РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ в случаях a=0 и b=0

Москва, 2006 г.

УДК 517.925

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006.

Рассматривается шестое уравнение Пенлеве при $a = 0$. Для этого случая здесь получаем шесть новых разложений при $x \to 0$ и $x \to \infty$, которые отличны от разложений имеющихся при $a \neq 0$ и найденных ранее (ДАН, 2004, т. 395, N 6). Четыре из новых разложений являются степенными, два – сложными, т. е. с нестепенной асимптотикой. Также получаем новые разложения решений при $b = 0$. Для этого используется одна из симметрий уравнения. Все эти разложения найдены впервые.

A.D. Bruno, I.V. Goruchkina. Expansions of solutions to the sixth Painleve equation in cases $a = 0$ and $b = 0$. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2006.

We consider the sixth Painleve equation for $a = 0$. For the case we obtain six new expansions of solutions for $x \to 0$ and $x \to \infty$. They are different from expansions known for $a \neq 0$ and found early (Doklady Mathematics, 2004, v. 69, no. 2). Among six new expansions, four are power expansions, and two are complicated ones, i. e. they have nonpower asymptotics. Except that, we obtain new expansions of solutions for $b = 0$. We use for this symmetry of the equation. All found here expansions are new.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050).

e-mail: bruno@keldysh.ru, chukhareva@yandex.ru
http:\\library.keldysh.ru\prep-qf.asp

§1. Постановка задачи

Для шестого уравнения Пенлеве [1], при разных значениях комплексных параметров a, b, c, d, ищем разложения решений вида

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{1.1}$$

где $x \to 0$ или $x \to \infty$, показатели степени r и s – комплексные числа. Коэффициенты c_r и c_s могут быть трех типов:

1. c_r и c_s – постоянные комплексные коэффициенты, первый член $y = c_r x^r$ – степенная функция;

2. c_s – многочлены от $\ln x$, первый член $y = c_r x^r$ также степенная функция;

3. c_r и c_s – степенные ряды от $\ln x$, которые могут содержать и кратные логарифмы.

Если $x \to 0$, то $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r$, и $\operatorname{Re} s$ возрастают. Если $x \to \infty$, то $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} r$, и $\operatorname{Re} s$ убывают. Кроме того, предполагается, что аргумент комплексной переменной x остается в некотором интервале. Если допускать неограниченное изменение $\arg x$, то в случае комплексных r и s может случиться, что при $|x| \to 0$, функция x^r с $\operatorname{Re} r > 0$ стремиться к бесконечности и упорядочивание $|x^s|$ не соответствует упорядочиванию $\operatorname{Re} s$. Разложения (1.1) типов 1 и 2 будем называть простыми, а типа 3 — сложными. Разложения типов 1 и 2 при a, b, c, $d \neq 0$ найдены в [2 - 4]. Для нахождения разложений (1.1) будем использовать методы изложенные в [5, 6, 7].

§2. Общие свойства уравнения

Шестое уравнение Пенлеве имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) + \\ + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} + d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \tag{2.1}$$

где $a,\ b,\ c,\ d = \text{const} \in\ \mathbb{C}$, а x и y – комплексные переменные. Представим его в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $2x^2(x-1)^2 y(y-1)(y-x)$ и перенесем в левую сторону правую часть уравнения. Получаем

$$f(x,\ y) \overset{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[\ x^2(x-1)^2(y-1)(y-x)+ x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)\ ]+ 2y'[\ x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x)+ x^2(x-1)^2y(y-1)\ ] - [\ 2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2+ 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\ ] = 0. \tag{2.2}$$

Разложение его решений при $a,\ b \neq 0$ получены в [2, 3, 4].

2.1. Носители и многоугольники. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то носитель левой части уравнения (2.2), т. е. множество показателей степени ее мономов, есть

$$\mathbf{S}(f) = \{Q = (q_1,\ q_2):\ \ q_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ q_2 = 3 - q_1 + k,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Носитель $\mathbf{S}(f)$ и его выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ изображены на рис. 1.

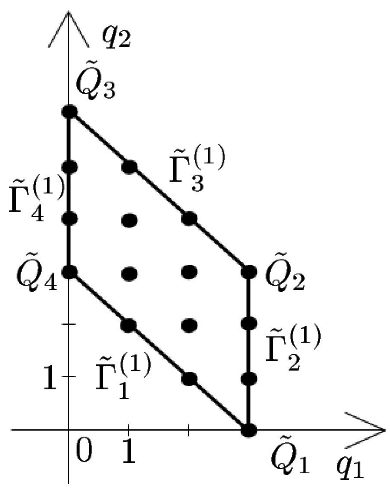

Рис. 1

Здесь многоугольник $\Gamma(f)$ — это параллелограмм с вершинами $\tilde{\Gamma}_j^{(0)} = \tilde{Q}_j$, где $\tilde{Q}_1 = (3,\ 0)$, $\tilde{Q}_2 = (3,\ 3)$, $\tilde{Q}_3 = (0,\ 6)$, $\tilde{Q}_4 = (0,\ 3)$ и ребрами $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$, показанными на рис. 1.

Рассмотрим два случая: $a = 0$, $b \neq 0$ и $a \neq 0$, $b = 0$.

1)$a = 0$, тогда уравнение (2.2) примет вид

$$f(x,\ y) \overset{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[\ x^2(x-1)^2(y-1)(y-x)+ x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)\ ]+ 2y'[\ x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x)+ x^2(x-1)^2y(y-1)\ ] - [\ 2bx(y-1)^2(y-x)^2+ 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\ ] = 0. \tag{2.3}$$

В этом случае у носителя, изображенного на рис. 1, пропадут точки (0, 6), (0, 5), (1, 5). Носитель $\mathbf{S}(f_{a=0})$ левой части уравнения (2.3), его выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(f_{a=0})$, грани $\Gamma_i^{(0)} = Q_i$, $i = 2, 3$, $\tilde{\Gamma}_j^{(0)} = \tilde{Q}_j$, $j = 1, 2, 4$, $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$ изображены на рис. 2a, нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(d)}$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$, $d = 0, 1$ – на рис. 2b.

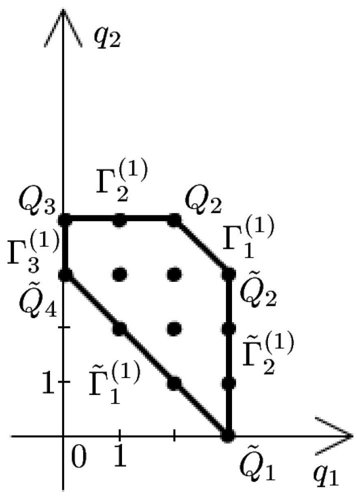

Рис. 2a.

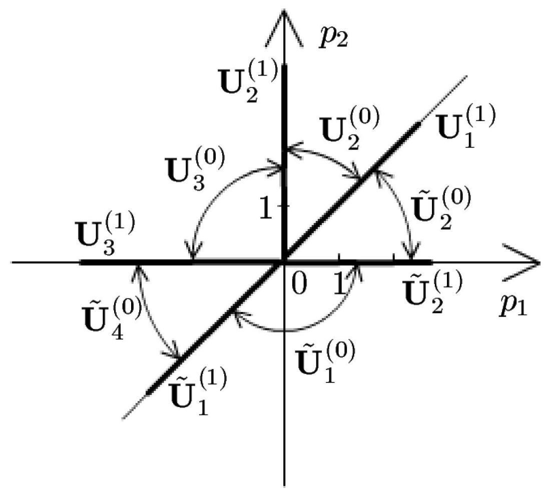

Рис. 2b.

2) $b = 0$, тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\begin{gathered} f(x,\ y) \overset{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[\ x^2(x-1)^2(y-1)(y-x)+ \\ x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)\ ]+ \\ +2y'[\ x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x)+ \\ x^2(x-1)^2y(y-1)\ ] - [\ 2ay^2(y-1)^2(y-x)^2+ \\ 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\ ] = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

В этом случае у носителя, изображенного на рис. 1, пропадут точки (3, 0), (2, 1), (3, 1). Носитель $\mathbf{S}(f_{b=0})$ левой части уравнения (2. 4), его выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(f_{b=0})$, грани $\Gamma_i^{(0)} = Q_i$, $i = 5, 6$, $\tilde{\Gamma}_j^{(0)} = \tilde{Q}_j$, $j = 2, 3, 4$, $\Gamma_4^{(1)}$, $\Gamma_5^{(1)}$, $\Gamma_6^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$ изображены на рис. 3a, нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(d)}$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$, $d = 0, 1$ – на рис. 3b.

Вершины $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_3$, $\tilde{Q}_4$ и ребра $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$, изображенные на рис. 1, 2a и 3a рассматривались в случае a, $b \neq 0$ в [2, 3]. Члены уравнения (2.2), имеющие множителем параметр a, имеют носитель, изображенный на рис. 4 сплошными точками.

Таким образом, при $a = 0$ члены в уравнении (2.2), соответствующие вершинам $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_4$ и ребрам $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$, остаются без изменений. И соответствующие им укороченные уравнения также не меняются, т.е. сохраняются виды разложений решений соответствующие им, изменяясь, быть может, лишь в членах, начиная со второго.

В случае $b = 0$, в разложениях решений, соответствующих сохранившимся граням из общего случая, могут измениться члены начиная со второго, но виды разложений сохраняются. Поэтому рассмотрим оставшиеся вершины Q_2 и Q_3 и ребра $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$ в случае $a = 0$ и вершины Q_5 и Q_6 и ребра $\Gamma_4^{(1)}$, $\Gamma_5^{(1)}$, $\Gamma_6^{(1)}$ в случае $b = 0$.

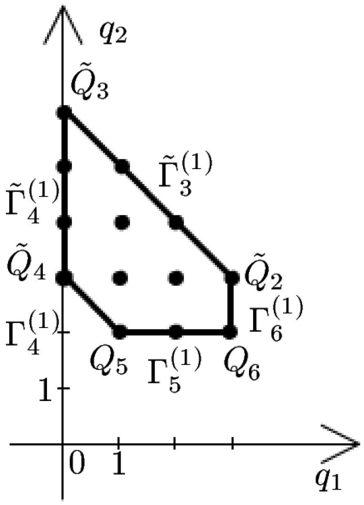

Рис. 3a.

