою очередь сама будет состоять из следующих λ-подсхем.

Подсхема S_{11} по переменной x вычисляет одну или несколько степеней переменной x, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}$.

Подсхема S_{12}, состоящая из одного элемента умножения, по одночлену $x^{a_{11}/a_{12}}$ и переменной y вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}y$.

Подсхема S_{13} при $a_{13} \neq 0$ вычисляет одну или несколько степеней одночлена $x^{a_{11}/a_{12}}y$, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{12}}y\right)^{a_{12}/a_{13}} = x^{a_{11}/a_{13}}y^{a_{12}/a_{13}}.$$

Подсхема S_{14}, при $a_{13} \neq 0$ состоящая из одного элемента умножения, по одночлену $x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}}$ и переменной z вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z$.

Подсхема S_{15} при $a_{13} \neq 0$ вычисляет одну или несколько степеней одночлена $x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z$, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z\right)^{a_{13}} = x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}.$$

При $a_{13} = 0$ подсхемы S_{13} и S_{14} отсутствуют, а подсхема S_{15} вычисляет одну или несколько степеней одночлена $x^{a_{11}/a_{12}} y$, среди которых степенью с максимальным показателем будет одночлен $\left(x^{a_{11}/a_{12}} y\right)^{a_{12}} = x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$.

Покажем, как в схеме S_1 вычисляются одночлены $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}} z^{\widetilde{a}_{33}}$.

Сначала покажем, как вычисляется одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}} z^{\widetilde{a}_{33}}$.

Пусть выполняется неравенство $a_{32} < 1$. Тогда

$$\widetilde{a}_{31} < \frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad \widetilde{a}_{33} \leqslant a_{32} < 1.$$

В этом случае подсхема S_{11} помимо одночлена $x^{a_{11}/a_{12}}$ будет вычислять еще и одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}}$. Тем самым будет вычислен одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}} z^{\widetilde{a}_{33}}$, в силу того, что вычисление одночлена $x^{a} y^{\varepsilon} z^{\delta}$ при $\varepsilon < 1$, $\delta < 1$ означает вычисление одночлена x^{a}.

Пусть теперь выполняются соотношения $a_{13} \neq 0$ и $1 \leqslant a_{32} < a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \leqslant \widetilde{a}_{31} < \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad \widetilde{a}_{33} < 1.$$

В этом случае подсхема S_{13} помимо одночлена $x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}}$ будет вычислять еще и одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}}$. Тем самым будет вычислен одночлен $x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}} z^{\widetilde{a}_{33}}$, так как $\widetilde{a}_{33} < 1$.

Теперь пусть выполняются соотношения $a_{13} \neq 0$ и $a_{32} \geqslant a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\widetilde{a}_{31} \geqslant \frac{a_{11}}{a_{13}}, \quad \widetilde{a}_{33} \geqslant 1.$$

В этом случае подсхема S_{15} помимо одночлена $x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$ будет вычислять одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}} y^{a_{12}/a_{13}} z\right)^{\widetilde{a}_{33}} = x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}} z^{\widetilde{a}_{33}}.$$

Наконец, пусть выполняются соотношения $a_{13} = 0$ и $a_{32} \geqslant 1$. Тогда

$$\widetilde{a}_{31} \geqslant \frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad \widetilde{a}_{33} = 0.$$

В этом случае подсхема S_{15} помимо одночлена $x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$ будет вычислять одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{12}} y\right)^{a_{32}} = x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}} = x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}} z^{\widetilde{a}_{33}}.$$

При вычислении одночлена $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}$ поступаем аналогично.

Пусть выполняется неравенство $a_{22} < 1$. Тогда

$$\widetilde{a}_{21} < \frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad \widetilde{a}_{23} \leqslant a_{22} < 1.$$

В этом случае подсхема S_{11} будет вычислять еще и одночлен $x^{\widetilde{a}_{21}}$. Тем самым будет вычислен одночлен $x^{\widetilde{a}_{21}} y^{a_{22}} z^{\widetilde{a}_{23}}$, так как $a_{22} < 1$ и $\widetilde{a}_{23} < 1$.

Пусть теперь выполняются соотношения $a_{13}\neq 0$ и $1\leqslant a_{22}<a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}\leqslant \widetilde{a}_{21}<\frac{a_{11}}{a_{13}},\quad \widetilde{a}_{23}<1.$$

В этом случае подсхема S_{13} будет вычислять еще и одночлен $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}$. Тем самым будет вычислен одночлен $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$, так как $\widetilde{a}_{23}<1$.

Теперь пусть выполняются соотношения $a_{13}\neq 0$ и $a_{22}\geqslant a_{12}/a_{13}$. Тогда

$$\widetilde{a}_{21}\geqslant \frac{a_{11}}{a_{13}},\quad \widetilde{a}_{23}\geqslant 1.$$

В этом случае подсхема S_{15} будет вычислять еще и одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{13}}y^{a_{12}/a_{13}}z\right)^{\widetilde{a}_{23}}=x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}.$$

Наконец, пусть выполняются соотношения $a_{13}=0$ и $a_{22}\geqslant 1$. Тогда

$$\widetilde{a}_{21}\geqslant \frac{a_{11}}{a_{12}},\quad \widetilde{a}_{23}=0.$$

В этом случае подсхема S_{15} будет вычислять еще и одночлен

$$\left(x^{a_{11}/a_{12}}y\right)^{a_{22}}=x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}=x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}.$$

Итак полностью описана подсхема S_1 схемы S, которая по переменным x, y и z вычисляет одночлены $x^{a_{11}/a_{13}}$, $y^{a_{12}/a_{13}}$, $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a_{33}}$.

Подсхема S_2 по одночлену $x^{a_{11}/a_{12}}$ и переменной z вычисляет одночлены $\left(x^{a_{11}/a_{12}}\right)^{a'_{22}-a_{22}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}$ и $\left(x^{a_{11}/a_{12}}\right)^{a'_{32}-a_{32}}z^{a_{33}-\widetilde{a}_{33}}$, где

$$\left(x^{a_{11}/a_{12}}\right)^{a'_{22}-a_{22}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}=x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}},\quad \left(x^{a_{11}/a_{12}}\right)^{a'_{32}-a_{32}}z^{a_{33}-\widetilde{a}_{33}}=x^{a_{31}-\widetilde{a}_{31}}z^{a_{33}-\widetilde{a}_{33}},$$

при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{a'_{22}-a_{22},\ a_{23}-\widetilde{a}_{23},\ a'_{32}-a_{32},\ a_{33}-\widetilde{a}_{33}\}\subset Q^*$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Подсхема S_4, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{\widetilde{a}_{31}}y^{a_{32}}z^{\widetilde{a}_{33}}$ и $x^{a_{31}-\widetilde{a}_{31}}z^{a_{33}-\widetilde{a}_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Считая, что подсхемы S_{11}, S_{13}, S_{15} и S_2 — минимальные, оценим их сложность.

При $a_{13}\neq 0$ из леммы 5 следуют оценки

$$\lambda(S_{11})\leqslant\log\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)+O(1),\quad \lambda(S_{13})\leqslant\log\left(\frac{a_{12}}{a_{13}}\right)+O(1),\quad \lambda(S_{15})\leqslant\log a_{13}+O(1).$$

При $a_{13}=0$ подсхема S_{13} отсутствует, а для сложности подсхем S_{11} и S_{15} в силу леммы 5 имеем такие оценки:

$$\lambda(S_{11})\leqslant\log\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)+O(1),\quad \lambda(S_{15})\leqslant\log a_{12}+O(1).$$

Следовательно в обоих случаях $\lambda(S_1)\leqslant\log a_{11}+O(1)$.

