

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В.КЕЛДЫША

М. А. Лапик

ЧИСЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА НАХОЖДЕНИЯ  
НОСИТЕЛЕЙ РАВНОВЕСНЫХ МЕР  
И МНОЖЕСТВ РАВНОВЕСИЯ  
В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ  
ТЕОРИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Москва, 2006

Лапик, М. А. Численная процедура нахождения носителей равновесных мер и множеств равновесия в экстремальных задачах теории логарифмического потенциала.<sup>1</sup>

## Abstract

Рассматриваются процедуры численного нахождения носителей равновесных мер и множеств равновесия основанные на минимизации некоторых экстремальных функционалов. Предложен метод нахождения множества равновесия для экстремальной задачи логарифмического потенциала с ограничением в случае, когда носитель равновесной меры  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}}$  и множество  $S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$ , где равновесная мера не достигает ограничения есть интервалы. В качестве примеров найдена численно область контакта абсолютно жесткого поршня с упругой плоскостью и предельное распределение нулей полиномов Кравчука.

Lapik, M. A. *Numerical procedure of determining of the supports of the equilibrium measures and sets of equilibrium in the extremal tasks of logarithmic potential theory.*

## Аннотация

We present the procedures of determining of the supports of the equilibrium measures and sets of equilibrium which base on minimizing of some extremal functionals. We propose the method of finding set of equilibrium in case the support of the equilibrium measure  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}}$  and set  $S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$ , where a constraint is not hit are intervals. As examples we discussed a contact problem in elasticity and zero asymptotics of Krawtchouk polynomials.

---

<sup>1</sup>Работа поддержана грантами РФФИ - 05-01-00522, НШ - 1551.2003.1, Программой №1 ОМН РАН и проектом ИНТАС 03-51-6637.

# 1 Введение.

В настоящей работе рассматривается задача численного нахождения носителей равновесной меры для экстремальных задач теории логарифмического потенциала. Задача определения носителя равновесной меры имеет различные приложения. Необходимость определения носителей экстремальных мер возникает например в задачах теории упругости [4], а также при решении некоторых уравнений с частными производными, например невязкое уравнение Бюргера и система уравнений континуального предела цепочки Тоды см. [9], [10].

Напомним определения и используемые факты и понятий теории логарифмического потенциала. Введение в теорию логарифмического потенциала с ограничениями можно найти в [2], а в [6] подробно изложена теория логарифмического потенциала в отсутствии ограничений.

Пусть  $\mathcal{M}$  множество конечных борелевских мер, тогда его подмножество  $\mathcal{M}_\Sigma^x \subset \mathcal{M}$  это меры с носителями в  $\Sigma$  и полной массой равной  $x$ . Определим множество  $\sigma$ -ограниченных мер  $\mathcal{M}_\Sigma^{x,\sigma}$  как подмножество  $\mathcal{M}_\Sigma^x$  такое что

$$\mathcal{M}_\Sigma^{x,\sigma} = \{\mu \in \mathcal{M} : 0 \leq \mu \leq \sigma, \mu(\mathbb{R}) = x, S_\mu \subset \Sigma\}.$$

где  $S_\sigma = \Sigma$  и неравенство для мер  $\mu \leq \sigma$  понимается так, что  $\sigma - \mu$  есть мера.

Непрерывную функцию  $Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  на компакте  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  не равную тождественно бесконечности мы можем рассматривать как внешнее поле.

*Логарифмическим потенциалом* меры  $\mu \in \mathcal{M}$  назовем функцию

$$U^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z - y|} d\mu(y)$$

а *энергией меры во внешнем поле* величину

$$\begin{aligned} I_Q(\mu) &= \int \int \left( \log \frac{1}{|z - y|} + Q(y) + Q(z) \right) d\mu(y) d\mu(z) = \\ &= \int \int \log \frac{1}{|z - y|} d\mu(y) d\mu(z) + 2 \int Q d\mu \end{aligned} \tag{1}$$

где  $Q$  внешнее поле и последнее верно если оба интеграла существуют.

Если рассматривается неограниченный компакт  $\Sigma \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , тогда от поля  $Q$  дополнительно требуют чтобы

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, z \in \Sigma} \frac{Q(z)}{\ln |z|} = \infty.$$

Как будет видно, это обеспечивает компактность носителя экстремальной меры.

Равновесной или экстремальной мерой в поле  $Q$  называют меру  $\mu_Q^x$  с минимальной энергией в своем классе:

$$I_Q(\mu_Q^x) = W_Q^x = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_\Sigma^x} I_Q(\mu). \quad (2)$$

Меру  $\sigma$  имеющую конечную энергию (при  $Q = 0$ ) над всеми компактными множествами и такую что  $\sigma(\{x \in \mathbb{R} : Q(x) < +\infty\}) > x$  можно взять в качестве "ограничительной" меры или "констрейна". Равновесной или экстремальной мерой с ограничением  $\sigma$  по аналогии с (2) называют меру  $\mu_Q^{x,\sigma}$  с минимальной энергией в классе  $\mathcal{M}_\Sigma^{x,\sigma}$ :

$$I_Q(\mu_Q^{x,\sigma}) = W_Q^{x,\sigma} = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_\Sigma^{x,\sigma}} I_Q(\mu).$$

Отметим, что экстремальные меры существуют и единственны (конечно, в случае конечных энергий).

Отметим существование условий равновесия для задачи с ограничением

$$U^{\mu_Q^{x,\sigma}} + Q = \begin{cases} \leq F_Q^{x,\sigma} & \text{на } S_{\mu_Q^{x,\sigma}}, \\ \geq F_Q^{x,\sigma} & \text{на } S_{\sigma - \mu_Q^{x,\sigma}}, \end{cases} \quad (3)$$

Множеством равновесия назовем  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}} \cap S_{\sigma - \mu_Q^{x,\sigma}}$ . При достаточно больших ограничениях условия равновесия (3) становятся условиями равновесия для задачи без ограничений.

Используемый здесь метод определения множества равновесия основан на поиске экстремумов неких функционалов, аналогичных функционалу Маскара-Саффа  $F_Q^x$

$$F_Q^x(K) := -x \log \text{cap}(K) + \int Q d\omega_K, \quad (4)$$

где  $\omega_K$  это мера Робена компакта  $K$ . Этот функционал обладает следующим экстремальным свойством

$$F_Q^x(K) \begin{cases} = F_Q^x & S_{\mu_Q^x} \subseteq K \subseteq S^{\mu_Q^x}, \\ > F_Q^x & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где  $S^{\mu_Q^x} = \{y : (U^{\mu_Q^x} + Q)(y) = F_Q^x\}$ . Следует отметить что  $\text{cap}(S^{\mu_Q^x} \setminus S_{\mu_Q^x}) = 0$  почти всюду (по  $x$ ) и мы будем рассматривать только такие случаи. Функционал (4) был введен Маскаром и Саффом в [5] (см. также [8]).

## 2 Носитель равновесной меры во внешнем поле в отсутствии ограничений. Случай интервала.

Конкретизируем задачу минимизации функционала Маскара-Саффа (4) в случае когда носитель равновесной меры есть отрезок  $[\alpha, \beta]$ .