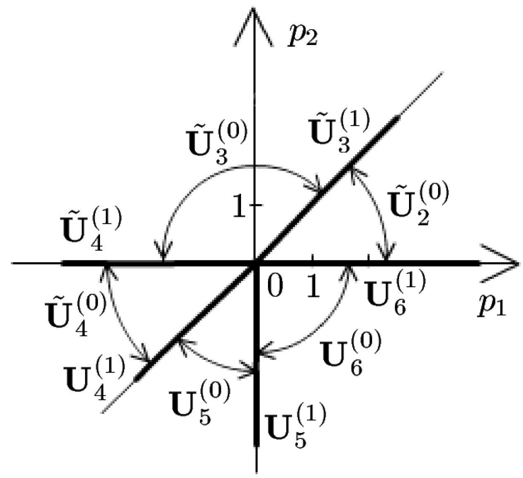

Рис. 3b.

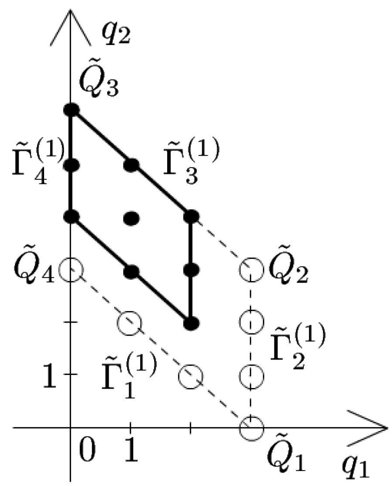

Рис. 4.

Уравнение (2.1) обладает симметрией (см. формулу (2.3) из [2]).

$$(x,\, y,\, a,\, b,\, c,\, d) = (1/x^*,\, 1/y^*,\, -b^*,\, -a^*,\, c^*,\, d^*). \tag{2.5}$$

С ее помощью случай $a = 0$ переводится в случай $b = 0$. Вершины Q_2 и Q_3 и ребра $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$ в случае $a = 0$, симметричны вершинам Q_5, Q_6 и ребрам $\Gamma_4^{(1)}$, $\Gamma_5^{(1)}$, $\Gamma_6^{(1)}$ в случае $b = 0$ соответственно. Поэтому далее подробно рассмотрим случай $a = 0$, а затем с помощью симметрии (2.5) перенесем результаты на случай $b = 0$.

§3. Разложения, соответствующие вершине $\mathbf{Q_2}$, в случае $\mathbf{a = 0}$

3.1. Простые разложения решений. Вершине $Q_2 = (2, 4)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^4y^3 - 3y'^2x^4y^2 + 4y'x^3y^3 - 2dx^2y^4 = 0. \tag{3.1}$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(0)} = \{p_2 > p_1 > 0\}$, т. е. $x \to \infty$, $y \to \infty$, $\omega = 1$.

Первое приближение решения уравнения (2.3) есть $y = c_r x^r$, $c_r \neq 0$, c_r — произвольная постоянная. Вычислим показатель степени r. Характеристическое уравнение $\chi(r) = x^{-4r-2}\hat{f}_2^{(0)}(x, y) = -r^2 + 2r - 2d = 0$ имеет два корня

$$r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2d}, \quad d \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

Так как в формуле (3.2) перед корнем $\sqrt{1-2d}$ стоит знак $\pm$, то в качестве его значения возьмем то, для которого $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} \geq 0$. Тогда, в случае $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} > 0$, вектор $P_1 = \omega(1, \operatorname{Re} r_1) = (1, 1 + \operatorname{Re}\sqrt{1-2d}) \in \mathbf{U}_2^{(0)}$, а вектор $P_2 = \omega(1, \operatorname{Re} r_2) = (1, 1 - \operatorname{Re}\sqrt{1-2d}) \notin \mathbf{U}_2^{(0)}$. Если $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} = 0$, то ни один из векторов P_1 и P_2 не лежит в $\mathbf{U}_2^{(0)}$. Таким образом, разложения решений, соответствующие вершине Q_2, существуют только в случае $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} > 0$. Первое приближение решения есть $y = c_r x^r$, $c_r \neq 0$, где

$$r = r_1 = 1 + \sqrt{1 - 2d}, \quad d \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\partial \hat{f}_2^{(0)}(x, y)}{\partial y} = 2\frac{d^2}{dx^2}x^4y^3 + 6y''x^4y^2 - 6y'\frac{d}{dx}x^4y^2 - 6y'^2x^4y + \tag{3.4}$$

$$+4\frac{d}{dx}x^3y^3 + 12y'x^3y^2 - 8dx^2y^3.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^3\Big(\frac{d^2}{dx^2}x^{3r+4} + 3r(r-1)x^{3r+2} - 3r\frac{d}{dx}x^{3r+3} - \tag{3.5}$$

$$-3r^2x^{3r+2} + 2\frac{d}{dx}x^{3r+3} + 6rx^{3r+2} - 4dx^{3r+2}\Big).$$

Согласно п. 1.4 из [5], характеристический многочлен есть $\nu(k) = 2c_r^3(k^2 + k(1-3r) + 3r - 4d)$. Он имеет два корня $k_1 = 1 + 2\sqrt{1-2d}$, $k_2 = 1 + \sqrt{1-2d}$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < \operatorname{Re} r\}$. Числа $\operatorname{Re} k_{1,2}$ не лежат в $\mathcal{K}$, следовательно, критических чисел нет и æ $= 0$. Носитель разложения решения есть

$$\mathbf{K} = \{s = r + l(1-r) - m, \ \ l, m \geq 0, \ l + m > 0, \ l, \ m \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.6}$$

Разложение решения

$$\mathcal{F}_2^{(0)} : \, y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad s \in \mathbf{K}, \tag{3.7}$$

где c_r — ненулевая комплексная произвольная постоянная, комплексный показатель степени r задан формулой (3.3), а s пробегает множество (3.6), комплексные коэффициенты c_s постоянные и однозначно определенные. Ряд (3.7) сходится для достаточно больших $|x|$ по теореме 3.4 из [5].

Согласно [2] вычислим второе приближение разложения (3.7).

Если $0 < \operatorname{Re}\sqrt{1-2d} \leq 1$, второе приближение решения есть $y = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1}$. Вычислим коэффициент c_{r-1}. Второе приближение уравнения (2. 3) имеет вид

$$\hat{\hat{f}}\,_2^{(0)}(x,\, y) = -4y'' x^3 y^3 + 6y'^2 x^3 y^2 - 6y' x^2 y^3 + 2(-c-b+d)xy^4. \tag{3.8}$$

Откуда находим $b_{r-1} = 2x^{-4r-1}\hat{\hat{f}}\,_2^{(0)}(x,\, c_r x^r) = 2c_r^4(r^2 - r - c - b + d)$, $\nu(r-1) = 2c_r^3 r$, $c_{r-1} = c_r(-r^2 + r + c + b - d)/r$.

Если $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} > 1$, то второе приближение решения есть $y = c_r x^r + c_1 x$, вычислим коэффициент c_1. Второе приближение уравнения (2.3) имеет вид

$$\hat{\hat{f}}\,_2^{(0)}(x,\, y) = -2y'' x^5 y^2 + 2y'^2 x^5 y - 2y' x^4 y^2. \tag{3.9}$$

Так как $b_1 = \hat{\hat{f}}\,_2^{(0)}(x,\, c_r x^r) = 0$, $\nu(1) = 4c_r^3(r-1)^2 \neq 0$, то $c_1 = 0$.

Случай $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} = 1$ рассмотрен вместе со случаем $0 < \operatorname{Re}\sqrt{1-2d} < 1$, поскольку вклад второго приближения (3.9) равен нулю.

3.2. Нестепенные асимптотики. Вычислим нестепенные решения уравнения (3.1), если они существуют. Преобразуем уравнение (3.1) следующим образом

$$g(x,\, y) = x^{-2}y^{-4}\hat{f}_2^{(0)}(x,\, y) = \frac{2y''}{y}x^2 - \frac{3y'^2}{y^2}x^2 + \frac{4y'}{y}x - 2d = 0, \tag{3.10}$$

так что $\mathbf{S}(g) = \{0\}$. Уравнение $g(x,\, y) = 0$ содержит ненулевую постоянную $-2d$,

$$g^* = \frac{2y''}{y}x^2 - \frac{3y'^2}{y^2}x^2, \, \operatorname{coef}(g^*) = 2 - 3 = -1 \neq 0. \tag{3.11}$$

Если $d = 1/2$, то уравнение $\chi(r) = 0$ имеет двукратный корень $r = 1$, т.е. возможно нестепенные решения существуют. Но вектор $P = \omega(1,\, 1)$ не лежит в нормальном конусе вершины $\mathbf{U}_2^{(0)}$. По теоремам 5.6 и 5.7 из [5] нужных нестепенных асимптотик нет. Следовательно, вершине Q_2 не соответствует никакое сложное разложение решения уравнения (2.3).

§4. Разложения, соответствующие вершине $\mathbf{Q_3}$, в случае $\mathbf{a = 0}$

4.1. Степенные разложения решений. Вершине $Q_3 = (0, 4)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(0)}(x,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + 2y'x^3y^3 + 2cy^4 = 0. \tag{4.1}$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 > 0\}$, то есть $x \to 0$, $y \to \infty$, $\omega = -1$.

Первое приближение решения уравнения (2.3) есть $y = c_r x^r, c_r \neq 0, c_r$ — произвольная постоянная. Вычислим показатель степени r. Характеристическое уравнение $\chi(r) = x^{-4r}\hat{f}_3^{(0)}(x,\, x^r) = (-r^2 + 2c) = 0$ имеет два корня

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2c}, \quad c \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

Так как в формуле (4. 2) перед корнем $\sqrt{2c}$ стоит знак $\pm$, то в качестве его значения возьмем то, для которого $\operatorname{Re}\sqrt{2c} \geq 0$. В случае $\operatorname{Re}\sqrt{2c} > 0$, вектор $P_1 = \omega(1, \operatorname{Re} r_1) = (-1, -\operatorname{Re}\sqrt{2c}) \notin \mathbf{U}_3^{(0)}$, а вектор $P_2 = \omega(1, \operatorname{Re} r_2) = (-1, \operatorname{Re}\sqrt{2c}) \in \mathbf{U}_3^{(0)}$. Если $\operatorname{Re}\sqrt{2c} = 0$, то ни один из векторов P_1 и P_2 не лежит в $\mathbf{U}_3^{(0)}$. Таким образом, разложения решений, соответствующие вершине Q_3, существуют только в случае $\operatorname{Re}\sqrt{2c} \neq 0$. Положим $r = r_2 = -\sqrt{2c}$.

