



**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**М.-Г. М. Зульпукаров, Г. Г.  
Малинецкий, А. В. Подлазов**

**МЕТОД РУСЕЛ И ДЖОКЕРОВ НА  
ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
СИСТЕМЫ РОЗЕНЦВЕЙГА—  
МАКАРТУРА**

**Препринт №**

**Москва**

Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук

**М.-Г. М. Зильпукаров, Г. Г. Малинецкий, А. В. Подлазов**

**МЕТОД РУСЕЛ И ДЖОКЕРОВ НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
СИСТЕМЫ РОЗЕНЦВЕЙГА–МАКАРТУРА**

Москва  
2022

## АННОТАЦИЯ

Обсуждается метод локального уменьшения размерности задачи нелинейной динамики – метод русел и джокеров. Приводится пример применения метода русел и джокеров к исследованию одного из хаотических режимов сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений, представляющих собой модель Розенцвейга–Макартура для тритрофной пищевой цепи.

Полученные результаты представляют собой дальнейшее развитие техники исследования хаотических систем путём комбинации динамических и статистических методов.

## ABSTRACT

The channels and jokers method, the one for local reduction of a nonlinear problem rank, is discussed. An example of the channels and jokers method application to the analysis of one of the chaotic modes in the singularly perturbed case of the Rosenzweig–Macarthur model of a tritrophic food chain, is given.

The results obtained are the further development of the technique of chaotic systems research using both dynamical and statistical methods.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №04-01-00510, 05-01-00852), гранта Президента РФ НШ-374.2003.1.

## ВВЕДЕНИЕ

Ряд актуальных, интересных и важных задач нелинейной динамики связан с построением модели, предсказывающей состояние системы на основе известной истории поведения объекта (фактически, анализа данных наблюдений, временных рядов). Между тем, известно, что аппарат нелинейной динамики при решении задач такого рода наиболее эффективен в случаях, когда размерность модели невелика [1]. Например, при анализе катастроф используется то обстоятельство, что в типичном случае катастрофа локально эквивалентна какой-либо из семи хорошо изученных элементарных (канонических) катастроф, если размерность пространства параметров не превышает четырёх [2]. С ростом размерности задачи объём необходимых вычислений и/или потребное количество экспериментальных данных растут экспоненциально [3]. Этот факт известен также под названием «проклятия размерности».

Наибольший же практический интерес представляют задачи, не удовлетворяющие столь строгому ограничению на размерность. В частности, к таким относятся задачи из области сейсмологии, медицины, экономики, и т.д.

Задачи большой размерности можно решать, используя тот факт, что фазовое пространство динамических систем зачастую неоднородно: состояние системы в определённых областях фазового пространства может быть с приемлемой точностью охарактеризовано небольшим количеством переменных, описывающих *проекцию малой размерности*. Прочие переменные могут быть подчинены переменным проекции (называемым *параметрами порядка*) и/или несущественны с точки зрения описания системы в рамках задачи.

Проекция малой размерности может иметь смысл на всём фазовом пространстве и в широком классе задач, как это имеет место, например, в физике. Также возможны более сложные случаи, когда проекции малой размерности могут использоваться в ограниченных областях фазового пространства, причём в разных областях проекции необязательно одинаковы. Такие области было предложено называть *руслами* [1,3]. В продолжение географических аналогий, *истоком* называется область входа фазовых траекторий в русло («начало» русла), а *устьем* – область выхода («конец»).

Области, в которых построение проекции малой размерности не представляется возможным, именуется *джокерами*. Поведение системы, находящейся в области джокера, отличается сложностью, непредсказуемостью и разнообразием, вследствие чего приходится использовать вероятностные методы и/или простые приближённые правила, определяемые эмпирически либо из общих соображений.

Таким образом, описание системы с помощью русел и джокеров представляет собой своего рода компромисс между динамическими и статистическими методами, наследуя, по возможности, точность первых и простоту вторых. С другой стороны, рассмотрение объекта в терминах русел и джокеров можно рассматривать как своеобразное применение техники асимптотического анали-

за. Именно асимптотические методы оказываются естественным аппаратом для синергетики и других междисциплинарных подходов [4].

К системам, исследуемым подобным образом, в частности, относятся автономные системы с чередующейся медленно-быстрой динамикой: лазеры, сложные пищевые цепи в биологии, колебательные химические реакции, и др. При построении моделей таких систем руслами можно считать области медленной динамики (и, что ещё более важно, хорошей предсказуемости), а джокерами, соответственно, быстрой.

Примером систем, демонстрирующих медленно-быструю динамику, являются сингулярно возмущённые системы обыкновенных дифференциальных уравнений, иерархизированные по характерным временам изменения переменных в силу наличия малых параметров при одной или более производных. Как известно, решение такой системы, в соответствии с теоремой Тихонова [5,6,7], стремится через некоторое характерное время, определяемое величиной малого параметра, к решению *вырожденной системы*, в которой малый параметр взят равным нулю (что приводит к замене соответствующего дифференциального уравнения алгебраическим, и, фактически, к понижению размерности системы).

Таким образом, совершенно естественно выбрать в качестве проекции малой размерности вырожденную систему. Тогда конфигурация области медленного движения (и, следовательно, русла) будет определяться устойчивыми участками гиперповерхности, заданной упомянутым алгебраическим уравнением [8]. Исток русла будут составлять *точки падения* (точки перехода от быстрого движения к медленному), а устье – *точки срыва* (точки перехода от медленного движения к быстрому).

Если решение вырожденной системы недостаточно хорошо аппроксимирует решение исходной системы (множитель при производной недостаточно мал), существует ряд более сложных методов получения уравнения «медленной» гиперповерхности. В частности, имеется в виду называемый механический формализм [9], предполагающий рассмотрение совокупности производных как вектора скорости изображающей точки в фазовом пространстве. При этом предполагается, что на «медленной» гиперповерхности ускорение изображающей точки близко к нулю. Исходя из этого, записывается уравнение гиперповерхности.

Существует также метод получения уравнения медленной гиперповерхности для систем без малого параметра при производной [10,11]. Суть метода заключается в следующем. Записывается якобиан для вектор-функции, входящей в уравнение системы и проверяется наличие так называемых быстрых собственных чисел в достаточно большой области фазового пространства. Для найденного быстрого собственного числа записывается собственный вектор. Доказана теорема [10], согласно которой медленное движение ортогонально быстрому собственному вектору, откуда и следует искомое уравнение медленной гиперповерхности.

Целью данной работы является анализ поведения математической модели тритрофной пищевой цепи (то есть, системы популяций трёх видов, образуя-

щих простейшую трёхуровневую пищевую пирамиду) методом русел и джокеров.

Исследуемая система Розенцвейга-Макартура представляет собой модификацию модели Вольтерра «хищник-жертва» [12] для случая трёх видов – жертвы, хищника и суперхищника (пожирателя хищников), учитывающую дополнительные факторы – внутривидовую конкуренцию жертв за ресурсы и насыщение хищников и суперхищников. Как правило, в таких тритрофных цепях имеется три различных характерных времени изменения численности популяций: скорость изменения численности жертв наибольшая, а суперхищников – наименьшая.

Исследуемая система, несмотря на внешнюю простоту и небольшую размерность, в зависимости от значений параметров может демонстрировать весьма сложное поведение, в частности, хаос различных типов [13,14,15,16]. Нас интересует режим с наличием хаотического аттрактора шильниковского типа [17,18,19,20,21]. В модели Розенцвейга-Макартура шильниковский хаос имеет место, когда скорости изменения численности хищников и суперхищников совпадают по порядку величины [14].

При построении проекции малой размерности для исходной системы используется наиболее простой способ из описанных выше – запись вырожденной системы. Поверхность, заданная алгебраическим уравнением в последней, имеет две различные устойчивые (притягивающие) области.

Таким образом, имеется два русла, движение вдоль каждого из которых описывается соответствующей системой двух дифференциальных уравнений с двумя переменными. Третья переменная является скрытой и управляет переключением между режимами движения. Её действие моделируется двумя джокерами, имеющими вид отрезков, при достижении которых изображающей точкой происходит переключение.

