О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Н.Н. Фимин

ДИНАМИКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ЛАГРАНЖЕВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Москва
2006

**ДИНАМИКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
И КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
В ЛАГРАНЖЕВОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Н.Н. Фимин

Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

В работе рассмотрены базисные аспекты теории лагранжевых пространств и приведена методика вывода кинетических уравнений на лагранжевых и гамильтоновых многообразиях.

**DYNAMICS OF STATISTICAL SYSTEM
AND KINETIC EQUATIONS
IN LAGRANGE GEOMETRY**

N.N. Fimin

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

In this work the basic aspects of Lagrange spaces theory are considered and methods for kinetic equations on Lagrange and Hamilton manifolds obtaining are analyzed.

1. Введение

Возможность применения не-римановых геометрий для анализа динамики статистических систем в пространстве с кривизной является новым и вполне многообещающим подходом к весьма широкому классу задач как классического (топологическая теория турбулентности, описание поведения нелокальных объектов вблизи сингулярностей в теории коллапса и космологии), так и квантового (взаимодействия, описываемые уравнения Вигнера, теория некоммутативных вариант в физике элементарных частиц и квантовая теория гравитации) характера. Фактически, в настоящее время уже существует значительный теоретический базис для подобного рода изысканий: начиная с работ 20-х гг. Э.Картана [1] — [2] и П.Финслера [3] — [4] до создания в последнее десятилетие теории лагранжевых и обобщенных финслеровых пространств [5] — [10]. Более того, весьма примечательно, что, начиная с 70-х гг., поток публикаций, посвященных экспериментальным и оценочным аспектам прикладной не-римановой геометрии в физике космических лучей, астрофизике черных дыр и различных обобщениях специальной теории относительности, существенно вырос и вопринимается научной общественностью как самостоятельная ветвь исследований в данных областях. Достаточно упомянуть работы: [11] — [16] (посвященные вопросу обрезания энергетического спектра первичных космических протонов); [17] — [22] (в которых развивается так называемая "Double Special Relativity", то есть вариант СТО, где в качестве инвариантов участвуют как скорость света c, так и некая вторая "фундаментальная" величина — например, планковская длина ℓ_P или планковская энергия E_P) ; [23] (касающуюся углового распределения температурных флуктуаций микроволнового фонового излучения).

Однако непосредственно поведение статистической системы (ансамбля частиц) в пространстве с финслеровой (или более общей симплектической метрической функцией) до настоящего времени освещалось весьма скудно; основной причиной, по-видимому, здесь следует считать не только усложненность математического аппарата "физической геометрии" (или отсутствие интереса к задачам динамики системы частиц в ней), сколько необходимость его специальной адаптации с введением "нестандартных" — существенно отличающихся по форме и содержанию от привычных "классических" — предположений в получающийся вариант статистической механики, термодинамики и гидродинамики. Тем не менее внимательное изучение этого вопроса приводит к выводу, что "принцип соответствия" здесь не нарушается — и более того, некоторые наблюдаемые эффекты могут получить более простое и ясное обоснование.

В настоящей работе предпринята попытка изучить динамику многочастичной системы с точки зрения обобщения некоторых аспектов теории кинетических уравнений типа Власова и Больцмана на многообразиях, подчиняющихся лагранжевой геометрии; в качестве физической иллюстрации рассматриваемого формализма исследуются искривленные анизотропные пространства типа Шварцшильда и другие, находящие применение в теории чёрных дыр.

2. Общие определения

Итак, рассмотрим сначала некое предварительное построение динамики многих тел. Пусть в $\mathbb{R}^n$ с точками $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ задана кривая $x(t)$, где $t \in \mathbb{R}^1$ — параметр, то есть заданы функции $x^i = x^i(t)$, $i = 1, ..., n$. Касательным вектором "в момент t" называется вектор $\dot{x} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, ..., \dot{x}^n)$.

Определим, следуя [24], ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО $V \equiv V_{(2n)}$ как пространство точек

$$z = (x, \dot{x}) = (x^1, ..., x^n; \dot{x}^1, ..., \dot{x}^n), \quad x \in X_{(n)}, \ \dot{x} \in X^{\bullet}_{(n)}.$$

Пусть при заданном L точка $z \in V$ за время t переходит в точку $z' = z(t)$; этим определяется преобразование $S_t(V \to V): \ z \to z(t) \equiv S_t z$, S_t — оператор эволюции. Множество всех S_t $(t \in \mathbb{R})$ — фазовый поток в V, сами линии $S_t z$ — траектории частиц в фазовом пространстве V. Механическая система N точек состоит из точек в топологическом смысле (то есть нульмерных несвязных множеств — ибо каждую точку–математический образ физической частицы окружает пустое множество — в физических терминах вакуум), то $dim\ x^i = 0$, $i = 1, ..., N$; "точка фазового пространства" $V_{(2n)}$, изображающая состояние механической системы в некоторый начальный момент времени $z(t_0)$ определяется $2n \times N$ параметрами: метрический "образ", характеризующий — в бесконечномерном (!) пространстве возможных начальных состояний $\mathcal{I}_0$ структуру такого множества, причем предполагается, что $\mathcal{I}_0$ является отделимым с дискретной топологией; таким образом, получается, что согласно определению топологической размерности [25], $dim\ z(t_0) = 0$. Иначе говоря, рассматривая систему N "механических точек", мы не можем получить $2n \times N$–мерный статистический ансамбль.

Чтобы перейти к статистической системе, необходимо определить КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ импульсно-конфигурационного пространства, связывающее систему дискретных точек в топологическое пространство с ненулевой размерностью. Дадим соответствующие определения.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АТЛАС размерности N на топологическом хаусдорфовом пространстве F_H — семейство троек $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, W_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, где: 1)$U_\alpha \subset F_H$ — открытые множества в F_H, причем $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = F_H$; 2) $W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{\mathbb{Z}^+ \cup \infty\}$ — открытые множества $\mathbb{R}^n$, $n \in \{\mathbb{Z}^+ \cup \infty\}$; 3)$\phi_\alpha: \ U_\alpha \to W_\alpha$

— гомеоморфизмы (топологические карты) на W_α.

Топологическим многообразием размерности n называется топологическое хаусдорфово пространство F_H, имеющее топологический атлас $\mathcal{A}$ размерности n.

Требование хаусдорфовости топологии в вышеприведенных определениях, вообще говоря, не является необходимым (это будет использовано в дальнейшем).

Атлас $\mathcal{A}|_{m,F_H} = \{(U_\alpha, W_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ размерности N на топологическом многообразии F_H принадлежит классу дифференцируемости C^m, если данный атлас таков, что отображения

$$\phi_\beta \circ \phi_\beta^{-1} : \ \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1}$$

принадлежат классу C^m как отображения между открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$, для любых $\alpha, \beta \in A$ таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Соответственно, C^m–атлас состоит из C^m–карт; при этом для карт $\phi_\alpha : \ U_\alpha \to W_\alpha$ и $\phi_\beta : \ U_\beta \to W_\beta$ отображения $\phi_\alpha \cap \phi_\beta^{-1}, \ \phi_\beta \cap \phi_\alpha^{-1} \in C^m$.

Дифференцируемым многообразием класса C^m размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство F_H, обладающее дифференциальной структурой класса C^m размерности n — классом эквивалентности C^m–атласов (размерности n) на F_H.

Координатной системой в точке $f \in U \subset F_H$ (F_H — дифференцируемое многообразие) называется карта (U, ϕ) на F_H, совместимая с его дифференциальной структурой (принадлежащая максимальному атласу).

Обозначим $(U, \phi) = (U, x)$, где $x = (x^1, x^2, ..., x^n) : \ U \to \mathbb{R}^n$, x^s $(s = 1, ..., n)$ — вещественнозначные функции на U (локальные координаты в т. ζ — можно положить $x^s(\zeta) = 0$, и ассоциировать открытые множества $U \subset F_H$ с окрестностями нуля в $\mathbb{R}^n$).

Функция $\varpi : \ F_H \to \mathbb{R}$ на топологическом многообразии F_H может быть представлена как: $\varpi^\phi = \varpi^x = \varpi \circ \phi^{-1} = \varpi(x^1, x^2, ..., x^n)$ на карте $(U, \phi) = (U, x)$.

Определим дифференцируемость на многообразиях (для которых будем использовать обозначение $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_k$, чтобы отличать от "общих" топологических многообразий) следующим образом:

Функция $\psi : \ \mathcal{M} \to \mathbb{R}^1$, где $\mathcal{M}$ — дифференцируемое многообразие класса C^m (размерности n), оснащенное атласом $\mathcal{A} = \{U_\alpha, W_\alpha, \phi_\alpha\}|_{\alpha\in A}$ принадлежит классу C^m, если композиция $\psi \circ {\phi_\alpha}^{-1} : \ W_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ принадлежит классу C^m $\forall\alpha \in A$.

Отображение $\psi : \ V \to F$, $V \subset \mathbb{R}^K$ — открытое множество, принадлежит классу C^m, если отображения $\phi_\alpha \circ \psi : \ V_1 \subset \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^n$ принадлежат классу C^m на $V_1 = V \cap \psi^{-1}(U_\alpha)$ $\forall\alpha \in A$.