Для облегчения дифференцирования по параметрам, а главное для избавления от особенностей в интегралах сделана замена переменных  $y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(\phi)$ . Тогда

$$\begin{aligned} F_Q^x([a, b]) &= -x \log \left( \frac{b-a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{Q(y)}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} dy = \\ &= -x \log \left( \frac{b-a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q \left( \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta \right) d\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Приравнявая первые производные по  $a$  и  $b$  нулю (условия экстремума первого порядка) получаем уравнения на концы отрезка  $[\alpha, \beta]$

$$\frac{\partial F}{\partial b}([\alpha, \beta]) = \frac{-x}{\beta - \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) (1 + \cos \theta) d\theta = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}([\alpha, \beta]) = \frac{x}{\beta - \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) (1 - \cos \theta) d\theta = 0.$$

Для проверки условий второго рода приведем также явный вид производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 a}([\alpha, \beta]) = \frac{x}{(\beta - \alpha)^2} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi Q'' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) (1 - \cos \theta)^2 d\theta,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 b}([\alpha, \beta]) = \frac{x}{(\beta - \alpha)^2} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi Q'' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) (1 + \cos \theta)^2 d\theta,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b}([\alpha, \beta]) = \frac{-x}{(\beta - \alpha)^2} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi Q'' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) \sin^2 \theta d\theta.$$

Таким образом задача сводится к нахождению пары  $(a, b)$  минимизирующей выражение (5). Комплекс программ для системы (MatLab) и инструкция по его использованию даны в приложении (см п. 4.1).

### 2.1 Результаты расчетов.

Рассмотрим два примера.

### 2.1.1 Определение носителя равновесной меры массы $x$ в заданном внешнем поле.

Пусть на ось  $y$  помещена положительная мера величины  $x$ , которая минимизирует энергию (1) во внешнем поле  $Q(y) = (y-1)^2y^2 + 0.2y^2$ . В результате расчетов мы получим следующее распределение носителей (интервалов  $[\alpha(x), \beta(x)]$ ) равновесной меры в зависимости от величины меры  $x$ .

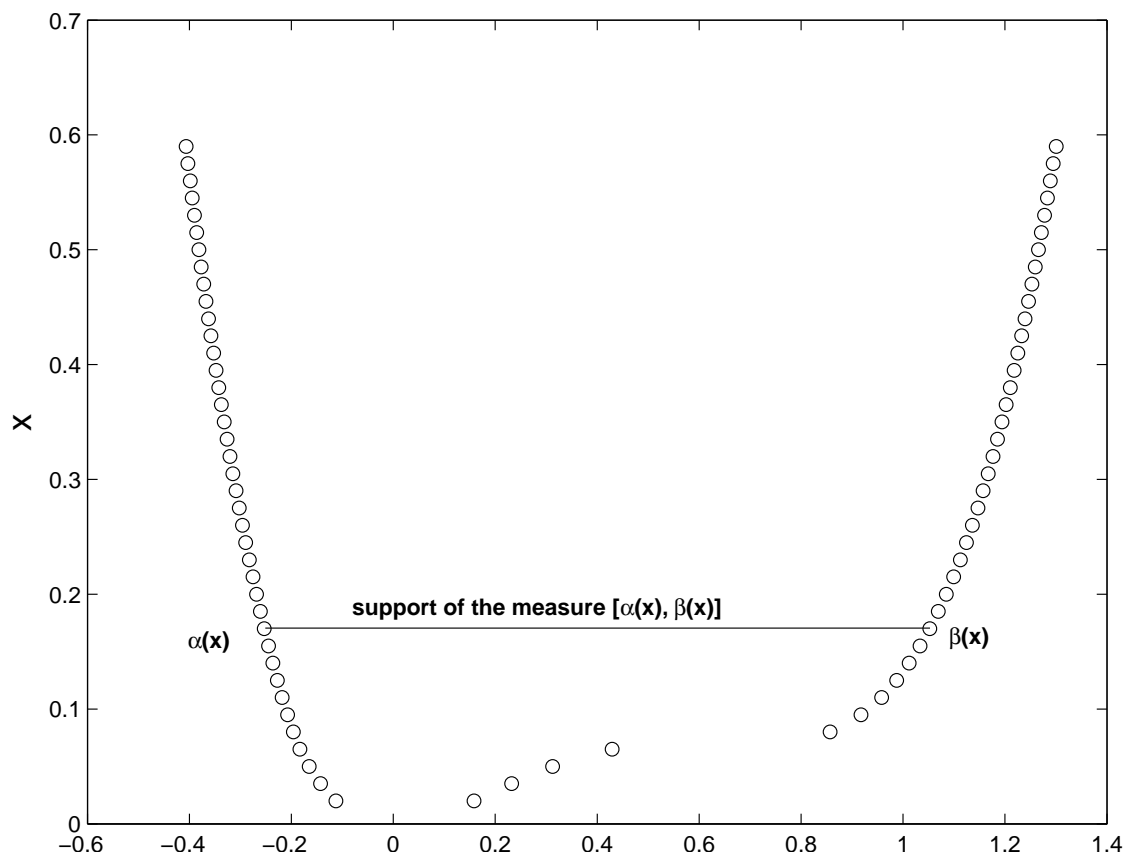


Рис. 1: носитель  $[\alpha(x), \beta(x)]$  во внешнем поле  $Q(y) = (y-1)^2y^2 + 0.2y^2$ .

### 2.1.2 Двумерная задача контакта поршня с упругой плоскостью.

Пусть имеется двумерный поршень форма поверхности которого задается функцией  $Q(y)$ . Данный поршень с силой  $x$  вдавливаются в упругую плоскость и деформирует ее (пусть  $D$  это сдвиг поршня). Как показано в [11], после деформации плоскость принимает форму  $\int \log |x-t|p(t) dt$ , где  $p(t)$  это давление, оказываемое абсолютно жестким поршнем на упругую плоскость. Очевидно, что это логарифмический потенциал меры с плотностью  $p(t)$  взятый с обратным знаком. Следовательно, в точках контакта поршня

с плоскостью мы имеем

$$\int \log |x - t| p(t) dt = Q(x) - D$$

а в остальных точках естественно

$$\int \log |x - t| p(t) dt < Q(x) - D.$$

Тем самым мы получили условия равновесия для меры с плотностью  $p(t)$ , которые являются достаточными условиями того, что мера есть экстремальная.

Приведем расчет давления с силой  $x$  жесткого острого поршня формы

$$Q(y) \begin{cases} = |y|^{\frac{1}{4}} & \text{if } y < 0 \\ = 2|y|^{\frac{1}{4}} & \text{if } y \geq 0 \end{cases}$$