Рассматривая эту модель, мы имеем в виду не только конкретные результаты с позиций теории динамических систем и математического моделирования экологических процессов, но и прообраз более общей и типичной ситуации. В этой ситуации доступной для измерения является лишь часть переменных, в то время как другая, играющая существенную роль, недоступна.

## **РУСЛА И ДЖОКЕРЫ**

Понимание, на основе которого можно принимать решения, дают только простые модели. Необходимость решения задач в реальном времени делает ограничение на размерность модели ещё более жёстким. Идеальный случай – построение простой проекции реальности для всей совокупности решаемых задач. На практике, чаще приходится выбирать проекцию для какого-то конкретного вида задач, оговаривая область её применения – определять русла. Иными словами, вместо единой модели получается ряд моделей для разных ситуаций.

В качестве пояснения можно привести следующий простой пример – элементарную модель процесса подъема-спада котировок акций на фондовом рын-

ке [22]. Допустим, участники рыночного процесса в некоторый момент определяют положительный тренд чистой прибыли на акцию, что сказывается на ожиданиях и, как следствие, на котировках (цены акций повышаются). Изменение котировок, в свою очередь, может увеличить тренд. В этом случае имеет место процесс с положительной обратной связью – взаимная прямая зависимость тренда и котировок усиливается (типичное движение вдоль русла). Далее, в некоторый момент, исчерпываются ресурсы развития и/или происходит осознание завышенности спекулятивных ожиданий (прогноз роста прибыли на акцию превышает реальный рост). Это приводит к снижению котировок, и положительная обратная связь может начать работать в противоположном направлении, то есть, происходит обвал. Наконец, при благоприятном развитии событий, рынок стабилизируется, и далее наблюдаются флуктуации котировок вблизи некоторого установившегося значения.

Другими словами, и в случае ситуации с нормальным, и с кризисным функционированием фондового рынка, ключевую роль играют такие параметры, как уровень ожиданий, уровень доверия [22]. В случае кризиса эти переменные могут меняться скачком, что и может быть описано с помощью джокера.

Примерная схема возникновения неоднородностей фазового пространства в виде русел дана в [3] для случая динамических систем с дискретным временем вида

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Пусть существует область  $G$ , где функция  $f(x)$  имеет вид

$$f(x) = f_1(P_{n_1}x) + \gamma f_2(x), \quad x \in G \subseteq \mathbb{R}^n,$$

где  $\gamma \ll 1$ , а  $P_{n_1}$  – проектор на подпространство размерности  $n_1 < n$  (оператор проекции на некоторую гиперповерхность  $P$ ). Если обозначить  $n_1$  координат на  $P$  как  $u = P_{n_1}x$ , а остальные  $n - n_1$  как  $v = (I - P_{n_1})x$ , то функция  $f(x)$  примет вид

$$f(x) = f_1(u) + \gamma f_2(u, v);$$

при этом, на гиперповерхности  $P$  имеем отображение

$$u_{i+1} = P_{n_1} f_1(u_i) + \gamma P_{n_1} f_2(u_i, v_i), \quad u_i, u_{i+1} \in P.$$

Пренебрегая вторым слагаемым в правой части, можно получить  $n_1$ -мерное уравнение

$$u_{i+1} = P_{n_1} f_1(u_i),$$

которое определяет динамику на русле. Конфигурация русла, соответственно, определяется условием малости отброшенного члена.

Джокер представляет собой правило или алгоритм определяющий поведение объекта на некотором подмножестве фазового пространства (*области джокера*), в котором неопределённость в поведении объекта резко возрастает. При

попадании изображающей точки в область джокера, происходит его *срабатывание* – задействуется соответствующее правило (алгоритм).

В зависимости от специфики рассматриваемой задачи, используемые джокеры могут различаться. Например, в [1] описаны следующие типы джокеров.

*Джокер первого рода* мгновенно переводит систему в определённую точку фазового пространства. Типичный случай, соответствующий срабатыванию такого джокера – быстрое разрушение системы (предполагается, что детали процесса разрушения нас не интересуют, либо их моделирование затруднено). Например, постепенное развитие экосистемы заканчивается экологической катастрофой.

*Джокер второго рода* при срабатывании с вероятностью  $p_1$  переводит систему в некоторую точку фазового пространства  $A$ , и с вероятностью  $p_2$  – в точку  $B$ .

*Джокер третьего рода* переводит систему в точку некоторой области фазового пространства в соответствии с заданным законом распределения вероятности. Этот джокер можно рассматривать как обобщение джокеров первого и второго рода.

В работе [23] описываются джокеры на одномерных отображениях и вводится иная классификация. Например, джокер первого рода называется *точечным*, второго рода – *двухточечным*, а третьего рода – *непрерывным*. Также рассматриваются следующие более интересные и сложные джокеры со свойствами, представляющими собой различные комбинации свойств непрерывного и точечного джокеров.

*Мерцающий непрерывный джокер* представляет собой непрерывный джокер, срабатывающий с некоторой, отличной от 1, вероятностью. То есть, при попадании изображающей точки в область джокера, следующий шаг либо (с вероятностью  $p_1$ ) делается в соответствии с уравнением русла, либо (с вероятностью  $p_2$ ) в соответствии с правилом непрерывного джокера. Данный тип джокеров хорошо подходит для имитации явления перемежаемости.

*Мерцающий точечный джокер* суть точечный джокер, который срабатывает аналогично мерцающему непрерывному джокеру, в соответствии с вероятностным правилом.

*Выбор между точечным и непрерывным джокерами:* в соответствии с вероятностным правилом определяется выбор режима срабатывания – точечный или непрерывный.

В [23] на примере логистического отображения рассмотрено влияние различного вида джокеров на поведение системы. В частности, непрерывный джокер может сделать поведение полностью хаотическим. Последовательно уменьшая его область, можно сначала добиться режима, похожего на перемежаемость, а затем – «сбой цикла».

Действие мерцающего непрерывного джокера аналогично. Его преимущество заключается в том, что можно добиваться различной степени хаотичности за счёт варьирования вероятности срабатывания, не меняя при этом размеров области джокера.

Точечный джокер действует прямо противоположным образом, подавляя хаос. Основным типом движения на отображении с таким джокером является цикл. Мерцающий точечный джокер порождает циклические участки, соответствующие действию точечного джокера, вперемешку с участками, соответствующими невозмущённому движению. Результатом действия двухточечного джокера является стохастическое чередование различных циклических участков.

Режим выбора между точечным и непрерывным джокером является наиболее сложным. Такой джокер в общем случае нельзя отнести ни к порождающим, ни к подавляющим хаос. Совместное действие эффектов хаотизации и упорядочивания может породить новый порядок, сильно отличающийся от исходного. Анализируя его, может быть проще получить представление о параметрах джокера, чем о системе без него.

Следует отметить, что если изучать систему не с целью прогнозирования её поведения, а с точки зрения генерации системой новой информации, то области джокеров представляют больший интерес, чем области русел. Действительно, пока поведение системы предсказуемо, неопределённость поведения зависит от уровня шума и величины ляпуновских показателей (которые в совокупности определяют горизонт прогноза), и потому не может быстро уменьшаться.

В *динамической теории информации* [24] понятиям русел и джокеров соответствуют понятия динамического и перемешивающего (хаотического) слоёв. Согласно [24], *перемешивающий слой* определяется как область фазового пространства мультистабильной динамической системы, обладающая следующими свойствами:

Во-первых, все траектории, исходящие из определённой области начальных условий, в момент времени  $t_0$  попадают в перемешивающий слой.

Во-вторых, все траектории в момент времени  $T$  выходят из перемешивающего слоя и переходят в область мультистабильного динамического режима.

В-третьих, в области перемешивающего слоя имеет место стохастический режим, при котором выполняется условие

$$CT \equiv \lim_{\Delta x(t_0) \rightarrow 0} \ln \frac{\Delta x(T)}{\Delta x(t_0)} \gg 1.$$

Здесь  $\Delta x(t_0)$  и  $\Delta x(T)$  – расхождения траекторий в моменты входа в перемешивающий слой и выхода из него, соответственно. Величина  $C$  является аналогом числа Ляпунова и переходит в него при  $T \rightarrow \infty$ .

