Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Т.А.Игнатюк, В.Е.Павловский, В.А.Прошкин

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ. ОРГАНИЗАЦИЯ ВИРТУАЛЬНОЙ СРЕДЫ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ.

Москва, 2006 г.

УДК 531.1

Т.А.Игнатюк, В.Е.Павловский, В.А.Прошкин

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ. ОРГАНИЗАЦИЯ ВИРТУАЛЬНОЙ СРЕДЫ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ.

АННОТАЦИЯ.

В работе рассматриваются особенности реализации компьютерного практикума по небесной механике. Проводится описание структуры виртуальной среды. Разработаны этапы работы учебной программы. Приводится математический аппарат реализованных задач по небесной механике, а также даны примеры наполнения справочного раздела.

Ключевые слова и выражения: небесная механика, компьютерный практикум, виртуальная среда, экспериментальная среда, учебная программа.

T.A.Ignatyuk, V.E.Pavlovsky, V.A.Proshkin

CELESTIAL MECHANICS COMPUTER TRAINING PROGRAM. ORGANIZATION OF THE VIRTUAL ENVIRONMENT. MATHEMATICAL FUNDAMENTALS.

ABSTRACT.

The particularity of the forming of celestial mechanics computer training program is considered. Description of the virtual environment is provided. The stages of the learning program are developed. Mathematical apparatus of the implemented celestial mechanics problems together with examples of help data are given.

Key words and phrases: celestial mechanics, computer training program, virtual environment, experimental environment, learning program.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

Данная публикация развивает изложенные в работе [11] идеи по организации мультимедийного практикума.

Практикум предназначен для организации и обеспечения численного экспериментирования в различных небесномеханических задачах и для использования в качестве вспомогательного инструмента при организации учебного курса и физико-механического практикума для студентов по курсу небесной механики. Он также может использоваться как дополнительный материал по основному университетскому курсу теоретической механики.

Разработанный компьютерный практикум выполняет следующий ряд функций: демонстрация теории, базовых понятий и объектов; проведение экспериментов; решение задач; организация и осуществление контроля учебного процесса.

1. ВИРТУАЛЬНАЯ СРЕДА.

Под *виртуальной средой* условимся понимать программную реализацию математических моделей механических систем. С точки зрения выполняемых функций можно выделить два класса программ – экспериментальные и учебные среды. Рассмотрим подробнее организацию структуры и наполнение виртуальной среды практикума по небесной механике.

Экспериментальная среда – это компьютерная программа, предназначенная для проведения модельных экспериментов. Программа реализует параметризованную математическую модель механической системы. Пользователь может задавать значение параметров в определенный момент времени и далее наблюдать поведение системы во времени при заданных параметрах. Также возможно прервать эксперимент, изменить текущие параметры системы или вернуться к исходной конфигурации. Мультимедийный практикум активно использует средства визуализации.

Выделяется три типа экспериментальных сред.

- Стандартные
- С фиксированной структурой
- Создаваемые и редактируемые пользователем

Под стандартными средами подразумеваются компьютерные модели реальных физических объектов и систем. В качестве примеров таких сред можно привести следующие программы: *Спутник сжатой Земли, Точка в системе Земля-Луна, Точка в Солнечной системе.* Параметры данных моделей пропорциональны параметрам объектов систем, существующих в действительности. В указанных средах пользователь может изменять масштаб системы, при этом пропорции между параметрами остаются неизменными.

Среда с фиксированной структурой – это компьютерная модель абстрактных систем. Поведение данных систем описывается математическими уравнениями, содержащими параметры. Пользователь может фиксировать значения параметров и наблюдать поведение системы. Примерами подобных сред являются *Задача Кеплера, Задача двух неподвижных центров, Задача n центров с заданными траекториями, Точка в гравитационном поле однородного материального тела.*

Среды, создаваемые и редактируемые пользователями, представляют собой композицию упомянутых выше сред.

Учебная среда – это компьютерная программа, предназначенная для хранения, интерактивной обработки и передачи информации, наделенная функциями организации и контроля учебного процесса.

Условно можно выделить две составные части учебной среды: информация и программы, обрабатывающие данную информацию.

В свою очередь информация разделяется на непосредственно данные, над которыми программа производит вычисления, и справочную информацию. Данные являются неотъемлемой частью компьютерной программы и входят в её состав в виде программного кода или баз данных. Справочная информация является частью справочной системы, которая содержит инструкции по пользованию, а также кратко освещает теоретическую составляющую практикума, то есть определения, теоремы, формулы с выводами или указаниями, числовые значения параметров стандартных сред и т.д.

Среди программ, основанных на упомянутых ранее данных, можно выделить демонстрационные (или иллюстрирующие) и программы, организующие и контролирующие решение учебных задач.

Демонстрационные программы иллюстрируют определенное свойство механической системы. Приложение может работать по заранее запланированному сценарию или же согласно условиям, задаваемым пользователем в процессе работы приложения. Однако при этом перед пользователем не ставится цель решения какой-либо задачи. К примеру, такими приложениями являются *Конические сечения, Вид с орбиты,* а также программа моделирования орбит в экспериментальных средах с возможностью сравнения траекторий и т.д.

В отличие от демонстрационных программ, организующие и контролирующие программы регистрируют обращения учащегося к системе, обрабатывают информацию, вводимую учащимся с клавиатуры (выполняют те же расчеты и проверяют ответы), в зависимости от величины ошибки разрешают или запрещают доступ к экспериментальной среде, выставляют оценки.

Таким образом, учебная среда имеет следующую структуру.

- Информация
    - Справочная информация (статьи, теория, числовые данные)
    - Инструкция по пользованию
    - Данные (код программы, базы данных)

- Программы
  - Демонстрационные
  - Организующие и контролирующие

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ СРЕДА.

Далее рассмотрим программную реализацию экспериментальной среды в рамках практикума по небесной механике.

Экспериментальная среда в практикуме по небесной механике – это, во-первых, виртуальная область на плоскости или в пространстве, в каждой точке которой определена гравитационная сила, и, во-вторых, программа, которая в этой области по заданным пользователем начальным условиям строит траекторию движущейся точки. Масса движущейся точки принимается равной 1, так как в уравнениях движения она сокращается.

Приведем примеры с кратким описанием основных возможностей разработанных приложений, составляющих экспериментальную среду практикума.

2.1. Стандартные среды.

Спутник сжатой Земли.

Рассмотрим пространственное движение спутника (материальной точки) в поле притяжения Земли. В системе координат, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции Земли, потенциал (силовая функция) притяжения Земли во внешнем пространстве задаётся формулой [2]

$$U = \frac{fM}{r}\left(1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 J_2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - 3\cos^2\psi\right) + O(J_2^2)\right),$$

в которой f – постоянная тяготения, M и r_0 – масса и средний экваториальный радиус Земли, r и ψ – расстояние от центра масс Земли и геоцентрическая широта внешней точки, J_2 – безразмерная постоянная, характеризующая нецентральность земного гравитационного поля. В предположении, что главные центральные моменты инерции Земли A и B равны,

$$J_2 = \frac{C - A}{Mr_0^2},$$

где C – момент инерции Земли относительно оси вращения её центрального эллипсоида инерции.

Программа использует следующие значения параметров для Стандартной Земли, принятые в 1969 г. [3],

$$fM = 3.986013 \cdot 10^5 \, км^3 \cdot c^{-2}, \ r_0 = 6378.155 \, км, \ J_2 = 1082.628 \cdot 10^{-6}.$$

Начальные данные задаются либо численно в специальных полях на экране, либо графически начальной точкой и вектором скорости. Диапазон возможных скоростей указывается рядом с полем, в которое вводится значение. Начало вектора скорости совпадает с начальным положением, конец вектора лежит внутри сферы, задающей диапазон возможных величин скорости. Трёхмерная траектория изображается на экране точками, соединенными отрезками, с задаваемым пользователем интервалом времени в масштабе данной экспериментальной среды. Интегрирование уравнений движения производится с помощью метода Рунге Кутта 4-го порядка [6].

Точка в системе Земля-Луна.

Данный модуль реализует плоскую задачу о движении точки в сфере действия Земли с учетом влияния Луны. Траектории строятся методом сфер действия, то есть склеиваются из кеплеровских траекторий относительно Земли и относительно Луны. Считается, что Земля и Луна – это однородные шары с радиусами $r_0 = 6378.155\,км$ и $\rho_0 = 1738.09\,км$ соответственно [3]. Центр масс Луны движется по кеплеровской круговой орбите радиуса $R = 384400\,км$. Радиус сферы действия Луны $\rho_{СД} = 66000\,км$.

Точка в Солнечной системе.

Программа позволяет исследовать траекторию движения точки в плоской задаче о движении точки в поле притяжения планет Солнечной системы. Аналогично предыдущей задаче, траектории строятся методом сфер действия. При движении внутри сферы действия планеты учитывается только притяжение планеты. Движение планет происходит по заданным кеплеровским орбитам. Значения параметров планет и их орбит извлекаются из базы данных. Пользователь задает начальное положение и скорость пассивно гравитирующей точки. Программа по желанию пользователя строит траекторию точки в различных масштабах (Солнечная система, сфера действия планеты, окрестность планеты).

2.2. Среды с фиксированной структурой.

Ограниченная круговая задача трех тел.

Данная программа предназначена для получения траекторий пассивно гравитирующей материальной точки под действием сил притяжения к двум точкам с конечными массами m_1 и m_2, которые движутся вокруг общего центра масс по коническим сечениям [14]. Если притягивающие массы движутся по круговым орбитам радиусов a_1 и a_2, с частотой обращения n и ось x проходит через точки с конечными массами, то во вращающейся с угловой скоростью n системе координат с началом в центре масс движение точки задается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = U_x^{'} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = U_y^{'} \\ \ddot{z} = U_z^{'} \end{cases}, \; U = \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_2}{r_2}, \; r_{1,2}^2 = (x - a_{1,2})^2 + y^2 + z^2.$$

Решение уравнений производится численно методом Рунге Кутта [6]. Для контроля точности решения применяется интеграл Якоби

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + U + h\,.$$

Пользователь может задавать массы притягивающих тел, радиусы их орбит, а также начальные данные для пассивно гравитирующей точки (положение и скорость). Программа строит траектории притягивающих тел и точки в соответствии с уравнениями движения. Кроме того, программа выводит на экран области возможного движения и пять частных решений, которым соответствуют положения относительного равновесия – точки либрации. По желанию пользователь может создать систему, воспользовавшись параметрами реальных планет. Значения параметров планет находятся в базе данных.