на упругую плоскость [4]. Полученный результат отображен на рис. 2. Для

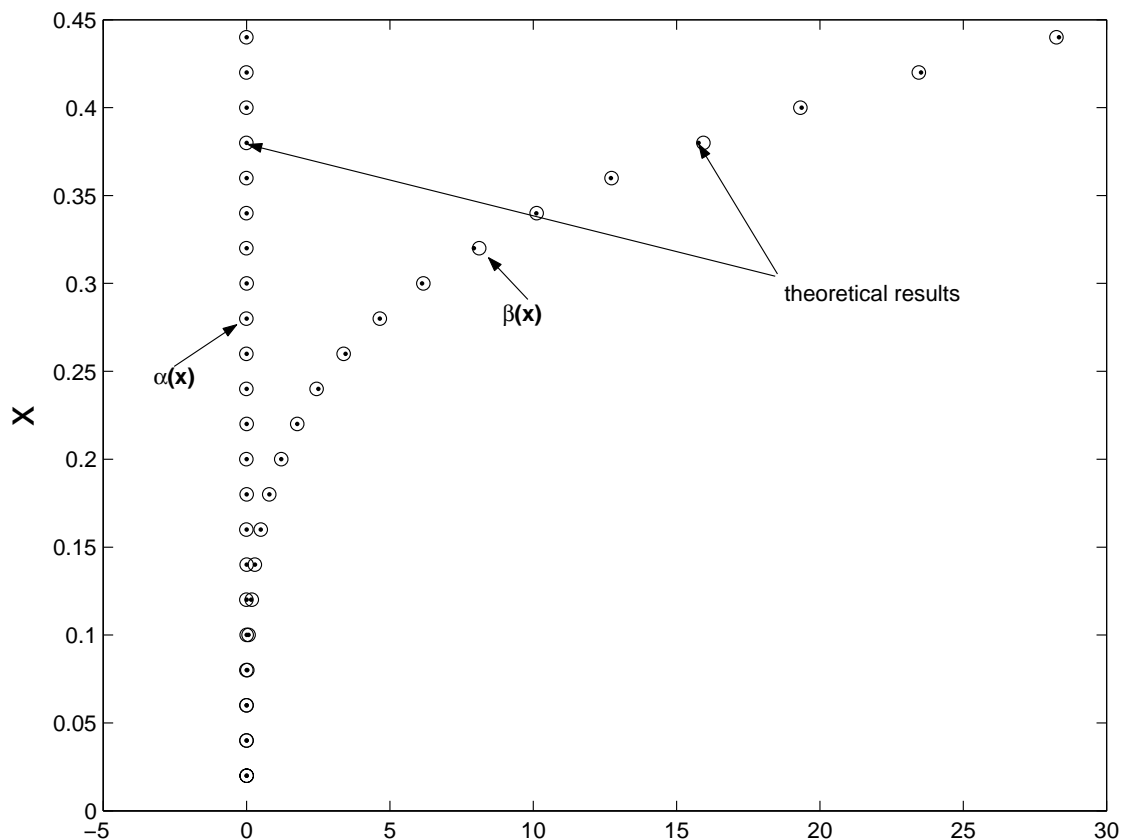


Рис. 2: Давление абсолютно жесткого острого поршня на упругую плоскость с силой  $x$ . Отрезок  $[\alpha(x), \beta(x)]$  это область контакта поршня с плоскостью.

оценки результатов вычисления на рис. 2 также отображены теоретические расчеты А.В. Kuijlaars и W. Van Assche:

$$S_p = [\alpha(x), \beta(x)] = \left[0, \frac{\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi^2} x^4\right] \approx [0, 756.29088x^4].$$

### 3 Множество равновесия для задачи с ограничением.

#### 3.1 Вывод экстремальных функционалов для множества равновесия.

В этом параграфе мы численно найдем множество равновесия  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}} \cap S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$  в случае когда  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}}$  и  $S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$  есть интервалы, а следовательно и множество равновесия тоже интервал, т.е.  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}} \cap S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}} = [\alpha(x), \beta(x)]$ . Начнем с вывода экстремального функционала для задачи с ограничением.

Поскольку множества  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}}$  и  $S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$  возрастают и убывают соответственно, то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  могут иметь не более одного минимума и максимума. Задача в этом случае разбивается на участки монотонности  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , т.е.  $\alpha(x)$  убывает, а  $\beta(x)$  растет,  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  вместе растут или убывают,  $\alpha(x)$  растет, а  $\beta(x)$  убывает. Однако, стоит помнить что любой из этих подслучаев может отсутствовать. Для каждого подслучая придется написать свой функционал.

Интегрируя условия равновесия (3) по мере  $\omega_K$ , и используя то что

$$U^{\omega_K} = -\log \text{cap}(K) - g_K,$$

где  $g_K$  это функция Грина области  $\mathbb{C} \setminus K$  с полюсом в бесконечности, получаем два экстремальных функционала  $\overline{F}(K) = \overline{F}_{Q,\sigma}^x(K)$  и  $\underline{F}(K) = \underline{F}_{Q,\sigma}^x(K)$  на компактах в  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}}$  и в  $S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$  соответственно.

$$\begin{aligned} \overline{F}_{Q,\sigma}^x(K) &= -x \log \text{cap}(K) + \int Q d\omega_K - \int_{S_{\mu_Q^{x,\sigma}}} g_K d\sigma. \\ \underline{F}_{Q,\sigma}^x(K) &= -x \log \text{cap}(K) + \int Q d\omega_K - \int_{S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}^c} g_K d\sigma. \end{aligned}$$

Экстремальное свойство для множества равновесия этих функционалов заключается в том что для любого  $K \subseteq S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$  и любого  $L \subseteq S_{\mu_Q^{x,\sigma}}$  имеем

$$\underline{F}(K) \geq \underline{F}(S_{\mu_Q^{x,\sigma}} \cap S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}) = \overline{F}(S_{\mu_Q^{x,\sigma}} \cap S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}) \geq \overline{F}(L).$$

Теперь подробно изучим все, зависящие от монотонности  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , случаи: 1, 2', 2'', 3 см. рис. 3.

Еще раз отметим, что может оказаться, что имеет место только случай 1 (бесконечный констрейн) или 1 и 3 или 1 и 2 или только 2 или 2 и 3 или только 3 - имеют место все варианты.

Введем для каждого случая функционал

$$F_j(a, b) = -x \log \left( \frac{b-a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{Q(y)}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} dy - \int_{I_j} g_{[a,b]} d\sigma.$$



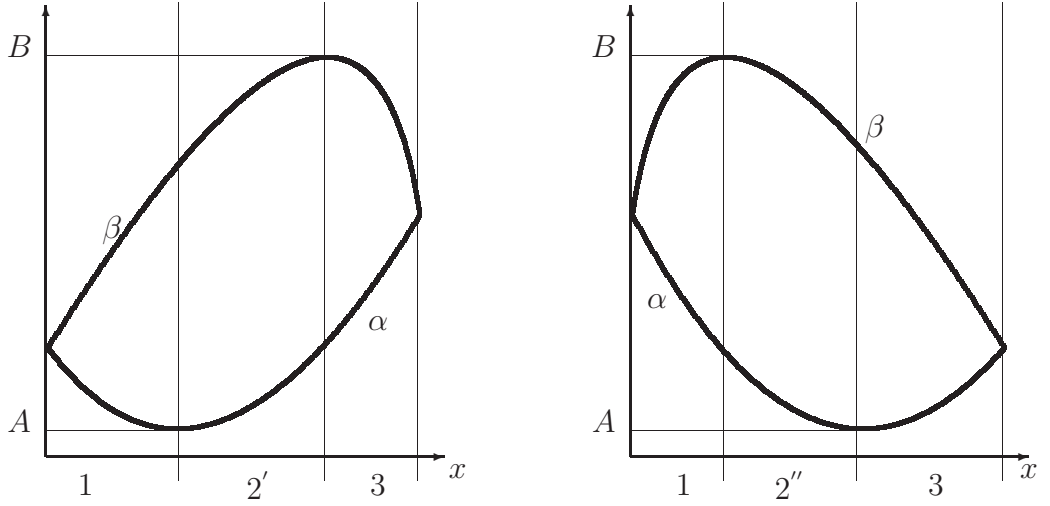


Рис. 3: Схема, определяющая случаи 1, 2', 2'' и 3 в зависимости от монотонности границ множества равновесия  $[\alpha(x), \beta(x)]$ .