Стоит подчеркнуть, что, с точки зрения динамической теории информации, наиболее интересным является промежуток времени непосредственно перед входом системы в перемешивающий слой. Действительно, сразу после входа дальнейшее поведение системы полностью непредсказуемо, а после выхода – полностью предсказуемо. Соответственно, промежуток времени перед входом (у устья русла) является самым подходящим для принятия решений.

## ПОИСК РУСЕЛ

Рассмотрим один из возможных способов получения простой приближённой модели исходной системы. Пусть, например, дана некоторая система, в фазовом пространстве которой выделяются области медленной и быстрой динамики. Допустим, движение в пределах области медленной динамики может быть приближённо описано с помощью некоторой более простой системы (например, системы с меньшей размерностью). Тогда для описания движения в области быстрой динамики (а также в области перехода от медленного движения к быстрому), где данная простая система неприменима, можно воспользоваться джокером. Область медленного движения, соответственно, будет руслом.

Заметим, что в ряде случаев для приближённого описания быстрого движения можно подобрать ещё более простую систему. Тем не менее, не следует использовать джокер для описания медленного движения. Действительно, как правило, можно утверждать, что основное время система проводит в «медленных» областях, проходя «быстрые» за короткие промежутки времени. При этом, предпочтительнее, чтобы в течение основного времени была задействована динамическая часть модели.

Итак, требуется решить три подзадачи:

- выделение областей медленной динамики;
- подбор простой модели для медленной динамики;
- подбор джокера для описания сложного поведения.

Обсудим более подробно первую из них. Медленно-быструю динамику демонстрируют, в частности, сингулярно возмущённые системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x$  и  $y$  – вектора,  $f$  и  $g$  – вектор-функции, а  $\varepsilon$  – параметр,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При выполнении условий теоремы Тихонова [5,6,7], для приближённого (тем более точного, чем меньше  $\varepsilon$ ) определения областей медленного движения достаточно использования самого простого метода – записи уравнения вида

$$f(x, y) = 0, \quad (2)$$

то есть, фактически, выполнения предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Областями медленного движения будут устойчивые области гиперповерхности (2), то есть, те её участки, для которых отрицательны действительные части всех собственных значений матрицы

$$J_x f(A) \stackrel{def}{=} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(A) \right),$$

– якобиана функции  $f$ , если считать  $u$  параметром [8]. Далее будем ссылаться на этот метод как на *сингулярное приближение (singular approximation)* [10].

Может потребоваться более точное выражение для области медленной динамики, например, с учётом членов степени выше 0 в разложении по  $\varepsilon$  (скажем, если  $\varepsilon$  мал недостаточно для того, чтобы сингулярное приближение обеспечивало приемлемую точность). Кроме того, чередование медленной и быстрой динамики может встречаться в системах, не содержащих малого параметра, например, в системах, в правые части которых входят кусочно-линейные функции. Для решения подобных, более сложных, задач, существует ряд методов, обобщающих метод сингулярного приближения и позволяющих получить приближения более высоких порядков.

Первые два метода [10,11] связаны с определением так называемого быстрого собственного вектора матрицы линеаризованной системы. Пусть дана автономная система с малым параметром, вида

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (3)$$

– частный случай системы (1). Будем пользоваться векторной записью  $x \equiv (x_1, \dots, x_n)^T$  и  $f_\varepsilon(x) \equiv (f_1/\varepsilon, f_2, \dots, f_n)^T$ . Уравнение (3) примет вид

$$\dot{x} = f_\varepsilon(x).$$

Также будем рассматривать отклонение от начальной точки  $x_0 \equiv x(t_0)$ :  $\delta x \equiv x - x_0$ . Якобиан системы (3) в точке  $x_0$  обозначим

$$J_\varepsilon(x_0) \equiv \left( \frac{\partial f_\varepsilon(x)}{\partial x} \right)_{x=x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\varepsilon \partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\varepsilon \partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\varepsilon \partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_0}.$$

*Касательная линейная система* определяется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta x = J_\varepsilon(x_0) \delta x. \quad (4)$$

Многообразие  $\mathbf{S}$ , определяемое уравнением  $f_1(x) = 0$ , называется *сингулярно-приближённым медленным многообразием (singular approximation slow manifold)*, так как на удалении от  $\mathbf{S}$  фазовая скорость велика в силу изложенных

выше соображений. *Медленными траекториями* называют решения системы (3), удовлетворяющие соотношению

$$\dot{x}_1 = K(x) + E_1(x),$$

где  $K(x)$  обозначает некоторую полиномиальную функцию  $x$ , не зависящую от  $\varepsilon$ , а  $E_m(x)$  – полиномиальную функцию  $\varepsilon$ , зависящую от  $x$  и содержащую члены степени  $\varepsilon$  не менее  $m$ :

$$E_m(x) \equiv \varepsilon^m e_m(x) + \varepsilon^{m+1} e_{m+1}(x) + \dots$$

(здесь  $e_i(x)$  – некоторые функции  $x$ ). *Медленное многообразие* объединяет все медленные траектории.

Говорят, что  $\lambda_1$  является *быстрым собственным значением* (*fast eigenvalue*) матрицы  $J_\varepsilon(x_0)$ , если  $\lambda_1(x_0) = E_{-1}(x_0)$  (то есть, величина  $\lambda_1$  с уменьшением  $\varepsilon$  растёт как  $1/\varepsilon$ ). Соответствующий  $\lambda_1$  *быстрый собственный вектор* (*fast eigenvector*)  $y_1(x_0)$  определяет *быстрое собственное направление* (*fast eigendirection*). Утверждается, что для существования ровно одного быстрого собственного значения у матрицы  $J_\varepsilon(x_0)$  необходимо и достаточно, чтобы ровно один столбец или строка содержали множитель  $\varepsilon^{-1}$  (за исключением ряда частных случаев). Прочие  $n-1$  собственных значений могут быть выражены как  $\lambda_i(x_0) = E_0(x_0)$  и называются *медленными собственными значениями* (*slow eigenvalues*), а соответствующие им собственные вектора – *медленными собственными векторами* (*slow eigenvectors*).

Оба метода определения медленного многообразия основаны на следующей теореме [10].

Пусть дана система вида (3). Предположим:

1. существует сингулярно-приближённое медленное многообразие  $\mathbf{S}$ ;
2. пусть в точке  $x_0$  у матрицы  $J_\varepsilon(x_0)$  есть отрицательное быстрое собственное значение  $\lambda_1$ , и для  $x(t)$  вблизи  $x_0$  существует компактное множество  $\mathbf{V}$ , определённое следующим образом:

$$\mathbf{V} = \left\{ x \in \mathbf{V} : \lambda_1 \|y_1(x_0)\| - [f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x_0) - J_\varepsilon(x_0)(x - x_0)]^T \frac{y_1(x_0)}{\|y_1(x_0)\|} < 0 \right\}.$$

Тогда существует медленное многообразие, определяемое как огибающая гиперплоскостей, порождаемых медленными собственными векторами касательных линейных систем вида (4) в точках  $x_0$ .

Смысл теоремы заключается в следующем: если проекция нелинейных членов  $f_\varepsilon(x)$  на быстрое собственное направление мала по сравнению с быстрой (направленной вдоль быстрого собственного вектора) составляющей фазовой скорости для системы (4), то медленные траектории (4) являются притягивающими и для системы (3).

Первый метод [10] определения медленного многообразия предполагает следующую процедуру.