Отображение $\psi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1$ — дифференцируемое многообразие класса C^m, размерности n, оснащенное атласом $\mathcal{A}_1 = \{U_\alpha^{(1)}, W_\alpha^{(1)}, \phi_\alpha^{(1)}\}|_{\alpha\in A}$, $\mathcal{M}_2$ — дифференцируемое многообразие класса C^m, размерности n_1, оснащенное атласом $\mathcal{A}_2 = \{U_\beta^{(2)}, W_\beta^{(2)}, \phi_\beta^{(2)}\}|_{\beta\in B}$, принадлежит классу C^m, если композиции отображений

$$\phi_\beta^{(2)} \circ \psi \circ (\phi_\alpha^{(1)})^{-1} :\ W_\alpha^{(1)} \cap \psi^{-1}(V_\beta^{(2)}) \to \mathbb{R}^{n_1} \tag{2}$$

принадлежит классу C^m $\forall \alpha \in A$, $\forall \beta \in B$. Отображение $\psi :\ \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ есть диффеоморфизм класса C^m, если оно биективно и отображения $\psi :\ \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, $\psi^{-1} :\ \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_1$ принадлежат классу C^m.

Пусть дифференцируемое многообразие $\mathcal{M}$ (размерности n) является гладким (то есть принадлежит классу C^∞) и на нем определен атлас $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (то есть $\phi_\alpha U_\alpha = W_\alpha$). Далее, пусть $\zeta \in \mathcal{M}$ — точка многообразия и (U_α, ϕ_α) — карта, такая, что $\zeta \in U_\alpha$. Рассмотрим две дифференцируемые (класса C^1) кривые, проходящие через точку ζ:

$$\sigma_1,\ \sigma_2 :\ (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}, \quad \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \zeta, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Эти две кривые (σ_1 и σ_2) касательны в точке $\zeta \in \mathcal{M}$, если выполнено соотношение:

$$\frac{d}{dt}\phi_\alpha \circ \sigma_1(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi_\alpha \circ \sigma_2(t)|_{t=0}. \tag{4}$$

(иначе: в некоторой локальной системе координат $(x^1, ..., x^n)$ вблизи этой точки кривые касательны в обычном смысле, как кривые в $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{dx^i}{dt}(\sigma_1(t))|_{t=0} = \frac{dx^i}{dt}(\sigma_2(t))|_{t=0}, \quad i = 1, 2, ..., n). \tag{5}$$

Касательный вектор y в точке $\zeta \in \mathcal{M}$ — класс эквивалентности C^1–кривых $[\sigma]$ на $\mathcal{M}$, где отношением эквивалентности между кривыми является то, что они касательны в точке ζ.

В локальных координатах (U_α, ϕ_α) касательный вектор можно представить следующим образом:

$$y_\alpha \equiv \frac{d}{dt}\phi_\alpha \circ \sigma(t)|_{t=0} = (\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, ..., \frac{dx^n}{dt})(0),\ \ x^s(t) = \phi_\alpha^s(\sigma(t)), \quad \phi_\alpha = (\phi_\alpha^1, ..., \phi_\alpha^n). \tag{6}$$

Касательное пространство $T_\zeta\mathcal{M}$ к $\mathcal{M}$ в т. $\zeta \in \mathcal{M}$ — множество всех касательных векторов y в т. ζ.

Касательное расслоение $T\mathcal{M}$ определяется как

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{\zeta \in \mathcal{M}} T_\zeta \mathcal{M}. \tag{7}$$

Элементы касательного пространства $\dot{x}^i \equiv y^i$ (которые можно интерпретировать как все возможные значения векторов скоростей, опирающихся на данную точку x^i) определены не локально, а вдоль параметризованных смещений dx^i; таким образом, объединение множества пар элементов $(x^i, \dot{x}^i)$ представляет собой топологическое произведение двух соответствующих подпространств. Компоненты x^i касательного расслоения есть элементы пространства возможных значений "центров инерции" физических частиц, представляющего собой континуальное (не дискретное) множество топологической размерности n, а $\dot{x}^i$ — элементы подобного же кинематического пространства (также размерности n).

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ две фиксированные точки:

$$A(x^1(a), x^2(a), ..., x^n(a)), \quad B(x^1(b), x^2(b), ..., x^n(b))(a, b \in \mathbb{R}^1) \tag{8}$$

и множество $\{\ell_{AB}\}$ всех гладких кривых, соединяющих эти точки. Зададим функцию $L(x, \dot{x}, t)$ (лагранжиан, определенный с точностью до преобразования $L \to L + d\lambda/dt$, $\lambda(t)$ — произвольная функция) и функционал действия S на $\{\ell_{AB}\}$:

$$S(\ell_{AB}) = \int_{\ell_{AB}} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \tag{9}$$

где интеграл берется вдоль кривой $\{\ell_{AB}\}$.

Согласно известным определениям классической механики [26], $\dot{x}^i$ $(i = \overline{1,n})$ следует идентифицировать как i-ую компоненту обобщенной скорости $\dot{x}$, а $p^i = \partial L / \partial \dot{x}^i$ — как i-ую компоненту обобщенного импульса p. При этом, очевидно, обобщенный импульс p, хотя и есть, как $\dot{x}$, тензорная величина ранга 1, преобразуется по другому закону, нежели обобщенная скорость. В действительности p является элементом дуального касательного (или кокасательного) пространства $T^* X_{(n)}$ (для данного конфигурационного подмногообразия $X_{(n)}$).

Для того, чтобы дать строгое определение кокасательного расслоения, введем сначала понятие алгебраически дуального пространства. Для вещественного векторного поля $\hat{X}$ алгебраически дуальным является множество $\hat{X}^*$ всех линейных отображений $B: \hat{X} \to \mathbb{R}^1$; значение отображения

$B \in \hat{X}^*$ на элементе $\hat{x} \in \hat{X}$ обозначим $\langle B, \hat{x} \rangle$ (или $\langle B, \hat{x} \rangle | \hat{X}$). Свойства отображения B:

$$\langle B_1 + B_2, \hat{x} \rangle := \langle B_1, \hat{x} \rangle + \langle B_2, \hat{x} \rangle, \tag{10}$$

$$\langle rB, \hat{x} \rangle := r\langle B, \hat{x} \rangle \ \ \forall r \in \mathbb{R}^1, \ \forall \ B, B_1, B_2 \in \hat{X}^*, \ \hat{x} \in \hat{X}. \tag{11}$$

Если $dim \ \hat{X} = n$, $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_n\}$ — базис в $\hat{X}$, то в пространстве $\hat{X}^*$ дуальный базис состоит из векторов $\{\bar{e}^1, ..., \bar{e}^n\}$, таких, что $\langle \bar{e}^i, \hat{e}_j \rangle = \delta^i_j$ $\forall i, j = \overline{1, n}$. Если $B : \ \hat{X} \to \widetilde{X}$ — линейное отображение векторного пространства $\hat{X}$ в векторное пространство $\widetilde{X}$, то дуальное к B отображение $B^* :$ $\widetilde{X}^* \to \hat{X}^*$ определяется на элементах $\widetilde{x}^* \in \widetilde{X}^*$ посредством соотношения $\langle B^* \widetilde{x}^*, \hat{x} \rangle | \hat{X} := \langle \widetilde{x}^*, Bx \rangle | \widetilde{X}$.

Возвращаясь от абстрактных векторных пространств $\hat{X}$, $\widetilde{X}$ к рассмотренному выше касательному пространству $T_\zeta \mathcal{M}$, дадим необходимые для дальнейшего изложения определения.

Кокасательный вектор в точке $\zeta \in \mathcal{M}$ — вещественнозначное отображение $p : \ T_\zeta \mathcal{M} \to \mathbb{R}^1$. Значение p на касательном векторе $\dot{x} \in T_\zeta \mathcal{M}$ обозначим $\langle p, \dot{x} \rangle_\zeta$ (или $\langle p, \dot{x} \rangle$).

Кокасательное пространство в т.$\zeta \in \mathcal{M}$ есть множество $T^*_\zeta \mathcal{M}$ всех таких линейных отображений, то есть дуальное векторному пространству $T_\zeta \mathcal{M}$; при этом $dim \ T^*_\zeta \mathcal{M} = dim \ T_\zeta \mathcal{M} = dim \ \mathcal{M}$.