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_2)\leqslant\overline{\log}\,D\begin{pmatrix} a'_{22}-a_{22} & a_{23}-\widetilde{a}_{23}\\ a'_{32}-a_{32} & a_{33}-\widetilde{a}_{33}\end{pmatrix}+O(1).$$

Учитывая, что

$$a_{23} - \widetilde{a}_{23} = (a_{23} - a'_{23}) + (a'_{23} - \widetilde{a}_{23}) = \delta_{23} + \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22},$$
$$a_{33} - \widetilde{a}_{33} = (a_{33} - a'_{33}) + (a'_{33} - \widetilde{a}_{33}) = \delta_{33} + \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32},$$

имеем:

$$\lambda(S_2) \leqslant \overline{\log} D \begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} + \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{22} \\ \delta_{32} & \delta_{33} + \frac{a_{13}}{a_{12}}\delta_{32} \end{pmatrix} + O(1) = \overline{\log} D \begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\lambda\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) \leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11} + \log D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} + O\left(\frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}}\right).$$

Случай 5.2. Пусть выполняется неравенство $a_{12} < a_{13}$.

Схематичное изображение этого случая представлено на рис. 12.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 по переменным x и z вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}$.

Подсхема S_2 по одночлену $x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}$ и переменной z вычисляет одночлены $\left(x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}\right)^{a'_{22}-a_{22}} z^{a_{23}-a'_{23}}$ и $\left(x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}\right)^{a'_{32}-a_{32}} z^{a_{33}-a'_{33}}$, где

$$\left(x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}\right)^{a'_{22}-a_{22}} z^{a_{23}-a'_{23}} = x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}},$$

$$\left(x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}\right)^{a'_{32}-a_{32}} z^{a_{33}-a'_{33}} = x^{a_{31}-\widetilde{a}_{31}}z^{a_{33}-\widetilde{a}_{33}},$$

при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{a'_{22}-a_{22}, a_{23}-a'_{23}, a'_{32}-a_{32}, a_{33}-a'_{33}\} \subset Q^*$.

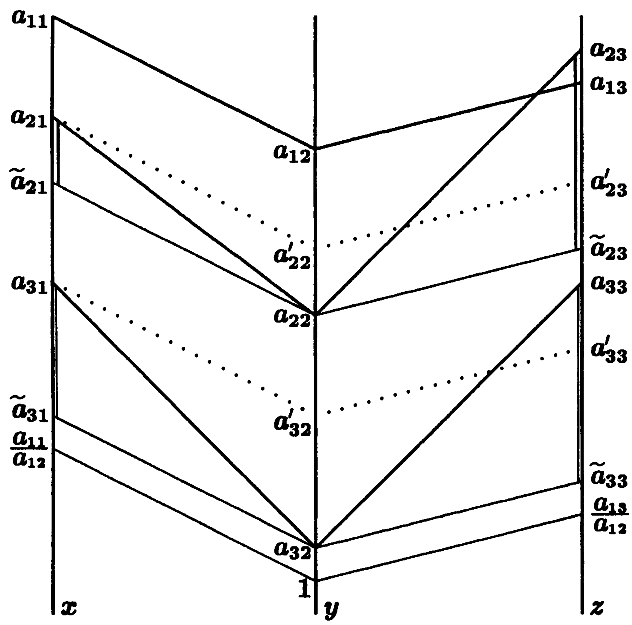

Рис. 12

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{11}/a_{12}}z^{a_{13}/a_{12}}$ и y вычисляет одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}yz^{a_{13}/a_{12}}$.

Подсхема S_4 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{11}/a_{12}}yz^{a_{13}/a_{12}}$ в степени a_{12}, a_{22} (при $a_{22} \neq 0$) и a_{32} (при $a_{32} \neq 0$), тем самым вычисляя одночлены $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{\widetilde{a}_{31}}y^{a_{32}}z^{\widetilde{a}_{33}}$.

Подсхема S_5, при $a_{22} \neq 0$ состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{\widetilde{a}_{21}}y^{a_{22}}z^{\widetilde{a}_{23}}$ и $x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$. При $a_{22} = 0$ справедливы также равенства $\widetilde{a}_{21} = 0$ и $\widetilde{a}_{23} = 0$, поэтому уже вычисленный одночлен $x^{a_{21}-\widetilde{a}_{21}}z^{a_{23}-\widetilde{a}_{23}}$ равен одночлену $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Подсхема S_6, при $a_{32} \neq 0$ состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{\widetilde{a}_{31}} y^{a_{32}} z^{\widetilde{a}_{33}}$ и $x^{a_{31}-\widetilde{a}_{31}} z^{a_{33}-\widetilde{a}_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}$. При $a_{32}=0$ справедливы также равенства $\widetilde{a}_{31}=0$ и $\widetilde{a}_{33}=0$, поэтому уже вычисленный одночлен $x^{a_{31}-\widetilde{a}_{31}} z^{a_{33}-\widetilde{a}_{33}}$ равен одночлену $x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}$.

Считая, что подсхемы S_1, S_2 и S_4 — минимальные, оценим их сложность.

Из леммы 5 следует оценка

$$\lambda(S_1) \leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right) + O(1).$$

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a'_{22} - a_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a'_{32} - a_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Для оценки сложности схемы S_4 опять применяем лемму 5:

$$\lambda(S_4) \leqslant \log\max\{a_{12}, a_{22}, a_{32}\} + O(1).$$

Таким образом, учитывая, что в условиях случая 5 справедливы соотношения

$$a_{22} < a'_{22} = a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant a_{12}, \qquad a_{32} < a'_{32} = a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant a_{12},$$

имеем такую оценку:

$$\begin{aligned}\lambda\,(x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}) &\leqslant \\ \leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \lambda(S_3) + \lambda(S_4) + \lambda(S_5) + \lambda(S_6) &\leqslant \\ \leqslant \log a_{11} + \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a_{22} - a'_{22} & a_{23} - a'_{23} \\ a_{32} - a'_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{pmatrix} &+ O(1).\end{aligned}$$

Случай 6. Пусть выполняются неравенства

$$a_{22} < a'_{22}, \quad a_{23} \geqslant a'_{23}, \quad a_{32} \geqslant a'_{32}, \quad a_{33} < a'_{33}.$$

В условиях этого случая справедливы неравенства $a_{21} \geqslant 1$ и $a_{31} \geqslant 1$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{23} \geqslant a_{32}$ (иначе меняем местами вторую и третью переменные, а также второй и третий одночлены). Очевидно, что тогда справедливо равенство

$$\max\{a_{21}, a_{23}, a_{31}\} = \max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}.$$

Случай 6.1. Пусть выполняется условие

$$a_{23} = \max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}.$$

Схематичное изображение случая 6.1 представлено на рис. 13.

Определим матрицу $B=(b_{ij})$ размера 3×3 равенством

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13}\frac{a_{23}}{a_{11}} & a_{12}\frac{a_{23}}{a_{11}} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}.$$

Матрица B получается из матрицы A следующим образом. Сначала первая строка матрицы A умножается на a_{23}/a_{11}, а затем меняются местами первая и вторая строки, а также первый и третий столбцы. При этом элемент a_{23} станет максимальным и передвинется в левый верхний угол, а элемент a_{11} «уменьшится» до величины a_{23} и передвинется на третью позицию во второй строке. Отметим, что в условиях случая 6.1 справедливы соотношения

$$b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}} = a_{13}\frac{a_{23}}{a_{11}}\frac{a_{22}}{a_{23}} \leqslant a_{22} < a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant a_{12}\frac{a_{23}}{a_{11}} = b_{22},$$

$$b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{13}\frac{a_{23}}{a_{11}}\frac{a_{21}}{a_{23}} = a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \leqslant a_{13}\frac{a_{23}}{a_{11}} \leqslant a_{23} = b_{23},$$

$$b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}} = a_{33}\frac{a_{22}}{a_{23}} < a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}\frac{a_{22}}{a_{23}} < a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}\frac{a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}}{a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}} = a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant a_{32} = b_{32},$$

$$b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{33}\frac{a_{21}}{a_{23}} < a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}\frac{a_{21}}{a_{23}} \leqslant a_{31} = b_{33}.$$

Таким образом,

$$b_{11} = b_{23} = \max b_{ij}, \qquad b_{22} \geqslant b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \qquad b_{23} \geqslant b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}}, \qquad b_{32} \geqslant b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \qquad b_{33} \geqslant b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}},$$

и, следовательно, для матрицы B выполняются условия случая 1. Поэтому можно построть λ-схему S_1, вычисляющую систему одночленов $\{x^{b_{11}}y^{b_{12}}z^{b_{13}}, x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}, x^{b_{31}}y^{b_{32}}z^{b_{33}}\}$ со сложностью

$$\lambda(S_1) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + O(1).$$

Отметим, что в силу замечания 3 в случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий $b_{12} \geqslant 1$ и $b_{22} \geqslant 1$, λ-схему S_1 можно строить точно так же, как и в случае выполнения этих условий.