При моделировании движения в эллиптической задаче трех тел расчет траекторий происходит на основании уравнений движения в форме Нехвилла [2, 20].

Точка в гравитационном поле однородного материального тела.

Пользователь имеет возможность выбирать тип тела, создающего гравитационное поле: конечное множество материальных точек, одномерное или двумерное многообразие, область в трехмерном пространстве; задавать параметры, определяющие силовую функцию (массы и координаты точек, плотности распределения массы, уравнения многообразий и границы областей в определенном формате). Кроме того, пользователь имеет возможность определять потенциал как произвольную функцию, задаваемую с помощью комбинаций элементарных функций.

В каждой точке виртуального пространства можно получить компоненты и изображение вектора гравитационной силы, также в окрестности каждой точки можно вывести на экран изображение эквипотенциальной поверхности и сечение заданной плоскостью поверхностей уровня силовой функции в целом. Для сравнения пользователь может получить эти объекты сразу для двух тел, создающих гравитационное поле. Программа рассчитывает траекторию точки в сформированном гравитационном поле по начальным данным, введенным пользователем.

3. УЧЕБНЫЕ ПРОГРАММЫ.

3.1. Сценарий работы учебной программы.

Разработанный вариант обучающей системы настроен на задачи, решение которых содержит три этапа. Проиллюстрируем их на примере задачи о перелете с гравитационным маневром.

1. *Подготовка.*

На подготовительном этапе учащемуся назначается задача, в ходе решения которой он должен применить знания, приобретенные ранее на лекциях курса.

Например, он должен найти область положений конца вектора начальной скорости $\vec{v}_0$, обеспечивающей достижимость заданной орбиты. Учащийся вводит параметры этой области и исходные данные в указанном формате. Программа анализирует введенную информацию, сравнивает её с искомым решением и, если величина ошибки не превышает некоторое допустимое значение, открывает доступ к экспериментальной части.

2. Компьютерный эксперимент.

С помощью численных экспериментов учащийся подбирает в найденной на первом этапе работы области точку, решающую часть его задачи (как правило, – это задача попадания в движущуюся планету или в её сферу действия). Результат эксперимента – два вектора скорости $\vec{v}_0$ – начальный и $\vec{v}_1$ – скорость входа в сферу действия (СД) планеты.

3. Гравитационный маневр.

Учащийся по данному вектору $\vec{v}_1$ и по известной теории находит параметры орбиты – внутренней траектории в СД, дающей вектор $\vec{v}_2$ на выходе из СД. Вектор $\vec{v}_2$ зависит от конкретной задачи. Например, если требуется, чтобы точка "упала" на Солнце (или на Землю в системе Земля-Луна), то $\vec{v}_2$ должна быть параллельна $\vec{r}_1$ – радиус-вектору планеты и либо направлена к Солнцу (Земле), либо $|\vec{v}_2| < \vec{v}_П$, $\vec{v}_П$ – местная вторая космическая скорость. Полученные параметры вводятся с клавиатуры. Программа строит внутреннюю траекторию и её продолжение вне СД, изображает результат на экране (в разных масштабах внутри и вне СД или в одном, в зависимости от выбора пользователя). Далее приложение определяет ошибку, оценивает результат и регистрирует оценку в электронном журнале.

3.2. Реализованные задачи.

Для задачи Кеплера решено несколько конкретных задач. Соответствующие моделирующие программы могут использоваться как непосредственно для получения результатов, так и организующей программой для контроля решения задач учащимися. Далее приведены примеры задач с кратким описанием сценария работы программ.

Задача попадания.

Требуется определить параметры траектории, соединяющей две заданные точки. Очевидно, данная задача многозначна и для получения однозначного решения необходимо ввести дополнительное условие. Исследуем многообразие скоростей перелета между двумя фиксированными точками.

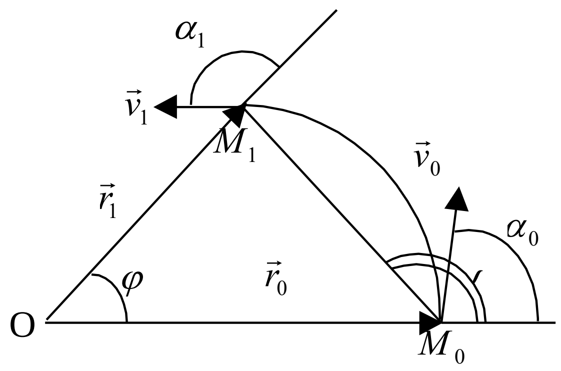


Рис.1. Задача попадания.

Пусть угловая дальность перелета φ, а скорость составляет с радиус-вектором углы α_0 и α_1 в точках $\vec r_0$ и $\vec r_1$ соответственно. Чтобы найти зависимость между параметрами в точках $\vec r_0$ и $\vec r_1$, спроектируем постоянный вектор Лапласа $\vec\Lambda$, вычисленный в этих точках, на $\vec r_1$:

$$(\vec\Lambda_0, \vec r_1) = (\vec r_1, [\vec v_0 \times [\vec r_0 \times \vec v_0]]) - \left(\vec r_1, \mu\frac{\vec r_0}{r_0}\right) = ([\vec r_0 \times \vec v_0], [\vec r_1 \times \vec v_0]) - \left(\vec r_1, \mu\frac{\vec r_0}{r_0}\right)$$

$$(\vec\Lambda_1, \vec r_1) = (\vec r_1, [\vec v_1 \times [\vec r_1 \times \vec v_1]]) - \left(\vec r_1, \mu\frac{\vec r_1}{r_1}\right) = ([\vec r_1 \times \vec v_1], [\vec r_1 \times \vec v_1]) - \left(\vec r_1, \mu\frac{\vec r_1}{r_1}\right)$$

Так как угол между $\vec r_1$ и $\vec r_0$ равен φ, а угол между $\vec v_0$ и $\vec r_1$ равен $\alpha_0 - \varphi$, получаем:

$$(\vec\Lambda_0, \vec r_1) = r_1 r_0 v_0^2 \sin\alpha_0 \sin(\alpha_0 - \varphi) - \mu r_1 \cos\varphi$$

Учитывая интеграл площадей

$$r_0 v_0 \sin\alpha_0 = r_1 v_1 \sin\alpha_1,$$

имеем

$$(\vec\Lambda_1, \vec r_1) = c^2 - \mu r_1 = r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0 - \mu r_1.$$

В итоге, приравнивая полученные выражения, приходим к соотношению, связывающему v_0 и остальные параметры

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu r_1 (1 - \cos\varphi)}{r_0^2 \sin^2\alpha_0 - r_0 r_1 \sin\alpha_0 \sin(\alpha_0 - \varphi)}}.$$

Исходя из данного уравнения, задавая различные значения угла вылета α_0, получим семейство траекторий перелета между двумя заданными точками. Покажем, что геометрическим местом концов векторов скоростей, необходимых для перелета между двумя фиксированными точками, служит гипербола [9]. Для этого введем декартову систему координат $M_0(x,y,z)$ такую, что ось M_0x направлена вдоль $\vec r_0$. В выбранной системе координат обозначим

$$x = v_0 \cos\alpha_0,\ y = v_0 \sin\alpha_0,$$

угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ обозначим через ψ. Уравнение для v_0 перепишется в виде

$$(1-\lambda\cos\varphi)y^2+\lambda\sin\varphi xy+\lambda\mu(\cos\varphi-1)=0 \Leftrightarrow Cy^2+2Bxy+F=0, \text{ где } \lambda=r_1/r_0.$$

Определим вид кривой, описываемой полученным уравнением второго порядка. Для этого исследуем инварианты кривой [12]

$$\Delta=-CB^2=\lambda\mu(1-\lambda\cos\varphi)\left(\frac{\lambda\sin\varphi}{2}\right)^2,\ \delta=-B^2=-\left(\frac{\lambda\sin\varphi}{2}\right)^2.$$

В случае, когда $\sin\varphi\neq 0$, то есть $\delta<0$, $\Delta\neq 0$, кривая является гиперболой. Если $\sin\varphi=0$, то есть точки $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ и притягивающий центр лежат на одной прямой, то кривая представляет собой пару прямых. Точнее, если $\varphi=2\pi m+\pi$, $m\in Z$, то $\delta=0$, $\Delta=0$ и кривая распадается на пару параллельных действительных прямых

$$(1+\lambda)y^2-2\lambda\mu=0 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2\lambda\mu}{1+\lambda}}.$$

Если $\varphi=2\pi k$, $k\in Z$ то $\delta=0$, $\Delta=0$ и кривая представляет собой пару совпадающих действительных прямых

$$(1-\lambda)y^2=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ при } \lambda\neq 1.$$

Преобразуем уравнение кривой к виду

$$y=\frac{-Bx\pm\sqrt{B^2x^2-CF}}{C},$$

и найдём отсюда угловые коэффициенты асимптот

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-Bx+Bx}{Cx}=0 \text{ и } k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-Bx-Bx}{Cx}=\frac{-2B}{C}=\frac{\lambda\sin\varphi}{\lambda\cos\varphi-1}=tg\psi.$$

Так образом, асимптотами гиперболы служат прямая $\overrightarrow{OM_0}$, проходящая через притягивающий центр O и начальную точку M_0, а также прямая $\overrightarrow{M_0M_1}$, содержащая начальную и конечную точки.

Описание программы.

На экране задается начальное и конечное положения на траектории перелета. Программа строит в плоскости траектории кривую для конца вектора $\vec{v}_0$, дающего траекторию, проходящую через две данные точки, и саму траекторию, если пользователь выбирает на этом многообразии какую-нибудь конкретную точку, например, удовлетворяющую дополнительным условиям (фиксированы v_0, h, α_0 и т.п.)

Задача достижимости.