Кокасательное расслоение $T^* \mathcal{M}$ представляет собой объединение всех кокасательных пространств к многообразию $\mathcal{M}$ во всех его точках:

$$T^* \mathcal{M} := \bigcup_{\zeta \in \mathcal{M}} T^*_\zeta \mathcal{M}. \tag{12}$$

Множество $T^* \mathcal{M}$ имеет естественную структуру дифференцируемого многообразия размерности $2n$; если (U, ϕ) — локальная координатная карта на $\mathcal{M}$, то ассоциированными $2n$ координатами кокасательного вектора p в любой точке $\zeta \in U$ являются по определению : n вещественных чисел $\{x^1(\zeta), ..., x^n(\zeta)\}$ в совокупности с n вещественными числами $\{p_1, ..., p_n\}$, где $p_s := \langle p, (\partial / \partial x^s)_\zeta \rangle_\zeta$. Действительно, локальный базис в точке $\zeta \in \mathcal{M}$ представляет собой набор

$$(\partial / \partial x^1)_\zeta, (\partial / \partial x^2)_\zeta, ..., (\partial / \partial x^n)_\zeta \tag{13}$$

производных для $T_\zeta \mathcal{M}$; ассоциированный дуальный базис в $T^*_\zeta \mathcal{M}$:

$$(dx^1)_\zeta, (dx^2)_\zeta, ..., (dx^n)_\zeta, \tag{14}$$

причем, согласно вышеприведенному определению $T^*_\zeta\mathcal{M}$:

$$\langle (dx^{s_1})_\zeta, (\partial/\partial x^{s_2})_\zeta\rangle_\zeta = \delta^{s_1}_{s_2}, \quad s_1, s_2 = 1, 2, ..., n. \tag{15}$$

Любой элемент $p \in T^*_\zeta\mathcal{M}$ представим в виде:

$$p = \sum_{s=1}^{n} p_s (dx^s)_\zeta, \quad p_s = \langle p, (\partial/\partial x^s)_\zeta\rangle_\zeta, \ s = 1, 2, ..., n. \tag{16}$$

Таким образом, точка (ковектор) из $T^*\mathcal{M}$ представляет собой 1–форму на касательном пространстве к $\mathcal{M}$ в какой-либо точке $\zeta \in \mathcal{M}$:

$$\omega_\zeta = \sum_{s=1}^{n} \omega_s(\zeta)(dx^s)_\zeta, \tag{17}$$

причем компоненты ω_s 1–формы ω есть функции, определенные на координатной карте посредством соотношения $\omega_s := \langle \omega, (\partial/\partial x^s)_\xi\rangle_\xi \ \forall \xi \in U \subset \mathcal{M}$. Если x — набор n локальных координат точки из $\mathcal{M}$, то данная 1–форма задается своими n компонентами p_s (и, как уже отмечалось, вместе $2n$ чисел x, p составляют набор локальных координат точки $T^*\mathcal{M}$).

3. Переход к статистической теории

Для дальнейшего нам потребуется следующее определение:

Симплектической структурой на (чётномерном) многообразии $T^*\mathcal{M}$ ($dim\ T^*\mathcal{M} = 2n$) называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2–форма ω^2 на $T^*\mathcal{M}$:

$$d\omega^2 = d\omega^1 = 0, \quad \forall \beth_1 \neq 0 \ \exists \beth_2 : \ \omega^2(\beth_1, \beth_2) \neq 0 \ \ (\beth_1, \beth_2 \in T_x\mathcal{M}). \tag{18}$$

Кокасательное расслоение $T^*\mathcal{M}$ конфигурационного пространства (фазовое пространство статистической системы в рассматриваемом формализме) согласно теореме Дарбу [27] имеет естественную симплектическую структуру, локально симплектоморфную $\omega^2 = dp \wedge dx$.

Рассмотрим физический пример. Для анализа динамики статистической системы можно, следуя [28], проанализировать систему уравнений на римановом n–мерном многообразии M с метрикой g_{ij}:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial H(p,q)/\partial q \\ \partial H(p,q)/\partial p \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где (p,q) — $(n+n)$–мерная точка фазового пространства статистической системы, $H(p,q)$ — гамильтониан системы; обобщенная координата $q \in M$, обобщенный импульс $p \in T_q^*M$, где T_q^*M — дуальное касательное пространство над M. Эволюция гамильтониана сохраняет энергию элемент $dpdq$ фазового пространства: функция распределения микроканонического ансабля $\mu_E(H)dpdq = (1/\Omega_E)\delta(H(p,q)-E)dpdq$ (E — энергия системы).

Пусть H для простоты соответствует наличию у частиц только кинетической энергии (нет внешних и межчастичных полей): $H = (1/2m)\sum_{i,j} g^{ij}p_ip_j$. Введем 1–форму $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k(q)dq^k$, а также обозначим

$$\kappa = \sum_i p_i dq^i, \quad \omega = d\kappa = \sum_i dp_i \wedge dq^i, \quad \theta = \omega + (1/2E)\xi \wedge \kappa. \tag{20}$$

Тогда $d\theta = -(1/2E)\xi \wedge d\kappa = (-1/2E)\xi \wedge \theta$, то есть величина θ конформно симплектична. По отношению к базису (dp_i, dq^i):

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & [\xi_i p_j - \xi_j p_i]/2E \end{pmatrix}, \quad dH = \begin{pmatrix} g^{ij}p_j/m \\ (\partial g^{jk}/\partial q^i)p_jp_k/2m \end{pmatrix}, \tag{21}$$

так что уравнения эволюции гамильтониана принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_i \\ q^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(g^{jk}p_jp_k)\xi_i - (g^{jk}\xi_jp_k)p_i]/2E - (\partial g^{jk}/\partial q^i)p_jp_k/2m \\ g^{ij}p_j/m \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Очевидным образом возникает вопрос — существует ли возможность обобщить уравнения эволюции гамильтониана (или уравнения движения Эйлера–Лагранжа) на случай, когда метрическая функция зависит не только от конфигурационной переменной (из многообразия M), но и от элемента касательного пространства ($g^{ij} = g^{ij}(x,y)$, $(x,y) \in TM$) и какие изменения в динамику системы это внесет?

Во-первых, главным ограничением здесь должен служить тот факт, что поток векторного поля S на симплектическом (четномерном) многообразии сохраняет симплектическую структуру ω, если и только если это поле локально гамильтоново; для статистической механики особенно важно, что гамильтонов поток S сохраняет меру Лиувилля $\omega^n = n!\sum_{j=1}^n dr_j \wedge dx_j$. Эволюция фазовой плотности $\rho\omega^n$ под действием поля ν_H описывается уравнением Лиувилля $\dot{\rho} = \{\rho, H\}$ ($\{...\}$ — скобки Пуассона), откуда вытекает стационарность распределения Гиббса $\exp(-\beta H)\omega^n$. Следовательно, "анизотропные" метрики, отличные от (полу)римановых, должны проверяться на "близость" по своим свойствам к последним. Далее, должен срабатывать "принцип соответствия": пространства с обобщенными метриками должны в некотором смысле быть вложены в римановы с более высокой размерностью (обычно $2n$), с наложенными неголономными связями, обусловленными заданной на лагранжевых многообразиях симплектической структурой.

Собственно говоря, сейчас мы непосредственно подошли к пункту, где представляется необходимым ставить уже не математические вопросы, а вопросы скорее философского плана, в частности, такой: что первично — лагранжиан или метрика? Оставим любителям метафизики поле деятельности и предмет для споров. Будем ориентироваться на категорию диалектического развития мировосприятия в нашем понимании сущности движения материи в данном конкретном случае.

В классическом случае эвклидовой и римановой геометрии лагранжиан $L(x, \dot{x}, t)$ ($x = (x^1, ..., x^n) \in \mathcal{M}$, $\dot{x}$ — касательный вектор в этой точке) является элементом некоторого функционального пространства $\beth_L$, на котором определен линейный непрерывный функционал действия $S[L]$ из сопряженного пространства $\beth_L^*$, причем экстремум по всем гладким путям (PQ) ($P, Q \in \mathcal{M}$ — пара фиксированных точек) достигается на решениях системы уравнений Эйлера–Лагранжа. В частности, если $L = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, где g_{ij} — метрика риманова многообразия, то уравнения экстремалей $d^2x^m/dt^2 + \Gamma^m_{ij}(dx^i/dt)(dx^j/dt) = 0$, где Γ^m_{ij} — симметрическая связность Кристоффеля, ассоциированная с метрикой g_{ij}:

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}(\partial g_{ik}/\partial x^j + \partial g_{jk}/\partial x^i - \partial g_{ij}/\partial x^k), \tag{23}$$

совпадают с уравнением геодезических; если $L = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$, то репараметризация "естественного параметра" t на кривой (PQ) дает те же уравнения.

Но что произойдет, если метрикой наделить не риманово многообразие $\mathcal{M}$, а касательное расслоение $T\mathcal{M}$, принимая во внимание "скоростные переменные"?

Очевидно, можно ввести новую, т.н. ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ МЕТРИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ (по аналогии с финслеровым пространством) нового пространства. Для этого сначала дадим строгие определения лагранжиана на расслоении и некоторых других величин, которые потребуются в дальнейшем.

Точка $u \in T\mathcal{M}$ имеет локальные координаты (x^i, y^i) $(i = 1, ..., n)$. Преобразование локальных координат $(x^i, y^i) \to (\widetilde{x}^i, \widetilde{y}^i)$ на $T\mathcal{M}$ задается соотношениями:

$$\widetilde{x}^i = \widetilde{x}^i(x^i, ..., x^n), \quad det(\partial\widetilde{x}^i/\partial x^i) \neq 0, \quad \widetilde{y}^i = (\partial\widetilde{x}^i/\partial x^i)y^i. \tag{24}$$

Данное преобразование координат определяет преобразование базиса касательного пространства $T_uT\mathcal{M}$ в точке $u \in T\mathcal{M}$ $(\partial/\partial x^i,\, \partial/\partial y^i)$ $(i = 1, ..., n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j} + \frac{\partial \widetilde{y}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^j}, \quad \frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial \widetilde{y}^j}{\partial y^i}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial y^j} = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \widetilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^h} y^h. \tag{26}$$

Определим проектор $\pi : \ T\mathcal{M}\backslash\{0\} \to \mathcal{M}$ так что $\pi(u) = x$ (здесь $T\mathcal{M}\backslash\{0\} = \bigcup\{T_x\mathcal{M}\backslash \ \{0\} : x \in \mathcal{M}\}$). Касательное пространство V_u к слою $\pi^{-1}(x)$ в точке $u \in T\mathcal{M}$ локально натянуто на векторы $\{\partial/\partial y^1, ..., \partial y^n\}$; таким образом, отображение $V : \ u \in T\mathcal{M} \to V_u \subset T_uT\mathcal{M}$ есть интегрируемое распределение на $T\mathcal{M}$ (так называемое ВЕРТИКАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ на $T\mathcal{M}$) (поэтому можно определить ненулевое ВЕРТИКАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ (или ПОЛЕ ЛИУВИЛЛЯ) на $T\mathcal{M}$: $\mathcal{C} = y^i\partial/\partial y^i$). КАСАТЕЛЬНАЯ СТРУКТУРА J на $T\mathcal{M}$ определяется как сюръективный линейный оператор, обладающий свойствами $J(\partial/\partial x^i) = \partial/\partial y^i$, $J(\partial/\partial y^i) = 0$ (при этом $J \circ J = 0$, $Im\ J = Ker\ J = V$, $rank\|J\| = n$, $J\mathcal{C} = 0$).