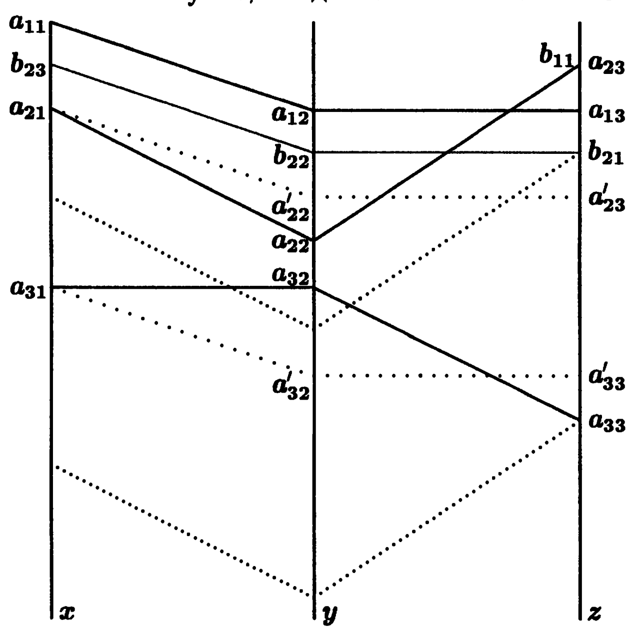

Рис. 13

Теперь при выполнении условия $\{b_{12}, b_{22}\} \subset Q^*$, добавив к λ-схеме S_1 λ-схему S_2, возводящую подаваемый на вход одночлен $x^{b_{23}}y^{b_{22}}z^{b_{21}}$ в степень a_{11}/a_{23} и тем самым вычисляющую одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, получим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$.

В случае, когда условие $\{b_{12}, b_{22}\} \subset Q^*$ не выполняется, λ-подсхема S_2 λ-схемы S, реализующая недостающий одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ по вычисленному подсхемой S_1 одночлену $x^{b_{23}}y^{b_{22}}z^{b_{21}}$ и, может быть, переменным y и z, устроена следующим образом. При $0 < b_{21} < 1$, $b_{22} \in Q^*$ подсхема S_2 сначала вычисляемый в этом случае подсхемой S_1 одночлен $x^{b_{23}}y^{b_{22}}$ возводит в степень $1/b_{21}$, затем домножает на z, а потом возводит в степень a_{13}, вычисляя тем самым одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$. При $0 < b_{21} \leqslant b_{22} < 1$ подсхема S_2 вычисленный в этом случае подсхемой S_1 одночлен $x^{b_{23}}$ возводит в степень $1/b_{22}$, затем домножает на y, возводит в степень b_{22}/b_{21}, домножает на z и, наконец, возводит в степень a_{13}, вычисляя тем самым одночлен $\left(\left(\left(x^{b_{23}}\right)^{1/b_{22}} y\right)^{b_{22}/b_{21}} z\right)^{a_{13}} = x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$. Аналогично подсхемой S_2 вычисляется одночлен $x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$ также в случаях $b_{21} \in Q^*$, $0 < b_{22} < 1$ и $0 < b_{22} < b_{21} < 1$.

Таким образом, используя лемму 5 с учетом равенства $a_{13}/b_{21} = a_{11}/a_{23}$, в любом случае имеем оценку:

$$\lambda(S_2) \leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{23}}\right) + O(1).$$

Поэтому

$$\lambda\left(x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{23}}\right) + O(1).$$

Применяя лемму 16, получаем:

$$\lambda\left(x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}\right) \leqslant \overline{\log}\,(4D_{23}(B)) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{23}}\right) + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\log}\,(4D_{11}(A)) + O(1) = \log D(A) + O(1).$$

Случай 6.1 разобран.

Случай 6.2. Пусть выполняется условие

$$a_{31} = \max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}.$$

Схематичное изображение случая 6.2 представлено на рис. 14.

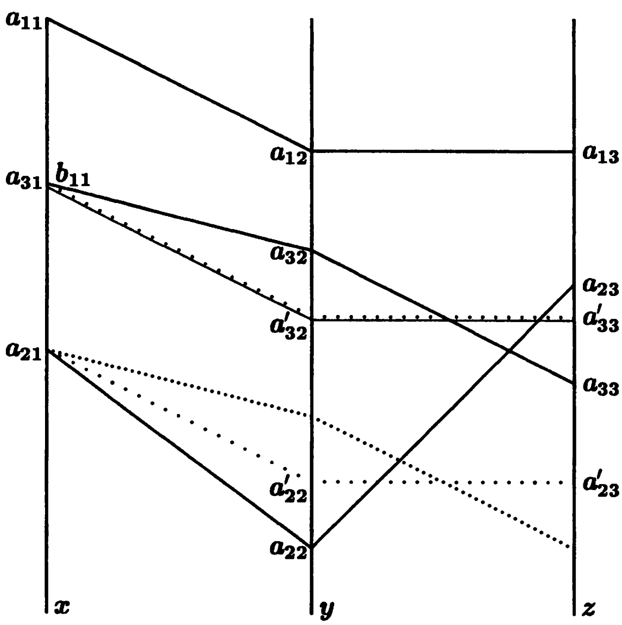

Рис. 14

Определим матрицу $B = (b_{ij})$ размера 3×3 равенством

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Матрица B получается из матрицы A умножением первой строки матрицы A на a_{31}/a_{11} с последующим циклическим сдвигом строк на одну позицию вниз. При этом элемент a_{31} станет максимальным и передвинется в левый верхний угол, а элемент a_{11} «уменьшится» до величины a_{31} и передвинется на первую позицию во второй строке. Отметим, что в условиях случая 6.2 справедливы соотношения

$$b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}} = b_{12} = a_{32} \geqslant a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} = b_{22},$$

$$b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}} = b_{13} = a_{33} < a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} = b_{23},$$

$$b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}} = a_{21}\frac{a_{32}}{a_{31}} \geqslant \frac{a_{21}}{a_{31}}a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} = a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} > a_{22} = b_{32},$$

$$b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{21}\frac{a_{33}}{a_{31}} < \frac{a_{21}}{a_{31}}a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} = a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} \leqslant a_{23} = b_{33}.$$

Таким образом,

$$b_{11} = b_{21} = \max b_{ij}, \qquad b_{22} \leqslant b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \quad b_{23} > b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}}, \qquad b_{32} < b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \quad b_{33} > b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}},$$

и, следовательно, для матрицы B выполняются условия случая 5. Поэтому можно построть λ-схему S_1, вычисляющую систему одночленов $\{x^{b_{11}}y^{b_{12}}z^{b_{13}}, x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}, x^{b_{31}}y^{b_{32}}z^{b_{33}}\}$ со сложностью

$$\lambda(S_1) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + O(1).$$

Отметим, что в силу замечания 3 в случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий $b_{22} \geqslant 1$ и $b_{23} \geqslant 1$, λ-схему S_1 можно строить точно так же, как и в случае выполнения этих условий.

Теперь при выполнении условия $\{b_{22}, b_{23}\} \subset Q^*$, добавив к λ-схеме S_1 λ-схему S_2, возводящую подаваемый на вход одночлен $x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}$ в степень a_{11}/a_{31} и тем самым вычисляющую одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, получим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$.