где  $j = 1, 2', 2'', 3$ .

Далее будем опускать зависимость от  $Q, x$  и  $\sigma$  если это не будет приводить к недоразумению. Также далее везде считаем что  $S_\sigma = [A, B]$  и  $S_{\mu_Q^{x,\sigma}}$  и  $S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$  интервалы.

**1.**  $I_1 = \emptyset$ .  $S_\mu = [\alpha, \beta] \subset [A, B]$

Это классический случай задачи без ограничения, решается нахождением минимума  $(\alpha, \beta)$  функционала

$$F_1(a, b) = \underline{F} = -x \log \left( \frac{b-a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{Q(y)}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} dy.$$

**2'.**  $I_{2'} = [A, \alpha]$ .  $S_\mu = [A, \beta] \subset [A, B]$ ,  $S_{\sigma-\mu} = [\alpha, B] \subset [A, B]$ .

Задача сводится к нахождению седловой точки функционала  $F_{2'}(\alpha, \beta)$ .

$$F_{2'}(\alpha, b) = -x \log \left( \frac{b-\alpha}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_\alpha^b \frac{Q(y) dy}{\sqrt{(y-\alpha)(b-y)}} - \int_A^\alpha g_{[\alpha, b]} d\sigma = \underline{F}(\alpha, b)$$

$$F_{2'}(a, \beta) = -x \log \left( \frac{\beta-a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \frac{Q(y) dy}{\sqrt{(y-a)(\beta-y)}} - \int_A^\beta g_{[a, \beta]} d\sigma = \overline{F}(a, \beta).$$

Следовательно

$$F_{2'}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \max_{A \leq a \leq \beta} F_{2'}(a, \beta) \\ \min_{\alpha \leq b \leq B} F_{2'}(\alpha, b), \end{cases}$$

т.е.  $(\alpha, \beta)$  седловая точка и

$$\iff \begin{cases} \nabla F_{2'}(\alpha, \beta) = 0, \\ \frac{\partial^2 F_{2'}}{\partial a^2}(\alpha, \beta) \leq 0, \\ \frac{\partial^2 F_{2'}}{\partial b^2}(\alpha, \beta) \geq 0. \end{cases}$$

**2''.**  $I_{2''} = [\beta, B]$ .  $S_\mu = [\alpha, B] \subset [A, B]$ ,  $S_{\sigma-\mu} = [A, \beta] \subset [A, B]$ . Также сводим задачу к нахождению седловой точки функционала  $F_{2''}(a, b)$ .

$$F_{2''}(\alpha, b) = -x \log \left( \frac{b - \alpha}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_\alpha^b \frac{Q(y) dy}{\sqrt{(y - \alpha)(b - y)}} - \int_\alpha^B g_{[\alpha, b]} d\sigma = \overline{F}(\alpha, b)$$

$$F_{2''}(a, \beta) = -x \log \left( \frac{\beta - a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \frac{Q(y) dy}{\sqrt{(y - a)(\beta - y)}} - \int_\beta^B g_{[a, \beta]} d\sigma = \underline{F}(a, \beta).$$

Следовательно

$$F_{2''}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \min_{A \leq a \leq \beta} F_{2''}(a, \beta) \\ \max_{\alpha \leq b \leq B} F_{2''}(\alpha, b), \end{cases}$$

т.е.  $(\alpha, \beta)$  седловая точка

$$\iff \begin{cases} \nabla F_{2''}(\alpha, \beta) = 0, \\ \frac{\partial^2 F_{2''}}{\partial a^2}(\alpha, \beta) \geq 0, \\ \frac{\partial^2 F_{2''}}{\partial b^2}(\alpha, \beta) \leq 0. \end{cases}$$

**3.**  $I_3 = [A, B]$ .  $S_\mu = [A, B]$ ,  $S_{\sigma-\mu} = [a, b] \subset [A, B]$ .

Эта задача сводится к нахождению максимума функционала

$$\begin{aligned} F_3(\alpha, \beta) &= \\ &= -x \log \left( \frac{\beta - \alpha}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{Q(y) dy}{\sqrt{(y - \alpha)(\beta - y)}} - \int_A^B g_{[a, \beta]} d\sigma = \overline{F}([\alpha, \beta]). \end{aligned}$$

Следовательно

$$F_3(a, b) = \max_{A \leq \alpha < \beta \leq B} F_3(\alpha, \beta).$$

### 3.2 Алгоритм численного нахождения множества равновесия.

Случай 1 описан в предыдущей главе, поставим вопрос о диагностике случая 2, это случай когда ограничитель с носителем  $[A, B]$  начинает действовать на экстремальную меру.

Помня, что носители равновесных мер возрастают при росте массы меры  $x$ , приходим к выводу, что переход от случая 1 к случаям 2 или 3 имеет место если носитель равновесной меры без ограничения  $[\alpha, \beta]$  не содержится в  $[A, B]$ . Имеем три варианта:  $\alpha < A < \beta < B$ ,  $A < \alpha < B < \beta$  и  $\alpha < A < B < \beta$ , каждый из которых соответствует переходу к случаю 2', 2'' и 3 соответственно. Мы предлагаем начиная с  $x = 0$  "непрерывно" следить за множеством равновесия при увеличении  $x$  и своевременно менять текущие состояния функционалов. Переход от 2 к 3 аналогичен и тоже осуществляется когда один из концов множества равновесия "ударяется" в конец отрезка  $[A, B]$ .

Для нахождения минимума и седловых точек (точек нулевого градиента) мы будем пользоваться встроенными функциями (MatLab). Приведем только явные формулы для градиентов всех функционалов.

Случай 2'.

$$F_{2'}([a, b]) = -x \log \left( \frac{b-a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q \left( \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta \right) d\theta - \int_A^a g_{[a,b]} d\sigma$$

$$\frac{\partial F_{2'}}{\partial b}([\alpha, \beta]) = \frac{-x}{\beta - \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) (1 + \cos \theta) d\theta$$

$$+ \frac{1}{\beta - \alpha} \int_A^\alpha \sqrt{\frac{\alpha - y}{\beta - y}} d\sigma = \frac{-x}{\beta - \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) (1 + \cos \theta) d\theta$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\log \left( \frac{\beta + \alpha - 2A}{\beta - \alpha} - \sqrt{\left( \frac{\beta + \alpha - 2A}{\beta - \alpha} \right)^2 - 1} \right)}^0 \sigma \left( \frac{\beta + \alpha}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2} \operatorname{ch} t \right) (\operatorname{ch} t - 1) dt$$

В последнем интеграле была сделана замена  $y = \frac{\beta + \alpha}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2} \operatorname{ch} t$ , где  $t \in [\log \left( \frac{\beta + \alpha - 2A}{\beta - \alpha} - \sqrt{\left( \frac{\beta + \alpha - 2A}{\beta - \alpha} \right)^2 - 1} \right), 0]$ , она же используется при дифференцировании по  $a$ .

$$\frac{\partial F_{2'}}{\partial a}([\alpha, \beta]) = \frac{x}{\beta - \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) (1 - \cos \theta) d\theta -$$