Рассмотрим траектории, исходящие из заданной точки $\vec{r}_0$. Требуется найти область, содержащую концы векторов скоростей, которые обеспечивают пересечение траектории с круговой орбитой радиуса r_1. Для этого воспользуемся уравнением траектории

$$r=\frac{p}{1+e\cos\vartheta}.$$

Обозначим угол между вектором скорости и радиус-вектором начальной точки через α. Исходя из условия, что на траектории

$$-1 \le \cos\vartheta \le 1,$$

выразив все параметры траектории через r_0, r_1, $\sin\alpha$, v_0, получим

$$\frac{v_0^2}{v_{kp}^2}(\lambda^2 \sin^2\alpha - 1) \le 2(\lambda - 1),\ \lambda = \frac{r_0}{r_1}.$$

Введем систему координат $Mr\tau$ с центром в точке старта, ось Mr направлена по радиус-вектору $\vec{r}_0$, ось $M\tau$ – перпендикулярно. При перелете на внутреннюю орбиту $\lambda > 1$ допустимые скорости перелета лежат внутри гиперболы

$$\frac{v_\tau^2}{2v_{кр}^2/(\lambda+1)} - \frac{v_r^2}{2v_{кр}^2(\lambda-1)} = 1,$$

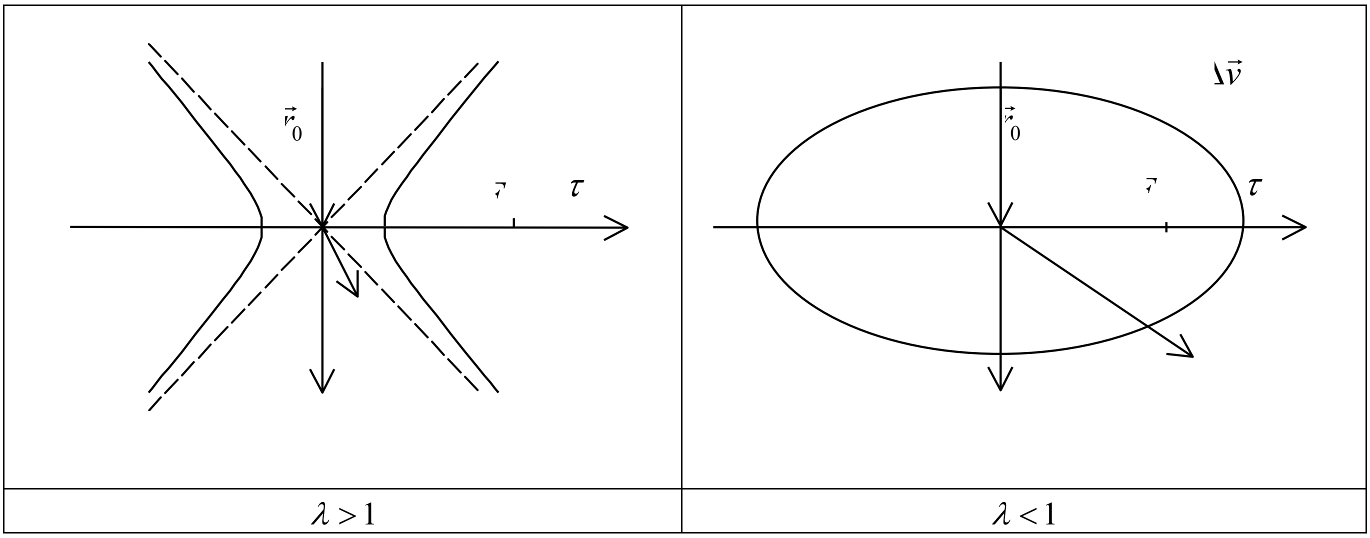


Рис.2. Области допустимых скоростей.

При перелете на внешнюю орбиту $\lambda < 1$ допустимые скорости перелета лежат вне эллипса

$$\frac{v_\tau^2}{2v_{кр}^2/(\lambda+1)} + \frac{v_r^2}{2v_{кр}^2(1-\lambda)} = 1.$$

Описание программы.

Программа в окрестности данной точки $\vec{r}_0$ строит и изображает на экране по заданному r_1 границу области достижимости для конца вектора $\vec{v}_0$. Программа используется как непосредственно, так и для проверки результатов работы учащихся.

Некоторые задачи одноимпульсного маневрирования.

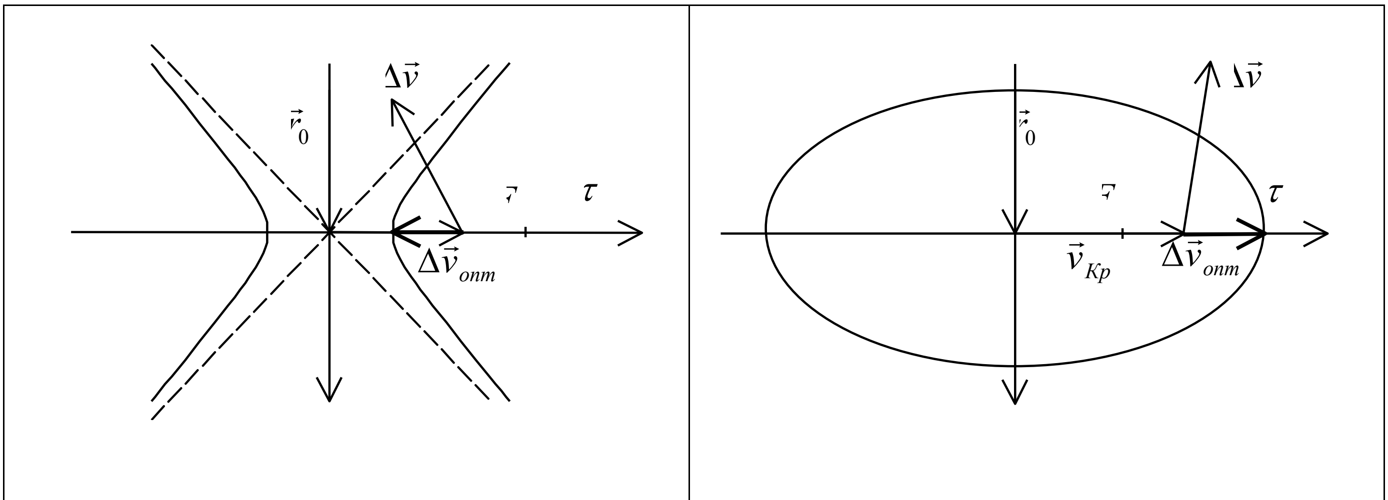
Задача оптимальной достижимости.

Задача оптимальной достижимости заключается в нахождении траектории, проходящей через данную точку $\vec{r}_0$ и сферу радиуса r_1 и удовлетворяющей дополнительным условиям оптимальности. В качестве условий оптимальности может выступать минимизация начального импульса.

Оптимальное достижение заданной круговой орбиты.

Рассматривается движение по круговой орбите r_0 со скоростью $v_{кр} = \sqrt{\mu/r_0}$. Требуется найти минимальный импульс – модуль приращения скорости, который позволяет осуществить перелет к орбите радиуса r_1. Положим $\lambda = r_0/r_1$, тогда скорости, необходимые для достижения орбиты радиуса r_1, удовлетворяют неравенству (см. выше)

$$\frac{v_0^2}{v_{кр}^2}\left(\lambda^2 \sin^2 \alpha_0 - 1\right) \le 2(\lambda - 1).$$



$\lambda > 1$	$\lambda < 1$

Рис.3. Оптимальные импульсы скоростей.

Введем систему координат $Mr\tau$ с центром в точке старта, ось Mr направлена по радиус-вектору $\vec{r}_0$, ось $M\tau$ – по направлению движения. При перелете на внутреннюю орбиту $\lambda > 1$ допустимые скорости перелета лежат внутри гиперболы

$$\frac{v_\tau^2}{2v_{кр}^2/(\lambda+1)} - \frac{v_r^2}{2v_{кр}^2(\lambda-1)} = 1 \text{ или } \frac{v_\tau^2}{b^2} - \frac{v_r^2}{a^2} = 1,\ b = v_{Кр}\sqrt{\frac{2}{\lambda+1}},\ a = v_{Кр}\sqrt{2(\lambda-1)}.$$

При перелете на внешнюю орбиту $\lambda < 1$ допустимые скорости перелета лежат вне эллипса

$$\frac{v_\tau^2}{2v_{кр}^2/(\lambda+1)}+\frac{v_r^2}{2v_{кр}^2(1-\lambda)}=1\text{, или }\frac{v_\tau^2}{b^2}+\frac{v_r^2}{a^2}=1,\ b=v_{Кр}\sqrt{\frac{2}{\lambda+1}},\ a=v_{Кр}\sqrt{2(1-\lambda)}\,.$$

Утверждение. В обоих случаях для $\lambda>1$ и $\lambda<1$ верно $\min\limits_{\vec v\in\Gamma}|\Delta\vec v|=\left|b-v_{Кр}\right|$.

Доказательство. Пусть координаты (x,y) вектора $\vec v$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{x^2}{a^2}=1\Leftrightarrow x^2=\pm a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\text{, где}$$

$$b=v_{Кр}\sqrt{\frac{2}{\lambda+1}},\ a=v_{Кр}\sqrt{2\,|1-\lambda\,|},\ a=b\sqrt{|1-\lambda^2\,|}\,.$$

Найдём $\min\limits_{\vec v\in\Gamma}|\Delta\vec v|=\min\limits_{\vec v\in\Gamma}\left|\vec v-\vec v_{кр}\right|=\min\limits_{\vec v\in\Gamma}\sqrt{\pm a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+y^2-2yv_{кр}+v_{кр}^2}=$

$$=\min\limits_{\vec v\in\Gamma}\sqrt{y^2\left(1\pm\frac{a^2}{b^2}\right)-2yv_{кр}+v_{кр}^2\pm a^2}=\min\limits_{y}\sqrt{f(y)}$$

Вершина параболы, задаваемой функцией $f(y)$, находится в точке $(y_0,f(y_0))$,

$$y_0=\frac{v_{Кр}}{1\mp\dfrac{a^2}{b^2}}.$$

Для эллипса $\lambda<1$,

$$y_0>b\Leftrightarrow\frac{v_К}{1-\dfrac{a^2}{b^2}}>b\Leftrightarrow\frac{v_{Кр}}{1-(1-\lambda^2)}>v_{Кр}\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}}\Leftrightarrow 2\lambda^4-\lambda-1<0\,.$$

Последнее неравенство выполняется для любого λ, такого что $\lambda<1$, так как

$$\lambda^4<\lambda,\ \lambda^4<1\ \Rightarrow(\lambda^4-\lambda)+(\lambda^4-1)<0\,.$$

Таким образом, так как для эллипса $y\in[-b,b]$, $y_0>b$, то минимум достигается при $y=b$.