1. Решается вопрос о существовании сингулярно-приближённого медленного многообразия.
2. Определяется область фазового пространства  $L$ , в которой якобиан  $J_\varepsilon(x_0)$  имеет отрицательное быстрое собственное значение. В ряде случаев (например, для осциллятора ван дер Поля) можно получить выражения для собственных чисел  $\lambda_i$  аналитически. В общем случае, это делается численно, как правило, в процессе интегрирования системы, после выхода фазовой траектории на аттрактор.
3. По области  $L$  определяется быстрый собственный вектор  $y_1(x) \equiv (y_{1,1}, \dots, y_{1,n})^T$ , численно или аналитически.
4. Из теоремы следует, что движение на медленном многообразии не имеет составляющих вдоль быстрого собственного направления. Поэтому, записывается условие ортогональности вектора фазовой скорости  $f_\varepsilon(x)$  быстрому собственному вектору  $y_1$ , которое и будет уравнением медленного многообразия (впоследствии, решаемым, как правило, численно):

$$f_\varepsilon(x)y_1(x) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i y_{1,i} = 0$$

Второй метод [11] отличается от первого лишь тем, что, вместо условия ортогональности быстрому собственному вектору, записывается условие компланарности остальным  $n-1$  медленным собственным векторам:

$$\det(\{f_\varepsilon(x) \quad y_2(x) \quad \dots \quad y_n(x)\}) = 0.$$

Из этих двух методов первый представляется более простым. Оба метода интересны тем, что область их применения не ограничена системами вида (3). В частности, в [11] можно найти пример использования этих методов для поиска медленных многообразий в системе Лоренца [25].

Третий метод [9] основан на использовании *механического формализма*. Его суть заключается в следующем. Система дифференциальных уравнений рассматривается как задача о движении точки в векторном поле скоростей:  $\dot{x} = f_\varepsilon(x) = v(x)$ . В этом случае, выражение для ускорения точки запишется как

$$\gamma(x) = \frac{dv}{dt} = \left( \frac{Dv}{Dx} \right) \frac{dx}{dt} = J_\varepsilon(x)v.$$

Области медленного и быстрого движения различаются путём сравнения векторов мгновенной скорости  $v$  и мгновенного ускорения  $\gamma$ . Если у вектора мгновенного ускорения преобладает тангенциальная составляющая, предполагается, что имеет место быстрое движение, а если нормальная составляющая, то, соответственно, медленное.

Утверждается следующее. Если сингулярное приближение для вектора мгновенной скорости позволяет получить уравнение медленного многообразия

в приближении нулевого порядка по  $\varepsilon$ , то сингулярное приближение для вектора мгновенного ускорения позволяет получить приближение первого порядка. Более того, приближения последующих порядков могут быть получены путём дальнейшего дифференцирования вектора мгновенной скорости.

Итак, из всех методов определения областей медленной динамики наиболее простым представляется сингулярное приближение. По этой причине целесообразно использовать данный метод в первую очередь. В случае, если точность метода окажется недостаточной, имеет смысл воспользоваться механическим формализмом (или его модификацией старшего порядка), либо одним из методов, основанных на определении быстрого собственного вектора.

### ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДОМ РУСЕЛ И ДЖОКЕРОВ

Рассмотрим пример применения метода русел и джокеров к исследованию модели Розенцвейга-Макартура, представляющей собой модификацию модели Вольтерра «хищник-жертва» [12]. Предполагается наличие трёх взаимодействующих популяций: жертвы, хищника и суперхищника. Популяции ведут себя следующим образом. Численность жертв в отсутствие хищника растёт логистически. Хищники питаются жертвами, причём при истреблении жертв и при размножении хищников учитывается эффект насыщения хищников (увеличение численности жертв, начиная с определённого уровня, не приводит к увеличению их потребления хищниками, используется функция Холлинга II типа [26]). При отсутствии жертв хищники вымирают экспоненциально. Суперхищники существуют за счёт потребления хищников, при этом также учитываются эффекты насыщения и вымирания в отсутствие пищи.

Модель, в её безразмерном виде, представляет собой следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \zeta \dot{x} = x \left( 1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x} \right) \equiv xf(x, y) \\ \dot{y} = y \left( \frac{x}{\beta_1 + x} - \delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) \equiv yg(x, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon z \left( \frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) \equiv \varepsilon zh(y) \end{cases} \quad (5)$$

где  $x, y, z$  – численности популяций (жертв, хищников и суперхищников, соответственно), а  $\zeta, \varepsilon, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2$  – параметры. Значения всех переменных и всех параметров неотрицательны. Предполагается также выполнение условий

$$\delta_1 < 1, \delta_2 < 1,$$

что означает непревышение скоростью вымирания соответствующего хищника максимальной скорости его размножения (нарушение условия приводит к вырождению трофической цепи). Кроме того, учитывается гипотеза о различии масштабов времени в трофических системах (*trophic time diversification hy-*

*pothesis*), согласно которой, скорость размножения тем ниже, чем более высокое положение занимает вид в пищевой иерархии:

$$0 < \zeta \ll 1$$

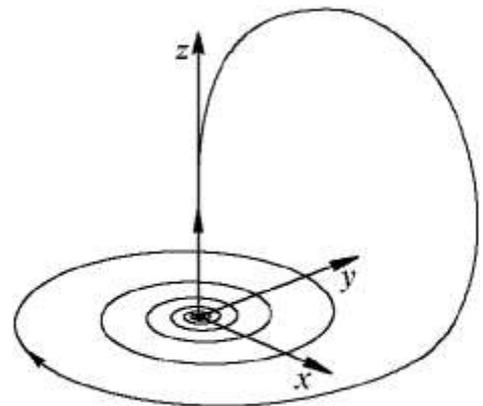
$$0 < \varepsilon \ll 1$$

В условиях выполнения данной гипотезы система (5) является сингулярно возмущённой.

В зависимости от значений параметров, система (5) может демонстрировать большое разнообразие динамических режимов, в число которых входят хаотические режимы различных типов [13,14,15,16]. Будем рассматривать хаотический режим с аттрактором шильниковского типа, который имеет место при выполнении условий теоремы Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса [17,18,19,20,21]. Это означает, что имеется особая точка типа седлофокус, лежащая на гомоклинической фазовой траектории, называемой петлёй сепаратрисы седлофокуса (рис. 1), причём скорость ухода от особой точки по неустойчивому направлению превышает скорость приближения по устойчивым направлениям.

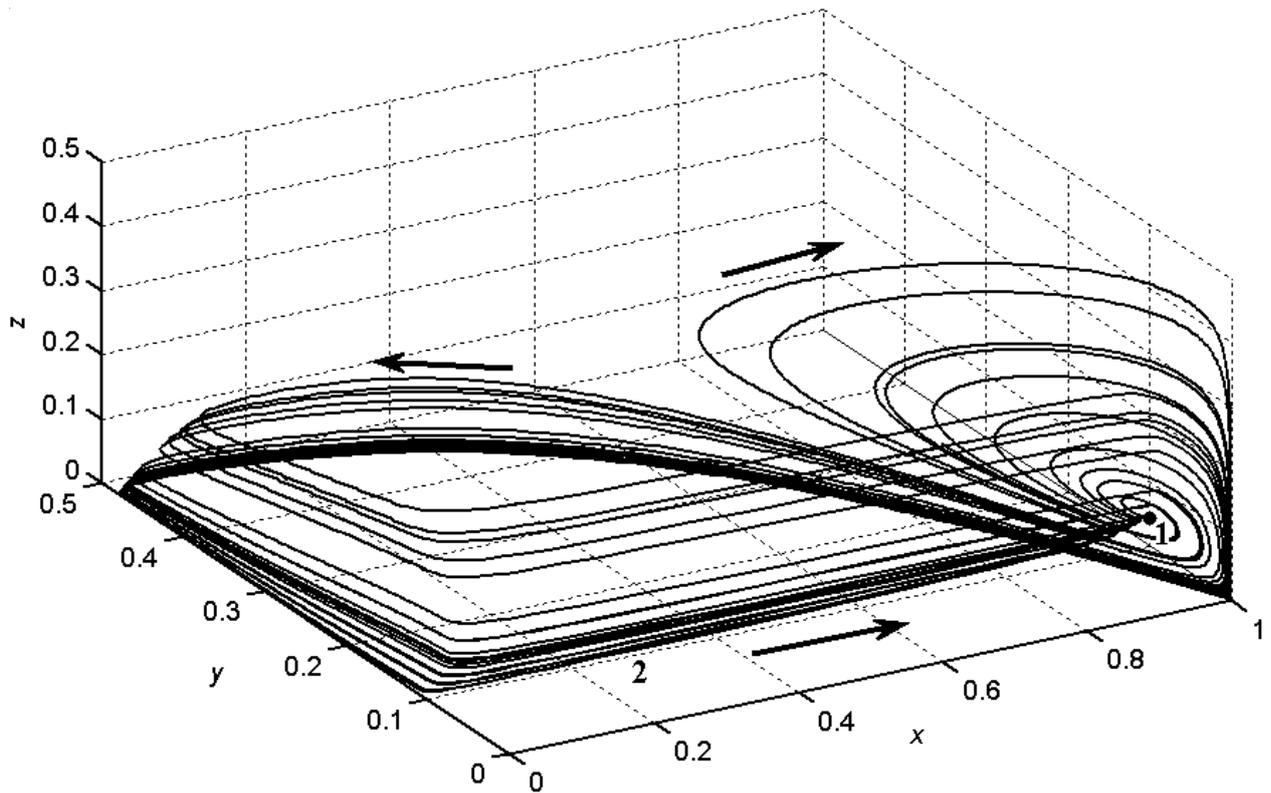
Наличие точки седлофокуса  $A_f$  в системе Розенцвейга – Макартура обеспечивается невыполнением гипотезы о различии масштабов времени в трофических системах для пары «хищник – суперхищник» [14], то есть, скорости размножения хищников и суперхищников должны быть сравнимы (параметр  $\varepsilon$  принимает значение порядка единицы). Подобная ситуация характерна для случая, когда массы тел хищника и суперхищника сравнимы.