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\partial \hat{f}_3^{(0)}(x,\, y)}{\partial y} = 2\frac{d^2}{dx^2}x^2y^3 + 6y''x^4y^2 - 6y'\frac{d}{dx}x^2y^2 - \tag{4.3}$$

$$-6y'^2x^2y + 2\frac{d}{dx}xy^3 + 6y'xy^2 - 8cy^3.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^3x^{3r}\left(\frac{d^2}{dx^2}x^2 + 3r(r-1) - 3r\frac{d}{dx}x - 3r^2 + \frac{d}{dx}x + 3r + 4c\right). \tag{4.4}$$

Характеристический многочлен

$$\nu(k) = 2c_r^3(k^2 - 3rk + 4c) \tag{4.5}$$

имеет корни $k_1 = -2\sqrt{2c}$ и $k_2 = -\sqrt{2c}$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > \operatorname{Re} r\}$. Поскольку $\operatorname{Re}\sqrt{2c} > 0$, то $\operatorname{Re} k_1$ и $\operatorname{Re} k_2 \leq \operatorname{Re} r$, т. е. числа $\operatorname{Re} k_{1,2}$ не лежат в $\mathcal{K}$, следовательно, критических чисел нет и æ $= 0$. Носитель разложения решения

$$\mathbf{K} = \{s = r - lr + m,\ \ l, m \geq 0,\ l + m > 0,\ l,\ m \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.6}$$

Разложение решения есть

$$\mathcal{F}_3^{(0)}:\, y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad s \in \mathbf{K}, \tag{4.7}$$

где c_r — ненулевая комплексная произвольная постоянная, комплексный показатель степени r задан формулой (4.2), а s, пробегает множество (4. 6), комплексные коэффициенты c_s постоянные и однозначно определенные. По теореме 3.4 из [5] ряд (4.7) сходится для достаточно малых $|x|$.

Вычислим второе приближение решения.

Если $0 < \operatorname{Re}\sqrt{2c} \le 1$, оно имеет вид $y = c_r x^r + c_{r+1}x^{r+1}$. Вычислим коэффициент c_{r+1}. Второе приближение уравнения (2.3) есть

$$\hat{\hat{f}}{}_3^{(0)}(x,\, y) = -4y''x^3y^3 + 6y'^2x^3y^2 - 6y'x^2y^3 + 2xy^4(-c+d-b). \tag{4.8}$$

$b_{r+1} = x^{-4r-1}\hat{\hat{f}}{}_3^{(0)}(x,\, c_r x^r) = 2c_r^4(r^2 - r - c + d - b)$, $\nu(1+r) = 2c_r^3(1-r)$, $c_{r+1} = c_r(r^2 - r - c + d - b)/(r-1)$.

Если $\operatorname{Re}\sqrt{2c} > 1$, то второе приближение решения есть $y = c_r x^r + c_0$, а второе приближение уравнения (2.3) имеет вид

$$\hat{\hat{f}}{}_3^{(0)}(x,\, y) = -2y''x^2y^2 + 2y'^2 - 2y'xy^2. \tag{4.9}$$

Так как $b_0 = \hat{\hat{f}}{}_3^{(0)}(x,\, c_r x^r) = 0$, $\nu(0) = 4c_r^3r^2 \neq 0$, то $c_0 = 0$.

Случай $\operatorname{Re}\sqrt{2c} = 1$ рассмотрен вместе со случаем $0 < \operatorname{Re}\sqrt{2c} < 1$, поскольку вклад второго приближения (4.9) равен нулю.

4.2. Нестепенные асимптотики. Вычислим нестепенные решения уравнения (4.1), если они существуют. Преобразуем его

$$g(x,\, y) = y^{-4}\hat{f}_3^{(0)}(x,\, y) = \frac{2y''}{y}x^2 - \frac{3y'^2}{y^2}x^2 + \frac{2y'}{y}x + 2c = 0, \tag{4.10}$$

$S(g) = \{0\}$. Уравнение $g(x,\, y) = 0$ содержит ненулевую постоянную $2c$. В случае $c = 0$, уравнение $\chi(r) = 0$ имеет двукратный корень $r = 0$. Но $P = \omega(1,\, 0)$ не лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_3^{(0)}$. Поскольку

$$g^* = \frac{2y''}{y}x^2 - \frac{3y'^2}{y^2}x^2 + \frac{2y'}{y}x,\ \operatorname{coef}(g^*) = -1 \neq 0, \tag{4.11}$$

то по теоремам 5.6 и 5.7 из [5] нужных нестепенных асимптотик нет.

§5. Разложения, соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma_1^{(1)}}$ в случае $\mathbf{a = 0}$

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\begin{gathered}\hat{f}_1^{(1)}(x,\,y) \stackrel{\text{def}}{=} -2y''x^5y^2 + 2y'^2x^5y - 2y'x^4y^2 + \\ +2y''x^4y^3 - 3y'^2x^4y^2 + 4y'x^3y^3 - 2dx^2y^4 = 0\end{gathered} \tag{5.1}$$

Нормальный конус есть $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(1,\,1),\, \lambda > 0\}$, ему соответствуют пределы $x \to \infty$, $y \to \infty$, $\omega = 1$.

5.1. Степенные разложения решений. Первое приближение решения есть $y = c_1 x$, где $c_1 \neq 0$. Вычислим коэффициент c_1. Определяющее уравнение есть

$$\tilde{f}_1^{(1)}(c_1) = c_1^4(1 - 2d) = 0. \tag{5.2}$$

Поскольку $c_1 \neq 0$, то $d = 1/2$, а c_1 — ненулевая комплексная произвольная постоянная.

Найдем критические числа. Первая вариация есть

$$\begin{gathered}\frac{\partial \hat{f}_1^{(1)}(x,\,y)}{\partial y} = -2\frac{d^2}{dx^2}x^5y^2 - 4y''x^5y + 4y'\frac{d}{dx}x^5y + 2y'^2x^5 - 2\frac{d}{dx}x^4y^2 - \\ -4y'x^4y + 2\frac{d^2}{dx^2}x^4y^3 + 6y''x^4y^2 - 6y'\frac{d}{dx}x^4y^2 - 6y'^2x^4y + \\ +4\frac{d}{dx}x^3y^3 + 12y'x^3y^2 - 8dx^2y^3.\end{gathered} \tag{5.3}$$

В случае $d = \dfrac{1}{2}$, линейный оператор есть

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}c_1^2x^7 + 4\frac{d}{dx}c_1^2x^6 + 2c_1^2x^5 - 2\frac{d}{dx}c_1^2x^6 - \\ -4c_1^2x^5 + 2\frac{d^2}{dx^2}c_1^3x^7 - 6\frac{d}{dx}c_1^3x^6 - 6c_1^3x^5 + 4\frac{d}{dx}c_1^3x^6 + \\ +12c_1^3x^5 - 4c_1^3x^5.\end{gathered} \tag{5.4}$$

Характеристический многочлен $\nu(k) = 2c_1^2(c_1 - 1)(k - 1)^2$. Поскольку $c_1 \neq 0$, то либо $c_1 = 1$ и k — любое, либо $c_1 \neq 1$ и $k_{1,2} = 1$ – корни характеристического уравнения $\nu(k) = 0$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < 1\}$. Следовательно, в случае $c_1 \neq 1$, $k_{1,2} = 1$ критических чисел нет и разложение решения есть

$$\mathcal{F}_1^{(1)}:\; y = c_1 x + \sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k} x^{-k}, \tag{5.5}$$

где c_1 — ненулевая комплексная произвольная постоянная, остальные c_{-k} комплексные, постоянные и однозначно определенные. Ряд (5.5) сходится для достаточно больших $|x|$ по теореме 3.4 из [5].

В случае $c_1 \neq 1$ второе приближение решения имеет вид $y = c_1 x + c_0$. Второе приближение уравнения (2.3) есть

$$\begin{gathered}\hat{\hat{f}}{}_1^{(1)}(x,\, y) \overset{\text{def}}{=} 2y''x^5y - y'^2x^5 + 2y'x^4y - 2cx^3y^2 + \\ +2y''x^4y^2 - 2y'^2x^4y - 2y'x^3y^2 + 4x^2y^3(c+b-1/2) - \\ -4y''x^3y^3 + 6y'^2x^3y^2 - 6y'x^2y^3 - 2cxy^4 - 2bx^3y^2 - 2bxy^4 - 2dxy^4.\end{gathered} \tag{5.6}$$

Коэффициент $c_0 = -b_0/\nu(0)$, где $b_0 = x^{-5}\hat{\hat{f}}{}_1^{(1)}(x,\, c_1x) = c_1^2(c_1-1)^2(1-2c-2b)$, $\nu(0) = c_1^2(c_1-1)$, отсюда

$$c_0 = (c_1 - 1)(1 - 2c - 2b). \tag{5.7}$$

Если $c_1 = 1$, то соласно (5.4) $\mathcal{L}(x) \equiv 0$. Сделав в уравнении (2.3) в случае $d = 1/2$ замену $y = u + x$, получим уравнение

$$\begin{gathered}h(x,\, u) \overset{\text{def}}{=} 2u''x^2(x-1)^2(u+x)(u+x-1)u - (u'+1)^2[\\ x^2(x-1)^2(u+x-1)u + x^2(x-1)^2(u+x)u + x^2(x-1)^2(u+x)(u+x-1)] + \\ 2(u'+1)[x(x-1)^2(u+x)(u+x-1)u + x^2(x-1)(u+x)(u+x-1)u + \\ x^2(x-1)^2(u+x)(u+x-1)] - [2bx(u+x-1)^2u^2 + 2c(x-1)(u+x)^2u^2 + \\ +x(x-1)(u+x)^2(u+x-1)^2] = 0.\end{gathered} \tag{5.8}$$

Если решение уравнения (5.8) имеет степенную асимптотику, то конус задачи $\mathcal{K}_1 = \{p_1 > 0,\, p_2 < p_1\}$. Но если оно имеет нестепенную асимптотику, то конус задачи $\mathcal{K}_2 = \{p_1 \geq 0,\, p_2 < p_1\}$, ибо возможны решения вида $u = \ln x$, для которого $p_1 = 0$. Поэтому будем считать $\mathcal{K}_2$ конусом задачи.