Аналогично для гиперболы $\lambda>1$,

$$y_0<b\Leftrightarrow\frac{v_{Кр}}{1+\dfrac{a^2}{b^2}}<b\Leftrightarrow\frac{v_{Кр}}{1+(\lambda^2-1)}<v_{Кр}\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}}\Leftrightarrow 2\lambda^4-\lambda-1>0\,.$$

Последнее неравенство выполняется для любого $\lambda>1$, так как

$$\lambda^4>\lambda\quad,\ \lambda^4>1\ \Rightarrow(\lambda^4-\lambda)+(\lambda^4-1)>0\,.$$

Таким образом, так как для соответствующей ветви гиперболы $y\in[b,+\infty]$, $y_0<b$, то минимум достигается при $y=b$. Следовательно, при перелете на внутреннюю орбиту оптимальный импульс направлен против движения

$$\Delta\vec v_{опт}=(a-v_{кр})\vec e_\tau,\ \Delta\vec v_{опт}=-v_{кр}\left(1-\sqrt{\frac{2r_1}{r_0+r_1}}\right)\vec e_\tau,\ \vec v_0=v_{кр}\sqrt{\frac{2r_1}{r_0+r_1}}\vec e_\tau,$$

при перелете на внешнюю орбиту оптимальный импульс направлен по направлению движения

$$\Delta\vec{v}_{опт} = (a - v_{кр})\vec{e}_\tau, \ \Delta\vec{v}_{опт} = v_{кр}\left(\sqrt{\frac{2r_1}{r_0 + r_1}} - 1\right)\vec{e}_\tau, \ \vec{v}_0 = v_{кр}\sqrt{\frac{2r_1}{r_0 + r_1}}\vec{e}_\tau .$$

Описание программы.

Программа находит оптимальный импульс, строит соответствующую траекторию и изображает её на экране. Приложение используется как непосредственно, так и для оценки результатов работы учащихся.

Оптимальное попадание с круговой орбиты в заданную точку.

Движение происходит по круговой орбите радиуса r_0 с круговой скоростью $\vec{v}_{K0}$. Требуется найти минимальный по модулю импульс $\Delta\vec{v}$, обеспечивающий попадание в заданную точку $\vec{r}_1$.

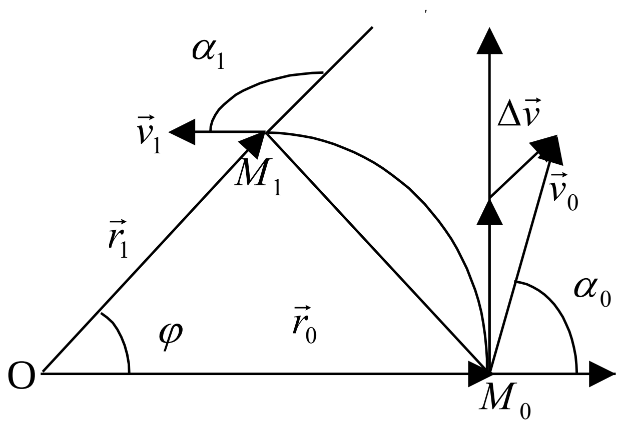


Рис.4. Оптимальное попадание в точку.

Пусть угловая дальность перелета φ, а начальная скорость $\vec{v}_0$ составляет с радиус-вектором $\vec{r}_0$ угол α_0. В плоскости скоростей рассмотрим гиперболу, которой принадлежат концы векторов скоростей, обеспечивающих попадание в заданную точку. Воспользуемся полученной ранее зависимостью

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu r_1(1-\cos\varphi)}{r_0{}^2\sin^2\alpha_0 - r_0 r_1 \sin\alpha_0 \sin(\alpha_0 - \varphi)}} \quad (*)$$

и найдём явный вид уравнения гиперболы. Введем в точке старта декартовы координаты (r,τ)

$$\vec{v}_0 = v_\tau\vec{e}_\tau + v_r\vec{e}_r, \ v_\tau = v_0\sin\alpha_0, \ v_r = v_0\cos\alpha_0 .$$

Преобразуем $(*)$ к виду

$$v_\tau^2(\cos\varphi - \lambda) - v_\tau v_r \sin\varphi = v_{K0}^2(\cos\varphi - 1), \ \lambda = r_0/r_1 .$$

Возможны два случая а) $\cos\varphi = \lambda$ и б) $\cos\varphi \neq \lambda$.

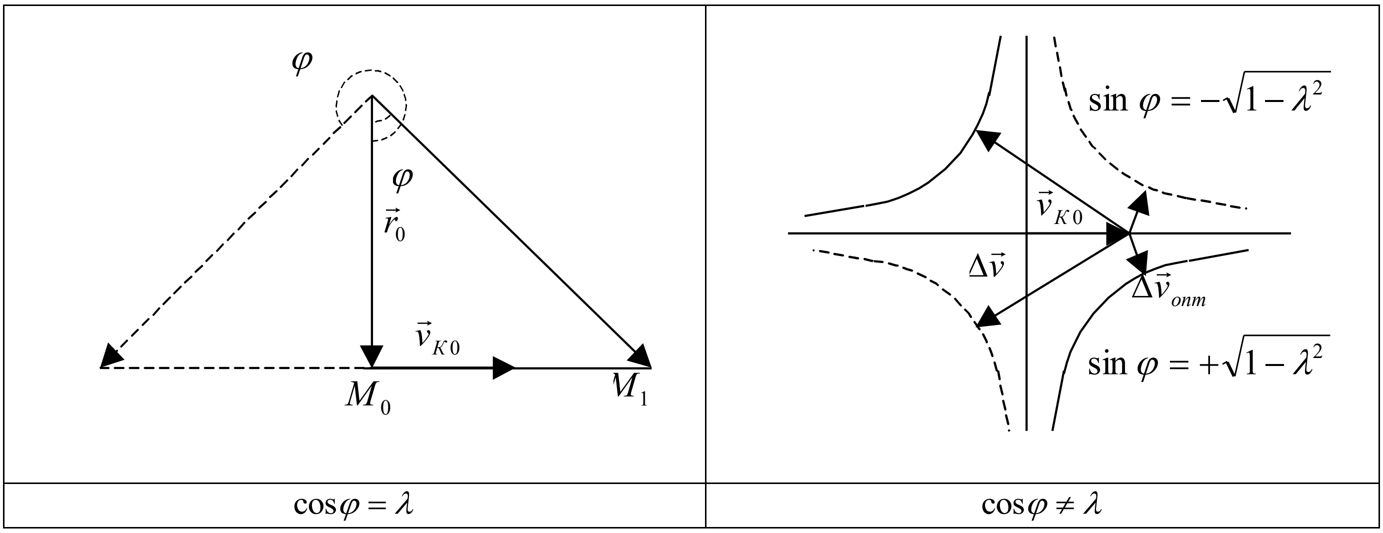


Рис.5. Допустимые скорости перелета.

а) В первом случае условие $\cos\varphi = \lambda$ означает, что точка M_1 оказалась на одной линии с начальной скоростью $\vec{v}_0$ («по курсу» или строго «позади»). Уравнение кривой $(*)$ принимает вид

$$\frac{v_\tau}{v_{K0}}\frac{v_r}{v_{K0}} = \pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \pm\sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} = \pm q \Leftrightarrow xy = \pm q,\, x = \frac{v_\tau}{v_{\kappa 0}},\, y = \frac{v_r}{v_{\kappa 0}}.$$

Найдем минимальный импульс, для этого рассмотрим гиперболу $xy = q$. Допустим, вектор $\vec{v} = (x, y)$ соответствует импульсу $\Delta\vec{v}$. Исходя из того, что оптимальный импульс должен быть направлен по нормали к гиперболе, получим

$$\begin{cases} \vec{n}(x,y) = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y \\ \Delta\vec{v}(x,y) = (x-1)\vec{e}_x + y\vec{e}_y \end{cases},\ \vec{n} \parallel \Delta\vec{v}_{опт} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{q}{x} & x \\ x-1 & \dfrac{q}{x} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^3 = q^2.$$

Данное уравнение имеет единственный положительный корень $x_0 > 1$. Для него оптимальный импульс $\Delta\vec{v}_{опт} = (x_0 - 1, q/x_0)$.

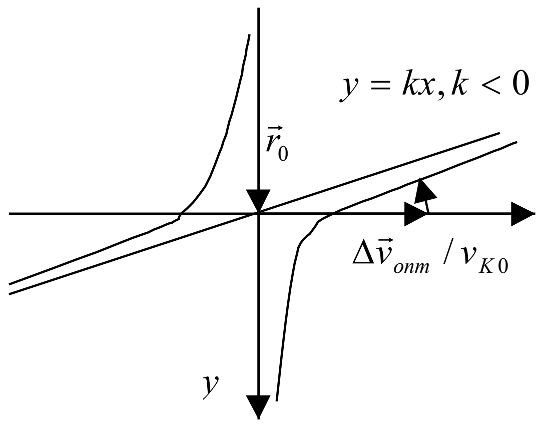
б) В случае, когда $\cos\varphi \neq \lambda$ уравнение $(*)$ преобразуется к виду

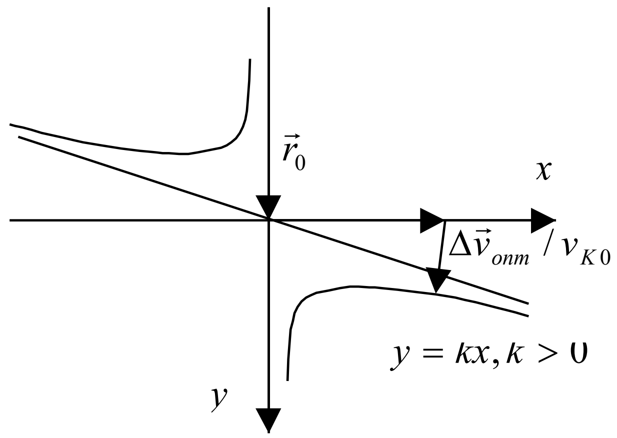
$$\left(x - \frac{\frac{1}{2}\sin\varphi}{\cos\varphi - \lambda}y\right)^2 - \frac{\frac{1}{4}\sin^2\varphi}{(\cos\varphi - \lambda)^2}y^2 = \frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi - \lambda}.$$

Это гипербола, асимптотами которой служат прямые

$$x = 0,\, y = \frac{\cos\varphi - \lambda}{\sin\varphi}x,\ \sin\varphi \neq 0.$$

В случае, когда $0 < \varphi < \pi$, получим следующую картину





$\cos\varphi - \lambda < 0$	$\cos\varphi - \lambda > 0$

Рис.6. Оптимальный импульс скорости.