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_A^\alpha \sqrt{\frac{\beta - y}{\alpha - y}} d\sigma = \frac{x}{\beta - \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta \right) (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\log \left( \frac{\beta + \alpha - 2A}{\beta - \alpha} - \sqrt{\left( \frac{\beta + \alpha - 2A}{\beta - \alpha} \right)^2 - 1} \right)}^0 \sigma \left( \frac{\beta + \alpha}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2} \operatorname{ch} t \right) (\operatorname{ch} t + 1) dt$$

Случай **2''**. Теперь рассмотрим функционал  $F_{2''}$ .

$$\begin{aligned}
F_{2''}([a, b]) &= -x \log \left( \frac{b-a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q \left( \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta \right) d\theta - \int_b^B g_{[a,b]} d\sigma \\
\frac{\partial F_{2''}}{\partial b}([\alpha, \beta]) &= \frac{-x}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \cos \theta \right) (1 + \cos \theta) d\theta + \\
&+ \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\beta^B \sqrt{\frac{\alpha-y}{\beta-y}} d\sigma = \frac{-x}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \cos \theta \right) (1 + \cos \theta) d\theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{\log \left( \frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} + \sqrt{\left( \frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} \right)^2 - 1} \right)} \sigma \left( \frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2} \operatorname{ch} t \right) (\operatorname{ch} t + 1) dt
\end{aligned}$$

В последнем интеграле была сделана замена  $y = \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \operatorname{ch} t$ , где  $t \in [0, \log \left( \frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} + \sqrt{\left( \frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} \right)^2 - 1} \right)]$ , она же используется при дифференцировании по  $a$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{2''}}{\partial a}([\alpha, \beta]) &= \frac{x}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \cos \theta \right) (1 - \cos \theta) d\theta - \\
&- \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\beta^B \sqrt{\frac{\beta-y}{\alpha-y}} d\sigma = \frac{x}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \cos \theta \right) (1 - \cos \theta) d\theta \\
&- \frac{1}{2} \int_0^{\log \left( \frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} + \sqrt{\left( \frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} \right)^2 - 1} \right)} \sigma \left( \frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2} \operatorname{ch} t \right) (\operatorname{ch} t - 1) dt
\end{aligned}$$

Случай **3**. Функционал  $F_3$  является "объединением" функционала  $F_2$  и функционала  $F_{2''}$ .

$$\begin{aligned}
F_3([a, b]) &= -x \log \left( \frac{b-a}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q \left( \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta \right) d\theta - \int_A^B g_{[a,b]} d\sigma \\
\frac{\partial F_3}{\partial b}([\alpha, \beta]) &= \frac{-x}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \cos \theta \right) (1 + \cos \theta) d\theta + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{\log \left( \frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} + \sqrt{\left( \frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} \right)^2 - 1} \right)} \sigma \left( \frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2} \operatorname{ch} t \right) (\operatorname{ch} t + 1) dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\log \left( \frac{\beta+\alpha-2A}{\beta-\alpha} - \sqrt{\left( \frac{\beta+\alpha-2A}{\beta-\alpha} \right)^2 - 1} \right)}^0 \sigma \left( \frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2} \operatorname{ch} t \right) (\operatorname{ch} t - 1) dt \\
\frac{\partial F_3}{\partial a}([\alpha, \beta]) &= \frac{x}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Q' \left( \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \cos \theta \right) (1 - \cos \theta) d\theta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^{\log\left(\frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha} + \sqrt{\left(\frac{2B-\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 - 1}\right)} \sigma\left(\frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2} \operatorname{ch} t\right) (\operatorname{ch} t - 1) dt \\
& -\frac{1}{2} \int_{\log\left(\frac{\beta+\alpha-2A}{\beta-\alpha} - \sqrt{\left(\frac{\beta+\alpha-2A}{\beta-\alpha}\right)^2 - 1}\right)}^0 \sigma\left(\frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2} \operatorname{ch} t\right) (\operatorname{ch} t + 1) dt
\end{aligned}$$

Отметим что интегралы в доступных нам примерах имеют сингулярности и (MatLab) лучше, т.е. стабильнее, работает если не использовать явные производные, а брать их численно (с помощью (MatLab)). Комплекс программ для системы (MatLab) и инструкция по использованию даны в приложении (см п. 4.2).

### 3.3 Пример нахождения множества равновесия: полиномы Кравчука.

В [2], [3] найдено асимптотическое распределение мер, ассоциированных с полиномами Кравчука, мы будем использовать эти данные в качестве примера для нахождения носителя равновесной меры с ограничениями. Приведем здесь кратко результаты полученные в [3] для значения параметра  $p$  равного 0.25.

Рассматриваются сжатые (отрезок  $[0, N]$  линейно переводится в  $[0, 1]$ ) полиномы Кравчука  $P_{n, N}(y)$ ,  $0 \leq n \leq N$  с единичным старшим коэффициентом, т.е.

$$P_{n, N}(y) := A_{n, N} k_{n, N}(Ny) = y^n + \dots,$$

где  $k_{n, N}(y)$  это классические полиномы Кравчука с простыми нулями на отрезке  $[0, N]$

$$k_{n, N}(y) = \binom{N}{n}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{-n} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{N-y}{n-s} \binom{y}{s} \frac{3^s}{4^n}.$$

Обозначим  $\chi_{P_n}$  меру "считающую" нули  $P_{n, N}(y)$ , т.е.

$$\chi_{P_{n, N}} := \frac{1}{n} \sum_{P_{n, N}(y)=0} \delta(y).$$

Рассмотрим последовательность  $(n_j, N_j)_{j=1}^{\infty}$  такую что

$$n_j/N_j \rightarrow x < 1 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда, как показано в [3]

$$\chi_{P_{n_j, N_j}} \xrightarrow{*} \mu_Q^{x, m} \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty,$$

где ограничение  $m$  есть мера Лебега на отрезке  $[0,1]$ , а внешнее поле имеет вид

$$Q(y) = \frac{1}{2}\{y \log y + (1 - y) \log(1 - y) + y \log 4 - (1 - y) \log 0.75\}.$$

Множество равновесия для задачи с ограничением  $m$  и полем  $Q(y)$  на отрезке  $[0,1]$  зависит от массы  $x$  следующим образом

$$S_{\mu_Q^{x,m}} \cap S_{m-\mu_Q^{x,m}} = \left[ \frac{2x+1}{4} - \frac{\sqrt{3x(1-x)}}{2}, \frac{2x+1}{4} + \frac{\sqrt{3x(1-x)}}{2} \right].$$