Носитель $\mathbf{S}(h)$ левой части уравнения $h(x,\, u) = 0$, его выпуклая оболочка, грани – вершины $H_i^{(0)} = Q_i$ и ребра $H_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ изображены на рис. 5a и нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(d)}$, $d = 0, 1$ — на рис. 5b.

С конусом задачи $\mathcal{K}_2$ пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_2^{(0)}$, $\mathbf{U}_1^{(1)}$.

Вершина $\boldsymbol{H_2^{(0)}}$. Соответствующее ей укороченное уравнение

$$\hat{h}_2^{(0)}(x,\, u) \overset{\text{def}}{=} 2u''ux^6 - u'^2x^6 + u^2x^4 = 0. \tag{5.9}$$

Первое приближение решения уравнения (5.8) есть $u = c_r x^r$, $c_r \neq 0$, c_r — произвольная постоянная. Вычислим показатель степени r. Характеристическое уравнение $\chi(r) = (r-1)^2 = 0$ имеет двукратный корень $r = 1$. Вектор $P = \omega(1,\, r) = (1,\, 1) \notin \mathbf{U}_2^{(0)} \bigcap \mathcal{K}_2$, следовательно, нет подходящих решений, соответствующих вершине $H_2^{(0)}$.

Ребро $H_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_1^{(1)}(x,\,u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u''ux^6 - u'^2x^6 + u^2x^4 - 6u''ux^5 + 3u'^2x^5 - 2(b+c+1)u^2x^3$$
$$+6u''ux^4 - 3u'^2x^4 + 2(2b+c)u^2x^2 - 2u''ux^3 + u'^2x^3 - 2bu^2x = 0. \quad (5.10)$$

Это ребро горизонтально. Его правой вершине $H_2^{(0)} = (4,\,2)$ соответствует укороченное уравнение (5. 9). Для обоих этих уравнений (5. 9) и (5. 10) суммарный порядок дифференцирования $\Delta(\hat{h}_1^{(1)}) = \Delta(\hat{h}_2^{(0)}) = 2$. Согласно теореме 5.5 из [5] уравнение (5. 10) не имеет нестепенных решений при $x \to \infty$.

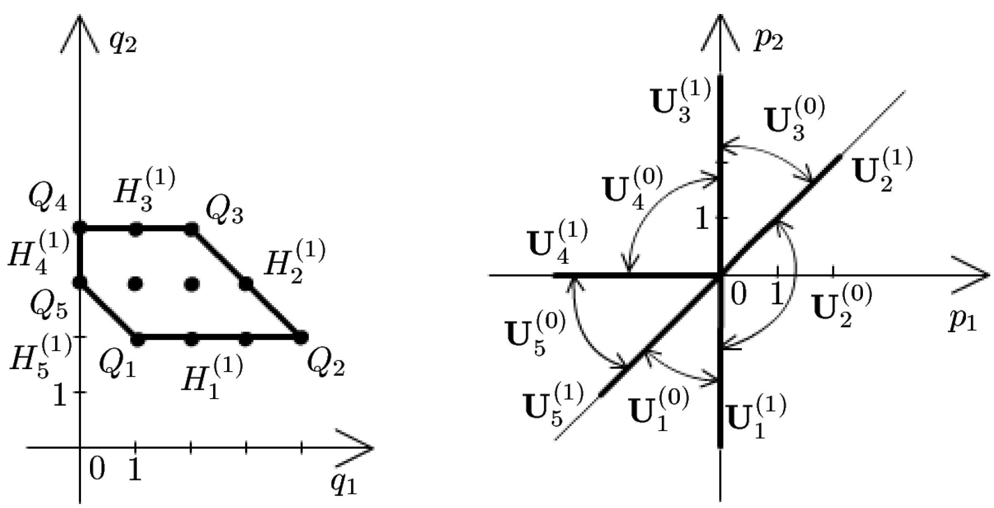

Рис. 5a. **Рис. 5b.**

Таким образом, получаем разложения решений, которые определяются формулой (5.5), где c_1 — произвольная комплексная постоянная, $c_1 \neq 1,\,0$, а остальные комплексные коэффициенты c_{-k} постоянные и однозначно определенные.

5.2. Нестепенные асимптотики решений. Сделаем замену переменных $y = zx$ в уравнении (5.1), тогда $y' = z'x + z$, $y'' = z''x + 2z'$ и укороченное уравнение (5.1), после сокращения на x^6, принимает вид

$$\hat{f}_1^{(1)}(x,\,y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x,\,z) \stackrel{\text{def}}{=} -2z''z^2x^2 + 2z'^2zx^2 - 2z'z^2x +$$
$$+2z''z^3x^2 + 2z'z^3x - 3z'^2z^2x^2 + z^4(1-2d) = 0. \quad (5.11)$$

Ребро $\Gamma_1^{(1)}$ перешло в вертикальное ребро $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$, которое есть отрезок, соединяющий точки (0, 3) и (0, 4). Нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \{\lambda(1,\,0),\,\lambda > 0\}$.

Случай $\mathbf{d \neq 1/2}$. Определяющее уравнение (5.2) имеет только нулевое решение, следовательно, нас будут интересовать решения $z \to 0$. Сделаем логарифмическое преобразование $\xi = \ln x$ и производную по ξ будем обозначать точкой. Тогда $z' = \dot{z}/x$, $z'' = (\ddot{z} - \dot{z})/x^2$ и

$$g(x, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi(\xi, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2\ddot{z}z^2(1-z) + \dot{z}^2 z(2-3z) + z^4(1-2d) = 0. \quad (5.12)$$

Так как $d \neq 1/2$, то носитель $\mathbf{S}(\pi)$ уравнения $\pi(\xi, z) = 0$ состоит из точек $Q_1 = (-2, 3)$, $Q_2 = (0, 4)$, $Q_3 = (-2, 4)$. Он и его выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(\pi)$ изображены на рис. 6a, а нормальные конусы граней изображены на рис. 6b.

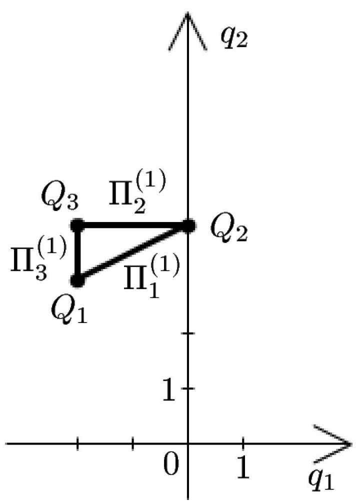

Рис. 6a.

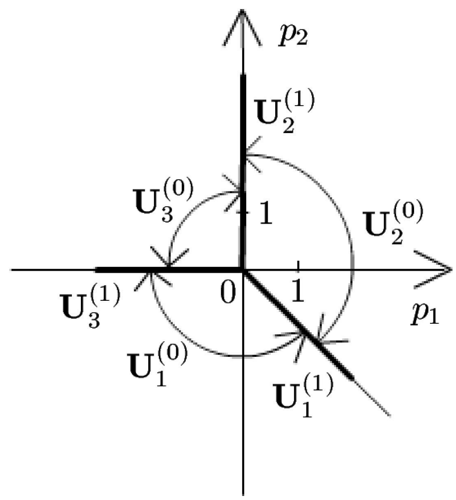

Рис. 6b.

Если $x \to \infty$, то $\xi \to \infty$. Для степенного решения равенство $p_2 = 0$ означает, что решение является постоянной. Однако, для нестепенного решения величина p_2 это порядок решения согласно определению в пункте 5.1 в работе [5]. Поэтому равенство $p_2 = 0$ не означает, что функция является постоянной. Например, для функций $\ln x$ и $1/\ln x$ порядок $p_2 = 0$.

Поэтому конус задачи есть $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0, p_2 \leq 0\}$, т.е. возможно $p_2 = 0$. Кроме того, $z(\xi) \neq \mathrm{const}$. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_2^{(0)}$, $\mathbf{U}_1^{(1)}$. Следовательно, нас будут интересовать грани $\Pi_1^{(0)} = Q_1$, $\Pi_2^{(0)} = Q_2$ и $\Pi_1^{(1)}$. Укороченное уравнение, соответствующее $\Pi_2^{(0)}$, есть $\hat{\pi}_2^{(0)}(\xi, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} z^4(1-2d) = 0$, оно алгебраическое и не дает подходящих решений.

Ребро $\mathbf{\Pi_1^{(1)}}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\pi}_1^{(1)}(\xi, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2\ddot{z}z^2 + 2\dot{z}^2 z + z^4(1-2d) = 0. \quad (5.13)$$

Первое приближение решения уравнения $\pi(\xi, z) = 0$ есть $z = c_{-2}\xi^{-2}$, $c_{-2} \neq 0$. Найдем коэффициент c_{-2}. Определяющее уравнение

$$\hat{\pi}_1^{(1)}(c_{-2}) = c_{-2}^3(-4 + c_{-2}(1-2d)) = 0, \quad (5.14)$$

так как $c_{-2} \neq 0$, то оно имеет корень

$$c_{-2} = \frac{4}{1-2d}. \tag{5.15}$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\partial \hat{\pi}_1^{(1)}(\xi,\, z)}{\partial z} = -2\frac{d^2}{d\xi^2}z^2 - 4\ddot{z}z + 4\dot{z}\frac{d}{d\xi}z + 2\dot{z}^2 + 4z^3(1-2d). \tag{5.16}$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = \frac{\partial \hat{\pi}_1^{(1)}(\xi,\, c_{-2}\xi^{-2})}{\partial z} = -2\frac{d^2}{d\xi^2}c_{-2}^2\frac{1}{\xi^4} - 24c_{-2}^2\frac{1}{\xi^6} -$$

$$-8c_{-2}^2\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\xi^5} + 8c_{-2}^2\frac{1}{\xi^6} + 4c_{-2}^3\frac{1}{\xi^6}(1-2d). \tag{5.17}$$

Характеристический многочлен $\nu(k) = -2c_{-2}^2(k^2+3k)$ имеет два корня $k_1 = 0,\ \ k_2 = -3$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < -2\}$. Так как $k_2 \in \mathcal{K}$, следовательно, k_2 единственное критическое число. Носитель разложения решений $\mathbf{K} = \{s = -2-2l, l \in \mathbb{N}\}$. Носитель разложения решения с учетом k_2 есть

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = -2 - l,\ l \in \mathbb{N}\}.$$

Так как число $k_2 = -3$ не лежит в множестве $\mathbf{K}$, то коэффициент c_{-3} – произвольная постоянная. Разложение решения имеет вид

$$z = \frac{c_{-2}}{\xi^2} + \sum_{k=3}^{+\infty} c_{-k}\xi^{-k}, \tag{5.18}$$

где комплексный коэффициент $c_{-2} \neq 0$ задан формулой (5.15), коэффициент c_{-3} произвольный, остальные комплексные коэффициенты c_{-k} постоянные и однозначно определенные. Ряд (5.18) сходится для достаточно больших $|x|$ по теореме 3.4 из [5].