Оптимальный импульс находится итерациями из условия $\Delta\vec{v}_{опт} \parallel \vec{n}$, где $\vec{n}$ – нормаль к гиперболе. В качестве начального приближения берется импульс, перпендикулярный асимптоте. Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда $\pi \le \varphi < 2\pi$. В частности, пусть $\varphi = \pi$, тогда

$$v_\tau = \pm v_{K0}\sqrt{\frac{2r_1}{r_0 + r_1}}\ , \ v_r \text{ – любое.}$$

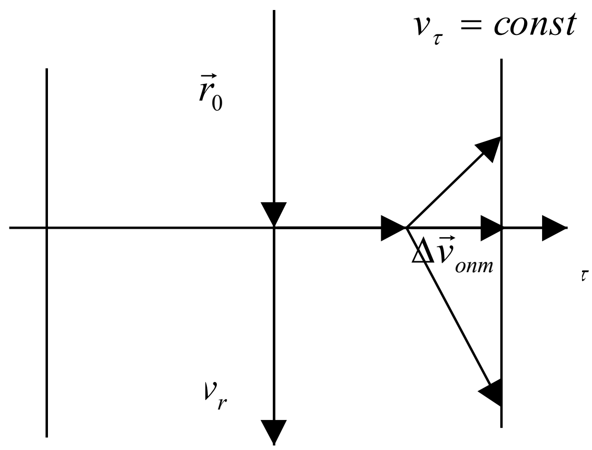


Рис.7. Оптимальный импульс скорости в случае $\varphi = \pi$.

При перелете к внешней орбите оптимальный импульс должен быть приложен по направлению движения, при перелете к внутренней – против. В обоих случаях, как и следовало ожидать, получаем хомановский эллипс

$$\left|\Delta\vec{v}_{опт}\right| = v_{K0}\left|1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_0 + r_1}}\right|.$$

Описание программы.

Программа находит оптимальный импульс, строит соответствующую траекторию и изображает её на экране. Приложение используется как непосредственно, так и для оценки результатов работы учащихся.

Задача попадания в данную движущуюся планету.

Пусть КА движется в центральном гравитационном поле по круговой орбите. Задача заключается в том, чтобы выбрать начальные данные (положение КА и импульс скорости в момент старта) таким образом, чтобы КА встретился с планетой, движущейся по круговой орбите заданного радиуса.

Эта задача решается только экспериментально. Пользователь задает точку в области достижимости и проводит эксперимент. Основываясь на результатах, начальные данные корректируются и эксперимент повторяется до тех пор, пока не будут выполнены условия встречи с планетой с заданной точностью.

В данной задаче область достижимости двумерная. Программа использует другие приложения и изображает по выбору пользователя одномерные подмножества, соответствующее дополнительным условиям (например, фиксировано время перелета, энергетические затраты – $|\Delta\vec{v}|$ и т.п.) На этих подмножествах поиск попадающей траектории значительно облегчается.

3.3. Иллюстрирующие программы.

Иллюстрирующие программы предназначены для демонстрации учащимся основных понятий и явлений, изучаемых в курсе небесной механики. Пользователь может изменять параметры моделей, проводить эксперименты, обращаться к справочному разделу.

Программы *Конические сечения, Эллипс по двум параметрам, Траектории задачи Кеплера, Скорость и ускорение в кеплеровом движении, Классификация орбит по начальной скорости* и др. демонстрируют базовые понятия курса [11].

Далее приведены примеры иллюстрирующих программ, реализованных в рамках практикума по небесной механике.

Эллипс безопасности.

Рассмотрим на плоскости эллиптические орбиты, исходящие из одной и той же точки, с постоянной по модулю скоростью v_0. Для всех этих орбит значение большой полуоси одинаково

$$a = -\frac{\mu}{2h}.$$

Все траектории семейства будут лежать в области, ограниченной огибающей – эллипсом безопасности, его фокусы совпадают с центром притяжения и точкой старта. Параметры эллипса безопасности имеют следующие значения [17]

$$p' = \frac{2\beta}{1-\beta^2}\cdot r_0,\ e' = \frac{1-\beta}{1+\beta},\ a' = \frac{r_0}{2e'} = 4a - r_0,\ \beta = \frac{v_0^2}{v_{пар}^2}.$$

Программа предназначена для демонстрации свойств эллипса безопасности. В начальный момент фиксируется положение старта и энергия. После установки значений параметров программа изображает эллипс безопасности. Пользователь может изменять направление вектора начальной скорости. Задавая различное направление вылета, можно убедиться в том, что получающиеся траектории полностью лежат внутри соответствующего эллипса безопасности.

Максимальная дальность на сфере.

Рассмотрим всевозможные траектории, начинающиеся на поверхности сферы радиуса r_0 с фиксированной по модулю начальной скоростью v_0. Обозначим α_0 – угол между вертикалью и вектором начальной скорости, ψ – угловая дальность, ϑ– истинная аномалия точки старта, $\vec{\Lambda}$ – вектор Лапласа. Определим максимальную возможную угловую дальность ψ на сфере.

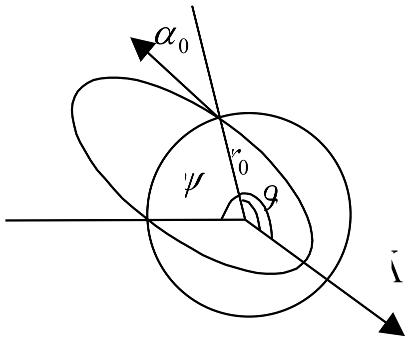


Рис.8. Максимальная дальность на сфере.

Учитывая, что

$$\psi = 2\pi - 2\vartheta, \quad \vartheta \in (0,\pi),$$

Получаем, что

$$\max_{0\le\vartheta\le\pi}\frac{\psi}{2}$$

и

$$\min_{0\le\vartheta\le\pi}\cos\frac{\psi}{2} = -\max_{0\le\vartheta\le\pi}\cos\vartheta$$

достигаются одновременно. Дифференцируя

$$\cos\vartheta = \frac{\left(\vec{\Lambda},\vec{r}_0\right)}{\Lambda r_0} = \frac{c^2 - \mu r_0}{r_0\sqrt{2c^2 h + \mu^2}}$$

по c, получим

$$\frac{d\cos\vartheta}{dc} = 0 \ \Rightarrow\ \sin^2\alpha_0 = \frac{1}{2 - \dfrac{v_0^2}{v_{k0}^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{v_0}{v_{K0}}\right)^2 + o\left(\frac{v_0}{v_{K0}}\right)^2 \text{ и } \sin\frac{\psi_{\max}}{2} = \frac{\beta}{1-\beta}, \ \beta = \frac{v_0^2}{v_{пар}^2}.$$

Программа моделирует движение между двумя точками сферической поверхности. По выбору пользователя программа строит траекторию, доставляющую максимальную дальность на сфере. Пользователь имеет возможность, изменяя графически угол α_0, сравнивать произвольные траектории с оптимальной.

Хомановский эллипс.

Рассмотрим траекторию, представляющую собой эллипс, который в перицентре и апоцентре касается двух окружностей радиусов $r_1 < r_2$ – эллипс Хомана [10].

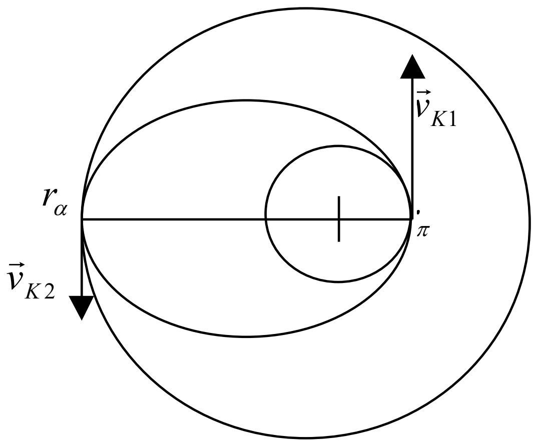


Рис.9. Хомановский эллипс.

Найдем значения скоростей в точках касания. Так как

$$\frac{p}{1+e} = r_1, \ \frac{p}{1-e} = r_2,$$

то

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}, \ p = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Используя эти соотношения, получим значение скорости в перицентре

$$v_{\max}^2 = v_1^2 = \frac{\mu}{p}(1+e)^2 = v_{K1}\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} > v_{K1},$$

аналогично в апоцентре

$$v_{\min}^2 = v_2^2 = \frac{\mu}{p}(1-e)^2 = v_{K2}\sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}} < v_{K2}.$$

Приложение позволяет менять радиусы круговых орбит, при этом на экране отображаются значения параметров эллипса и скоростей в точках касания.

Карта Земли с орбиты.

Приложение моделирует движение по кеплеровской траектории вокруг Земли. Пользователь может наблюдать вид Земли с борта виртуального космического аппарата. Параметры траектории КА задаются пользователем. Модель Земли представляет собой сферу с наложенной текстурой – картой поверхности Земли. Движение происходит в трехмерном пространстве. Пользователь может изменять как точку наблюдения, так и масштаб изображения.

Сравнение методов расчета траекторий.

В системе Земля-Луна программа строит траектории движения, рассчитанные методом сфер действия и одновременно траекторию ограниченной задачи трех тел с одинаковыми начальными данными, задаваемыми пользователем. Например, программа позволяет сравнивать траектории, параметры движения (скорости выхода из сферы действия Луны) в задаче о приземлении ИСЗ с использованием гравитационного поля Луны.

3.4. Справочная информация.

Справочная информация, необходимая пользователю при работе с практикумом, содержится в справочном разделе. Доступ к вспомогательному материалу контролируется преподавателем. Например, при демонстрации новых явлений целесообразно использовать вспомогательный материал для улучшения усвоения материала. С другой стороны, на первом этапе учебной программы, когда учащийся самостоятельно решает контрольную задачу, доступ к справочной информации ограничивается.

В настоящее время справочник содержит следующие статьи *Закон тяготения Ньютона, Силовая функция, Притяжение материальных тел, Притяжение точки шаром, Притяжение точки эллипсоидом, Законы Кеплера, Задача Кеплера, Энергетическая классификация орбит, Классификация орбит по скоростям, Скорость и ускорение в кеплеровом движении, Время на кеплеровой траектории, Решение уравнения Кеплера* и др.

Далее приведены некоторые примеры теоретической составляющей практикума в виде определений, теорем, формул с выводами или указаниями, а также даны числовые значения основных параметров стандартных сред.

Основные параметры планет и их орбит [2, 16, 18].

В таблице 1 обозначено:

m – масса планеты; m_S – масса Солнца;
a – большая полуось орбиты;

$\rho_{пл}$ – радиус планеты; $\rho_{СТ}$ – радиус сферы тяготения; $\rho_{СД}$ – радиус сферы действия;
$T_{обр}$ – сидерический период обращения;
e – эксцентриситет (1950.0);
i – наклонение к эклиптике (1950.0).