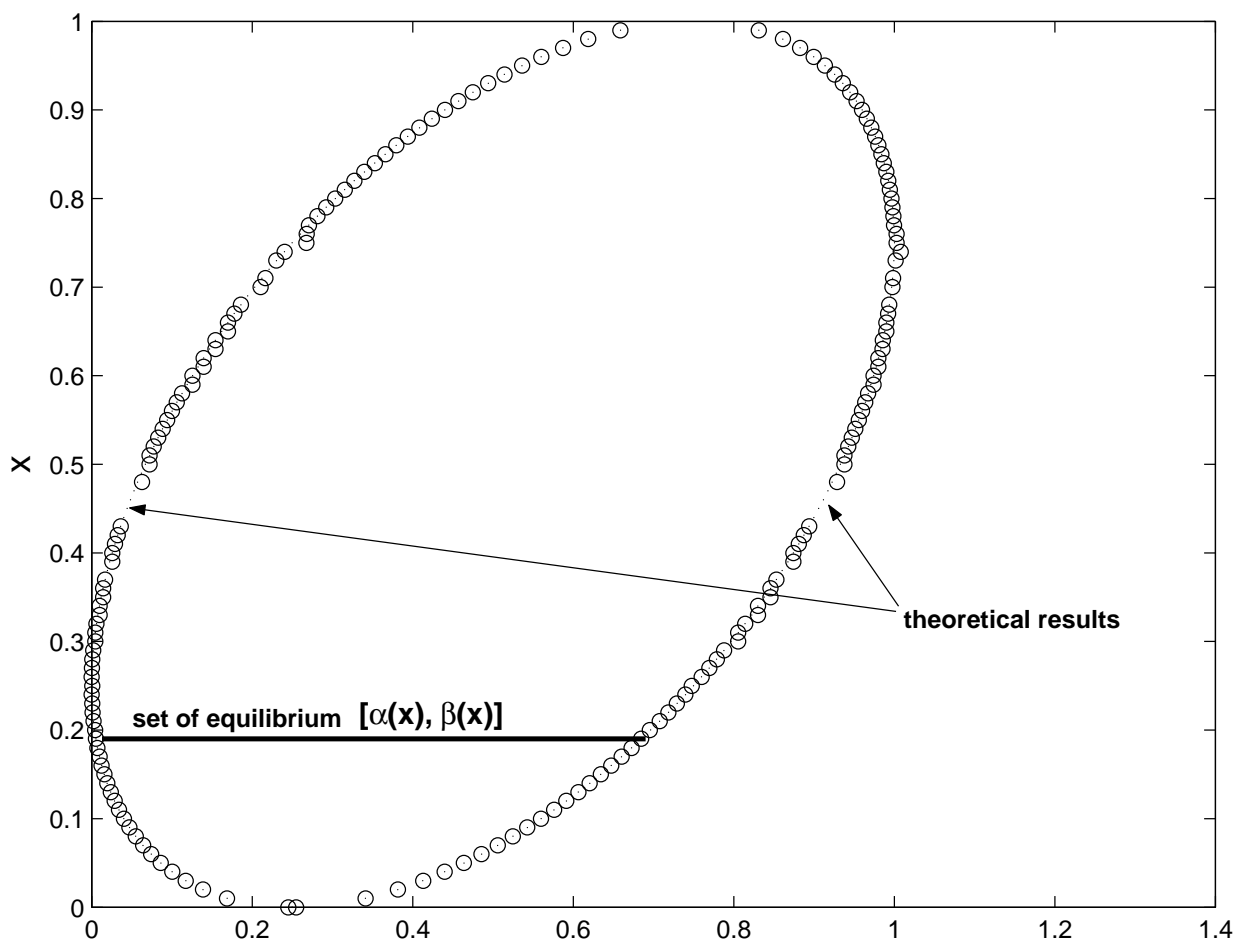


Рис. 4: Множество равновесия для полиномов Кравчука.

Этот пример интересен для нас тем, что в нем мы можем наблюдать полную эволюцию действия ограничения на равновесную меру в зависимости от изменения массы  $x$ , а именно у нас присутствуют случаи 1, 2' и 3, описанные в пункте 3.1.

На рис. 4 приведены результаты работы программы (кружки) в которой множество равновесия ищется с помощью определения седловой точки соответствующего функционала. Точками обозначены соответствующие теоретические результаты.

## 4 Приложения.

### 4.1 Определение носителя равновесной меры без ограничений.

Мы применяем встроенные функции минимизации.

Файл **drowx1.m** Основная программа, рисует минимумы функции FalGH при помощи стандартной функции fminunc

```
function [s1]=drowx(bot,top,step,a,b)
clf;
A=[1,-1]; B=[-0.00001];
x0ls=[a;b]; x0ms=[a;b]
for x=bot:step:top
x
option =
optimset('LargeScale','on','GradObj','on','Hessian','on');
[s2,fval,exitflag] = fminunc(@FalGH,x0ls,option,x);
if exitflag > 0
plot(x,s2(1),'ro',x,s2(2),'mo'); x0ls=s2; end;
hold on
option = optimset('LargeScale','off','GradObj','on');
[s2,fval,exitflag] =
fmincon(@FalGH,x0ms,A,B,[],[],[],[],option,x);
if exitflag > 0
plot(x,s2(1),'g.',x,s2(2),'b.');
```

Файл **FalGH.m** - функционал Маскара-Сафа с производными первого и второго порядка по концам интервала

```
function [F,g,H]=Fal(s,x)
the extremal functional for unconstrained case where support is
the interval [s(1),s(2)]
F= -x*log((s(2)-s(1))./4)
+(1/pi)*quad('Qc',0,pi,1.e-8,0,s(1),s(2));
if nargin > 1
Fpa=x./(s(2)-s(1))
+1/(2*pi)*quadl('Qpac',0,pi,1.e-8,0,s(1),s(2));
Fpb=-x./(s(2)-s(1))
```

```

+1/(2*pi)*quadl('Qpbc',0,pi,1.e-8,0,s(1),s(2));
g = [Fpa,Fpb]; Gradient of the function evaluated at x
end;
if nargin > 2
Fppaa=x./((s(2)-s(1)).^2)
+1./(4*pi)*quadl('Qppaac',0,pi,0.1e-8,0,s(1),s(2));
Fppab=-x./((s(2)-s(1)).^2)
+1/(4*pi)*quadl('Qppabc',0,pi,0.1e-8,0,s(1),s(2));
Fppbb=x./((s(2)-s(1)).^2)
+1/(4*pi)*quadl('Qppbbc',0,pi,0.1e-8,0,s(1),s(2));
H = [Fppaa, Fppab; Fppab, Fppbb]; Hessian evaluated at x
end;
return;

```

Файл **Q.m** - внешнее поле, задается пользователем явно

```

function Q=Q(y)
the external field
Q=((y-1).^2+0.2).*y.^2;
return;

```

Файл **Qp.m** - первая производная внешнего поля, задается пользователем явно

```

function Qp=Qp(y)
the first derivative of the external field
Qp=((y-1).^2+0.2).*y.*2+(y-1).*2.*y.^2;
return;

```

Файл **Qpp.m** - вторая производная внешнего поля, задается пользователем явно

```

function Qpp=Qpp(y)
the second derivative of the external field
Qpp=12*(y.^2.-1)+2.4;
return;

```

Далее сделана замена переменных  $y=(a+b)/2+(b-a)/2*\cos(\phi)$  в интеграле от внешнего поля по мере Робена и найдены все производные по концам интервала  $a$  и  $b$  от подынтегрального выражения.