В случае, когда условие $\{b_{22}, b_{23}\} \subset Q^*$ не выполняется, λ-подсхема S_2 λ-схемы S, реализующая недостающий одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ по вычисленному подсхемой S_1 одночлену $x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}$ и, может быть, переменным y и z, устроена следующим образом. При $0 < b_{22} < 1$, $b_{23} \in Q^*$ подсхема S_2 сначала вычисляемый в этом случае подсхемой S_1 одночлен $x^{b_{21}}z^{b_{23}}$ возводит в степень $1/b_{22}$, затем домножает на y, а потом возводит в степень a_{12}, вычисляя тем самым одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$. При $0 < b_{22} \leqslant b_{23} < 1$ подсхема S_2 вычисленный в этом случае подсхемой S_1 одночлен $x^{b_{21}}$ возводит в степень $1/b_{23}$, затем домножает на z, возводит в степень b_{23}/b_{22}, домножает на y и, наконец, возводит в степень a_{12}, вычисляя тем самым одночлен $\left(\left(\left(x^{b_{21}}\right)^{1/b_{23}} z\right)^{b_{23}/b_{22}} y\right)^{a_{12}} = x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$. Аналогично подсхемой S_2 вычисляется одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ также в случаях $b_{22} \in Q^*$, $0 < b_{23} < 1$ и $0 < b_{23} < b_{22} < 1$.

Таким образом, используя лемму 5 с учетом равенства $a_{12}/b_{22} = a_{11}/a_{31}$, в любом случае имеем оценку:

$$\lambda(S_2) \leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{31}}\right) + O(1).$$

Поэтому

$$\lambda\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{31}}\right) + O(1).$$

Применяя лемму 16, получаем:

$$\lambda\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant \overline{\log}\,(4D_{21}(B)) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{31}}\right) + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\log}\,(4D_{11}(A)) + O(1) = \log D(A) + O(1).$$

Случай 6.2 разобран.

Случай 6.3. Пусть выполняется условие

$$a_{21} = \max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\,.$$

Схематичное изображение случая 6.3 представлено на рис. 15.

Определим матрицу $B = (b_{ij})$ размера 3×3 следующим равенством

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица B получается из матрицы A умножением первой строки матрицы A на a_{21}/a_{11} с последующей транспозицией первой и второй строк. При этом элемент a_{21} станет максимальным и передвинется в левый верхний угол, а элемент a_{11} «уменьшится» до величины a_{21} и передвинется на первую позицию во второй строке. Отметим, что в условиях случая 6.3 справедливы соотношения

$$b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}} = a_{21}\frac{a_{22}}{a_{21}} = a_{22} < a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} = b_{22},$$

$$b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{21}\frac{a_{23}}{a_{21}} = a_{23} \geqslant a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} = b_{23},$$

$$b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}} = a_{31}\frac{a_{22}}{a_{21}} < \frac{a_{31}}{a_{21}}a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} = a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant a_{32} = b_{32},$$

$$b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{31}\frac{a_{23}}{a_{21}} \geqslant \frac{a_{31}}{a_{21}}a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} = a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} > a_{33} = b_{33}.$$

Таким образом для элементов матрицы B верны соотношения

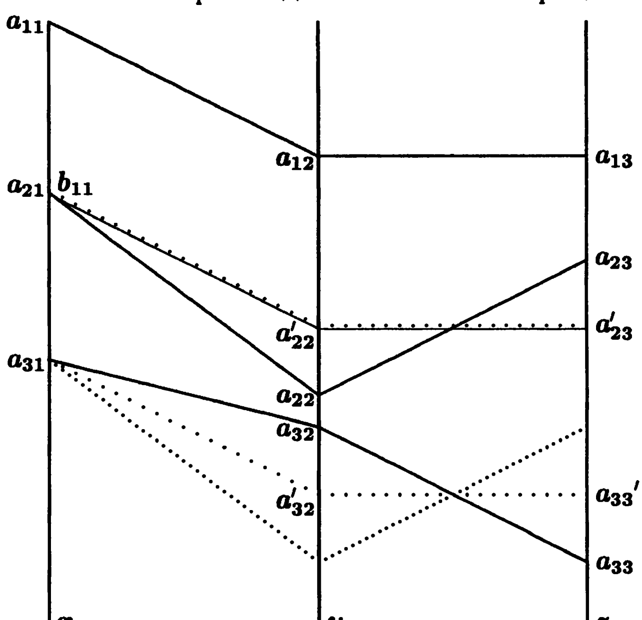

Рис. 15

$$b_{11} = b_{21} = \max b_{ij},$$

$$b_{22} > b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \quad b_{23} \leqslant b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}},$$

$$b_{32} > b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \quad b_{33} < b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}},$$

и, следовательно, для матрицы B выполняются условия случая 5. Поэтому можно построить λ-схему S_1, вычисляющую систему одночленов $\{x^{b_{11}}y^{b_{12}}z^{b_{13}},\ x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}},\ x^{b_{31}}y^{b_{32}}z^{b_{33}}\}$ со сложностью

$$\lambda(S_1) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + O(1).$$

Отметим, что в силу замечания 3 в случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий $b_{22} \geqslant 1$ и $b_{23} \geqslant 1$, λ-схему S_1 можно строить точно так же, как и в случае выполнения этих условий.

Теперь добавим к λ-схеме S_1 λ-схему S_2, вычисляющую по одночлену $x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}$ и, может быть, переменным y и z одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ и устроенную точно так же, как и λ-схема S_2, описанная в случае 4.

Обобщенная схема, состоящая из λ-подсхем S_1 и S_2, вычисляет систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Поэтому

$$\lambda\ (x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1).$$

Применяя лемму 16, получаем:

$$\lambda\ (x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant \overline{\log}\,(4D_{21}(B)) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\log}\,(4D_{11}(A)) + O(1) = \log D(A) + O(1).$$

Случай 6 разобран полностью.

С л у ч а й 7. Пусть выполняются неравенства

$$a_{22} < a'_{22}, \quad a_{23} \geqslant a'_{23}, \quad a_{32} < a'_{32}, \quad a_{33} < a'_{33}.$$

В условиях этого случая справедливы неравенства $a_{21} \geqslant 1$ и $a_{31} \geqslant 1$. Очевидно, что тогда справедливо равенство

$$\max\{a_{21}, a_{23}, a_{31}\} = \max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}.$$

С л у ч а й 7.1. Пусть выполняется условие

$$a_{23} = \max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}.$$

Схематичное изображение случая 7.1 представлено на рис. 16.

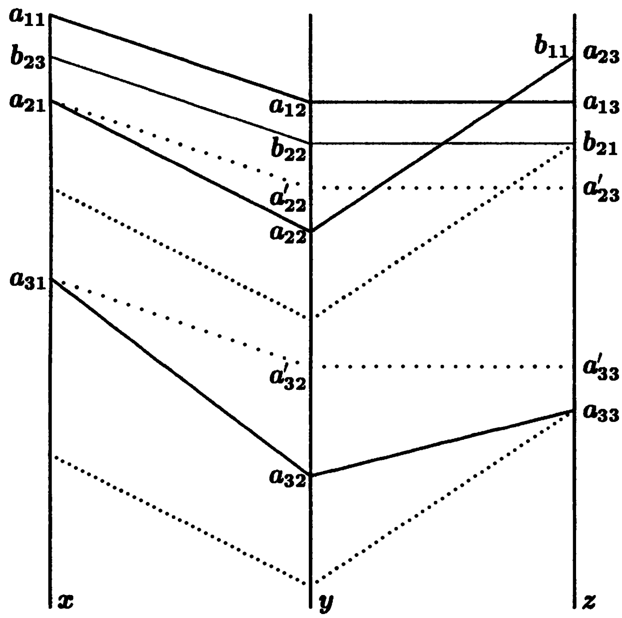

Рис. 16

Аналогично случаю 6.1 определим матрицу $B = (b_{ij})$ размера 3×3 равенством

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13}\frac{a_{23}}{a_{11}} & a_{12}\frac{a_{23}}{a_{11}} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}.$$

Матрица B получается из матрицы A следующим образом. Сначала первая строка матрицы A умножается на a_{23}/a_{11}, а затем меняются местами первая и вторая строки, а также первый и третий столбцы. При этом элемент a_{23} станет максимальным и передвинется в левый верхний угол, а элемент a_{11} «уменьшится» до величины a_{23} и передвинется на третью позицию во второй строке. Отметим, что в условиях случая 7.1 справедливы соотношения

$$b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}} = a_{13}\frac{a_{23}}{a_{11}}\frac{a_{22}}{a_{23}} \leqslant a_{22} < a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \leqslant a_{12}\frac{a_{23}}{a_{11}} = b_{22},$$

$$b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{13}\frac{a_{23}}{a_{11}}\frac{a_{21}}{a_{23}} = a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \leqslant a_{13}\frac{a_{23}}{a_{11}} \leqslant a_{23} = b_{23},$$

$$b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{33}\frac{a_{21}}{a_{23}} < a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}\frac{a_{21}}{a_{23}} \leqslant a_{31} = b_{33}.$$

Таким образом,

$$b_{11} = b_{23} = \max b_{ij}, \qquad b_{22} \geqslant b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \qquad b_{23} \geqslant b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}}, \qquad b_{33} \geqslant b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}}.$$

В зависимости от того, является неравенство

$$b_{32} \geqslant b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}}$$

верным или не является, для матрицы B выполняются условия либо случая 1, либо случая 3. Поэтому можно построть λ-схему S_1, вычисляющую систему одночленов $\{x^{b_{11}}y^{b_{12}}z^{b_{13}}, x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}, x^{b_{31}}y^{b_{32}}z^{b_{33}}\}$ со сложностью

$$\lambda(S_1) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + O(1).$$

Отметим, что в силу замечания 3 в случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий $b_{21} \geqslant 1$ и $b_{22} \geqslant 1$, λ-схему S_1 можно строить точно так же, как и в случае выполнения этих условий.