Таблица 1.

планета	m/m_S 10^{-6}	a млн км	$\rho_{пл}$ км	$\rho_{СТ}$ млн км	$\rho_{СД}$ млн км	$\rho_{СД}/a$	$\rho_{Пл}/\rho_{СД}$	$T_{обр}$ троп. год	e	i град
Меркурий	0,17	57,909	2424	0,32	0,112	0,001934	0,021643	0,240	0,206	7,004
Венера	2,45	108,209	6100	1,45	0,615	0,005683	0,009919	0,615	0,007	3,394
Земля	3,04	149,598	6378	2,16	0,925	0,006183	0,006895	1,000	0,017	–
Марс	0,32	227,941	3412	1,56	0,579	0,002540	0,005893	1,880	0,093	1,850
Юпитер	954,79	778,328	71420	75,0	48,1	0,061799	0,001485	11,862	0,048	1,306
Сатурн	285,58	1426,99	60440	93,0	54,6	0,038262	0,001107	29,4578	0,056	2,491
Уран	43,73	2870,93	24860	100,0	52,0	0,018113	0,000478	84,015	0,047	0,773
Нептун	51,78	4498,51	26500	166,0	86,9	0,019318	0,000305	164,788	0,009	1,774
Плутон	2,78	5911,77	1150	83,0	34,0	0,005751	0,00003	247,696	0,247	17,144

Задача двух неподвижных центров.

Большое значение имеет в небесной механике задача о движении точки в ньютоновском поле притяжения двух неподвижных центров. Силовая функция двух точек с массами M_1 и M_2 имеет вид [1, 4, 19]

$$U_{2Ц} = f\left(\frac{M_1}{\Delta_1} + \frac{M_2}{\Delta_2}\right),$$

где Δ_i – расстояние от точки P до точки M_i. Предположим, что точки M_1 и M_2 находятся на оси Oz неподвижной декартовой системы координат $Oxyz$ в точках с координатами z_1 и z_2 соответственно, так что O их центр масс, то есть $M_1 z_1 + M_2 z_2 = 0$, тогда в этих координатах получим

$$U_{2Ц} = f\left(\frac{M_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}} + \frac{M_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_2)^2}}\right).$$

Положив в этой формуле $M_1 = M_2 = M/2$, $z_1 = -z_2 = ia$, где i – комплексное число – мнимая единица, а M и a – действительные положительные числа, получим вещественную функцию вещественных переменных (x, y, z)

$$U_{2Ц} = f\,\frac{M}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}}\right),$$

которую называют силовой функцией обобщенной задачи двух неподвижных центров. Потенциал обобщенной задачи двух неподвижных центров аппроксимирует потенциал тяготения осесимметричной планеты, что дает в квадратурах решение задачи о движении спутника сфероидальной планеты.

Формула Ламберта.

Допустим, спутник совершает перелет по известной орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом e. Если известны расстояния от концов дуги орбиты и длина хорды, соединяющей эти концы, то можно вычислить, сколько времени займет перелет спутника по этой дуге. Связь между двумя заданными положениями $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ и временем перелета $t_1 - t_0$ задается так называемой формулой Ламберта [4].

1) Эллиптическая орбита.

Время $t_1 - t_0$ перелета по дуге кеплеровской эллиптической орбиты, определяется формулой

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{n}((\sin\lambda_1 - \lambda_1) - (\sin\lambda_0 - \lambda_0)).$$

Здесь λ_0 и λ_1 – корни уравнений

$$\begin{cases} \cos\lambda_0 = 1 - \dfrac{r_0 + r_1 + s}{2a} \\ \cos\lambda_1 = 1 - \dfrac{r_0 + r_1 - s}{2a} \end{cases},$$

где s – хорда, соединяющая $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_1$, a – большая полуось орбиты. Выбор корней происходит следующим образом. Пусть корни $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1 \in [0, \pi]$, Δ – часть внутренности эллипса, заключенная между дугой $r_0 r_1$ и стягивающей ее хордой, S – притягивающий центр, F – "пустой" фокус орбиты. Тогда

$$\lambda_0 = \begin{cases} \bar{\lambda}_0, & если \quad F \notin \Delta \\ 2\pi - \bar{\lambda}_0, & если \quad F \in \Delta \end{cases}, \quad \lambda_1 = \begin{cases} \bar{\lambda}_1, & если \quad S \notin \Delta \\ -\bar{\lambda}_1, & если \quad S \in \Delta \end{cases}.$$

2) Гиперболическая орбита.

Время перелета по дуге гиперболической орбиты, вычисляется по формуле

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{n}((\lambda_1 - sh\lambda_1) - (\lambda_0 - sh\lambda_0)),$$

причем числа λ_0 и λ_1 находятся из уравнений

$$\begin{cases} ch\lambda_0 = 1 + \dfrac{r_0 + r_1 + s}{2|a|} \\ ch\lambda_1 = 1 + \dfrac{r_0 + r_1 - s}{2|a|} \end{cases}.$$

Здесь a – действительная полуось орбиты. Если движение происходит после прохождения через перицентр, то $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$.

3) Параболическая орбита.

Время перелета по параболической дуге определяется согласно формуле Эйлера

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{6\sqrt{\mu}}\left((r_0 + r_1 + s)^{3/2} \pm (r_0 + r_1 - s)^{3/2}\right), \; n = \sqrt{\frac{\mu}{|a|^3}}.$$

Знак "$+$" берется тогда, когда разность истинных аномалий $\vartheta_1-\vartheta_0>\pi$, знак "$-$" в противном случае.

Задача n тел.

Пусть имеется n материальных точек с массами $m_1,m_2,...,m_n$. Задача n тел состоит в изучении движений данной системы материальных точек, притягивающихся к друг другу в соответствии с законом тяготения Ньютона. Обозначим через $\vec r_1,\vec r_2,\ldots,\vec r_n$ радиус-векторы точек в некоторой абсолютной системе координат с началом в произвольно выбранной точке и с неизменными направлениями осей, Δ_{ij} – расстояние между точками m_i и m_j, тогда уравнения движения системы [8] имеют вид

$$m_i\frac{d^2\vec r_i}{dt^2}=gradU\,,\ i=1,...,n\,,\ U=\frac{1}{2}f\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}$$

или

$$\frac{d^2\vec r_i}{dt^2}=f\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}m_j\frac{\vec r_j-\vec r_i}{\Delta_{ij}^3}\,,\ i=1,...,n\,.$$

Относительное движение в задаче n тел.

Рассмотрим движение системы относительно одной из точек, например, точки m_1, то есть примем точку m_1 за центральное тело в системе. Введем систему координат с центром в выбранной точке, тогда уравнения движения [8] имеют вид

$$\frac{d^2\vec\rho_i}{dt^2}=-f\frac{(m_1+m_i)}{\rho_i^3}\vec\rho_i+\frac{\partial R_i}{\partial\vec\rho}=\vec a_i+\vec\Phi_i\,,\ i=2,...,n,\ R_i=\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}m_jR_{ij}\,,\ R_{ij}=\frac{1}{\Delta_{ij}}-\frac{\vec\rho_i\cdot\vec\rho_j}{\rho_j^3}\,,$$

где R_i – *возмущающие* или *пертурбационные* функции. В явном виде

$$\frac{d^2\vec\rho_i}{dt^2}=-f\frac{(m_1+m_i)}{\rho_i^3}\vec\rho_i+f\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}m_j\left(\frac{\vec\rho_j-\vec\rho_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{\vec\rho_j}{\rho_j^3}\right),\ i=2,...,n\,.$$

Сфера действия.

Предположим, что система состоит из трёх тел и что одним притягивающим телом P_1 является планета, другим P_2 – Солнце, а третьим – точка P с малой массой, например, космический аппарат.

Пусть $\vec a_1$ – ускорение, сообщаемое КА планетой P_1, когда планета принимается за центральное тело, а $\vec\Phi_1$ – возмущающее ускорение, вызываемое притяжением Солнца P_2. Пусть, далее, $\vec a_2$ – ускорение, сообщаемое КА Солнцем, когда последнее принимается за центральное тело, $\vec\Phi_2$ – возмущающее ускорение, вызываемое притяжением планеты P_1 (см. выше).

Сферой действия планеты P_1 называется область пространства, в которой

$$\frac{\Phi_1}{a_1} < \frac{\Phi_2}{a_2}, \text{ где } a_{1,2} = \left|\vec{a}_{1,2}\right|, \ \varPhi_{1,2} = \left|\vec{\varPhi}_{1,2}\right|.$$

Граница сферы действия Γ планеты P_1 определяется уравнением

$$\frac{\Phi_1}{a_1} = \frac{\Phi_2}{a_2}.$$

Утверждение. Приближенное значение радиуса сферы действия планеты определяется по формуле [2,4,13]

$$\rho = P_1P_2 \sqrt[5]{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}$$

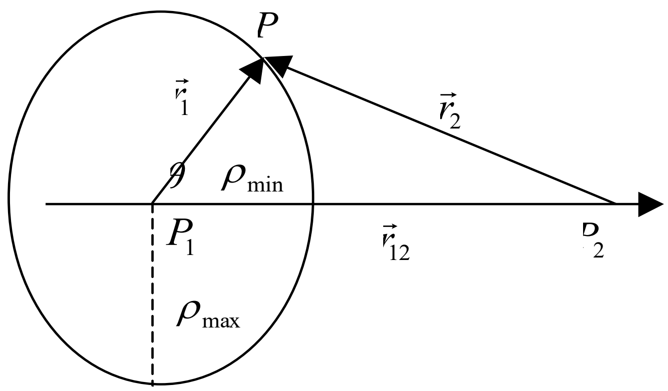


Рис.10. Сфера действия.

Более точно граница сферы действия – это поверхность вращения вокруг оси P_1P_2 кривой, уравнение которой в полярных координатах (ρ, θ) приближенно имеет вид

$$\rho = P_1P_2 \sqrt[5]{\left(\frac{m_1 / m_2}{\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}}\right)^2}$$

Доказательство. Движение спутника P относительно P_1 описывается уравнением

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{a}_1 + \vec{\Phi}_1, \ \vec{a}_1 = -f\,\frac{m_1 + m}{r_1^3}\vec{r}_1, \ \vec{\Phi}_1 = fm_2\left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right).$$

Аналогично уравнение движения спутника P относительно P_2 имеет вид

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{a}_2 + \vec{\Phi}_2, \ \vec{a}_2 = -f\,\frac{m_2 + m}{r_2^3}\vec{r}_2, \ \vec{\Phi}_2 = fm_1\left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right).$$

На границе сферы действия $\Phi_2 a_1 = \Phi_1 a_2$, то есть

$$(m_1 + m)m_1 r_2^2\left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right| = (m_2 + m)m_2 r_1^2\left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right|.$$

Из этого уравнения и условия $\frac{m_1}{m_2} << 1$ следует, что внутри сферы действия $\frac{r_1}{r_{12}} << 1$.