ПОЛУСТРУЯ (SEMISPRAY) $\mathcal{S}$ на $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$ — векторное поле на касательном многообразии, такое, что $J\mathcal{S} = \mathcal{C}$. Согласно теореме 1.3.1 [29], его явный вид следующий:

$$\mathcal{S} = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{27}$$

где функции (из множества функций, задаваемых априорно на каждой области определения локальных карт в $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$) $G^i(x,y)$ $(i = 1, ..., n)$ при локальных преобразованиях координат $(x^i, y^i) \to (\widetilde{x}^i, \widetilde{y}^i)$ преобразуются следующим образом:

$$\widetilde{G}^i = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}G^j - \frac{1}{2}\frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^j}y^j. \tag{28}$$

Полуструя $\mathcal{S}$ на $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$ с коэффициентами $G^i(x,y)$ характеризуется системой дифференциальных уравнений

$$dx^2/dt^2 + 2G^i(x, dx/dt) = 0, \tag{29}$$

следующей из вида интегральных кривых полуструи $\mathcal{S}$: $dx^i/dt = y^i$, $dy^i/dt = -2G^i(x,y)$.

В качестве примера: если на $\mathcal{M}_{Riem}$ задана риманова метрика ${}^Rg_{ij}$, то в качестве коэффициентов ${}^RG^i(x,y)$ полуструи можно взять множество функций ${}^RG^i(x,y) = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^iy^j$ (где Γ^i_{jk} — обычные коэффициенты Кристоффеля 2-го рода (23), ассоциированные с римановой метрикой ${}^Rg_{ij}$), которые преобразуются при замене координат (24) в соответствии с формулой (28). Соответственно, уравнения (29) принимают вид

$$d^2x/dt^2 + \Gamma^i_{jk}(x)(dx^j/dt)(dx^k/dt) = 0. \tag{30}$$

Следовательно, решения (29) в канонической параметризации являются геодезическими риманового пространства $(\mathcal{M}_{Riem}, {}^R g_{ij})$.

Величины $N^i_j = \partial G^i/\partial y^j$ — коэффициенты так называемой НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ на многообразии $T\mathcal{M}$, определяемой определенной выше полуструей [30], [31]. Для анализа их свойств рассмотрим касательное расслоение многообразия $\mathcal{E} \equiv T\mathcal{M}$: $(\mathcal{E}, \pi^\top, \mathcal{E})$, где $\pi^\top : T\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — композиция касательного отображение с проектором π ($Ker\ \pi^\top$ есть вертикальное подрасслоение $(V\mathcal{E}, \pi_V, \mathcal{E})$ — см. выше). Касательное векторное поле на $\mathcal{E}$ может быть представлено в "естественном" базисе на $\mathcal{E}$ $(\partial/\partial x^i, \partial/\partial y^i)$ следующим образом:

$$F = X^i(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{31}$$

Символически: $F = (x^i, y^i, X^i, Y^i)$. Действие отображение $\pi^\top : T\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ тогда можно изобразить как $\pi^\top(x,y,X,Y) = (x,y)$, а точки подмногообразия $V\mathcal{E}$ имеют форму $(x,y,0,Y)$. Рассмотрим расслоение $\pi^*\mathcal{E} = \{(u,v) \in \mathcal{E}\times\mathcal{E} | \pi(u) = \pi(v)\}$. Слои $\pi^*\mathcal{E}$, т.е. $\pi^*_u\mathcal{E}$, изоморфны $T_{\pi(u)}\mathcal{M}$.

Мы можем определить послойный морфизм векторных расслоений [35] $\mathbf{N} : T\mathcal{E} \to V\mathcal{E}$, $\widehat{\pi} : T\mathcal{E} \to \pi^*\mathcal{E}$, при этом $\widehat{\pi}(F_u) = (u, \pi^\top_u(F_u))$ и, следовательно, $Ker\ \widehat{\pi} = Ker\ \pi^\top = V\mathcal{E}$. Ядро морфизма $\mathbf{N}$ — векторное ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ПОДРАССЛОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ $(T\mathcal{E}, \pi^\top, \mathcal{E})$ — обозначим через $(H\mathcal{E}, \pi_{H\mathcal{E}}, \mathcal{E})$. Его слои $H_u\mathcal{E}$ определяют распределение $u \in \mathcal{E} \to H_u\mathcal{E} \subset T_u\mathcal{E}$ (дополнительного к вертикальному распределению $u \in \mathcal{E} \to V_u\mathcal{E} \subset T_u\mathcal{E}$); таким образом, касательное расслоение $T\mathcal{E}$ может быть записано в виде суммы Уитни [35]: $T\mathcal{E} = H\mathcal{E} \bigoplus V\mathcal{E}$ ($H\mathcal{E}$ изоморфно $\mathcal{M}$). Этот морфизм (инициирующий данное разложение) и есть N–связность (НЕЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ): $\mathbf{N} = N^a_i dx^i \otimes \partial/\partial y^a$.

N–связность характеризуется своей КРИВИЗНОЙ (тензор NIJENHUIS'A):

$$\Omega_N = \frac{1}{2}\Omega^a_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}, \qquad \Omega^a_{ij} = \frac{\partial N^a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial N^a_j}{\partial x^i} + N^b_i \frac{\partial N^a_j}{\partial y^b} - N^b_j \frac{\partial N^a_i}{\partial y^b}.$$

Компонента $\pi^\top : H\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ отображения $\widehat{\pi}$ есть морфизм векторных расслоений, причем для любого векторного поля X на $\mathcal{E}$ существует ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ X^H на $\mathcal{E}$, такое, что $\pi^\top(X^H) = X$ (ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ПОДНЯТИЕ (HORIZONTAL LIFT) векторного поля X на $\mathcal{M}$).

ОТОБРАЖЕНИЕ СВЯЗНОСТИ $\mathbf{K} : T\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, ассоциированное с N–связностью определим как композицию: $\mathbf{K} = p \circ r \circ \mathbf{N}$, где канонический изоморфизм r определяется множеством изоморфизмов $r_u : V_u\mathcal{E} \to T_u\mathcal{E}$ $(u \in \mathcal{E})$ между вертикальным подрасслоением и векторным расслоением $\pi^*\mathcal{E}$,

p — проектор на второй множитель в расслоении $\pi^*\mathcal{E}$. Локально отображение $\mathbf{K}$ представимо как $\mathbf{K}(x,y,X,Y) = (x, Y^j + N^j_i(x,y)X^i)$ $(i,j = 1,...,n)$. Принимая это во внимание и опираясь на определение $\mathbf{N}$, получим локальное выражение и для нелинейной связности: $\mathbf{N}(x,y,X,Y) = (x,y,0,Y^j + N^j_i(x,y)X^i$, N^j_i — определенные выше коэффициенты N-связности $(i,j = 1,...,n)$. В явном виде, как уже говорилось выше, они связаны с коэффициентами полуструи на $E\backslash\{0\}$: $N^i_j = \partial G^i/\partial y^j$.

Рассмотрим горизонтальное поднятие, определяемое отображением $\mathbf{K}$ с локальными коэффициентами $N^i_j(x,y)$. Примем для горизонтального поднятия векторного поля $\partial/\partial x^i$ $(i = 1,...,n)$ обозначение

$$\frac{\delta}{\delta x^i} := (\frac{\partial}{\partial x^i})^H = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{32}$$

Локально, если $X = X^i(x)(\partial/\partial x^i)$, то $X^H = X^i(\partial/\partial x^i - N^j_i(x,y)\partial/\partial y^j)$. Отсюда $\delta/\delta x^i$ $(i = 1,...,n)$ является базисом горизонтального распределения $HT\mathcal{M}$ ($\widetilde{\pi}: \ HT\mathcal{M} \to \pi^*T\mathcal{M}$ — изоморфизм). Следовательно, $\text{Ł}_1 := \mathbf{e}_\nu = (e_i = \delta/\delta x^i, e_{i^\dagger} = \partial/\partial y^{i^\dagger})$ $(i,j = 1,...,n)$ — локальный базис, адаптированный к горизонтальному распределению $HT\mathcal{M}$ и вертикальному распределению $VT\mathcal{M}$. Пусть $\text{Ł}_2 := \mathbf{e}^\lambda = (e^i = dx^i, e^{i^\dagger} = \delta y^{i^\dagger})$ — дуальный к Ł_1, тогда $\delta y^{i^\dagger} = dy^{i^\dagger} + N^{i^\dagger}_j(x,y)dx^j$. Здесь $i = \overline{1,n}$ относятся к координатам x (в дальнейшем $i,j,k,\ell,...$ также), $i^\dagger, j^\dagger,... = \overline{n+1,2n}$ относятся к координатам касательного и дуального касательного пространства (если используется обозначение y^j, то оно эквивалентно $y^{j^\dagger}$, $j^\dagger = j+n$), греческие индексы $\nu,\lambda,\alpha...$ пробегают значения от 1 до $2n$.