Файл **Qc.m**

```
function [Qc]=Qc(phi,a,b)
Qc=Q((a+b)/2.+(b-a)/2.*cos(phi));
return;
```

Файл **Qpac.m**

```
function [Qpac]=Qpac(phi,a,b)
Qpac=Qp((a+b)/2.+(b-a)/2.*cos(phi)).*(1.-cos(phi));
return;
```

Файл **Qpbc.m**

```
function [Qpbc]=Qpbc(phi,a,b)
Qpbc=Qp((a+b)/2.+(b-a)/2.*cos(phi)).*(1+cos(phi));
return;
```

Файл **Qppaac.m**

```
function [Qppaac]=Qppaac(phi,a,b)
Qppaac=Qpp((a+b)/2.+(b-a)/2.*cos(phi)).*(1-cos(phi)).^2;
return;
```

Файл **Qppabc.m**

```
function [Qppabc]=Qppabc(phi,a,b)
Qppabc=Qpp((a+b)/2.+(b-a)/2.*cos(phi)).*(1-cos(phi)).^2;
return;
```

Файл **Qppbbc.m**

```
function [Qppbbc]=Qppbbc(phi,a,b)
Qppbbc=Qpp((a+b)/2.+(b-a)/2.*cos(phi)).*(1+cos(phi)).^2;
return;
```

Для использования данного комплекса программ следует ввести явные выражения для внешнего поля  $Q(y)$  и его первой и второй производных в файлы **Q.m**, **Qp.m** и **Qpp.m** соответственно и запустить `drowx1(bot,top,step,a,b)`, где аргументами служат начальное и конечное значения массы меры  $x$ , шаг, с которым оно изменяется и начальная точка итерации при весе *bot* (далее за начальную точку принимается значение

на предыдущем шаге). За начальную точку рекомендуем выбирать отрезок вблизи минимума внешнего поля.

## 4.2 Определение носителя равновесной меры с ограничением.

Мы применяем встроенные функции минимизации.

Файл **drowx2.m** Основная программа, рисует минимумы функции FalGH при помощи стандартной функции fminunc

```
function [s1]=drowx(bot,top,step,a,b,A,B) clf;
p=0.25;
Aneq=[1,-1];
bneq=[-0.01];
lb=[A,A];
ub=[B,B];
s2= fmincon(@FalGH1,[a,b],Aneq,bneq,[],[],lb,ub,[],[],bot)
if A+0.000001<s2(1)s2(2)<B-0.000001 Case =1; end;
if A+0.000001>=s2(1)s2(2)<B-0.000001 Case =2.1; end;
if A+0.000001<s2(1)s2(2)>=B-0.000001 Case =2.2; end;
if A+0.000001>=s2(1) s2(2)>=B-0.000001 Case =3; end;
x0=[a,b];
for x=bot:step:top
x
if abs(Case-1)<=0.00001
Case
option = optimset('LargeScale','off','GradObj','off');
[s2,fval,exitflag]
= fmincon(@FalGH1,x0,Aneq,bneq,[],[],lb,ub,[],option,x);
if exitflag > 0
plot(s2(1),x,'ro',s2(2),x,'mo'); x0=s2; else x0=[a,b]; end;
hold on
end;
if abs(Case-2.1)<=0.00001
Case
option = optimset('LargeScale','off','Hessian','off');
[s2,fval,exitflag,output,jacobian]
= fsolve(@FalGH21,x0,[],x,A,B);
if
exitflag > 0
real(jacobian(1,1))<=0.01 real(jacobian(2,2))>=-0.01
```

```

plot(s2(1),x,'go',s2(2),x,'bo'); x0=s2;
else x0=[a,b];if exitflag > 0
plot(s2(1),x,'ko',s2(2),x,'ko'); x0=s2;end;end;
hold on
end;
if abs(Case-2.2)<=0.00001
Case
option = optimset('LargeScale','off','Hessian','off');
[s2,fval,exitflag,output,jacobian] =
fsolve(@FalGH21,x0,[],x,A,B);
if exitflag > 0
plot(s2(1),x,'go',s2(2),x,'bo'); x0=s2; else x0=[a,b];end;
hold on
end;
if abs(Case-3)<=0.00001
Case
option = optimset('LargeScale','off','GradObj','off');
[s2,fval,exitflag] =
fmincon(@FalGH3,x0,Aneq,bneq,[],[],lb,ub,[],option,x,0,1);
if exitflag > 0
plot(s2(1),x,'ro',s2(2),x,'mo'); x0=s2;else x0=[a,b]; end;
hold on
end;
if exitflag > 0
if A+0.001<s2(1) s2(2)<B-0.001 abs(Case-1)<=0.01
Case =1; end;
if A+0.001>=s2(1) s2(2)<B-0.001 abs(Case-1)<=0.01
Case =2.1; x0=[a,b]; end;
if A+0.001<s2(1) s2(2)>=B-0.001 abs(Case-1)<=0.01
Case =2.2; x0=[a,b]; end;
if A+0.001>=s2(1) s2(2)>=B-0.001 abs(Case-1)<=0.01
Case =3; x0=[a,b]; end;
if s2(2)<B-0.001 abs(Case-2.1)<=0.001
Case =2.1; end;
if A+0.001<s2(1) s2(2)>=B-0.001 abs(Case-2.1)<=0.01
Case =3; x0=[a,b]; end;
if s2(2)<B-0.001 abs(Case-2.2)<=0.01 Case =2.2; end;
if A+0.001<s2(1) s2(2)>=B-0.001 abs(Case-2.2)<=0.01
Case =3; x0=[a,b]; end;

```

```

if abs(Case-3)<=0.01
Case =3; if s2(2)-s2(1)<0.01 x0=[a,b]; end; end;
else x0=[a,b];end;
ans1=x.*(1-p)+p.*(1-x)-2*sqrt(x.*(1-p).*p.*(1-x));
ans2=x.*(1-p)+p.*(1-x)+2*sqrt(x.*(1-p).*p.*(1-x));
plot(ans1,x,'k-',ans2,x,'k-');
end;
return;

```

Файл **FalGH1.m** - функционал для случая 1.

```

function [F,g,H]=Fal(s,x)
F= -x*log((s(2)-s(1))./4)
+(1/pi)*quad('Qc',0,pi,1.e-8,0,s(1),s(2));
return;

```

Файл **FalGH21.m** - функционал для случая 2'.

```

function [F,H]=Fal(s,x,AA,BB)
archA= (s(2)+s(1)-2*AA)./(s(2)-s(1));
Ah=log(abs(archA));
A=Ah
+log(abs(
1-sqrt(abs( 1-( (s(2)-s(1))./(s(2)+s(1)-2*AA) )^2)))));
Fpah= x./(s(2)-s(1))
-1/(2*pi)*quad('Qpac',pi,0,1.e-5,0,s(1),s(2));
if A<0
Fpa=Fpah-0.5*quad('gsigac1',A,0,1.e-8,0,s(1),s(2),AA,BB);
else Fpa=Fpah;end;
Fpbh=- x./(s(2)-s(1))
+1/(2*pi)*quad('Qpbc',0,pi,1.e-5,0,s(1),s(2));
if A<0
Fpb=Fpbh+0.5*quad('gsigbc1',A,0,1.e-8,0,s(1),s(2),AA,BB);
else Fpb=Fpbh;end;
F = [Fpa;Fpb];
return;

```

Файл **FalGH22.m** - функционал для случая 2''.

```

function [F,H]=Fal(s,x,AA,BB)

```

```

Bh=log(abs((-s(2)-s(1)+2*BB)/(s(2)-s(1))));
B=log(1+sqrt(abs(1-((s(2)-s(1))/(-s(2)-s(1)+2*BB)).^2)));
Fpah= x./(s(2)-s(1))
+1/(2*pi)*quadl('Qpac',0,pi,1.e-8,0,s(1),s(2));
if B>0
Fpa=Fpah-0.5*quad('gsigac2',0,B,1.e-8,0,s(1),s(2),AA,BB);
else Fpa=Fpah; end;
Fpbh=- x./(s(2)-s(1))
+1/(2*pi)*quadl('Qpbc',0,pi,1.e-8,0,s(1),s(2));
if B>0
Fpb=Fpbh+0.5*quad('gsigbc2',0,B,1.e-8,0,s(1),s(2),AA,BB);
else Fpb=Fpbh; end;
F = [Fpa;Fpb];
return;