Сделав обратные преобразования $y = zx$ и $\xi = \ln x$, получаем

$$y = \frac{4}{1-2d}\frac{1}{\ln^2 x}x + c_{-3}\frac{1}{\ln^3 x}x + x\sum_{k=3}^{+\infty} c_{-k}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^k. \tag{5.19}$$

Вершина $\mathbf{\Pi_1^{(0)} = Q_1}$. Ей соответствует укороченное уравнение $\hat{\pi}_1^{(0)}(\xi,\, z) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{z}z^2 + 2\dot{z}^2 z = 0$. Первое приближение решения имеет вид $z = c_r\xi^r$, $c_r \neq 0$, c_r — произвольная постоянная. Вычислим показатель степени r. Характеристическое уравнение $\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{-3r+2}\hat{\pi}_1^{(0)}(\xi,\, \xi^r) = 2r = 0$ имеет корень $r = 0$. Вектору $P = \omega(1,\, r) = (1,\, 0)$ соответствует постоянное решение, которое нам не подходит. Следовательно, решений, соответствующих вершине $\Pi_1^{(0)} = Q_1$, нет.

Случай $\mathbf{d = 1/2}$. В этом случае определяющее уравнение (5.2) может иметь произвольное решение. Тогда конус задачи есть $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$. И кроме того, $z \neq \mathrm{const}$.

Носитель $S(\pi)$ уравнения (5.12) состоит из двух точек Q_1 и Q_3. Его выпуклая оболочка это отрезок, совпадающий с ребром $\Pi_3^{(1)}$ (Рис. 6a). Нормальные конусы суть $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_2 < 0\}$, $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_2 > 0\}$, $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(1,\, 0),\, \lambda > 0\}$.

С конусом задачи пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_3^{(0)}$, $\mathbf{U}_3^{(1)}$. Случай вершины $\Pi_1^{(0)} = Q_1$ рассматривался в случае $d \neq 1/2$. Вычисленный ранее вектор $P = (1,\, 0)$ лежит в конусе задачи $\mathcal{K}$, но ему отвечает постоянное решение, которое нам не подходит. Следовательно, решений, соответствующих вершине $\Pi_1^{(0)}$, нет.

Вершина $\mathbf{\Pi_3^{(0)} = Q_3}$. Ей соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\pi}_3^{(0)}(\xi,\, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\ddot{z}z^3 - 3\dot{z}^2z^2 = 0.$$

Нормальный конус есть $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_2 > 0\}$.

Первое приближение решения имеет вид $z = c_r\xi^r$, $c_r \neq 0$, c_r — произвольная постоянная. Вычислим показатель степени r. Характеристическое уравнение $\chi(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \xi^{-4r+2}\hat{\pi}_3^{(0)}(\xi,\, \xi^r) = -r^2 - 2r = 0$ имеет корни $r_1 = 0$ и $r_2 = -2$. Вектору $P_1 = \omega(1,\, r_1) = (1,\, 0)$ соответствует постоянное решение, которое нам не подходит. А вектор $P_2 = \omega(1,\, r_2) = (1,\, -2)$ не лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_3^{(0)}$. Следовательно, решений, соответствующих вершине $\Pi_3^{(0)} = Q_3$, нет.

Ребро $\mathbf{\Pi_3^{(1)}}$. Оно вертикально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\pi}_3^{(1)}(\xi,\, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\ddot{z}z^3 - 3\dot{z}^2z^2 - 2\ddot{z}z^2 + 2\dot{z}^2z = 0. \tag{5.20}$$

Корнем определяющего уравнения служит любая постоянная. Но решение $z(\xi) = \mathrm{const}$ нам не подходит.

Согласно пункту 5.2 из [5] делаем еще одно логарифмическое преобразование $\eta = \ln\xi$, тогда $\dot{z} = \dfrac{1}{\xi}\dfrac{dz}{d\eta}$, $\ddot{z} = \dfrac{1}{\xi^2}\left(\dfrac{d^2z}{d\eta^2} - \dfrac{dz}{d\eta}\right)$. При этом уравнение (5.20) принимает вид

$$\hat{\pi}_3^{(1)}(\xi,\, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma(\eta,\, z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2\left(\frac{d^2z}{d\eta^2} - \frac{dz}{d\eta}\right)z^2(1-z) + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 z(2-3z) = 0.$$

Носитель $\mathbf{S}(\sigma)$ состоит из четырех точек $Q_1 = (-1,\, 3)$, $Q_2 = (-1,\, 4)$, $Q_3 = (-2,\, 4)$, $Q_4 = (-2,\, 3)$. Их выпуклая оболочка является квадратом с этими вершинами. Граница этого квадрата состоит из четырех вершин и четырех ребер. Их нормальные конусы суть квадранты и координатные лучи плоскости $p_1,\ p_2$.

Конус задачи здесь $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$ и решение $z(\eta) \neq \mathrm{const}$. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы верхнего, правого и нижнего ребра и двух правых вершин.

Верхнее и нижнее ребра соответствуют вершинам $\Pi_3^{(0)}$ и $\Pi_1^{(0)}$, для которых было уже установлено отсутствие нужных решений. Правому ребру соответствует укороченное уравнение

$$2\frac{dz}{d\eta}z^2(1-z) = 0. \tag{5.21}$$

Оно имеет только постоянные решения, которые нам не подходят. Укороченные уравнения, соответствующие правым вершинам, являются частями уравнеия (5.21). Поэтому они имеют также только постоянные решения которые нам не подходят. Следовательно, нет решений, соответствующих ребру $\Pi_3^{(1)}$.

Итак, в случае $d = 1/2$ нет нестепенных решений.

5.3. Сложные разложения решений.

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (5.1), и нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(1,\,1),\ \lambda > 0\}$. Из него следует, что $r = 1$ и $\omega = 1$, т. е. $x \to \infty$. Уравнение (5.1) имеет семейство нестепенных решений (5.19), где $d \neq 1/2$ – комплексный параметр, c_{-k} — комплексные однозначно определенные постоянные. Вычислим критические числа укороченных решений (5.19). Первая вариация есть (5.3). Обозначим ее $\mathcal{M}(x,\,y)$. Поскольку $r = 1$, то сделаем в (5. 3) степенное преобразование $y = zx$. Тогда $y' = z'x + z,\ y'' = z''x + 2z'$. Оператор

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x,\,y) = \left(4x^7zz' - 2x^6z^3 + 2x^6z^2 - 6x^7z^2z'\right)\frac{d}{dx}+\\ \left(2x^7z^3 - 2x^7z^2\right)\frac{d^2}{dx^2} + 6x^7z^2z'' - 4x^7zz''\\ -8x^6zz' - 6x^7zz'^2 + 12x^6z^2z'\\ +2x^7z'^2 - 2x^5z^2 - 8dx^5z^3 + 6x^5z^3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{N}(x,\,z).\end{aligned} \tag{5.22}$$

Сделаем в нем логарифмическую замену $\xi = \ln x$ и производную по ξ будем обозначать точкой. Тогда $z' = \dot z/x,\ z'' = (\ddot z - \dot z)/x^2$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\xi,\,z) = ((4z^2 - 6\dot zz^2 + 4\dot zz - 4z^3)\frac{d}{d\xi} + (-2z^2 + 2z^3)\frac{d^2}{d\xi^2} - 8dz^3 + 6z^3 + 6z^2\ddot z\\ +6\dot zz^2 - 4z\ddot z - 4\dot zz - 6\dot z^2z + 2\dot z^2 - 2z^2)x^5 \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^5\tilde{\mathcal{N}}(\xi,\,z).\end{aligned} \tag{5.23}$$

Для решений (5.19) имеем $z = \dfrac{4}{1-2d}\dfrac{1}{\xi^2} + \ldots$. Поэтому в операторе $\tilde{\mathcal{N}}$ члены старшей по ξ степени n имеют $n = -4$ и образуют оператор

$$\tilde{\mathcal{N}}_{-4} = -2z^2\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\frac{d}{d\xi} + 1\right),$$

где $z = \dfrac{4}{1-2d}\dfrac{1}{\xi^2}$. Ему соответствует характеристический многочлен $\nu(k) = -2\left(\dfrac{4}{1-2d}\right)^2(k^2-2k+1) = -2\left(\dfrac{4}{1-2d}\right)^2(k-1)^2$, который имеет двукратный корень $k = 1 = r$, т. е. не дает критических значений. По теореме 1 из [6, 7] для решений исходного уравнения (2.3) существует единственное разложение

$$\mathcal{F}_1^{(1)}\Pi_1^{(1)} : y = \varphi_1 x + \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{-k}x^{-k}, \tag{5.24}$$

где φ_1 есть (5.19), φ_{-k} ряды по убывающим степеням некратных логарифмов.

§6. Разложения, соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma_2^{(1)}}$ в случае $\mathbf{a = 0}$

Ребро $\Gamma_2^{(1)}$ горизонтально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(x,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^4y^3 - 3y'^2x^4y^2 + 4y'x^3y^3 - 2dx^2y^2 + 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + \\ +2y'x^3y^3 + 2cy^4 - 4y''x^4y^3 + 6y'^2x^3y^2 - xy^4(c+b-d) = 0. \tag{6.1}$$

Оно не дает степенных решений, так как ребро $\Gamma_2^{(1)}$ горизонтально. Проверим, существуют ли нестепенные асимптотики. Ребро $\Gamma_2^{(1)}$ соединяет вершины $Q_3 = (0,\, 4)$ и $Q_2 = (2,\, 4)$, соответствующие укороченные уравнения $\hat{f}_3^{(0)}(x,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + 2y'x^3y^3 + 2cy^4 = 0$ и $\hat{f}_2^{(0)}(x,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^4y^3 - 3y'^2x^4y^2 + 4y'x^3y^3 - 2dx^2y^2 = 0$ имеют порядки дифференцирования равные 2. А порядок дифференцирования уравнения $\hat{f}_2^{(1)}(x,\, y) = 0$ также равен 2, следовательно, по теореме 5.5 из [5], не существует решений ни при $x \to 0$, ни при $x \to \infty$.