Базисные векторы $\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu$ удовлетворяют условиям неголономности с коэффициентами неголономности $w^\gamma_{\nu\mu}$ (естественно, в частных случаях обращающимися в нуль):

$$\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\mu - \mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu = w^\gamma_{\nu\mu}\delta_\gamma, \quad w^{k^\dagger}_{ij^\dagger} = -w^{k^\dagger}_{j^\dagger i} = \frac{\partial N^{k^\dagger}_i}{\partial y^{j^\dagger}}, \quad w^{j^\dagger}_{ki} = -w^{j^\dagger}_{ik} = \Omega^{j^\dagger}_{ik}. \tag{33}$$

Принимая во внимание вышеприведенное разложение расслоения $T_uT\mathcal{M}$ $(u \in T\mathcal{M})$ в сумму Уитни, мы можем (единственным образом) представить векторное поле $X \in \text{Ų}(T\mathcal{M})$ (принадлежащее множеству всех векторных полей над $T\mathcal{M}$) в форме $X = X^H + X^V$, где в базисе Ł_1:

$$X^H = X^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i}, \quad X^V = \dot{X}^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{34}$$

(причем по отношению к преобразованиям координат (24) компоненты $X^i, \dot{X}^i$ ведут себя аналогично:

$$\widetilde{X}^i = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j} X^j, \quad \widetilde{\dot{X}}^i = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j} \dot{X}^j). \tag{35}$$

Далее, 1–форма $\omega \in Ų^*(T\mathcal{M})$ может быть представлена в виде $\omega = \omega^H + \omega^V$, $\omega^H(X) = \omega(X^H)$, $\omega^V(X) = \omega(X^V)$ $(\forall X \in Ų(T\mathcal{M}))$.

Для кобазиса $Ł_2 = (dx^i, \delta y^{i^\dagger})$ имеем $\omega^H = \omega_j(x,y)dx^j$, $\omega^V = \dot{\omega}_j(x,y)\delta y^{j^\dagger}$. При преобразовании координат (24) компоненты этих 1–форм преобразуются как:

$$\widetilde{\omega}_i(x,y) = (\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j})^{-1}\omega_i(x,y), \quad \widetilde{\dot{\omega}}_i(x,y) = (\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j})^{-1}\dot{\omega}_i(x,y). \tag{36}$$

Кривая $c\ :\ \ t \in I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow (x^i(t), y^i(t)) \in \mathcal{E}$ имеет касательный вектор $dc/dt = \dot{c}$, представимый в соответствии с вышеизложенным как $\dot{c} = \dot{c}^H + \dot{c}^V = (dx^i/dt)(\delta/\delta x^i)\ +(\delta y^i/dt)(\partial/\partial y^i)$. Если $\delta y^i/dt = 0$ $(\forall t \in I)$, то кривая c ГОРИЗОНТАЛЬНА; если заданы функции $x^i(t)$, $t \in I$, то кривые $y^i = y^i(t)$, $t \in I$, являющиеся решениями системы дифференциальных уравнений $\delta y^i/dt + N^i_j(x,y)(dx^j/dt) = 0$, определяют горизонтальную кривую $c \in \mathcal{E}$. Горизонтальная кривая c со свойством $y^i = dx^i/dt$ — АВТОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ КРИВАЯ нелинейной связности N.

В дальнейшем изложении существенное место будут занимать d–ТЕНЗОРЫ (или РАЗДЕЛЕННЫЕ ТЕНЗОРЫ): тензорное поле T ранга (r,s) на многообразии $\mathcal{E}$ является РАЗДЕЛЕННЫМ (DISTINGUISHED) ТЕНЗОРНЫМ ПОЛЕМ (d-тензором), если оно обладает свойством:

$$T({}^1\omega, ..., {}^r\omega, {}_1X, ..., {}_sX) = T({}^1\omega^H, ..., {}^r\omega^V, {}_1X^H, ..., {}_sX^V), \tag{37}$$

$$\forall^a\omega \in Ų^*(\mathcal{E}), \quad \forall_b X \in Ų(\mathcal{E}), \quad a = 1, ..., r,\ b = 1, ..., s.$$

Если выразить D–тензорное поле в базисах $Ł_1, Ł_2$, то компоненты T:

$$T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}(x,y) = T(dx^{i_1}, ..., \delta y^{i_r}, \frac{\delta}{\delta x^{j_1}}, ..., \frac{\delta}{\delta y^{j_s}}), \quad i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_s = 1, ..., n. \tag{38}$$

В частности, векторное поле Лиувилля $\mathcal{C}$, компоненты векторного поля X $(\forall X \in Ų)$ X^H, X^V (см. (34)) и компоненты 1–формы ω $(\forall \omega \in Ų^*)$ ω^H, ω^V — d–тензоры.

Определим D-МЕТРИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ $\mathcal{G}$ на касательном расслоении $T\mathcal{M}$ над базовым связным паракомпактным дифференцируемым многообразием $\mathcal{M}$ как симметричное ковариантное тензорное поле типа $(0,2)$ (невырожденное и обладающее постоянной сигнатурой):

$$\mathcal{G} = \hat{g}_{\alpha\beta} du^\alpha \otimes du^\beta, \quad u^\alpha = (x^i, y^{i^\dagger}),\ \alpha, \beta = 1, ..., 2n,\ i = 1, ..., n,\ i^\dagger = n+1, ..., 2n.$$

Как d–тензор, метрика может быть разложена на горизонтальную и вертикальную составляюшие: $\mathcal{G}(X,Y)=\mathcal{G}^H(X,Y)+\mathcal{G}^V(X,Y)$, где d-тензоры $\mathcal{G}^H=\mathcal{G}(X^H,Y^H)$, $\mathcal{G}^V=\mathcal{G}(X^V,Y^V)$; по отношению к неголономному базису Ł$_2$ наша d–метрика может быть записана в виде:

$$\mathcal{G}=g_{\alpha\beta}(u)\mathbf{e}^\alpha\otimes\mathbf{e}^\beta=g_{ij}dx^idx^j+h_{i^\dagger j^\dagger}\delta y^{i^\dagger}\delta y^{j^\dagger},\;\; g_{ij}=\mathcal{G}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j),\;\; h_{i^\dagger j^\dagger}=\mathcal{G}(\mathbf{e}_{\mathbf{i}^\dagger},\mathbf{e}_{\mathbf{j}^\dagger}). \tag{39}$$

Линейная (аффинная) связность ${}^{aff}D$ на многообразии $\mathcal{E}$ — линейный оператор, сопоставляющий каждой паре гладких векторных полей (X,Y) $(X,Y\in$ Ų$(\mathcal{E}))$ векторное поле ${}^{aff}D_XY$ такое, что ${}^{aff}D_X(sY+Z)$ $(\forall s\in\mathbb{R}^1)$ и $\forall f(u^\alpha)$ (f — скалярная функция своего аргумента u^α, $\alpha=\overline{1,2n}$, $u^i=x^i$, $u^{i^\dagger}=y^{i^\dagger}$, $i=\overline{1,n}$, $i^\dagger=\overline{n+1,2n}$):

$${}^{aff}D_X(fY)=f^{aff}D_XY+(Xf)Y,\;\; {}^{aff}D_Xf=Xf. \tag{40}$$

Величина ${}^{aff}D_XY$ — ковариантная производная Y относительно X (это не тензор); но всегда можно определить (1,1)–тензорное поле ${}^{aff}DY:\; X\to{}^{aff}D_XY$. По отношению к локальному базису e_α $(X=X^\alpha e_\alpha$ $=X^ie_i+X^{i^\dagger}e_{j^\dagger}$, ср. с (34)) получим $({}^{aff}D_\alpha\equiv{}^{aff}D_{e_\alpha})$:

$${}^{aff}D_\alpha e_\beta=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}e_\gamma,\;\; {}^{aff}D_\alpha\theta^\beta=-\Gamma^\beta_{\gamma\alpha}\theta^\gamma,\;\; e_\alpha\theta^\beta=\delta^\beta_\alpha,\;\; \alpha,\beta,\gamma=1,...,2n. \tag{41}$$

Разделенная d–связность ${}^dD$ (далее просто D) на многообразии (ко)касательного расслоения есть линейная связность ${}^{aff}D$, сохраняющая при параллелизме сумму Уитни (ко)касательного расслоения над исходным многообразием (глобальную декомпозицию на горизонтальные и вертикальные подрасслоения), определяющую общую N–связность.