Скорость ухода (в обратном времени) от особой точки по неустойчивому направлению велика вследствие выполнения гипотезы о различии масштабов времени для пары «жертва-хищник», то есть, малости параметра  $\zeta$ .



**Рис. 1. Петля сепаратрисы седлофокуса**

Разновидность фазовой траектории, необходимая для наличия аттрактора шильниковского типа (рис. из [20])



**Рис. 2. Шильниковский хаос в системе Розенцвейга–Макартура**

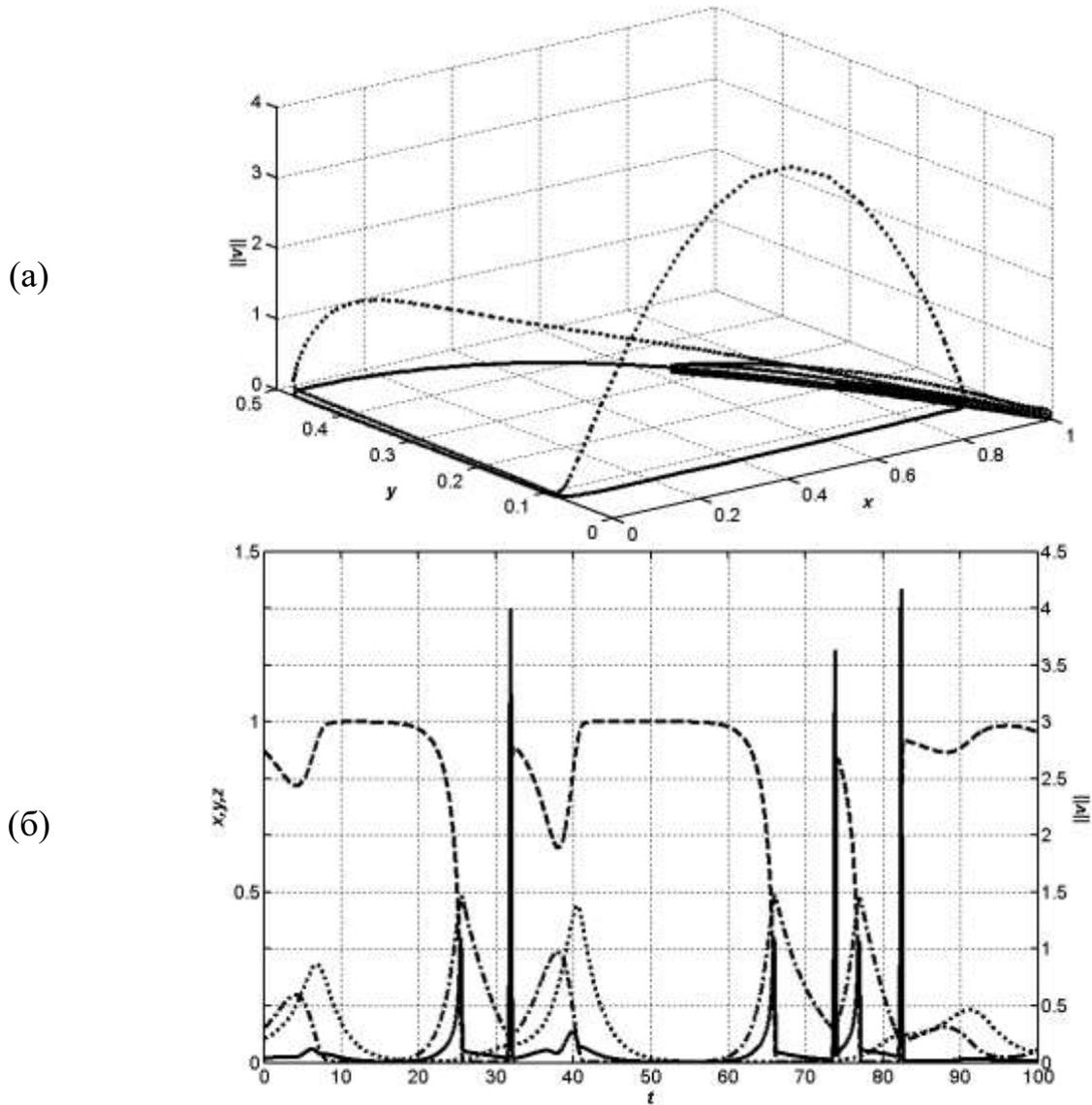
Траектории системы Розенцвейга–Макартура в режиме шильниковского хаоса. Цифрой 1 помечен седлофокус, цифрой 2 – петля сепаратрисы седлофокуса. Стрелкой показано направление движения.

Шильниковский хаос в системе Розенцвейга-Макартура (рис. 2) можно наблюдать, в частности, при следующих [14] значениях параметров:

$$\zeta = 0,05, \varepsilon = 1, \beta_1 = 0,25, \beta_2 = 0,1, \delta_1 = 0,2, \delta_2 = 0,39. \quad (6)$$

Действуя в соответствии с предложенной выше схемой, определим для системы (5) области медленной динамики и уравнения медленного движения, и подберём джокеры, приближённо описывающие поведение системы в областях быстрого движения.

Для разграничения областей медленной и быстрой динамики, воспользуемся сначала данными наблюдений. Прежде всего, имеет смысл обратить внимание на характер изменения нормы вектора скорости на различных участках аттрактора (рис. 3 (а)) и, что особенно наглядно, в течение времени движения (рис. 4 (а)).