Теперь добавим к λ-схеме S_1 λ-схему S_2, вычисляющую по одночлену $x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}$ и, может быть, переменным y и z одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ и устроенную точно так же, как и λ-схема S_2, описанная в случае 6.1.

Обобщенная схема, состоящая из λ-подсхем S_1 и S_2, вычисляет систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Поэтому

$$\lambda\ (x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{23}}\right) + O(1).$$

Применяя лемму 16, получаем:

$$\lambda\ (x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant \overline{\log}\,(4D_{23}(B)) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{23}}\right) + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\log}\,(4D_{11}(A)) + O(1) = \log D(A) + O(1).$$

Случай 7.1 разобран.

Случай 7.2. Пусть выполняется условие

$$a_{31} = \max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}.$$

Схематичное изображение случая 7.2 представлено на рис. 17.

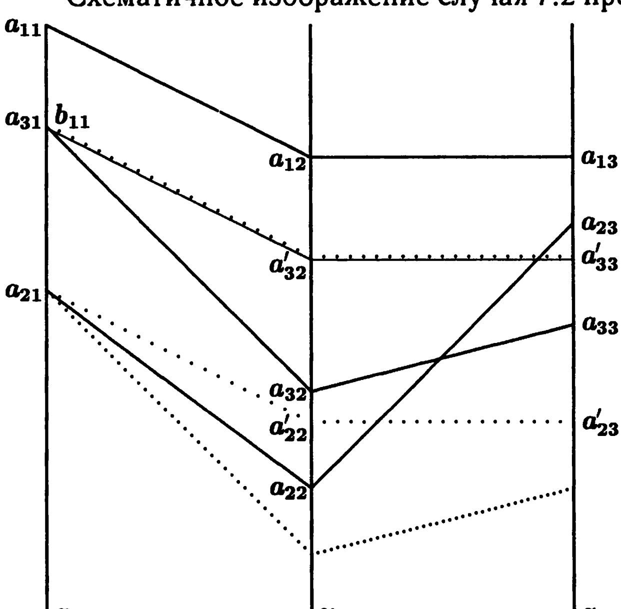

Рис. 17

Аналогично случаю 6.2 определим матрицу $B = (b_{ij})$ размера 3×3 равенством

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a'_{32} & a'_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Матрица B получается из матрицы A умножением первой строки матрицы A на a_{31}/a_{11} с последующим циклическим сдвигом строк на одну позицию вниз. При этом элемент a_{31} станет максимальным и передвинется в левый верхний угол, а элемент a_{11} «уменьшится» до величины a_{31} и передвинется на первую позицию во второй строке. Отметим, что в условиях случая 7.2 справедливы соотношения

$$b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}} = b_{12} = a_{32} < a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} = b_{22},$$

$$b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}} = b_{13} = a_{33} < a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} = b_{23},$$

$$b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{21}\frac{a_{33}}{a_{31}} < \frac{a_{21}}{a_{31}}a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} = a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} \leqslant a_{23} = b_{33}.$$

Таким образом,

$$b_{11} = b_{21} = \max b_{ij}, \qquad b_{22} > b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \qquad b_{23} > b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}}, \qquad b_{33} > b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}}.$$

В зависимости от того, является неравенство

$$b_{32} \geqslant b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}}$$

верным или не является, для матрицы B выполняются условия либо случая 1, либо случая 3. Поэтому можно построть λ-схему S_1, вычисляющую систему одночленов $\{x^{b_{11}}y^{b_{12}}z^{b_{13}}, x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}, x^{b_{31}}y^{b_{32}}z^{b_{33}}\}$ со сложностью

$$\lambda(S_1) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + O(1).$$

Отметим, что в силу замечания 3 в случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий $b_{22} \geqslant 1$ и $b_{23} \geqslant 1$, λ-схему S_1 можно строить точно так же, как и в случае выполнения этих условий.

Теперь к λ-схеме S_1 добавим λ-схему S_2, вычисляющую по одночлену $x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}$ и, может быть, переменным y и z одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ и устроенную точно так же, как и λ-схема S_2, описанная в случае 6.2.

Обобщенная схема, состоящая из λ-подсхем S_1 и S_2, вычисляет систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Поэтому

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{31}}\right) + O(1).$$

Применяя лемму 16, получаем:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant \overline{\log}\,(4D_{21}(B)) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{31}}\right) + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\log}\,(4D_{11}(A)) + O(1) = \log D(A) + O(1).$$

Случай 7.2 разобран.

Случай 7.3. Пусть выполняется условие

$$a_{21} = \max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}.$$

Отдельно рассмотрим случаи $\delta_{32} \leqslant \delta_{22}(a_{31}/a_{21})$ и $\delta_{32} > \delta_{22}(a_{31}/a_{21})$.

Случай 7.3.1. Пусть выполняется условие

$$\delta_{32} \leqslant \delta_{22}\frac{a_{31}}{a_{21}}.$$

Отметим, что в силу соотношений

$$\delta_{32} = a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} - a_{32}, \qquad \delta_{22}\frac{a_{31}}{a_{21}} = \left(a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} - a_{22}\right)\frac{a_{31}}{a_{21}} = a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} - a_{22}\frac{a_{31}}{a_{21}}$$

неравенство $\delta_{32} \leqslant \delta_{22}(a_{31}/a_{21})$ равносильно неравенству

$$a_{32} \geqslant a_{31}\frac{a_{22}}{a_{21}}.$$

Схематичное изображение случая 7.3.1 представлено на рис. 18.

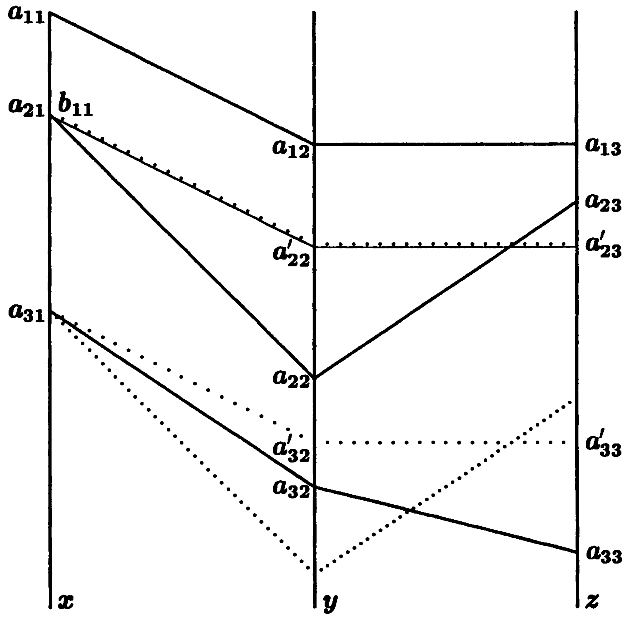

Рис. 18

Аналогично случаям 4 и 6.3 определим матрицу $B=(b_{ij})$ размера 3×3 равенством

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица B получается из матрицы A умножением первой строки матрицы A на a_{21}/a_{11} с последующей транспозицией первой и второй строк. При этом элемент a_{21} станет максимальным и передвинется в левый верхний угол, а элемент a_{11} «уменьшится» до величины a_{21} и передвинется на первую позицию во второй строке. Отметим, что в условиях случая 7.3.1 справедливы соотношения

$$b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}} = a_{21}\frac{a_{22}}{a_{21}} = a_{22} < a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} = b_{22},$$

$$b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{21}\frac{a_{23}}{a_{21}} = a_{23} \geqslant a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} = b_{23},$$

$$b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}} = a_{31}\frac{a_{22}}{a_{21}} \leqslant a_{32} = b_{32},$$

$$b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}} = a_{31}\frac{a_{23}}{a_{21}} \geqslant \frac{a_{31}}{a_{21}}a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} = a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} > a_{33} = b_{33}.$$