§7. Разложения, соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma_3^{(1)}}$ в случае $\mathbf{a = 0}$

Ребро $\Gamma_3^{(1)}$ вертикально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(x,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + \tag{7.1}$$

$$2y'xy^3 + 2cy^4 + 2y'^2x^2y - 2y''x^2y^2 - 2y'xy^2 = 0.$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(-1,\, 0), \lambda > 0\}$, ему соответствуют пределы $x \to 0$, $y \to \mathrm{const} \neq 0$, $\omega = -1$.

7.1. Степенные разложения решений. Первое приближение решения уравнения $f(x,\, y) = 0$ есть $y = c_0$, $c_0 \neq 0$. Вычислим коэффициент c_0. Определяющее уравнение

$$\tilde{f}_3^{(1)}(c_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2cc_0^4 = 0. \tag{7.2}$$

Из него следует, что либо $c = 0$ и c_0 — произвольная постоянная, либо $c \neq 0$ и поскольку $c_0 \neq 0$, то степенных решений нет.

Рассмотрим случай $c = 0$, тогда коэффициент c_0 — произвольная постоянная, $c_0 \neq 0$. Найдем критические числа. Первая вариация есть

$$\begin{gathered} \frac{\partial \hat{f}_3^{(1)}(x,\, y)}{\partial y} = 2\frac{d^2}{dx^2}x^2y^3 + 6y''x^2y^2 - 6\frac{d}{dx}y'x^2y^2 - 6y'^2x^2y + \\ +2\frac{d}{dx}xy^3 + 6y'xy^2 + 4\frac{d}{dx}y'x^2y + 2y'^2x^2 - 2\frac{d^2}{dx^2}x^2y^2 - \\ -4y''x^2y - 2\frac{d}{dx}xy^2 - 4y'xy + 8cy^3. \end{gathered} \tag{7.3}$$

В случае $c = 0$, линейный дифференциальный оператор есть

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\partial \hat{f}_3^{(1)}(x,\, c_0)}{\partial y} = 2\frac{d^2}{dx^2}x^2c_0^3 + 2\frac{d}{dx}xc_0^3 - 2\frac{d^2}{dx^2}x^2c_0^2 - 2\frac{d}{dx}xc_0^2. \tag{7.4}$$

Характеристический многочлен

$$\nu(k) = 2k^2c_0^2(c_0 - 1), \tag{7.5}$$

так как $c_0 \neq 0$, то либо $c_0 = 1$ и его корнем является любое число k и $\mathcal{L}(x) \equiv 0$, либо $k_{1,\,2} = 0$, $c_0 \neq 1$, c_0 — произвольная постоянная.

Конус задачи $\mathcal{K} = \{\mathrm{Re}\, k > 0\}$, тогда, если $c_0 \neq 1$, то $k_{1,\,2} = 0$, $k_{1,\,2} \notin \mathcal{K}$, т. е. критических корней нет и разложение идет по целым возрастающим степеням x. Разложение решения

$$\mathcal{F}_3^{(1)} :\, y = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_kx^k, \tag{7.6}$$

где комплексный коэффициент $c_0 \neq 0, 1$ — произвольная постоянная, остальные комплексные коэффициенты c_k — постоянные и однозначно определенные. Ряд (7.6) сходится для достаточно малых $|x|$ по теореме 3.4 из [5].

Второе приближение решения уравнения есть $y = c_0 + c_1 x$. Второе приближение уравнения (2.3) есть

$$\begin{gathered}\hat{\hat{f}}_3(x,\,y) = 2y''x^3y - y'^2x^3 - 2(b-d)xy^2 + \\ +2y''x^3y^2 - 2y'^2x^3y + 6y'x^2y^2 - 4xy^3(b-d) - \\ -4y''x^3y^3 + 6y'^2x^3y^2 - 2xy^4(b-d).\end{gathered} \tag{7.7}$$

Коэффициент $c_1 = -b_1/\nu(1)$, $b_1 = x^{-1}\hat{\hat{f}}{}_3^{(1)}(x,\,c_0) = -2(b-d)c_0^2(c_0-1)^2$, $\nu(1) = 2c_0^2(c_0-1)$,

$$c_1 = (b-d)(c_0-1). \tag{7.8}$$

В случае, когда $c_0 = 1$, т. е. $\mathcal{L}(x) \equiv 0$, сделаем в уравнении (2.2) при $a = 0$, $c = 0$ замену $y = u + 1$ и получим

$$\begin{gathered}g(x,\,u) \stackrel{\text{def}}{=} u''x^2(x-1)^2(u+1)u(u+1-x) - \\ u'^2[x^2(x-1)^2u(u+1-x) + x^2(x-1)^2(u+1)^2(u+1-x) + \\ x^2(x-1)^2(u+1)u] + 2u'[x(x-1)^2(u+1)u(u+1-x) + \\ x^2(x-1)(u+1)u(u+1-x) + x^2(x-1)^2(u+1)u - 2bxu^2(u+1-x)^2 + \\ 2dx(x-1)(u+1)^2u^2] = 0.\end{gathered} \tag{7.9}$$

Если решение уравнения (5.8) имеет степенную асимптотику, то конус задачи $\mathcal{K}_1 = \{p_1 < 0,\, p_2 < 0\}$. Но если оно имеет нестепенную асимптотику, то конус задачи $\mathcal{K}_2 = \{p_1 \le 0,\, p_2 < 0\}$. Поэтому будем считать $\mathcal{K}_2$ конусом задачи.

Носитель $\mathbf{S}(g)$ левой части уравнения (7.9), его выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(g)$, грани, вершины $G_i^{(0)} = Q_i$ и ребра $G_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, 5$, изображены на рис. 7a и нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(j)}$ изображены на рис. 7b.

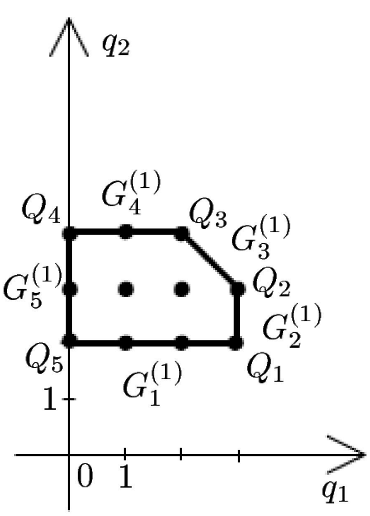

Рис. 7a.

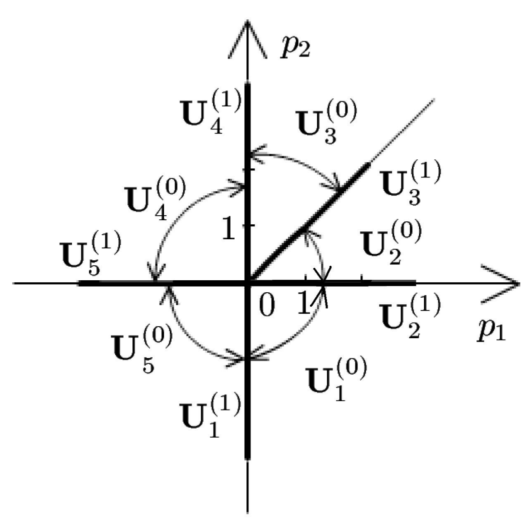

Рис. 7b.

С конусом задачи $\mathcal{K}_2$ пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_5^{(0)}$ и $\mathbf{U}_1^{(1)}$.

Вершина $G_5^{(0)}$. Ей соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_5^{(0)}(x,\,u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux = 0. \tag{7.10}$$

Первое приближение решения имеет вид $u = c_r x^r$, где c_r — ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени r определим из характеристического уравнения

$$\chi(r) = r^2 = 0, \tag{7.11}$$

т. е. $r_{1,2} = 0$. Вектор $P = \omega(1,\,r) = -(1,\,0)$ не лежит в $\mathbf{U}_5^{(0)} \cap \mathcal{K}$, следовательно, подходящих решений, соответствующих вершине $G_5^{(0)} = Q_5$, нет.

Ребро $G_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_1^{(1)}(x,\,u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 6u''ux^3 + 3u'^2x^3 - 6u'ux^2 - 2(b-d)u^2x$$

$$6u''ux^4 - 30u'^2x^4 + 6u'ux^3 - 2(d+2b)u^2x^2 - 2u''ux^5 + u'^2x^5 - 2u'ux^4 - 2bu^2x^3 = 0. \tag{7.12}$$

Это ребро горизонтально. Его левой вершине $G_5^{(0)} = (0,\,2)$ соответствует укороченное уравнение (7.10). Для обоих этих уравнений (7.10) и (7.12) суммарный порядок дифференцирования $\Delta(\hat{g}_1^{(1)}) = \Delta(\hat{g}_5^{(0)}) = 2$. Согласно теореме 5.5 из [5] уравнение (7. 12) не имеет нестепенных решений при $x \to 0$.

7.2. Нестепенные асимптотики решений.

Случай с $\neq$ 0. Тогда степенных решений уравнения (7. 1) нет. Поскольку нет кратных ненулевых решений определяющего уравнения, то по теореме 5.2 из [5] у нас нет решений стремящихся к ненулевой постоянной. Сделаем логарифмическое преобразование $\xi = \ln x$ в уравнении (7. 1). Тогда $y' = \dot{y}/x,\ y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2$ и

$$\varphi(\xi,\,y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_3^{(1)}(\xi,\,y) = 2\ddot{y}y^2(y-1) + \dot{y}^2y(2-3y) + 2cy^4 = 0. \tag{7.13}$$

По теореме 5.3 из [5], у этого уравнения нас интересуют только решения, стремящиеся к нулю.

Носитель левой части уравнения, его выпуклая оболочка и нормальные конусы граней изображены на рис. 6 a и на рис. 6 b, где $\Phi_i^{(1)} = \Pi_i^{(1)}$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0,\, p_2 \leq 0\}$, что соответствует пределу $\xi \to \infty$, то есть $x \to 0$. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_2^{(0)}$ и $\mathbf{U}_1^{(1)}$. Укороченное уравнение $\hat{\varphi}_2^{(0)}(\xi,\,y) \stackrel{\text{def}}{=} 2cy^4 = 0$ имеет только тривиальное решение.