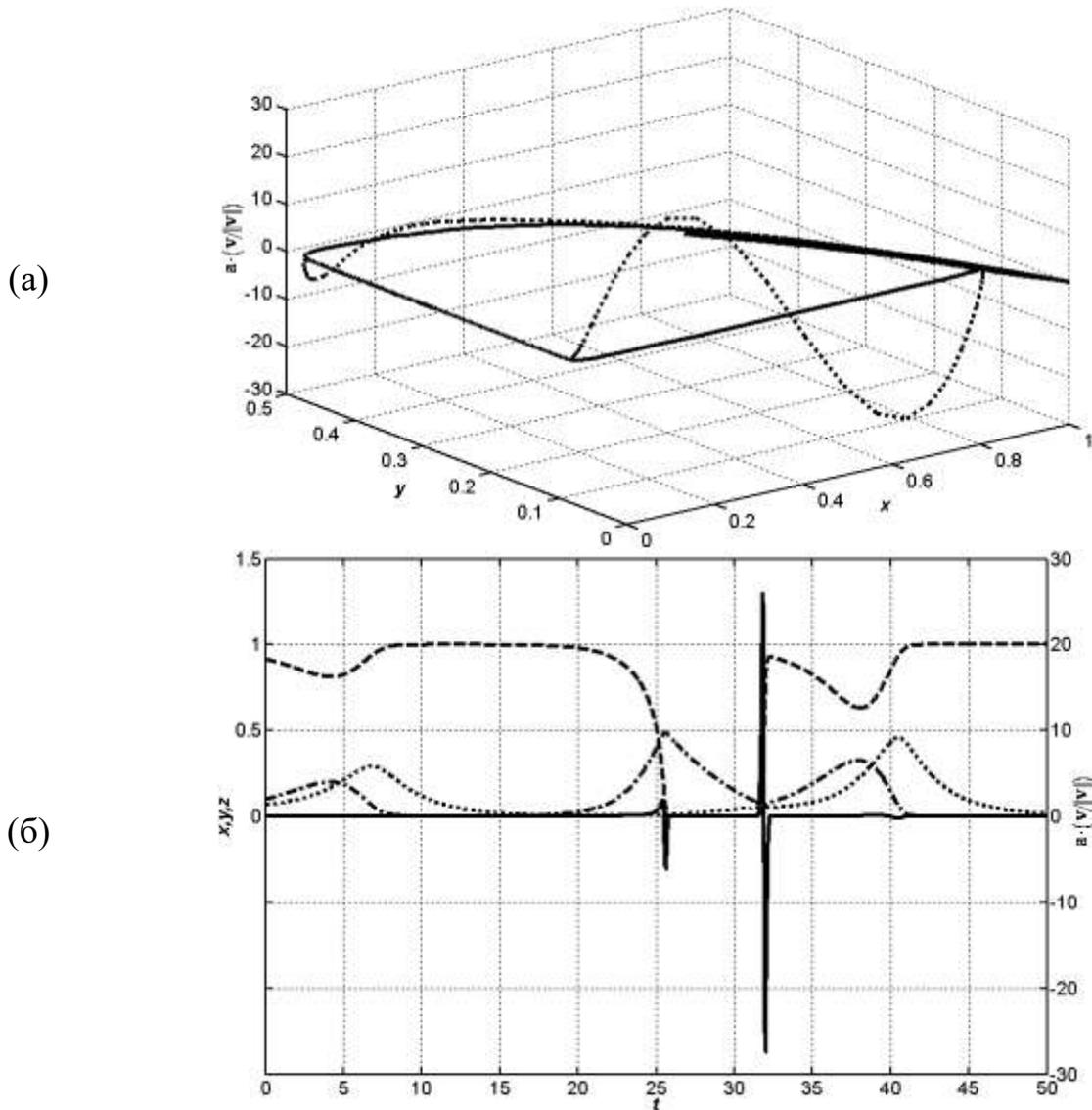


**Рис. 3** Скорость на аттракторе

Зависимость нормы вектора скорости  $\|v\|$  от координат  $x, y$  (а) и от времени (б). На графике для зависимости от координат скорость показана пунктирной линией; сплошной линией показана проекция траекторий аттрактора на плоскость  $z = 0$ . На графике для зависимости от времени сплошной линией показана скорость; зависимости фазовых переменных  $x(t)$ ,  $y(t)$ , и  $z(t)$  показаны, штриховой, штрих-пунктирной и пунктирной линиями, соответственно.

Хорошо видно, что на аттракторе чётко выделяются четыре чередующиеся зоны. При этом, скорость движения на одной паре противоположащих зон на порядок превышает скорость движения на другой паре. Поскольку размеры участков медленного и быстрого движения сравнимы, постольку система преодолевает последние за очень короткое время (по сравнению с первыми), и на графике скорости движения как функции от времени участки быстрого движения выглядят как узкие и высокие пики.

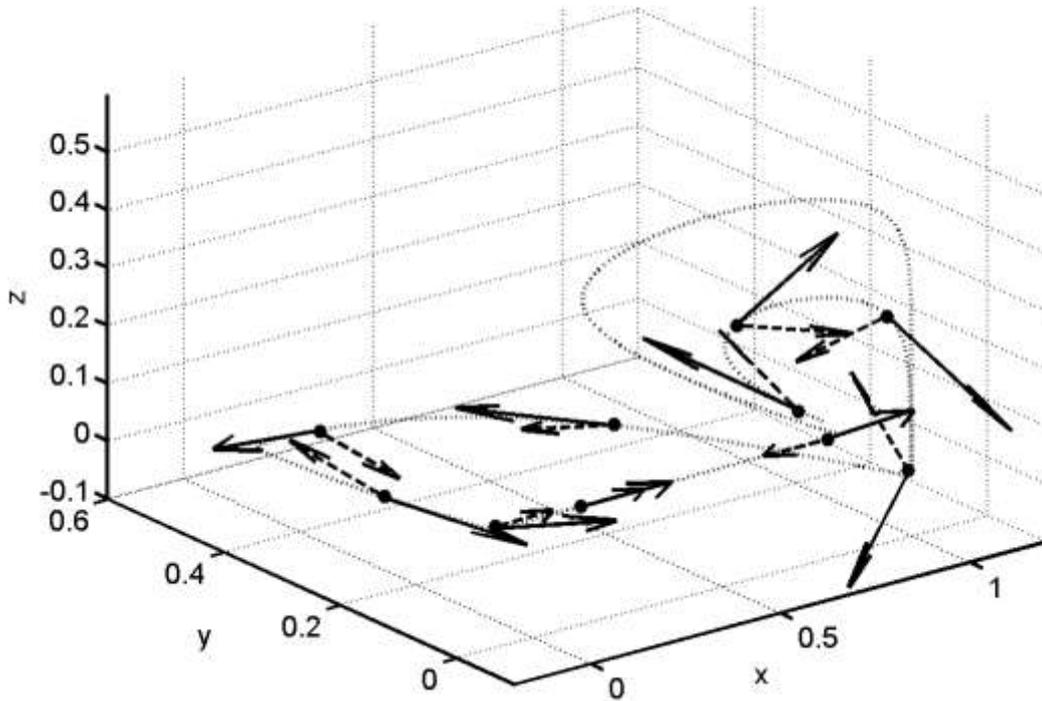
Не менее любопытно выглядят аналогичные зависимости для ускорения (рис. 3 (б) и 4 (б)). К примеру, заметно, что для участков быстрого движения характерно резкое ускорение (на входе) и резкое торможение (на выходе).



**Рис. 4. Ускорение на аттракторе**

Зависимость от координат  $x, y$  (а) и от времени (б) величины проекции вектора ускорения на направление вектора скорости  $a \cdot (v/\|v\|)$ . На графике для зависимости от координат проекция ускорения показана пунктирной линией; сплошной линией показана проекция траекторий аттрактора на плоскость  $z = 0$ . На графике для зависимости от времени  $x(t)$ ,  $y(t)$ , и  $z(t)$  показаны, штриховой, штрих-пунктирной и пунктирной линиями, соответственно; сплошной линией показана проекция ускорения.

Дополнительную информацию о характере движения на различных участках можно получить, анализируя скорость и ускорение совместно. В частности, весьма информативно преобладание тангенциальной или нормальной составляющей вектора ускорения. Также, для более точного разграничения зон быстрого и медленного движения, можно использовать тот факт, что в начале участка быстрого движения вектора сонаправлены, а в конце – направлены в противоположные стороны (рис. 5).



**Рис. 5. Скорость и ускорение**

Направления векторов мгновенной скорости и мгновенного ускорения показаны совместно, в некоторых точках траектории на аттракторе. Фазовая траектория обозначена пунктирной линией, направления вектора скорости – сплошными стрелками, направления вектора ускорения – штриховыми стрелками. Хорошо заметны участки разгона (вектора параллельны), торможения (антипараллельны), изменения направления движения (ортогональны).