4. Лагранжевы пространства

Гладкий лагранжиан на расслоении $T\mathcal{M}$ над дифференцируемым вещественным многообразием $\mathcal{M}$ (размерности n) есть отображение

$$L:\;(x,y)\in T\mathcal{M}\to L(x,y)\in\mathbb{R}^1 \tag{42}$$

класса C^∞ на многообразии $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$ и непрерывное на ядре $\{0\}:\;\mathcal{M}\to T\mathcal{M}$ проекционного эндоморфизма $\pi:\;\mathcal{M}\to T\mathcal{M}$. Гессиан (по отношению к y^i) лагранжиана L на $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$:

$${}^Lg_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2L(x,y)}{\partial y^i\partial y^j} \tag{43}$$

является d–тензорным полем, ковариантным ранга 2, и симметричным (здесь, как уже было оговорено выше в соглашении о нумерации индексов, i, j, k... могут относиться и к переменной y, так чтобы $y^i = \dot{x}^i = y^{i^\dagger}$). Лагранжиан РЕГУЛЯРЕН, если для данного гессиана справедливо: $rank\ \|^L g_{ij}(x,y)\| = n$ на $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$.

ЛАГРАНЖЕВО ПРОСТРАНСТВО есть пара $L^n = (\mathcal{M}, L(x,y))$, формируемое n–мерным гладким многообразием $\mathcal{M}$ и регулярным лагранжианом $L(x,y)$, для которого d-тензор $^L g_{ij}(x,y)$ имеет над расслоениием $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$ постоянную сигнатуру.

Вариационная задача для лагранжиана L приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial y^i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad \frac{dy^i}{ds} = -2^L G^i(x,y), \tag{44}$$

где $x^i(s)$ зависит от параметра s, которые эквивалентны нелинейным геодезическим уравнениям $d^2x^i/ds^2 + 2^L G^i(x^k, dx^j/ds) = 0$ (см. (29)), где $^L G^i$ есть локальные коэффициенты полуструи (КАНОНИЧЕСКОЙ полуструи L^n) $\mathcal{S}$ на $T\mathcal{M}$:

$$^L G^i(x,y) = \frac{1}{4}{}^L g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial x^k} y^k - \frac{\partial L}{\partial x^j}\Big), \quad {}^L g^{ij} = ({}^L g_{ij})^{-1}. \tag{45}$$

Каноническая полуструя определяет соответственно КАНОНИЧЕСКУЮ N–СВЯЗНОСТЬ на касательном расслоении $T\mathcal{M}$ (согласно теореме 3.1 [32]):

$$^L N^i_j = \frac{\partial^L G^i}{\partial y^j} = \frac{1}{4}\frac{\partial^L g^{ip}}{\partial y^j}\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial y^p \partial x^m} y^m - \frac{\partial L^2}{\partial x^p}\Big) + \tag{46}$$

$$+\frac{1}{4}{}^L g^{ip}\Big(2\frac{\partial^L g_{jp}}{\partial x^m} y^m - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^p}\Big) + \frac{1}{4}{}^L g^{ip}\frac{\partial^2 L}{\partial y^p \partial x^j}.$$

Дуальными к переменным y^i касательного пространства над базисным многообразием $\mathcal{M}$ лагранжевого пространства L^n являются импульсные переменные (импульсы), которые определяются как $p_i = \frac{1}{2}(\partial L/\partial y^i)$ (с точностью до массы); они представляют собой, как это очевидно следует из теории кокасательных расслоений, d–ковекторное поле. Дифференциал 1-формы $\omega = p_i dx^i$, $\theta = d\omega = dp_i \wedge dx^i = {}^L g_{ij}\delta y^i \wedge dx^j$ определяет на $T\mathcal{M}$ симплектическую структуру (это следует из регулярности лагранжиана).

Для того, чтобы функционал действия $S[c] = \int_0^1 L(x, dx/dt)dt$ $(c: \ t \in [0,1] \to (x^i(t)) \in \mathcal{M})$, принимал экстремальное значение на c, необходимо, чтобы c было решением уравнений Эйлера–Лагранжа: $E_i(L) := \partial L/\partial x^i -$

$(d/dt)(\partial L/\partial y^i) = 0$, $y^i = dx^i/dt$. Вдоль интегральных кривых этих уравнений сохраняется энергия лагранжиана $E_L = y^i(\partial L/\partial y^i) - L$ и справедливы уравнения Гамильтона-Якоби:

$$dx^i/dt = y^i = \partial\mathcal{H}/\partial p^i, \quad dp_i/dt = -\partial\mathcal{H}/dx^i, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}E_L = p_i y^i - \frac{1}{2}L. \quad (47)$$

(соответственно, энергия E_L сохраняется и вдоль каждой интегральной кривой этих уравнений). То есть никаких неприятных сюрпризов динамика в лагранжевом пространстве не преподносит.

Для лагранжева пространства индуцированная лагранжевым метрическим тензором и его канонической N–связностью на $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$ псевдориманова метрическая структура ${}^{psR}\mathcal{G}$ формально сохраняет свой общий вид ${}^{L}g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j + {}^{L}h_{ab}(x,y)\delta y^a \otimes \delta y^b$, однако, согласно [5], [33], ${}^{L}h_{ab}(x,y)$ есть специальным образом сконструированное поднятие [34] фундаментального тензорного поля L^n, то есть ${}^{L}g_{ij}(x,y)$:

$${}^{psR}\mathcal{G} \to {}^{psR}\widehat{\mathcal{G}} = {}^{L}g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j + \frac{\text{ß}^2}{\|y\|^2}{}^{L}g_{ij}(x,y)\delta y^i \otimes \delta y^j,$$

$$\|y\|^2 = {}^{L}g_{ij}(x,y)y^i y^j > 0, \quad (48)$$

$\text{ß} \in \mathbb{R}^1$ — постоянная, обладающая надлежащей размерностью, для физических приложений — связанная с максимальной скоростью частиц в системе, $\text{ß} = c = 1$ в специально подобранной системе единиц, и вводимая для обеспечения одинаковой размерности обоих слагаемых в ${}^{L}\mathcal{G}$ при введении на касательном расслоении над $\mathcal{M}$ обобщающей римановой структуры (это будет обсуждаться ниже, когда будут рассматриваться поправки к метрикам ОТО); норма скалярного поля $\|y\| = \sqrt{{}^{L}g_{ij}y^i y^j}$ может быть выражена через переменные кокасательного пространства — импульсы: ${}^{L}g^{ij}p_i p_j/m^2$ (функция распределения частиц (массой m) в системе, динамика которой определяется лагранжианом L, как будет показано ниже, отлична от нуля только при ${}^{L}g^{ij}p_i p_j = m^2c^4$).

Если ввести тензорное поле $\widehat{\mathcal{F}}$ и 2–форму $\widehat{\theta}$:

$$\widehat{\mathcal{F}} = -(\|y\|/\text{ß}) \cdot (\partial/\partial y^i) \otimes dx^j + (\text{ß}/\|y\|) \cdot (\delta/\delta x^i) \otimes \delta y^i, \qquad \widehat{\theta} = (\text{ß}/\|y\|)\theta,$$

то пара $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\theta})$ — "почти-эрмитова структура" на $T\mathcal{M}$, конформная кэлеровой структуре, а $\widehat{\theta}$ конформна симплектической структуре θ.

Разделенная связность (ковариантная производная) D с компонентами $D_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \rfloor D$ ($\rfloor$ — знак внутреннего произведения) определяется уравнениями

$D_\alpha \mathbf{e}_\beta = {}^{(cL)}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\gamma$, где ${}^{(cL)}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ — коэффициенты канонической лагранжевой связности, определяемые, согласно [36], соотношениями:

$$ {}^{(cL)}\Gamma^i_{jk} = ({}^{(cL)}L^i_{jk}, {}^{(cL)}C^i_{jk}), \tag{49} $$

$$ {}^{(cL)}L^i_{jk} = \frac{1}{2}{}^L g^{ir}\Big(\frac{\delta^L g_{jr}}{\delta x^k} + \frac{\delta^L g_{kr}}{\delta x^j} - \frac{\delta^L g_{jk}}{\delta x^r}\Big), \quad {}^{(cL)}C^i_{jk} = \frac{1}{2}{}^L g^{ir}\Big(\frac{\partial^L g_{jr}}{\partial y^k} + \frac{\partial^L g_{kr}}{\partial y^j} - \frac{\partial^L g_{jk}}{\partial y^r}\Big). \tag{50} $$

Величина ${}^{(cL)}C_{ijk} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 L}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = {}^L g_{js}{}^{(cL)}C^s_{ik}$ — тензор кручения Картана лагранжева пространства (именно он определяет анизотропию динамических процессов в L^n).

Таким образом, мы определили необходимые для рассмотрения кинетических процессов величины в лагранжевом (анизотропном) пространстве. Перейдем теперь непосредственно к их описанию.

5. Кинетические уравнения

Система N (точечных) частиц определяется случайной функцией:

$$ \varphi(u^i, p_{j^\dagger}) = \sum_{q=1}^{N}\int \delta s \delta^n(u^i - u^i|_q(s))\delta^n(p^{j^\dagger} - p^{j^\dagger}|_q(s)), \quad \delta s = \sqrt{{}^L g_{ij}\delta u^i \delta u^j}, \tag{51} $$

где q означает номер частицы ($q = 1..., N$) (все частицы для простоты имеют одинаковые массы m), δs — элемент длины вдоль траектории частицы, параметризованный "естественным" параметром s (напр., собственным временем), $p^j \equiv p^{j^\dagger}$ — импульсы частиц (элементы кокасательного пространства над конфигурационным подмногообразием фазового пространства), $p_{i^\dagger} = {}^L g_{ij}p^{j^\dagger}$, $u^i = (u^i = x^i, u^{i^\dagger} = y^{i^\dagger})$ $(u^1 = x^1 = ct)$; соглашение о нумерации индексов остается тем же, что и ранее. Усреднив функцию φ по траекториям ансамбля, получим (1–частичную) функцию распределения: $\Psi(u,p) = \langle\varphi(u,p)\rangle|_{path}$.