Таким образом,

$$b_{11}=b_{21}=\max b_{ij}, \qquad b_{22} > b_{21}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \qquad b_{23} \leqslant b_{21}\frac{b_{13}}{b_{11}}, \qquad b_{32} \geqslant b_{31}\frac{b_{12}}{b_{11}}, \qquad b_{33} < b_{31}\frac{b_{13}}{b_{11}},$$

и, следовательно, для матрицы B выполняются условия случая 5. Поэтому можно построть λ-схему S_1, вычисляющую систему одночленов $\{x^{b_{11}}y^{b_{12}}z^{b_{13}}, x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}, x^{b_{31}}y^{b_{32}}z^{b_{33}}\}$ со сложностью

$$\lambda(S_1) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + O(1).$$

Отметим, что в силу замечания 3 в случае, когда не выполняется хотя бы одно из условий $b_{22}\geqslant 1$ и $b_{23}\geqslant 1$, λ-схему S_1 можно строить точно так же, как и в случае выполнения этих условий.

Теперь к λ-схеме S_1 добавим λ-схему S_2, вычисляющую по одночлену $x^{b_{21}}y^{b_{22}}z^{b_{23}}$ и, может быть, переменным y и z одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$ и устроенную точно так же, как и λ-схема S_2, описанная в случае 4.

Обобщенная схема, состоящая из λ-подсхем S_1 и S_2, вычисляет систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Поэтому

$$\lambda\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(S_1)+\lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D(B) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1).$$

Применяя лемму 16, получаем:

$$\lambda\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant \overline{\log}\,(4D_{21}(B)) + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\log}\,(4D_{11}(A)) + O(1) = \log D(A) + O(1).$$

Случай 7.3.1 разобран.

Случай 7.3.2. Пусть выполняется неравенство

$$\delta_{32} > \delta_{22}\frac{a_{31}}{a_{21}}.$$

Положим

$$a''_{32} = a_{31}\frac{a_{22}}{a_{21}}, \qquad a''_{33} = a_{31}\frac{a_{23}}{a_{21}}.$$

Так как условие $\delta_{32} > \delta_{22}(a_{31}/a_{21})$ равносильно условию $a_{32} < a_{31}(a_{22}/a_{21})$, выполняется неравенство $a_{32} < a''_{32}$.

В силу соотношения $a_{22} < a'_{22}$ справедливо неравенство $a_{12} > (a_{11}a_{22})/a_{21}$. Поэтому

$$a'_{32} = a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} > a_{31}\frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{21}} = a''_{32}.$$

Аналогично, в силу соотношения $a_{23} \geqslant a'_{23}$ справедливо неравенство $a_{13} \leqslant (a_{11}a_{23})/a_{21}$. Поэтому

$$a'_{33} = a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} \leqslant a_{31}\frac{a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{21}} = a''_{33}.$$

Таким образом,

$$a_{32} < a''_{32} < a'_{32}, \qquad a_{33} < a'_{33} \leqslant a''_{33}.$$

Далее рассмотрим два подслучая, в зависимости от того выполняется неравенство $a_{31}\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\} < a_{21}$ или нет.

Случай 7.3.2.1. Пусть выполняется неравенство $a_{31}\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\} < a_{21}$.

Пока будем считать, что справедливы соотношения $\delta_{22} \neq 0$, $\delta_{23} \neq 0$ (можно также считать, что при $\delta_{22} = 0$ выполняются условия случая 2.2, а при $\delta_{23} = 0$ — условия случая 2.1).

Положим

$$a_{01} = \frac{a_{21}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}},$$

$$a'_{02} = \frac{a_{21}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}}\frac{a_{12}}{a_{11}}, \qquad a'_{03} = \frac{a_{21}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}}\frac{a_{13}}{a_{11}},$$

$$a''_{02} = \frac{a_{21}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}}\frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{22}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}}, \qquad a''_{03} = \frac{a_{21}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}}\frac{a_{23}}{a_{21}} = \frac{a_{23}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}}.$$

Отметим, что тогда $\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\} = a_{21}/a_{01}$. Следовательно $a_{31} < a_{01} \leqslant a_{21}$.

Схематичное изображение случая 7.3.2.1 представлено на рис. 19.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

Подсхема S_1 по переменным x, y и z вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Подсхема S_2 по переменным y и z вычисляет одночлены $y^{a'_{02}-a''_{02}}$, $z^{a''_{03}-a'_{03}}$ и $y^{a''_{32}-a_{32}}z^{a'_{33}-a_{33}}$, при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{a'_{02}-a''_{02}, a''_{03}-a'_{03}, a''_{32}-a_{32}, a'_{33}-a_{33}\} \subset Q^*$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$ и $y^{a''_{32}-a_{32}}z^{a'_{33}-a_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a'_{33}}$.

Подсхема S_4 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{31}} y^{a''_{32}} z^{a'_{33}}$ в степень a_{01}/a_{31}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{01}} y^{a''_{02}} z^{a'_{03}}$.

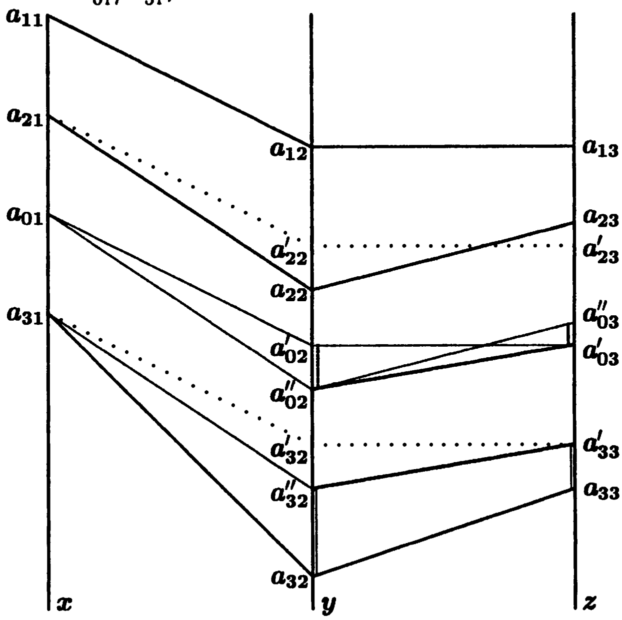

Рис. 19

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{01}} y^{a''_{02}} z^{a'_{03}}$ и $y^{a'_{02} - a''_{02}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{01}} y^{a'_{02}} z^{a'_{03}}$.

Подсхема S_6, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{01}} y^{a''_{02}} z^{a'_{03}}$ и $z^{a''_{03} - a'_{03}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{01}} y^{a''_{02}} z^{a''_{03}}$.

Подсхема S_7 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{01}} y^{a''_{02}} z^{a''_{03}}$ в степень a_{21}/a_{01}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}$.

Подсхема S_8 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{01}} y^{a'_{02}} z^{a'_{03}}$ в степень a_{11}/a_{01}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}$.

Считая, что подсхемы S_1, S_2, S_4, S_7 и S_8 — минимальные, оценим их сложность.