Таким образом, определённые выше области быстрого движения по своим характеристикам (а именно, расположение, обеспечивающее чередование быстрого и медленного движения на фазовых траекториях, сравнительно малая продолжительность быстрого движения, сравнительно большая скорость в областях быстрого движения) вполне подходят для определения расположения и принципа работы джокеров. Здесь следует особо отметить, что джокеры предназначены не столько для замены собственно областей быстрого движения (уравнения движения в пределах которых сравнительно просты), сколько для замены последних в совокупности с пограничными областями перехода от одного типа движения к другому, где сложность системы проявляется в полной мере. Таким образом, вместо сложной системы мы рассчитываем получить (одну или более) простую систему, снабжённую (одним или более) простым джокером, ответственным за проявления сложности исходной системы.

Будем строить упрощённую систему следующим образом. Для определения областей медленной динамики и уравнений медленного движения воспользуемся сингулярным приближением. Уравнение (2) в данном случае совпадает с уравнением нуль-изоклины жертв и определяет множество точек, представляющее собой объединение плоскости  $x = 0$  и цилиндрической параболы [13]

$$y = f^{-1}(x, \bullet) = (1 - x)(\beta_1 + x), \quad (7)$$

и имеющее две устойчивые области,  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ . Область  $\Gamma_1$  образована точками правой ветви цилиндрической параболы (7), то есть, точками, для которых выполняется неравенство

$$x > \bar{x} \equiv \frac{(1-\beta_1)}{2}, \quad y < \bar{y} \equiv \frac{(1+\beta_1)^2}{4}$$

(точка  $(\bar{x}, \bar{y})^T$  – вершина параболы, представляющей собой проекцию цилиндрической параболы (7) на плоскость  $z=0$  – рис. 6). Область  $\Gamma_0$  образована точками плоскости  $x=0$ , лежащими выше пересечения плоскости параболой (7), то есть, точками, для которых выполняется неравенство

$$y > y_{\text{trn}} \equiv \beta_1$$

(где индекс «trn» означает «transcritical», так как при прохождении точки  $y = y_{\text{trn}}$  устойчивость точек плоскости  $x=0$  и точек левой ветви параболы (7) меняется – рис. 6).

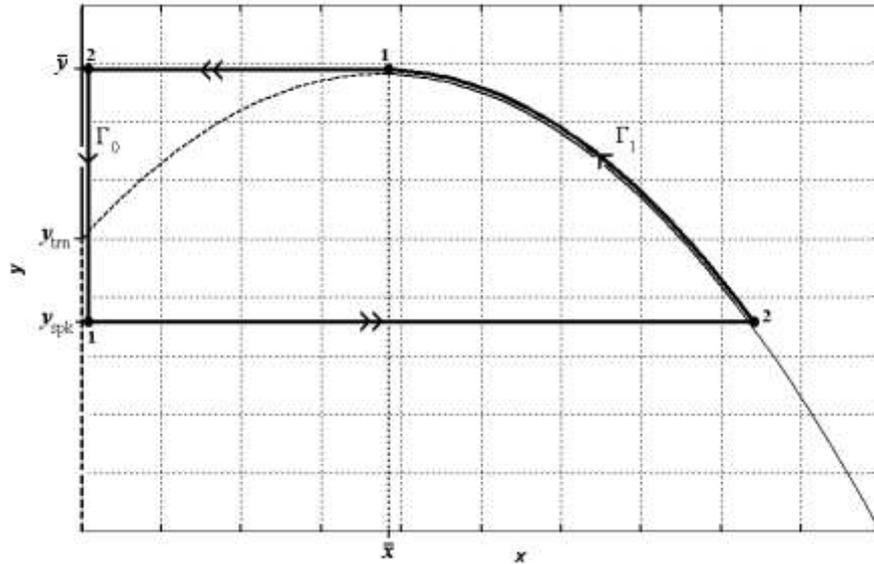
Уравнения медленного движения определяются *вырожденной системой* дифференциальных и алгебраических уравнений, представляющей собой исходную систему (5), в которой выполнен предельный переход при  $\zeta \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} 0 = xf(x, y) \\ \dot{y} = yg(x, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon zh(y) \end{cases} \quad (8)$$

Следует отметить, что фазовые траектории данной системы на плоскости  $x=0$  выходят за пределы устойчивой области  $\Gamma_0$ , продолжаясь до так называемой *точки поворота (turning point)*, у-координата которой обозначается  $y_{\text{spk}}$  (так как после прохождения точки поворота происходит скачок («spiking») численности популяции жертв – рис. 6). Значение  $y_{\text{spk}}$  определяется интегральным уравнением [13]

$$\int_{y_{\text{spk}}}^{\bar{y}} \frac{f(0, y)}{yg(0, y, z)} dy = 0. \quad (9)$$

Линия на плоскости  $x=0$ , образованная точками поворота (они же точки срыва), обозначается  $\Sigma_0$ . Линия  $\Sigma$  в области  $\Gamma_1$ , образованная соответствующими точкам срыва  $\Sigma_0$  точками падения, называется *линией падения (junction line)* и представляет собой проекцию  $\Sigma_0$  на  $\Gamma_1$  параллельно оси  $x$ .



**Рис. 6. Движение вырожденной системы**

Участок траектории вырожденной системы и нуль-изоклина жертв в проекции на плоскость  $z = 0$ . Толстой сплошной линией показана траектория, на ней одинарной стрелкой обозначено медленное движение, двойной стрелкой – быстрое движение, цифрой «1» – точки срыва, «2» – точки падения. Тонкими линиями показана проекция нуль-изоклины жертв, при этом устойчивые области обозначены сплошными линиями, а неустойчивые – штриховыми.

Медленное движение фазовой точки системы (8) на плоскости  $x = 0$  можно описать, выполнив соответствующую подстановку:

$$\begin{cases} \dot{y} = y \left( -\delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) = yg(0, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon z \left( \frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) = \varepsilon zh(y) \end{cases} \quad (10)$$

Фазовое пространство полученной системы двумерно, а её траектории показаны на рис. 7 (а). Поведение системы (10) в области  $y > y_{\text{spk}}$  аналогично поведению исходной системы. Однако, если фазовая точка системы (8), достигнув точки поворота на линии  $\Sigma_0$ , покидает плоскость  $x = 0$ , то в более простой системе (10), по понятным причинам, данное явление отсутствует. Следовательно, для его воспроизведения необходимо наличие джокера, далее обозначаемого  $\mathbf{J}_0$ .