Функции $u^i|_q(s), p^{i^\dagger}|_q(s)$ служат для описания движения q–ой частицы и определены уравнениями движения (точка над координатой отвечает дифференцированию по ds):

$$ m\dot{u}^i = p^{i^\dagger}, \quad \frac{\delta}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^{i^\dagger}} - \frac{\delta L}{\delta u^i} = \sum_k F^k_i|_q, i = 1, ..., n, \tag{52} $$

или, в явном виде, для лагранжиана свободных (невзаимодействующих) частиц $L_{(free)} \equiv L_{(2)} = \frac{1}{2}g_{ij}(x)y^i y^j$:

$$m\frac{\delta u^i|_q}{ds} = p^i|_q, \qquad mD\frac{\delta p_i|_q}{ds} = m\frac{\delta p_i|_q}{ds} - {}^{(cL)}\Gamma^k_{ij}(u^k|_q(s))p_k|_q p^j|_q = 0, \qquad (53)$$

где в правой части уравнения (52) стоит сумма по всем силам, действующим на q–ую частицу; ($p_{\{i,k\}} = p_{\{i,k\}^\dagger}$, $p^j = p^{j^\dagger}$). При этом (для $L_{(2)}$) коэффициенты канонической лагранжевой связности вырождаются в коэффициенты Кристоффеля 2–го рода: ${}^{(cL)}\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$.

Безусловно, данные уравнения движения являются хотя и чрезвычайно важным, но, тем не менее, весьма частным случаем таковых в лагранжевой динамике. Достаточно взять хотя бы (слабо)релятивистскую систему, чтобы убедиться — система (53) существенно изменит свой вид, так что и дальнейшее изложение перехода к кинетике частиц в системе будет принципиально иным. Однако в качестве "первичного" примера и образца для детального анализа пока остановимся на квадратичном лагранжиане $L_{(2)}$.

Примем временно в качестве базисного многообразия $\mathcal{M}$ 4–мерное пространство–время $\mathcal{M}_4$. Итак, $u^i = (x^i, y^{i^\dagger})$, $x^i = (x^1 \equiv ct, x^2, x^3, x^4)$, $p_{j^\dagger} = {}^L g_{ij}(u)p^i$, $p^i = p^{i^\dagger} = (p^1, p^2, p^3, p^4)$ ($i, j = \overline{1,4}$, $i^\dagger$, $j^\dagger = \overline{5,8}$). Очевидно, p^1 не является независимой переменной: $g^{11}(x)p_1 p_1 = m^2c^4 - \sum_{k=2}^4 g^{kk}(x)p_k p_k$.

Обратимся к случаю общего n (мы будем возвращаться к случаю $n = 4$ в случае необходимости продемонстрировать наглядно какое-либо свойство). Функцию распределения $\Psi(u,p)$ можно ввести следующим образом, следуя [37], [39]): величина

$$\Psi(u,p)p^i d\sigma_i \delta^n p \times (m\sqrt{|{}^L g|})^{-1}, \qquad (54)$$

$$d\sigma_i = (\sqrt{|{}^L g|}\delta^n u_i)/(n_i \delta u^i), \quad n_i = D_i\mathcal{I}/|D\mathcal{I}|, \quad |D\mathcal{I}| = \sqrt{{}^L g^{ij} D_i D_j \mathcal{I}},$$

определяет количество частиц, пересекающих объем элемента гиперповерхности $\delta\sigma_i = \delta^1_i\ \delta^{n-1}u$ ($\delta^{n-1}u = dx^2 dx^3 ... dx^n$) с импульсами p_i, включенными в элемент $\delta P = \delta^n p/\sqrt{|{}^L g|} = \delta p_1 \delta p_2 ...\ \delta p_n/\sqrt{|{}^L g|}$ в окрестности точки u^i ($\sqrt{|{}^L g|}\delta^n u$ дает инвариантный объем на исходном многообразии). Соответственно, поток частиц n^i и тензор энергии–импульса выражаются через моменты функции распределения:

$$\int \Psi(u,p)p^i \delta P = mn^i, \qquad \int \Psi(u,p)p^i p^j \delta P = mT^{ij}.$$

Уравнения динамики частицы q имеют первый интеграл ${}^L g^{ij} p_i|_q p_j|_q = m^2$, так что функция распределения $\Psi(u,p) \neq 0$ на гиперповерхности ($\emptyset$), определяемой этим интегралом. Поэтому можно ввести новую (одночастичную) функцию распределения $f(u,p)$ на данной $(n-1)$–мерной гиперповерхности $\emptyset$: $\Psi(u^i,p_j) = f(u^i,p_j)\delta(\emptyset)\theta(p_1)^+$ ($\theta(p_1)^+$ — "поляризованный множитель" [40]). Выражение $f(u,p)p^j\delta\sigma_j\delta\varsigma$ ($\delta\varsigma = \delta^{n-1}p/(\sqrt{|^Lg|}p^1)$, p^1 выражается через $p^2,...,p^n$ через связь на $\emptyset$) дает число мировых линий частиц с импульсом p^i в интервале δp^i вблизи т. p, пересекающих пространственноподобную гиперповерхность $\delta\sigma_j$ (если гиперповерхность $\delta\sigma_j$ времениподобна, то $\delta\sigma_j = (\delta^n u, 0, ..., 0)$.

Кинетическое уравнение для функции распределения $f(u,p)$ может быть получено из уравнений Гамильтона (аналогично уравнению Лиувилля на римановом многообразии [38]) с использованием (53) (поскольку на симплектическом многообразии гамильтонов фазовый поток сохраняется): $\{\mathcal{H},f\}=0$, где $\{\mathcal{H},f\}$ — скобка Пуассона на кокасательном расслоении:

$$\partial\mathcal{H}/\partial p_i = \delta u^i/ds = p^i/m, \quad -m(\partial\mathcal{H}/\partial u^i) = {}^{(cL)}\Gamma^k_{ij}p_kp^j, \tag{55}$$

откуда искомое уравнение (для невзаимодействующих частиц в отсутствие внешних полей неметрического происхождения):

$$(\partial\mathcal{H}/\partial p_i)(\delta f/\partial u^i) - (\partial f/\partial p_i)(\partial\mathcal{H}/\partial u^i) = p^i\mathcal{D}^{(C)}_i f(u,p) = 0, \tag{56}$$

$$\mathcal{D}^{(C)}_i \equiv \frac{\delta}{\partial u^i} - {}^{(cL)}\Gamma^m_{ij}p^j\frac{\partial}{\partial p^m},$$

где $\mathcal{D}^{(C)}$ — обобщенная ковариантная производная Картана [2] (на лагранжевом пространстве 2–го порядка нелинейности [6]).

Следует заметить, что формально проводя "нормировку" импульсов (для $n=4$): $p^i \to \bar{p}^i = (1, p^{\eta_3}/p^1)$ ($i=\overline{1,4}$, $\eta_3 = \overline{2,4}$), мы можем записать последнее уравнение в виде:

$$\frac{\delta f}{\partial(ct)} + v^{\eta_3}\frac{\delta f}{\partial v^{\eta_3}} - {}^{(cL)}\Gamma^m_{\eta_3 j}v^{\eta_3}v^j\frac{\partial f}{\partial v^m} = 0, \quad \mathbf{v} = (cp^2/p^1, cp^3/p^1, cp^4/p^1), \tag{57}$$

где $v^{\eta_3} = \mathbf{v}$ есть трехкомпонентная скорость (что подчеркивается индексом), что совпадает, на первый взгляд — с точностью до вида коэффициента связности, — с уравнением Лиувилля на римановом многообразии. В действительности же при переходе к трехмерной скорости здесь игнорируется член с ${}^{(cL)}\Gamma^1_{ij}p^ip^j(\partial/\partial p^1)$ — поскольку данный оператор не является тождественно нулевым, то отображение гомотопического перехода между операторами, отвечающими (56) и (57), вообще говоря, не изоморфизм. Собственно, если посмотреть на систему уравнений движения (53), то становится очевидным следующее: дифференцирование по собственному времени τ ("естественному параметру") определено неоднозначно, поскольку связь $s(x^1) = \tau(t)$ не определена априори. То есть в общем случае $\tau = \tau(x^i, p_{i^\dagger})$. Конечно, в римановом пространстве все гораздо проще: в качестве примера рассмотрим релятивистскую частицу в поле Шварцшильда; собственное время связано со "временем наблюдателя" как преобразованием Лоренца, так и (римановой) метрикой пространства–времени. Очевидно, что для релятивистской частицы в пространстве Минковского действие $S = (mc/2)\int((\dot{x}^1)^2 - \sum_{k=2}^4(\dot{x}^k)^2)$, $d\ell = \sqrt{1-(dx^k/dt)^2/c^2}dt$, но $d\ell = cd\tau$, то есть натуральный параметр $d\tau$ пропорционален dt (значит, параметр t — натурален); однако если рассмотреть искривленное $Riem$–пространство с метрикой ${}^R g_{ij}$, то для натурального параметра имеем:

$$d\tau = d\ell/c = \sqrt{c^{-2R}g_{ij}(dx^i/dt)(dx^j/dt)}dt = (1 + O(1/c^2))dt, \quad t = x^1/c,$$

если $dx^i/dt \ll c$; но даже в противном случае $dt \propto d\tau$ (то есть снова параметр t натурален, как пропорциональный натуральному). Если же обратиться к общему лагранжеву пространству и вспомнить формулу (44), не вырождающуюся в (30), то — вообще говоря, конечно — время $x^1 = t$ не пропорционально τ и, таким образом, s НЕОБХОДИМО ВВОДИТЬ КАК ДОПОЛНИТЕЛЬНУЮ КООРДИНАТУ, например, параметризующую массовую гиперповерхность (∅) (так, что (ко)касательное расслоение над $\mathcal{M}_4$ становилось 8–мерным). Само собой разумеется, эта поверхность уже не обязательно принадлежит к классу поверхностей Лобачевского (как для тривиальной метрики в пространстве Минковского).