Из леммы 5 следует оценка

$$\lambda(S_1) \leqslant \log a_{31} + O(1).$$

Применяя лемму 8, получаем:

$$\lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a'_{02} - a''_{02} & 0 \\ 0 & a''_{03} - a'_{03} \\ a''_{32} - a_{32} & a'_{33} - a_{33} \end{pmatrix} + O(1) =$$

$$= \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{21}} \delta_{22} & 0 \\ 0 & \frac{a_{01}}{a_{21}} \delta_{23} \\ \delta_{32} - \frac{a_{31}}{a_{21}} \delta_{22} & \delta_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Для оценки сложности схем S_4, S_7 и S_8 опять применяем лемму 5:

$$\lambda(S_4) \leqslant \log\left(\frac{a_{01}}{a_{31}}\right) + O(1), \quad \lambda(S_7) \leqslant \log\left(\frac{a_{21}}{a_{01}}\right) + O(1), \quad \lambda(S_8) \leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{01}}\right) + O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\lambda\left(x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \lambda(S_3) + \lambda(S_4) + \lambda(S_5) + \lambda(S_6) + \lambda(S_7) + \lambda(S_8) \leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11} + \log\left(\frac{a_{21}}{a_{01}}\right) + \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{21}} \delta_{22} & 0 \\ 0 & \frac{a_{01}}{a_{21}} \delta_{23} \\ \delta_{32} - \frac{a_{31}}{a_{21}} \delta_{22} & \delta_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Используя сначала соотношения

$$\frac{a_{01}}{a_{21}} \delta_{22} = \frac{\delta_{22}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}} \geqslant 1, \quad \frac{a_{01}}{a_{21}} \delta_{23} = \frac{\delta_{23}}{\min\{\delta_{22}, \delta_{23}\}} \geqslant 1,$$

а затем равенство $(a_{01}/a_{21})\delta_{22}\delta_{23}=\max\{\delta_{22},\ \delta_{23}\}$ (оно следует, в свою очередь, из равенства $\min\{\delta_{22},\ \delta_{23}\}=a_{21}/a_{01}$), получаем:

$$D\begin{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{21}}\delta_{22} & 0 \\ 0 & \frac{a_{01}}{a_{21}}\delta_{23} \\ \delta_{32}-\frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22} & \delta_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \max\left\{\frac{a_{01}}{a_{21}}\delta_{22},\ \frac{a_{01}}{a_{21}}\delta_{23},\ \frac{a_{01}}{a_{21}}\delta_{22}\frac{a_{01}}{a_{21}}\delta_{23},\ \frac{a_{01}}{a_{21}}\delta_{22}\delta_{33},\ \left(\delta_{32}-\frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22}\right)\frac{a_{01}}{a_{21}}\delta_{23}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_{01}}{a_{21}}\max\{\delta_{22},\ \delta_{23},\ \delta_{22}\delta_{33},\ \delta_{23}\delta_{32}\}.$$

Следовательно

$$l\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},\ x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}) \leqslant$$

$$\leqslant \log a_{11} + \overline{\log}\, D\begin{pmatrix} a_{22}-a'_{22} & a_{23}-a'_{23} \\ a_{32}-a'_{32} & a_{33}-a'_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Осталось отметить, что предположение о справедливости неравенств $\delta_{22}\neq 0$ и $\delta_{23}\neq 0$, в силу замечания 3 не ограничивает общности рассуждений.

Случай 7.3.2.2. Пусть выполняется неравенство $a_{31}\min\{\delta_{22},\delta_{23}\}\geqslant a_{21}$. Схематичное изображение случая 7.3.2.2. представлено на рис. 20.

Построим λ-схему S, вычисляющую систему одночленов $\{x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},$ $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}},\ x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\}$. Эта λ-схема S будет состоять из нескольких λ-подсхем.

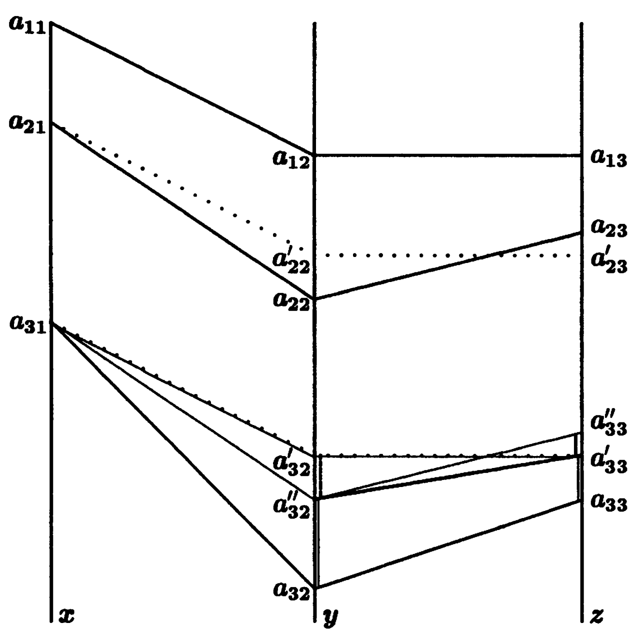

Рис. 20

Подсхема S_1 по переменным x, y и z вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$.

Подсхема S_2 по переменным y и z вычисляет одночлены $y^{a'_{32}-a''_{32}}$, $z^{a''_{33}-a'_{33}}$ и $y^{a''_{32}-a_{32}}z^{a'_{33}-a_{33}}$, при этом в силу замечания 3 без ограничения общности можно считать, что справедливо включение $\{a'_{32}-a''_{32},\ a''_{33}-a'_{33},\ a''_{32}-a_{32},\ a'_{33}-a_{33}\}\subset Q^*$.

Подсхема S_3, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$ и $y^{a''_{32}-a_{32}}z^{a'_{33}-a_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a'_{33}}$.

Подсхема S_4, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a'_{33}}$ и $y^{a'_{32}-a''_{32}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$.

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по одночленам $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a'_{33}}$ и $z^{a''_{33}-a'_{33}}$ вычисляет одночлен $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a''_{33}}$.

Подсхема S_6 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{31}}y^{a''_{32}}z^{a''_{33}}$ в степень a_{21}/a_{31}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$.

Подсхема S_7 возводит подаваемый на вход одночлен $x^{a_{31}}y^{a'_{32}}z^{a'_{33}}$ в степень a_{11}/a_{31}, тем самым вычисляя одночлен $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$.

Считая, что подсхемы S_1, S_2, S_6 и S_7 — минимальные, оценим их сложность.

Из леммы 5 следует оценка
$$\lambda(S_1) \leqslant \log a_{31} + O(1).$$

Применяя лемму 8, получаем:
$$\lambda(S_2) \leqslant \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} d'_{32} - d''_{32} & 0 \\ 0 & d''_{33} - d'_{33} \\ d''_{32} - a_{32} & d'_{33} - a_{33} \end{pmatrix} + O(1) =$$
$$= \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22} & 0 \\ 0 & \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{23} \\ \delta_{32} - \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22} & \delta_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Для оценки сложности схем S_6 и S_7 опять применяем лемму 5:
$$\lambda(S_6) \leqslant \log\left(\frac{a_{21}}{a_{31}}\right) + O(1), \quad \lambda(S_7) \leqslant \log\left(\frac{a_{11}}{a_{31}}\right) + O(1).$$

Таким образом, имеем следующую оценку:
$$\lambda\ (x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \lambda(S_3) + \lambda(S_4) + \lambda(S_5) + \lambda(S_6) + \lambda(S_7) \leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11} + \log\left(\frac{a_{21}}{a_{31}}\right) + \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22} & 0 \\ 0 & \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{23} \\ \delta_{32} - \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22} & \delta_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Используя справедливые в условиях случая 7.3.2.2 неравенства
$$\delta_{22} \geqslant \frac{a_{21}}{a_{31}}, \quad \delta_{32} \geqslant \frac{a_{21}}{a_{31}},$$
а также условие случая 7.3.2, получаем:
$$D \begin{pmatrix} \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22} & 0 \\ 0 & \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{23} \\ \delta_{32} - \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22} & \delta_{33} \end{pmatrix} =$$
$$= \max\left\{\frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22}, \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{23}, \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22}\delta_{33}, \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{23}\left(\delta_{32} - \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22}\right), \frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{22}\frac{a_{31}}{a_{21}}\delta_{23}\right\} =$$
$$= \frac{a_{31}}{a_{21}} \max\{\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{22}\delta_{33}, \delta_{23}\delta_{32}\}.$$

Следовательно
$$l\ (x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}) \leqslant$$
$$\leqslant \log a_{11} + \overline{\log}\, D \begin{pmatrix} a_{22} - d'_{22} & a_{23} - d'_{23} \\ a_{32} - d'_{32} & a_{33} - d'_{33} \end{pmatrix} + O(1).$$

Случай 7 разобран полностью.