Положим $m = 0$, перепишем уравнение границы СД в виде

$$\frac{m_1^2}{m_2^2}\left|\frac{r_1^2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} - \frac{\vec{r}_1}{r_1}\right| = \frac{r_1^2}{r_2^2} r_1^2 \frac{1}{r_{12}^2}\left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{r_{12}^2}{r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{r_2}\right|$$

и разложим обе части равенства по степеням малого параметра $r_1 / r_{12} << 1$. Заметим, что, учитывая

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{12} - \vec{r}_1,\ r_2^2 = r_{12}^2 - 2r_{12}r_1\cos\theta + r_1^2,$$

мы можем получить следующие разложения

$$\left(\frac{r_{12}}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{(r_2 / r_{12})^2} = \frac{1}{1 - 2\frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + \left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)^2} = 1 + 2\frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right),$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_{12}\sqrt{1 - 2\frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + \left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)^2}} = \frac{1}{r_{12}}\left(1 + \frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right).$$

Используя это, преобразуем выражение в правой части уравнения

$$\left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{r_{12}^2}{r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{r_2}\right| = \left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} + \left(1 + 2\frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right)\frac{1}{r_{12}}\left(1 + \frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right)(\vec{r}_{12} - \vec{r}_1)\right|.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\left(3\frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right) - \frac{\vec{r}_1}{r_{12}}\left(1 + 3\frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right)\right| = \left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\left(3\frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right) - \frac{\vec{r}_1}{r_{12}} + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right|,$$

$$\left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{r_{12}^2}{r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{r_2}\right| = \sqrt{\left(3\frac{r_1}{r_{12}}\cos\theta\right)^2 - 2\cdot 3\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)^2\right)}$$

$$\left|\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{r_{12}^2}{r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{r_2}\right| = \frac{r_1}{r_{12}}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}\left(1 + O\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right)$$

Преобразуем левую часть равенства

$$\frac{m_1^2}{m_2^2}\left|\frac{r_1^2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} - \frac{\vec{r}_1}{r_1}\right| = \frac{m_1^2}{m_2^2}\left|\frac{\vec{r}_1}{r_1} + o\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right| = \frac{m_1^2}{m_2^2}.$$

Так как

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)^2\left(1 + O\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right),$$

то

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)^5\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}\left(1 + O\left(\frac{r_1}{r_{12}}\right)\right),$$

что и требовалось.

Сфера тяготения.

В небесной механике, кроме сферы действия, рассматриваются также другие гравитационные сферы, в том числе сферы тяготения [4]. При движении объекта в пределах Солнечной системы по гелиоцентрической орбите главной силой, определяющей движение, является сила тяготения Солнца. При сближении с планетой рассматриваемый объект попадает в область притяжения этой планеты, в каждой точке которой планета притягивает сильнее Солнца. Эта область называется сферой тяготения. Границей сферы тяготения является сфера радиуса ρ_T. Получим для него формулу.

Предположим, что одним притягивающим телом P_1 является планета с массой m_1, другим P_2 – Солнце с массой m_2, так что $m_1 < m_2$, а точка P с малой массой m – некоторое притягиваемое тело, например, космический аппарат. Пусть $\vec{F}_1$ – сила, с которой планета P_1 притягивает КА, а $\vec{F}_2$ – сила, с которой КА притягивается Солнцем P_2. Тогда на границе сферы тяготения

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| \Leftrightarrow \left| f\frac{mm_1}{r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1}\right| = \left| f\frac{mm_2}{r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{r_2}\right| \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\,.$$

Как известно из курса элементарной геометрии геометрическим местом точек, для которых отношение расстояний до двух данных точек постоянно, является "сфера Аполлония", центр которой всегда лежит вне отрезка P_1P_2, причем

$$\rho_T = \frac{P_1P_2\sqrt{m_1/m_2}}{1-m_1/m_2}\,,\ \Delta = \frac{P_1P_2\, m_1/m_2}{1-m_1/m_2}\,,$$

где Δ – расстояние от центра сферы до планеты P_1.

Максимальный угол поворота вектора скорости.

Рассмотрим облет планеты по гиперболической траектории [15]. При движении по гиперболе вектор скорости поворачивается на угол γ, причем

$$\gamma = \theta_\infty - (\pi - \theta_\infty)\,,\ \frac{\gamma}{2} = \theta_\infty - \frac{\pi}{2}\ ,\ \sin\frac{\gamma}{2} = -\cos\theta_\infty = \frac{1}{e}\,.$$

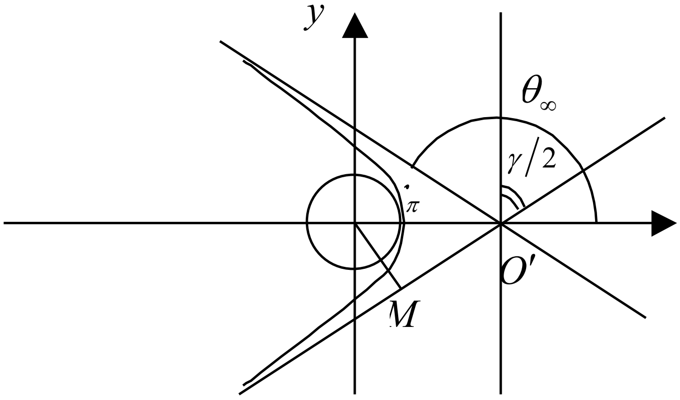


Рис.11. Максимальный угол поворота вектора скорости.

Рассмотрим облет планеты ненулевого радиуса r_m при фиксированной по модулю скорости на бесконечности v_∞. Найдём максимальный угол поворота вектора скорости. Исходя из того, что во время движения для скорости выполняется равенство

$$v^2 = \frac{\mu}{p}\left(e^2 + 2e\cos\theta + 1\right),$$

следующее из уравнения траектории и интеграла энергии, получим

$$v_\infty^2 = v^2(\theta)\Big|_{\theta\infty} = \frac{\mu}{p}(e^2 - 1) \Leftrightarrow p = \frac{\mu}{v_\infty^2}(e^2 - 1).$$

Во время движения

$$r \ge r_{\min} = r_\pi, \; r_\pi = \frac{p}{1+e}.$$

Подставив сюда выражение для p, найдём

$$e = 1 + \frac{r_\pi}{\mu} v_\infty^2.$$

Следовательно, учитывая

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{1 + \dfrac{r_\pi}{\mu} v_\infty^2},$$

получим, что для максимального угла поворота выполняется равенство

$$\sin\frac{\gamma_{\max}}{2} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{v_\infty}{v_{Km}}\right)^2}, \; v_{Km} = \sqrt{\frac{\mu}{r_m}}.$$

Гравитационные маневры в поле двух центральных сил.

В основе космической навигации лежит осуществление маневров в поле нескольких центральных сил. При исследовании возможных траекторий полета к Луне и планетам Солнечной системы нашел применение простой расчетный способ, основанный на приближении траектории искусственного небесного тела последовательностью дуг кеплеровских орбит. Траектория разбивается на участки, для каждого из которых движение тела предполагается происходящим под действием только одного притягивающего центра (Земли, Луны, Солнца, планеты). На границах участков производится соответствующее преобразование координат и скоростей, учитывающее взаимное движение притягивающих центров [4,7,9,13].

Ошибка такого приближенного расчета зависит от принятого способа разбиения траектории на участки. Наибольшее распространение получил способ, при котором переход от одного притягивающего центра к другому производится на границе соответствующей сферы действия – Луны относительно Земли, Земли относительно Солнца и т.п.

Рассмотрим полет КА от Земли к другой планете через гелиоцентрическое поле притяжения с возможным облетом промежуточной планеты. Эффективным способом исследования траекторий в ограниченной круговой задаче трех тел является метод *гравитационных сфер*. Данный метод основан на том, что возмущение гелиоцентрического движения вне СД планеты невелико, а также мало сказывается и возмущение планетоцентрического движения полем притяжения Солнца внутри СД планеты. Поэтому всюду возмущениями по сравнению с притяжением центрального тела в приближенных расчетах можно пренебрегать. Таким образом, при движении внутри сферы действия планеты учитывается только влияние поля притяжения планеты, вне СД траектория определяется только притяжением Солнца.

Будем считать, что Земля движется по круговой орбите радиуса R со скоростью $V_з = \sqrt{\mu/R}$. Космический аппарат находится на геоцентрической орбите радиуса r и движется со скоростью $v_K = \sqrt{\mu_з/r}$. В результате приложения импульса скорости $\Delta\vec{v}_0$ КА начинает движение с гиперболической геоцентрической скоростью $\vec{v}_0$. Внутри сферы действия Земли будем учитывать только влияние гравитационного поля планеты. Движение будет определяется с помощью интегралов энергии и площадей. На границе СД Земли движение будет происходить практически по асимптоте гиперболы со скоростью $\vec{v}_{0\infty}$, причем

$$v_{0\infty}{}^2 = v_0^2 - \frac{2\mu_з}{r} + \frac{2\mu_з}{r_{СД}},\ v_{0\infty} p = r_0 v_0 \sin\alpha_0,$$

где α_0 - угол между вектором скорости и геоцентрическим радиус-вектором в момент приложения импульса, $r_{СД}$ - радиус сферы действия Земли, p – прицельная дальность – расстояние от центра планеты до асимптоты, из уравнения гиперболы следует, что прицельная дальность равна длине ее мнимой полуоси. После выхода из СД Земли КА начнет движение в поле притяжения Солнца по траектории с начальной скоростью

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_з + \vec{v}_{0\infty}.$$

Гравитационный маневр.