Уравнения (53) формально сохраняют свой вид, однако физический смысл их становится более утонченным: решение уравнения канонической (квазигеодезической) полуструи

$$d^2x^i/ds^2 + \frac{1}{2}{}^L g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial x^k}y^k - \frac{\partial L}{\partial x^j}\Big)|_{y^i = dx^i/ds} = 0, \tag{58}$$

(см. (45)) определит $x = x(s)$ (то есть, в частности, $x^1(s) = t(\tau)$), после чего определяются элементы касательного пространства $y^{i^\dagger} = dx^i/ds$, далее — элементы кокасательного пространства $p_{i^\dagger}$, и, наконец, "обобщенные силы", включающие $\delta p_i/ds$. Коэффициенты канонической лагранжевой связности уже определены (для их задания достаточно знать лагранжиан), но только формально (через $y^{i^\dagger}$) — подставляем туда полученные ранее значения $y = dx/ds$, после чего динамика системы почти полностью определена (соответственно, можно выписать кинетическое уравнение). "Почти определена" — поскольку нам для точного определения $x(s)$ требуются начальные условия (к уравнениям полуструи).

Перейдем к рассмотрению несколько более общих лагранжианов; пусть L не факторизуется на произведение двух функций: $L(x,y) \neq \ell_1(x)\ell_2(y)$. Тогда, очевидно, первое уравнение движения системы (52) можно представить как $(m/ds)(dx^i) = p^i$, а второе — как: $dy^i/ds = {}^L N^i_j(dx^j/ds) + \partial L/\partial x^i = -2G^i(x,y)$ (${}^L N^i_j$ определено в (46)). Следовательно, кинетическое уравнение, выраженное через скобку Пуассона, $\{\mathcal{H}, f\} = 0$, принимает вид: $p^i(\delta f/\partial x^i) + 2G^i(x,y)(\partial f/\partial p^i) = 0$ (для $L_{(2)}$ имеем $G^i(x,y) = {}^R G^i(x,y)$ — см. текст после формулы (29); получаем снова формулу (56)). Если рассмотреть присутствие внешних сил, то есть гамильтониан имеет вид: $L(x,y) = L^{(I)}(x,y) + L^{(II)}(x)$, то вид кинетического уравнения принципиально не меняется. Однако если попытаться включить в рассмотрение силовое поле межчастичного взаимодействия, то ситуация создается новая.

Фактически у нас получается самосогласованная в этом плане задача, требующая дополнительных априорных предположений (наложения вспомогательной неголономной связи на базисное многообразие Лагранжа). Детализованный анализ данного утверждения будет проведен позже. Заметим, однако, что для решений этих уравнений будет существовать явление ветвления решений (связанное со Смейл–Фредгольмовской формой операторов, ассоциированных с уравнениями) — в зависимости от параметра собственного времени (или динамической массы лагранжиана).

В заключение отметим, что полностью аналогично вышеизложенному можно рассмотреть уравнение с парными столкновениями (и включенной статистикой частиц) — Больцмана и Юлинга–Уленбека; кроме этого, изложенный формализм не менее успешно применим к уравнению Вигнера (требуемые обобщения вполне тривиальны).

Список литературы

[1] E. Cartan, Sur une generalisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces a torsion, Comptes Rendus (Paris), V.174, pp.593–595, 1922.

[2] E. Cartan, Les espaces de Finsler, Hermann, Paris, 1934.

[3] P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen: Dissertation, Göttingen, 1918.

[4] P. Finsler, Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Meusnier, Vierteljschr. natur. Ges. Zürich, V.85, pp.155–164, 1940.

[5] R. Miron, M. Anastaiei, The geometry of Lagrange spaces: theory and applications, Kluwer Academic Publishers, New York – Boston – London, 1994.

[6] R.Miron, The geometry of higher order Lagrange spaces: applications to mechanics and physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Boston – London, 1997.

[7] M. Matsumoto, Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces, Kaisisha, Shingaken, 1986.

[8] A. Bejancu, Finsler geometry and applications, Ellis Horwood, Chichester, England, 1990.

[9] J. Szenthe, Symmetries of Lagrangian fields are homoteties in the homogeneous case, Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Applications, Brno, pp.321–328, 1996.

[10] S.Vacaru, Interactions, strings and isotopies in higher order anisotropic superspaces, Hadronic Press, Palm Harbor, FL, USA, 1998.

[11] Д.А. Киржниц, В.А. Чечин, Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории, Ядерная физика, Т.15, вып. 5, сс. 1051–1059.

[12] G.B. Khristiansen, Energy spectrum, chemical composition, anisotropy of primary C.R. with $E > 10^{12}$ eV, 20th International Cosmic Ray Conference, Proceedings, M., Nauka, pp.54–64, 1988.

[13] Г.Б. Христиансен, Космические лучи сверхвысоких энергий, М., МГУ, 1984.

[14] М. Лонгейр, Астрофизика высоких энергий, М., Мир, 1984.

[15] S. Coleman and S.L. Glashow, Phys. Rev. D, V. 59, p. 116008, 1999.

[16] F.W. Stecker and S.T. Scully, Preprint astro-ph/0412495, Jan. 2005.

[17] G. Amelino-Camelia, Testable scenario for relativity with minimumlength, Phys. Lett. B, V.510, p.255, 2001 (arXiv: hep-th/0012238).

[18] G. Amelino-Camelia and T. Piran, Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the UHECR and the TeV-gamma paradoxes, Phys. Rev. D, V. 64, p.036005, 2001 (arXiv: astro-ph/0008107).

[19] J. Lukierski and A. Nowicki, Doubly Special Relativity versus κ–deformation of relativistic kinematics, arXiv: hep-th/0203065.

[20] J. Lukierski, Proceedings of Quantum Group Symposium at Group 21, (July 1996, Goslar) Eds. H.-D. Doebner and V.K. Dobrev, Heron Press, Sofia, 1997, p. 173.

[21] V.A. Kostelecky and R. Potting, Phys. Rev. D, V.51, p.3923, 1995; and in D.B. Cline, ed., Gamma Ray–Neutrino Cosmology and Planck Scale Physics, World Scientific, Singapore, 1993 (arXiv: hep-th/9211116).

[22] Lammerzahl C., Special Relativity and Lorentz Invariance, Ann. Phys. (Leipzig) V.14, No.1-3, pp.71–102, 2005.

[23] J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazielo, R. Lehoucq, J.-P. Uzan, Dodecahedral space topology as an explanation for weak wise-angle temperature correlations in the cosmic microwave background, Nature, V.425, p.593, 2003.

[24] А.А. Власов, Теория многих частиц, Гостехиздат, 1950.

[25] В. Гуревич, Г. Волмэн, Теория размерности, М., ГИИЛ, 1948.

[26] V.I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, New York, 1989.

[27] В. Гийемин, С. Стернберг, Геометрические асимптотики, М., "Мир", 1981.

[28] D. Ruelle, Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics, Journ. of Stat. Phys., V.95, N1/2, pp.393–421, 1999.

[29] R. Miron, D. Hrimiuc, H. Shimada, S.V. Sabau, The geometry of Hamilton and Lagrange spaces, Kluwer Academic Publishers, New York – Boston – Dordrecht — London – Moscow, 2002.

[30] M. Crampin, On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold, J. London Math. Soc. V.2, N 3, pp. 178–182, 1971.

[31] J. Grifone, Structure presque-tangente et connexions I, II, Ann. Inst. Henri Poincare., V.22, N 1, pp. 287–334; V.22, N 3, pp. 291–338, 1972.

[32] I. Bucataru, Metric nonlinear connections, arXiv: math.DG/0412109, 2004.

[33] J.D. Bekenstein, The Relation between Physical and Gravitational Geometry, preprint UCSB-TH-92-41, November 1992.

[34] S. Sasaki, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Tohoku Math. J., V. 2, N 10, pp. 338–354, 1958.

[35] D. Husemoller, Fibre bundles, McGraw–Hill Book Company, New York –Toronto – London –Sydney, 1966.

[36] A. Sandovici, A smooth gauge model on tangent bundle, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, V. 63, N 3, pp.255–282, 2005.

[37] S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen, Gh.G. van Weert, Relativistic kinetic theory: principles and applications, North-Holland Publishing Company, Amsterdam – New York — Oxford, 1980.

[38] В.В. Веденяпин, Кинетические уравнения Власова и Больцмана, М., Физматлит, 2001.

[39] J.L. Synge, Relativity: the special theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1956.

[40] J.L. Synge, Relativity: the general theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.