Ребро $\mathbf{\Phi_1^{(1)}}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_1^{(1)}(\xi,\, y) = -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y + 2cy^4 = 0. \tag{7.14}$$

Нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(1,\, -2),\, \lambda > 0\}$. Первое приближение решения уравнения $\varphi(\xi,\, y) = 0$ есть $y = c_{-2}\xi^{-2}$, $c_{-2} \neq 0$. Вычислим коэффициент c_{-2}. Определяющее уравнение

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(c_{-2}) = c_{-2}^3(-4 + 2cc_{-2}) = 0, \tag{7.15}$$

так как $c_{-2} \neq 0$, то оно имеет решение $c_{-2} = 2/c$. Найдем критические числа решения. Первая вариация

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_1^{(1)}(\xi,\, y)}{\partial y} = -2\frac{d^2}{d\xi^2}y^2 - 4\ddot{y}y + 4\dot{y}\frac{d}{d\xi}y + 2\dot{y}^2 + 8cy^3. \tag{7.16}$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = -2\frac{d^2}{d\xi^2}c_{-2}^2\frac{1}{\xi^4} - 24c_{-2}^2\frac{1}{\xi^6} - 8c_{-2}^2\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\xi^5} + 8c_{-2}^2\frac{1}{\xi^6} + 8cc_{-2}^3\frac{1}{\xi^6}. \tag{7.17}$$

Характеристический многочлен $\nu(k) = c_{-2}^2(-2k^2 - 6k)$, $c_{-2} \neq 0$, имеет два корня $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < -2\}$. $k_2 \in \mathcal{K}$, то есть k_2 — единственное критическое число. Носитель разложения решения $\mathbf{K} = \{s = -2 - 2l,\, l > 0\}$. Множество $\mathbf{K}(k_2) = \{s = -2 - l,\, l > 0\}$. Второе приближение решения уравнения $\varphi(\xi,\, y) = 0$ есть

$$y = c_{-2}\frac{1}{\xi^2} + c_{-3}\frac{1}{\xi^3}. \tag{7.18}$$

Поскольку $k_2 \notin \mathbf{K}$, то условие совместности автоматически выполнено и коэффициент c_{-3} — комплексная произвольная постоянная.

Разложение решения есть

$$y = \frac{2}{c}\frac{1}{\xi^2} + c_{-3}\frac{1}{\xi^3} + \sum_{k=4}^{+\infty} c_{-k}\frac{1}{\xi^k}, \tag{7.19}$$

где c_{-3} — комплексная произвольная постоянная, а c_{-k} — комплексные, постоянные и однозначно определенные. Сделаем обратную замену и получим асимптотику решения уравнения (2.3)

$$y = \frac{2}{c}\frac{1}{\ln^2 x} + c_{-3}\frac{1}{\ln^3 x} + \sum_{k=4}^{+\infty} c_{-k}\frac{1}{\ln^k x}, \tag{7.20}$$

где c_{-3} — комплексная произвольная постоянная, комплексные коэффициенты c_{-k} — постоянные и однозначно определенные.

Вершина $\mathbf{\Phi_1^{(0)} = Q_1}$. Укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_1^{(0)}(\xi,\, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2 y = 0 \tag{7.21}$$

имеет решение $y = c_0$, так как вектор $P = \omega(1,\, r) = (1,\, 0)$ лежит в $\mathbf{U}_1^{(0)} \cap \mathcal{K}$. Но постоянное решение нам не подходит.

Случай $\mathbf{c = 0}$. Уравнение (7.13) совпадает с уравнением (5.12) в случае $d = 1/2$. Так как определяющее уравнение (7. 2) при $c = 0$ имеет произвольное ненулевое решение, конус задачи есть

$$\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$$

и $y \neq \text{const}$. Поэтому совпадают все объекты степенной геометрии (носитель, выпуклая оболочка, нормальные конусы, конус задачи) для этих двух уравнений. Следовательно, нет нестепенных решений уравнения (7.13) в случае $c = 0$.

7.3. Сложные разложения решений. Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (7.1), и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(-1,\, 0),\, \lambda > 0\}$. Из него следует, что $r = 0$ и $\omega = -1$, т. е. $x \to 0$. Уравнение (7.1) имеет однопараметрическое семейство нестепенных решений (7.20) где $c \neq 0$ — комплексный параметр, c_{-3}— комплексная произвольная постоянная, а коэффициенты c_{-k} — комплексные, постоянные и однозначно определенные.

Вычислим критические числа укороченных решений (7.20). Первая вариация определена формулой (7. 3). Обозначим ее $\mathcal{M}(x,\, y)$. Сделаем в $\mathcal{M}(x,\, y)$ логарифмическую замену $\xi = \ln x$ и производную по ξ будем обозначать точкой. Тогда $y' = \dot{y}/x,\ y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2$. Оператор

$$\mathcal{M}(x,\, y) = 2\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) y^3 + 6(\ddot{y} - \dot{y})y^2 - 6\frac{d}{d\xi}\dot{y}y^2 - 6\dot{y}^2 y + 2\frac{d}{d\xi}y^3 + 6\dot{y}y^2 +$$
$$4\frac{d}{d\xi}\dot{y}y + 2\dot{y}^2 - 2\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) y^2 - 4(\ddot{y} - \dot{y})y - 2\frac{d}{d\xi}y^2 - 4\dot{y}y + 8cy^3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}(\xi,\, y). \tag{7.22}$$

Для решений (7.20) имеем $y = \dfrac{2}{c}\dfrac{1}{\xi^2} + \ldots$. Поэтому в операторе $\mathcal{N}$ члены старшей по ξ степени n имеют $n = -4$ и образуют оператор

$$\mathcal{N}_{-4} = -2y^2\frac{d^2}{d\xi^2},$$

где $y = \dfrac{2}{c}\dfrac{1}{\xi^2}$. Ему соответствует характеристический многочлен $\nu(k) = -2\left(\dfrac{2}{c}\right)^2 k^2$, который имеет двукратный корень $k = 0 = r$, т. е. не дает критических значений.

По теореме 1 из [6] для решений исходного уравнения (2.3) существует единственное разложение

$$\mathcal{F}_3^{(1)}\Phi_1^{(1)} : y = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k x^k, \tag{7.23}$$

φ_0 есть (7.19), φ_k ряды по убывающим степеням некратных логарифмов.

§8. Сводка результатов в случае a = 0

Простые и сложные разложения решений в окрестности точки $x = 0$ образуют следующие семейства:

1. Однопараметрическое (по c_r) семейство $\mathcal{F}_3^{(0)}$ простых разложений, определенное формулой (4.7) $r = -\sqrt{2c}$.

2. Однопараметрическое (по c_0) семейство $\mathcal{F}_3^{(1)}$ простых разложений, определенное формулой (7.6) (параметр $c = 0$).

3. Однопараметрическое (по c_{-3}) семейство сложных разложений $\mathcal{F}_3^{(1)}\Phi_1^{(1)}$, определенное формулой (7.23) (параметр $c \neq 0$).

Простые и сложные разложения решений в окрестности точки $x = \infty$ образуют следующие семейства:

4. Однопараметрическое (по c_r) семейство простых разложений $\mathcal{F}_2^{(0)}$ определенное формулой (3.7) $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$.

5. Однопараметрическое (по c_1) семейство $\mathcal{F}_1^{(1)}$ простых разложений, определенное формулой (5.5) (параметр $d = 1/2$).

6. Однопараметрическое (по c_{-3}) семейство сложных разложений $\mathcal{F}_1^{(1)}\Pi_1^{(1)}$, определенное формулой (5.24) (параметр $d \neq 1/2$).

Согласно теореме 7.5 из [5] для всех разложений, перечисленных выше, отсутствуют экспоненциальные добавки, поскольку все укороченные уравнения имеют вторые производные, т. е. для них $\pi(f) = \pi(\mathcal{L})$.

Разложения 1-6 найдены впервые. Они отсутствуют, например, в книге [8], где собраны все известные результаты о разложениях решений уравнений Пенлеве.

Согласно § 2 из [2] шестое уравнение Пенлеве имеет три симметрии. Если скомбинировать первые две из них, то получается симметрия

$$(x,\, y,\, a,\, b,\, c,\, d) \to \left(\frac{1}{x^*},\, \frac{y^*}{x^*}, a^*, b^*, -d^* + \frac{1}{2}, -c^* + \frac{1}{2}\right). \qquad (8.1)$$

Она переводит разложения при $x \to 0$ в разложения при $x \to \infty$. При этом разложения 1, 2, 3 переходят в разложения 4, 5, 6 соответственно (и обратно). Покажем это на примере разложений 1 и 4.

Формула (4.7) при замене (8.1) испытывает следующие преобразования

$$\frac{y^*}{x^*} = c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s},$$

$$y^* = c_r x^{*-r+1} + \sum_s c_s x^{*-s+1}, \qquad (8.2)$$

Положим $c^*_{r^*} = c_r$, $r^* = -r+1$, $c^*_{s^*} = c_s$, $s^* = -s+1$, где s^* пробегает множество $\mathbf{K}^* = \{s^* = r^* + l(1-r^*) - m,\ l,\, m > 0,\ l+m \geq 0,\ l,\, m \in \mathbb{Z}\}$. Получаем ряд

$$y^* = c^*_{r^*} x^{*r^*} + \sum_{s^*} c^*_{s^*} x^{*s^*},$$

Из § 4 известно, что в случае $\operatorname{Re}\sqrt{2c} > 1$, второе приближение решения, соответствующее вершине Q_3, есть $y = c_r x^r + c_0$, $c_r \neq 0$, c_r – произвольная постоянная, $r = -\sqrt{2c}$. С помощью преобразования (8.1) получаем второе приближение решения, соответствующее вершине Q_2 для $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d^*} > 1$,

$$y^* = c^*_{r^*} x^{*r^*} + c^*_1 x^*,$$

где $r^* = 1 + \sqrt{1-2d^*}$, $c^*_{r^*} \neq 0$, $c^*_{r^*}$ – произвольная постоянная, $c^*_1 = 0$.