Допустим, траектория КА пересекает сферу действия планеты в точке с гелиоцентрическими радиус-вектором $\vec{R}_1$ и скоростью $\vec{V}_1$, причем

$$V_1{}^2 = V_0^2 - \frac{2\mu}{R_0} + \frac{2\mu}{R_1}.$$

Планета движется по круговой орбите со скоростью $\vec{V}_П$, где $V_П = \sqrt{\mu/R_П}$. Внутри сферы действия планеты при расчете траектории КА будем учитывать только притяжение планеты. Относительно планеты движение будет происходить между двумя точками сферы действия. Аппарат входит в СД и выходит из нее с одной и той же по величине гиперболической скоростью $w_\infty^- = w_\infty^+$, которую мы будем считать гиперболической относительно планетоцентрической системы координат, при этом

$$\vec{w}_\infty^- = \vec{V}_1 - \vec{V}_П.$$

В результате изменения направления планетоцентрического вектора скорости движения аппарата происходит изменение гелиоцентрической скорости. Благодаря гравитационному маневру можно изменять как направление так и модуль гелиоцентрической скорости. Степень изменения скорости аппарата характеризуется искривлением его траектории, т. е. углом между асимптотами гиперболической траектории, который в свою очередь зависит от прицельной дальности p и относительной скорости входа w_∞^- в СД планеты.

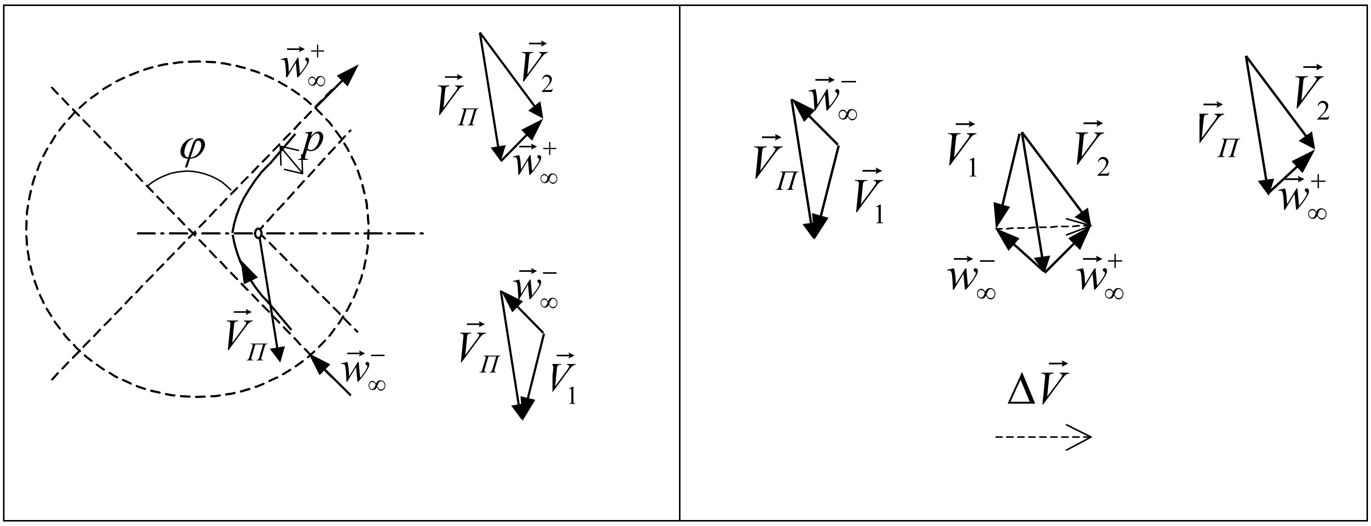


Рис.12. Диаграммы изменения скорости.

Процесс изменения скорости представлен на векторных диаграммах. Величину приращения скорости можно найти с помощью очевидной формулы [7,15]

$$\Delta V = 2w_\infty \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Поскольку φ зависит от прицельной дальности p, то, изменяя её, можно изменять величину приращения скорости ΔV. Если допустить, что на границе СД движение происходит практически по асимптоте гиперболы, то можно отметить, что теоретический предел приращения скорости $\Delta V = 2w_\infty$ достигается при $\varphi \to \pi$, т.е. $p \to 0$. В этом случае планетоцентрическая скорость входа аппарата в СД $\vec{w}_\infty^-$ почти противоположно направлена скорости выхода $\vec{w}_\infty^+$. В действительности стремление $p \to 0$ ограничено размерами планеты, поэтому прицельную дальность невозможно сделать меньше радиуса планеты r_m (см. задачу о максимальном угле поворота).

В результате гравитационного маневра КА покидает СД планеты в точке $\vec{R}_2$ с гелиоцентрической скоростью

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_П + \vec{w}_\infty^+.$$

Далее движение происходит с учетом влияния только притяжения Солнца. При пересечении траектории КА и СД некоторой планеты для расчета траектории гиперболической встречи можно воспользоваться изложенными ранее формулами.

В случае, если планета является конечной целью перелета, следует приложить соответствующий импульс скорости, чтобы выйти на круговую орбиту планеты.

Допустим, что КА входит в СД планеты-цели с гелиоцентрической скоростью $\vec{V}_3$

$$V_3^2 = V_2^2 - \frac{2\mu}{R_2} + \frac{2\mu}{R_3}.$$

Планета-цель движется по круговой орбите с гелиоцентрической скоростью $\vec{U}_{ПЦ}$. Для относительной скорости входа в СД планеты $\vec{u}_\infty^-$ имеем

$$\vec{u}_\infty^- = \vec{V}_3 - \vec{U}_{ПЦ}.$$

В момент, когда КА находится на заданном расстоянии r до центра планеты, для выхода на круговую орбиту необходимо придать импульс скорости

$$\Delta\vec{u} = \vec{u} - \vec{v}_K,$$

где $\vec{u}$ – скорость КА в момент пересечения конечной круговой орбиты, $\vec{v}_K$ – скорость на планетоцентрической круговой орбите радиуса r, причем $v_K = \sqrt{\mu_{ПЦ}/r}$.

Изложенный метод *гравитационных сфер* является эффективным методом приближенного анализа межпланетных траекторий. Упрощенным вариантом метода ГС является метод точечной сферы действия (ТСД). Данный метод основан на дополнительных предположениях о том, что размером СД и временем пребывания внутри СД планеты можно пренебречь, то есть считается, что маневр совершается мгновенно в точке, совпадающей с центром притяжения планеты маневра. Основанием для такого предположения служат данные таблицы (см. выше).

Импульсное маневрирование.

Для исследования перелетов КА с двигателями большой тяги будем использовать импульсную модель движения [5]. Разобьем траекторию на активный и пассивный участки. На активном участке движение центра масс космического аппарата подчиняется уравнению Мещерского для точки переменной массы

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt},$$

где $m = m(t)$ – масса КА, $\vec{v}$ скорость точки в выбранной инерциальной системе координат, $\vec{F}$ – главный вектор внешних сил, приложенных к КА, $\vec{u}$ – абсолютная скорость отбрасываемых частиц.

Обозначим через $\Delta\vec{v}$ импульс (изменение) скорости при движении на активном участке в течение времени Δt_A

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t_A) - \vec{v}(t).$$

Если движение на активном участке считать прямолинейным, то при отсутствии внешних сил уравнение Мещерского приводит к формуле Циолковского

$$v_{k+1} = v_k + v_{реакт}\ln\frac{m_k}{m_{k+1}},\ \vec{v}_{реакт} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Здесь индекс k отвечает значению величины до маневра, $k+1$ – после

$$v_{k+1} = v_k + \Delta v_k\,,\ m_{k+1} = m_k - \Delta m_k\,.$$

Полагая реактивную силу $v_{реакт}$ одинаковой для каждого маневра, просуммировав равенства, при наличии n активных участков получим

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta v_k = v_{реакт} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{m_k}{m_{k+1}}\,,$$

или

$$\Delta v = v_{реакт} \ln \frac{m_1}{m_{n+1}}\,,\ m_{n+1} = m_0 - \Delta m\,.$$

Таким образом, задача о минимизации запаса топлива сводится к минимизации суммарной величины изменений скорости Δ, которую будем считать мерой энергетических затрат. При этом

$$\begin{cases} \Delta = \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta \vec{v}_i\right| \\ \Delta t_{Ai} = 0, \left|\Delta \vec{v}_i\right| > 0 \end{cases}.$$

Не смотря на значительные упрощения, импульсная модель движения позволяет получать важные качественные результаты в задачах небесной механики.

Заключение.

В работе рассмотрены особенности реализации компьютерного практикума по небесной механике. Приведены математический аппарат и сценарии работы реализованных задач по небесной механике. Рассмотрена организация работы программы в рамках виртуальной среды.

В работе представлены экспериментальные и учебные среды, на основе которых формируется практикум по небесной механике. Приведены примеры их наполнения и дано краткое описание сценария работы организующих и контролирующих программ. Предложена классификация экспериментальных сред. Представлено подробное решение реализованных задач, используемых организующей программой для контроля усвоения материала. Даны примеры иллюстрирующих программ. Приведено подробное описание теоретической составляющей практикума.

Литература.

1. Актуальные проблемы классической и небесной механики: Межведомственный сборник научных трудов. М., "Эльф", 1998.
2. В.К. Абалкин и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. В.Г. Демина. М., Наука, 1975.
3. Е.П. Аксенов Специальные функции в небесной механике. М., Наука, 1986.
4. М.Б. Балк Элементы динамики космического полета. М., Наука, 1965.

5. М.Б. Балк, В.Г. Демин, А.Л. Куницын Сборник задач по небесной механике и космодинамике. М., Наука, 1972.
6. Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков Численные методы. М., Спб., Физматлит, 2000.
7. Г.А. Гурзадян Теория межпланетных перелетов, Изд-во Академии Наук Армении, 1991.
8. Г.Н. Дубошин Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука, 1975.
9. В.А. Егоров, Л.И. Гусев Динамика перелетов между Землей и Луной. М., Наука, 1980.
10. В.В. Ивашкин Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет, М., Наука, 1975.
11. Т.А. Игнатюк, В.А. Прошкин, В.Е. Павловский Компьютерный практикум по небесной механике. Концепция и структура. Препринт №73. М., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2002.
12. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк Аналитическая геометрия. М., Наука. Физматлит, 1999.
13. М.Д. Кислик Сферы влияния больших планет и Луны. Космические исследования. Т. I I, Вып. 6, 1964.
14. В. Себехей Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М., Наука, 1982.
15. С. Херрик Астродинамика. М., Мир, 1976
16. Г.А. Чеботарев Аналитические и численные методы небесной механики. М., АН СССР, 1965.
17. Н.Г. Четаев Теоретическая механика. М., Наука, 1987
18. Основы теории полета космических аппаратов. Под ред.Г.С. Нариманова. М., Машиностроение, 1972.
19. В.Г. Демин Движение спутника в нецентральном поле тяготения. М., Наука, 1968.