```

Файл **FalGH3.m** - функционал для случая 3.

```

function [F,g,H]=Fal(s,x,AA,BB)
B=log(((s(2)-s(1)+2*BB)/(s(2)-s(1)))
+sqrt(abs(((s(2)-s(1)+2*BB)/(s(2)-s(1))).^2-1)));
A=log(((s(2)+s(1)-2*AA)/(s(2)-s(1)))
-sqrt(abs(((s(2)+s(1)-2*AA)/(s(2)-s(1))).^2-1)));
Fh= x*log((s(2)-s(1))/4)
-(1/pi)*quad('Qc',0,pi,1.e-8,0,s(1),s(2));
if AA<s(1)
Fhh=quad('gsig',AA,s(1),1.e-8,0,s(1),s(2),AA,BB);
else Fhh=0;end;
if BB>s(2)
Fhhh=quad('gsig',s(2),BB,1.e-8,0,s(1),s(2),AA,BB);
else Fhhh=0;end;
F=Fh+Fhh+Fhhh;
return;

```

Файл **sigma.m** - ограничение, задается пользователем явно

```

function sig=sig(y,A,B)
constraint
if y>=A y<=B sig=1; else sig=0;end;
return;

```

Файл **Q.m** - внешнее поле, задается пользователем явно

```
function Q=Q(y)
the external field
Q=
log(abs(
(y.y).*((1-y).(1-y)))/(0.25.y.*((1-0.25).(1-y))))/2;
return;
```

Файл **Qp.m** - первая производная внешнего поля, задается пользователем явно

```
function Qp=Qp(y)
the first derivative of the external field
if y>0.00001 Qp=(log(abs(y./(0.25*(1-y))))+log(1-0.25))/2;
else plot(y,y,'yo');end;
return;
```

Файл **gsig.m** - функция Грина отрезка [a,b] умноженная на ограничение.

```
function [gs]=gs(y,a,b,A,B)
if y>=a y<=b gs = 0; else
gsh=log(abs((2.*y-a-b)/(b-a)));
gshh=
log(abs(1+abs(sqrt(abs(1-(abs((b-a)/(2.*y-a-b)).2))))));
gs=sigma(y,A,B).*(gsh+gshh);
end;
return;
```

Сделана замена переменных  $y=(a+b)/2+(b-a)/2*\cos(\phi)$  в интеграле от внешнего поля по мере Робена и найдены производные по концам интервала  $a$  и  $b$  от подынтегрального выражения. Это файлы **Qc.m**, **Qpac.m** и **Qpbc.m** из предыдущего пункта.

Далее сделана замена переменных  $t=(a+b)/2\mp(b-a)/2*\cos(\phi)$  в интеграле от функции Грина по ограничению  $\sigma$  и найдены производные по концам интервала  $a$  и  $b$  от подынтегрального выражения.

Файл **gsigac1.m** - производная функции Грина отрезка [a,b] по  $a$  умноженная на ограничение, сделана замена переменных для случая когда интегрирование ведется слева от [a,b].

```
function [gsigac]=gsigac(t,a,b,A,B) cht=(exp(t)+exp(-t))/2;
y=((a+b)./2-(b-a)./2.*cht);
if y>=a y<=b gsigac=0; else
gsigac=sigma(y,A,B).*(cht+1); end;
return;
```

Файл **gsigbc1.m** - производная функции Грина отрезка  $[a,b]$  по  $b$  умноженная на ограничение, сделана замена переменных для случая когда интегрирование ведется слева от  $[a,b]$ .

```
function [gsigbc]=gsigbc(t,a,b,A,B) cht=(exp(t)+exp(-t))/2;
y=((a+b)./2-(b-a)./2.*cht);
if y>=a y<=b gsigbc=0; else gsigbc=sigma(y,A,B).*(cht-1);
end;
return;
```

Файл **gsigac2.m** - производная функции Грина отрезка  $[a,b]$  по  $a$  умноженная на ограничение, сделана замена переменных для случая когда интегрирование ведется справа от  $[a,b]$ .

```
function [gsigac]=gsigac(t,a,b,A,B)
cht=(exp(t)+exp(-t))/2;
y=((a+b)./2+(b-a)./2.*cht);
if y>=a y<=b gsigac=0; else gsigac=sigma(y,A,B).*(cht-1);
end;
return;
```

Файл **gsigbc2.m** - производная функции Грина отрезка  $[a,b]$  по  $a$  умноженная на ограничение, сделана замена переменных для случая когда интегрирование ведется справа от  $[a,b]$ .

```
function [gsigbc]=gsigbc(t,a,b,A,B)
cht=(exp(t)+exp(-t))/2;
y=((a+b)./2+(b-a)./2.*cht);
if y>=a y<=b gsigbc=0; else gsigbc=sigma(y,A,B).*(cht+1);
end;
return;
```

Для использования данного комплекса программ следует ввести явные выражения для ограничения и внешнего поля  $Q(y)$  и его первой производ-

ной в файлы `sigma.m`, `Q.m` и `Qp.m` и запустить `drowx2(bot,top,step,A,B,a,b)`, где аргументами служат начальное и конечное значения веса меры  $x$ , шаг с которым оно изменяется, носитель ограничения  $[A,B]$  и начальная точка итерации при весе  $bot$ , далее за начальную точку принимается значение на предыдущем шаге в случае успешного завершения вычислений, иначе за начальную точку принимается  $(a,b)$ ; за начальную точку рекомендуется выбрать отрезок вблизи минимуму внешнего поля.

## Список литературы

- [1] *Е.М. Никитин, В.Н. Сорокин. Рациональные аппроксимации и ортогональность.* Москва "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. 1988.
- [2] *P. D. Dragnev, E. B. Saff. Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable.* J.Anal. Math. 72(1997),223-259.
- [3] *P. D. Dragnev, E. B. Saff. A problem in potential theory and zero asymptotics of Krawtchouk polynomials.* J.of Approx. Theory 102(2000).
- [4] *A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche. A contact problem in elasticity related to weighted polynomials on the real line.*Rend. Circ. Mat. Palermo., serie II, 52, volume 11, 1998, 575-587.
- [5] *H.N. Mhaskar, E. B. Saff. Where does the sup norm of a weighted polynomial live?* Constr. Approx(1985),1,71-91.
- [6] *E. B. Saff, V. Totik. Logarithmic Potentials with External Fields.* Grundlehren Math. Wiss. 316, Springer, Berlin,1997.
- [7] *P. D. Dragnev, E. B. Saff. A Problem in Potential Theory and Zero Asymptotics of Krawtchouk Polynomials.* Journal of Approximation theory, 102, 120-140, 2000.
- [8] *В. С. Буюров, Е. А. Рахманов. О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси.* ,Мат. сб. №5 190(1999), 11-22;
- [9] *A.I.Aptekarev, W. Van Assche. Asymptotic of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice.* Journal of physics A: Mathematics and General, 34(48), 2001, 10627-10639.
- [10] *P. Deift, K. T-R McLaughlin. A Continuum Limit of the Toda Lattice.* Memoirs of the American Mathematical Society. Number 624. January 1998, Volume 131.
- [11] *Н. Н. Мухелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручения и изгибы.* Москва "Наука". 1966.