Аналогично в случае $0 < \operatorname{Re}\sqrt{1-2d^*} \leq 1$ получаем

$$y^* = c^*_{r^*} x^{*r^*} + c^*_{r^*-1} x^{*r^*-1},$$

где $r^* = 1 + \sqrt{1-2d^*}$, $c^*_{r^*} \neq 0$, $c^*_{r^*}$ – произвольная постоянная, $c^*_{r^*-1} = c^*_{r^*}(-r^{*2} + r^* + c^* + b^* - d^*)/r^*$

Наконец, опускаем звездочки и получаем

$$\mathcal{F}^{(0)}_2 :\ y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \qquad (8.3)$$

где комплексный показатель $r = 1 + \sqrt{1-2d}$, $c_r \neq 0$, c_r — комплексная произвольная постоянная, комплексные коэффициенты c_s — постоянные и однозначно определенные, $s \in \mathbb{C}$ пробегает множество $\{r + l(1-r) - m,\ l, m > 0,\ l + m \geq 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, в случае $0 < \operatorname{Re}\sqrt{1-2d} \leq 1$ имеет второе приближение $y = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1}$, где

$$c_{r-1} = c_r(-r^2 + r + c + b - d)/r,$$

а в случае $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} > 1$, второе приближение решения уравнения имеет вид $y = c_r x^r + c_1 x$, где $c_1 = 0$.

§9. Разложения решений в случае $\mathbf{b = 0}$

С помощью симметрии (2.5) переведем разложения 1-6 из § 8, найденные в случае $a = 0$, в соответствующие разложения 7-12 в случае $b = 0$.

Разложение 7. Оно симметрично разложению 1 для вершины Q_3 и соответствует вершине Q_6. Формула (4.7) при замене (2.5) испытывает такие преобразования

$$\frac{1}{y^*} = c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s},$$

$$y^* = \frac{1}{\dfrac{c_r}{x^{*r}}\left(1 + \displaystyle\sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r}\right)}, \tag{9.1}$$

Так как $x^* \to \infty$ и $\left|\displaystyle\sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r}\right| < 1$, то (9.1) можно разложить в ряд

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r}\right)^n. \tag{9.2}$$

Выпишем первые два его члена

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} - \sum_s \frac{c_s}{c_r^2} x^{*-s+2r} + \ldots. \tag{9.3}$$

Положим $c_r^* = 1/c_r$, $c_{s^*}^* = -c_s/c_r^2$, $s^* = -s + 2r$, где s^* пробегает множество $\{r + lr - m,\ l, m > 0,\ l + m \geq 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, получим ряд

$$y^* = c_r^* x^{*r} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*} + \ldots,$$

Второе приближение решения в случае $0 < \operatorname{Re}\sqrt{2c} \leq 1$ имеет вид $y^* = c_r^* x^{*r} + c_{r-1}^* x^{*r-1}$, $r = -\sqrt{2c}$,

$$c_{r-1}^* = -\frac{c_{r+1}}{c_r^2} = -c_r^* \frac{r^2 - r - c + d + a^*}{r - 1}.$$

А в случае $\operatorname{Re}\sqrt{2c} > 1$, второе приближение решения есть

$$y^* = c_r^* x^{*r} + c_{2r}^* x^{*2r},$$

где $c_{2r}^* = 0$. Наконец, опустим звездочки и получим

$$\mathcal{F}_6^{(0)} : \, y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{9.4}$$

где комплексный показатель $r = -\sqrt{2c}$, $c_r \neq 0$, c_r — комплексная произвольная постоянная, комплексные коэффициенты c_s — постоянные и однозначно определенные, $s \in \mathbb{C}$ пробегает множество $\{r + lr - m, \ l, m > 0, \ l + m \geq 0, \ l, m \in \mathbb{Z}\}$.

В случае $0 < \operatorname{Re}\sqrt{2c} \leq 1$ разложение решения имеет второе приближение $y = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1}$, где

$$c_{r-1} = -c_r \frac{r^2 - r - c + d + a}{r - 1},$$

а в случае $\operatorname{Re}\sqrt{2c} > 1$, второе приближение решения уравнения имеет вид $y = c_r x^r + c_{2r} x^{2r}$, где $c_{2r} = 0$.

По теореме 3.4 из [5] ряд (9.4) сходится для достаточно больших $|x|$.

Разложение 8. Оно симметрично разложению 2 для ребра $\Gamma_3^{(1)}$ и соответствует ребру $\Gamma_6^{(1)}$. Формула (7.6) при замене (2.5) преобразуется к виду

$$\mathcal{F}_6^{(1)} : \, y = c_0 + \frac{c_{-1}}{x} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{c_{-k}}{x^k}, \tag{9.5}$$

где $c_0 \neq 0, 1$, c_0 — комплексная произвольная постоянная, комплексный коэффициент $c_{-1} = (d + a)(1 - c_0)c_0$, остальные c_{-k} — комплексные, постоянные и однозначно определенные.

По теореме 3.4 из [5] ряд (9.5) сходится для достаточно больших $|x|$.

Разложение 9. Разложение 9 для ребра $\Gamma_6^{(1)}$ симметрично разложению 3 для ребра $\Gamma_3^{(1)}$. Из (7.23), после подстановки (2.5), получим разложение

$$\mathcal{F}_6^{(1)} \Phi_1^{(1)} : \, y = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{-k} x^{-k}, \tag{9.6}$$

где

$$\varphi_0 = \frac{c}{2} \ln^2 x + c_1 \ln x + \sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k} \left(\frac{1}{\ln x} \right)^k + \ldots, \tag{9.7}$$

c_1 — комплексная произвольная постоянная, c_{-k} — комплексные, постоянные и однозначно определенные, φ_{-k} ряды по убывающим степеням логарифмов.

Разложение 10. Разложение 4, соответствующее Q_2, с помощью формулы (2.5) переводится в разложение 10, соответствующее вершине Q_5

$$\mathcal{F}_5^{(0)} : \, y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{9.8}$$

где $r = 1 + \sqrt{1-2d}$, $c_r \neq 0$, c_r — произвольная постоянная, $s \in \{r + l(r-1) + m, \; l, m > 0, \; l + m \geq 0, \; l, m \in \mathbb{Z}\}$, c_s — постоянные и однозначно определенные. В случае $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} \geq 1$ второе приближение решения $y = c_r x^r + c_{r+1} x^{r+1}$, $c_{r+1} = c_r \dfrac{r^2 - r - c + a + d}{r}$, в случае $0 < \operatorname{Re}\sqrt{1-2d} < 1$ второе приближение решения $y = c_r x^r + c_{2r-1} x^{2r-1}$, $c_{2r-1} = 0$.

Ряд (9.8) сходится для достаточно малых $|x|$, согласно теореме 3.4 из [5].

Разложение 11. С помощью симметрии (2. 5) разложение 8 для ребра $\Gamma_4^{(1)}$ получается из разложения 5 для ребра $\Gamma_1^{(1)}$.

$$\mathcal{F}_4^{(1)} : \, y = c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k x^k, \tag{9.9}$$

где c_1 — комплексная произвольная постоянная, $c_1 \neq 0, 1$, $c_2 = -c_1(1 - c_1)(1 - 2c + 2a)$, остальные c_k однозначно определенные комплексные постоянные.

Этот ряд сходится для достаточно малых $|x|$.

Разложение 12. Разложение 12 для ребра $\Gamma_4^{(1)}$ симметрично разложению 6 для ребра $\Gamma_1^{(1)}$. После подстановки (2.5) в формулу (5.24), получим разложение

$$\mathcal{F}_4^{(1)} \Pi_1^{(1)} : y = \varphi_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k x^k, \tag{9.10}$$

где φ_1 есть

$$\varphi_1 = \frac{1-2d}{4} \ln^2 x + c_1 \ln x + \sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k} (\ln x)^{-k}, \tag{9.11}$$

параметр $d \neq 1/2$, c_1 — произвольная комплексная постоянная, коэффициенты c_{-k} — постоянные, комплексные и однозначно определенные, φ_k ряды по убывающим степеням логарифмов.

§10. Сводка результатов в случае $\mathbf{b} = 0$

Простые и сложные разложения решений в окрестности точки $x = \infty$ образуют следующие семейства:

7. Однопараметрическое (по c_r) семейство $\mathcal{F}_6^{(0)}$ простых разложений, определенное формулой (9.4) $r = -\sqrt{2c}$.

8. Однопараметрическое (по c_0) семейство $\mathcal{F}_6^{(1)}$ простых разложений, определенное формулой (9.5) (параметр $c = 0$).

9. Однопараметрическое (по c_1) семейство сложных разложений $\mathcal{F}_6^{(1)}\Phi_1^{(1)}$, определенное формулой (9.6) (параметр $c \neq 0$).

Простые и сложные разложения решений в окрестности точки $x = 0$ образуют следующие семейства:

10. Однопараметрическое (по c_r) семейство простых разложений $\mathcal{F}_5^{(0)}$ определенное формулой (9.8) $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$.

11. Однопараметрическое (по c_1) семейство $\mathcal{F}_4^{(1)}$ простых разложений, определенное формулой (9.9) (параметр $d = 1/2$).

12. Однопараметрическое (по c_1) семейство сложных разложений $\mathcal{F}_4^{(1)}\Pi_1^{(1)}$, определенное формулой (9.10) (параметр $d \neq 1/2$).

По свойству симметрии эти разложения также не имеют экспоненциально малых добавок. Разложения 7-9 переводятся в разложения 10-12 симметрией (8.1).

Отметим, что сложные разложения решений для уравнений Пенлеве найдены впервые. Кроме того, все разложения 1-12 для шестого уравнения Пенлеве также найдены впервые (ср. [8]).

Список литературы

1. Н.Х. Розов. Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М., Советская энциклопедия, 1984, т. 4, с. 233-234.

2. А.Д. Брюно, И.В. Чухарева. Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Препринт N 49, М., ИПМ им.М.В. Келдыша, 2003, 32 с.

3. А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН, 2004, т. 395, N 6, с. 733-737.

4. И.В. Горючкина. О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестностях особых точек // Труды XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Издательство МГУ, 2004, с. 63-68.

5. А.Д. Брюно. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи математических наук, 2004, т. 59, вып. 3, с. 31-80.

6. А.Д. Брюно. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Препринт N 36, М., ИПМ им. Келдыша, 2005, 16 с.

7. А.Д. Брюно. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2006 , т. 406, N 6, с. 732-735.

8. I.V. Gromak, I. Laine, S. Shimomura. Painleve Differential Equations in the Complex Plain, Berlin, New York, Walter de Gruyter. 2002. 303 p.