Для завершения доказательства достаточно определить параметр d как максимальное (по всем рассматривавшимся случаям) количество подсхем, из которых строится обобщенная схема S.

Теорема доказана.

Замечание 4. Справедливость утверждения о том, что для λ-сложности произвольной системы обобщенных одночленов $\{x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{12}}z^{\alpha_{13}}, x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{22}}z^{\alpha_{23}}, x^{\alpha_{31}}y^{\alpha_{32}}z^{\alpha_{33}}\}$, заданной ненулевой матрицей $A=(\alpha_{ij})$, выполняется неравенство

$$\lambda\,(x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{12}}z^{\alpha_{13}}, x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{22}}z^{\alpha_{23}}, x^{\alpha_{31}}y^{\alpha_{32}}z^{\alpha_{33}}) \leqslant \log D(A)+O(1),$$

при доказательстве теоремы установлена не полностью. Это связано с тем, что в некоторых ситуациях при доказательстве теоремы в соответствии с замечанием 3 достаточно было оценивать не сложность исходной системы обобщенных одночленов, а сложность «похожей» системы обобщенных одночленов. Однако можно провести прямое доказательство (без ссылок на замечание 3), используя рассуждения, аналогичные использовавшимся при доказательстве леммы 8.

Замечание 5. Если при доказательстве верхней оценки теоремы в каждом случае (и подслучае) непосредственно строить обычную схему, как, например, это делается в [13], то можно получить лучшую оценку остаточного члена:

$$l\,(x^{\alpha_{11}}y^{\alpha_{12}}z^{\alpha_{13}}, x^{\alpha_{21}}y^{\alpha_{22}}z^{\alpha_{23}}, x^{\alpha_{31}}y^{\alpha_{32}}z^{\alpha_{33}}) = \log D(A)+O\left(\frac{\log\max a_{ij}}{\log\log\max a_{ij}}\right),$$

правда при этом и без того большой размер доказательства значительно увеличится.

В заключение автор пользуется возможностью выразить благодарность К. А. Зыкову, Р. М. Колпакову и Н. А. Карповой, прочитавшим первоначальный вариант статьи и сделавшим ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гашков С. Б., Кочергин В. В. Об аддитивных цепочках векторов, вентильных схемах и сложности вычисления степеней // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности. — Новосибирск, 1992. — Вып. 52. — С. 22–40.
2. Кнут Д. Е. Искусство программирования для ЭВМ, т. 2 — М.: Мир — 1977.
3. Кочергин В. В. О сложности вычислений в конечных абелевых группах // Математические вопросы кибернетики, вып. 4. — М.: Наука, 1992. — С. 178–217.
4. Кочергин В. В. Об аддитивных вычислениях систем целочисленных линейных форм // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. — 1993, № 6. — С. 97–101.
5. Кочергин В. В. О сложности вычислений одночленов и наборов степеней // Дискретный анализ. — Новосибирск: Издательство Института математики СО РАН, 1994. — (Тр./РАН. Сиб. отделение. Ин-т математики; Т. 27) — С. 94–107.
6. Кочергин В. В. О сложности вычисления систем одночленов с ограничениями на степени переменных // Дискретная математика — 1998. — Т. 10, № 3. — С. 27–34.
7. Кочергин В. В. О порядке роста сложности вычисления систем одночленов от многих переменных // Сибирская конференция по исследованию операций SCOR-98 (Новосибирск, 22–27 июня 1998 г). Материалы конференции. — Новосибирск, 1998. — С. 129.
8. Кочергин В. В. О сложности вычисления систем одночленов специального вида // Материалы X Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Минск, 29 ноября – 3 декабря 1999 г.). — М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2000. — С. 12–14.
9. Кочергин В. В. О двух обобщениях задачи об аддитивных цепочках //Труды IV Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (19–25 июня 2000 г.). — М.: МАКС Пресс, 2000. — С. 55–59.
10. Кочергин В. В. О некоторых обобщениях задачи об аддитивных цепочках // Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001. — С. 59–83.
11. Кочергин В. В. О сложности вычисления пары одночленов от двух переменных // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17, вып. 4. — С. 116–142.
12. Кочергин В. В. Об асимптотике сложности аддитивных вычислений систем целочисленных линейных форм // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 38–58.

13. Кочергин В. В. О сложности вычисления систем одночленов от двух переменных // Труды VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Покровское, 4–6 марта 2006 г.). — М.: МАКС Пресс, 2006. — С. 185–190.
14. Кочергин В. В. О сложности совместного вычисления двух элементов свободной абелевой группы // Материалы XVI Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006. — С. 54–59.
15. Лупанов О. Б. О вентильных и контактно-вентильных схемах // Доклады АН СССР. — 1956. — Т. 111, № 6. — С. 1171–1174.
16. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики, вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 31–110.
17. Севидж Д. Е. Сложность вычислений. — М.: Факториал. — 1998.
18. Сидоренко А. Ф. Сложность аддитивных вычислений семейств целочисленных линейных форм // Записки научных семинаров ЛОМИ. — Л.: Наука, 1981. — Т. 105. — С. 53–61.
19. Bellman R. E. Addition chains of vectors // Amer. Math. Monthly. — 1963. — V. 70. — P. 765.
20. Bernstein D. J. Pippenger's exponentiation algorithm // Available at: http:// //cr.yp.to/papers.html. — 2002.
21. Brauer A. On addition chains // Bull. Amer. Math. Soc. — 1939. — V. 45. — P. 736–739.
22. Dobkin D., Lipton R. J. Addition chain methods for the evaluation of specific polynomials // SIAM J. Comput. — 1980. — V. 9, № 1. — P. 121–125.
23. Elias M., Neri F. A note on addition chains and some related conjectures // Sequences. Editor R. M. Capocelli. — Springer-Verlag, 1990. — P. 166–181.
24. Erdos P. Remarks on number theory, III: On addition chains // Acta Arith. — 1960. — V. 6. — P. 77–81.
25. Hebb K. R. Some results on addition chains // Notices of the American Mathematical Society. — 1974. — V. 21. — P. A-294.
26. Knuth D. E., Papadimitriou C. H. Duality in addition chains // Bulletin of the European association for Theoretical Computer Science. — 1981. — V. 13. — P. 2–4.
27. Morgenstern J. Note on a lower bound of the linear complexity of the fast Fourier transform // J. Assoc. Comput. Mach. — 1973. — V. 20. — P. 305–306.
28. Olivos J. On vectorial addition chains // J. Algorithms. — 1981. — V. 2, № 1. — P. 13–21.
29. Pippenger N. The mimimum number of edges in graphs with prescribed paths // Math. Systems Theory. — 1979. — V. 12, № 4. — P. 325–346.
30. Pippenger N. On evaluation of powers and monomials // SIAM J. Comput. — 1980. — V. 9, № 2. — P. 230–250.
31. Schönhage A. A lower bound for the lenght of addition chains // Theoretical Computer Science. — 1975. — V. 1. — P. 1–12.
32. Southard T. H. Addition chains for the firs N squares // Tech. Rep. CNA-84, Univ. of Texas at Austin, 1974.
33. Straus E. G. Addition chains of vectors // Amer. Math. Monthly. — 1964. — V. 71. — P. 806–808.
34. Subbarao M. V. Addition chains — some results and problems // Number Theory and Applications. Editor R. A. Mollin. NATO Advanced Science Institutes Series: Series C. — Kluwer Academic Publisher Group, 1989. — V. 265. — P. 555–574.
35. Thurber E. G. Efficient generation of minimal length addition chains // SIAM Journal of Computing. — 1999. — V. 28. — P. 1247–1263.
36. Yao A. C.-C. On the evaluation of powers // SIAM J. Comput. — 1976. — V. 5. — P. 100–103.

Поступило в редакцию 11 IV 2006