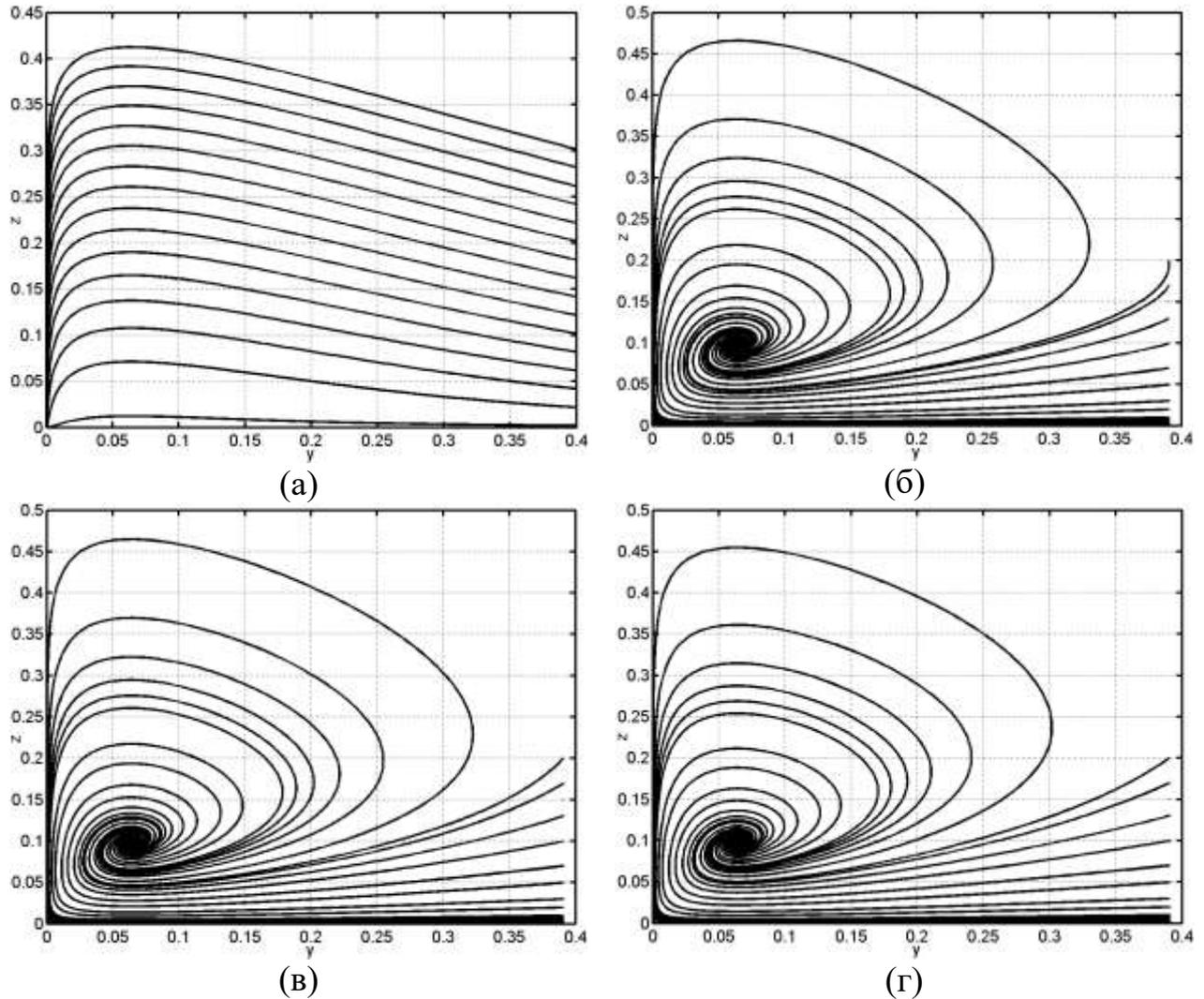
Далее, для описания медленного движения фазовой точки системы (8) на поверхности  $\Gamma_1$ , можно использовать следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{y} = y \left( \frac{f_+^{-1}(\bullet, y)}{\beta_1 + f_+^{-1}(\bullet, y)} - \delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) = yg(f_+^{-1}(\bullet, y), y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon z \left( \frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) = \varepsilon zh(y) \end{cases}, \quad (11)$$

где

$$f_+^{-1}(\bullet, y) \equiv +\sqrt{\bar{y}-y} + \bar{x}, \quad y \leq \bar{y} \quad (12)$$

– то из двух решений уравнения  $f(x, y) = 0$  относительно  $x$ , что соответствует  $\Gamma_1$ . Фазовое пространство системы (11) опять же двумерно, а её траектории показаны на рис. 7 (б). В частности, можно видеть, что система (11) имеет особую точку  $A'_f = (y_f, z_f)^T$  типа неустойчивый фокус.



**Рис. 7. Фазовые траектории в областях медленного движения**

Фазовые траектории системы (10), соответствующей области медленного движения в плоскости  $x = 0$  (а), системы (11) в варианте с функцией (7), соответствующей поверхности  $\Gamma_1$  (б), упрощённой системы (11) с заменой функции (12) первым (в) и нулевым (г) приближениями в точке  $x = x_f, y = y_f$ . На рис. (б), (в), (г) хорошо заметна особая точка  $A'_f$  типа неустойчивый фокус.

Заметим, что выполнение условия возникновения шильниковского хаоса в системе (5) – наличия петли сепаратрисы седлофокуса – обеспечивается про-

хождением линии падения  $\Sigma$  через соответствующую  $A'_f$  точку  $A_f = (x_f, y_f, z_f)^T$  в области  $\Gamma_1$ .

Можно видеть, что фазовая точка системы (11), удаляясь от  $A'_f$  по спиралевидной траектории, достигает линии  $y = \bar{y}$ . До этого момента поведение системы (11) аналогично поведению исходной системы, то есть, фазовые траектории системы (11) представляют собой проекции фазовых траекторий системы (8) в фазовое пространство системы (11). Далее, фазовая точка системы (8) покидает  $\Gamma_1$  и перемещается на плоскость  $x=0$ ; система же (11) при  $y > \bar{y}$  не определена, так как не определена функция (12). Следовательно, для соответствия поведения упрощённой системы поведению исходной системы, требуется наличие джокера, срабатывание которого соответствует срыву фазовой точки. Введём требуемый джокер и обозначим его  $\mathbf{J}_1$ .

Итак, с учётом сказанного, упрощённая система может быть построена на основе следующих правил. Фазовое пространство системы двумерно, переменными состояния являются  $y$  и  $z$ . Результат воздействия скрытой переменной  $x$  достигается введением джокеров  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{J}_1$ . Фазовая точка движется в плоскости  $(y, z)$ , подчиняясь, например, системе уравнений (10). Достигнув области джокера  $\mathbf{J}_0$ , фазовая точка начинает движение согласно системе уравнений (11), что соответствует перемещению фазовой точки системы (8) с плоскости  $x=0$  в область  $\Gamma_1$ . Через некоторое время, достигнув области джокера  $\mathbf{J}_1$ , фазовая точка вновь начинает движение согласно системе (10), и так далее.

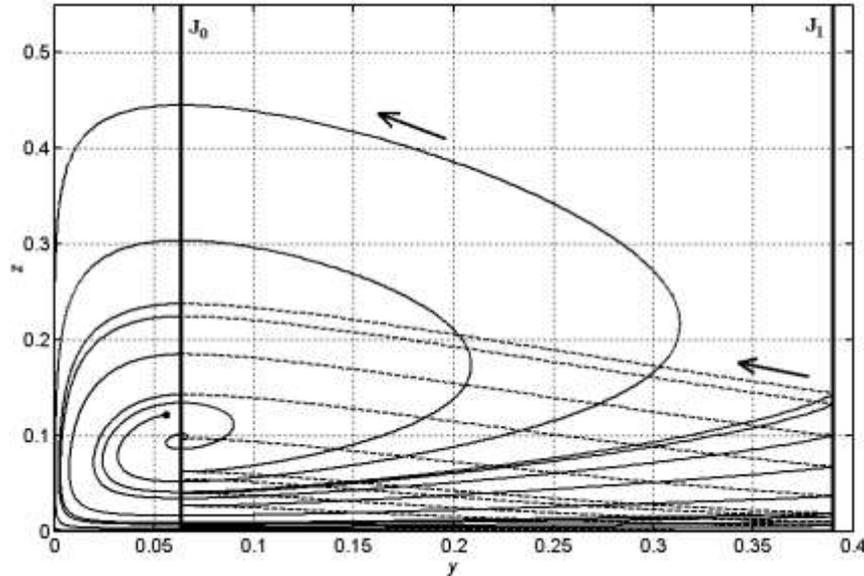
Фазовые траектории системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  непрерывны (хотя и не гладки) в точках областей джокеров, поскольку перемещение фазовой точки исходной системы между  $\Gamma_1$  и плоскостью  $x=0$  происходит параллельно оси  $x$ . Задержка фазовой точки в области джокера отсутствует, так как перемещение мгновенно.

Определив поведение (программу срабатывания)  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{J}_1$ , обсудим конфигурацию областей джокеров.

В случае  $\mathbf{J}_1$  выбор вырожденной системы (8) в качестве основы для построения упрощённой системы предопределяет выбор области джокера в виде линии срыва – прямой  $y = \bar{y}$ . Отметим также, что если система (11) может быть задана с начальными условиями вне области определения функции (12), то следует расширить область джокера на полуплоскость  $y \geq \bar{y}$ , и соответствующим образом доопределить правило срабатывания.

Область джокера  $\mathbf{J}_0$  определяется линией  $\Sigma_0$  и, по идее, должна задаваться уравнением (9). Однако, аналитическое решение данного уравнения неизвестно (если вообще существует), поэтому, при численном интегрировании системы (10) необходимо использование некоторого дополнительного алгоритма определения координат вхождения фазовой точки в область джокера. Простейший пример такого алгоритма – численное решение уравнения (9) на каждом шаге интегрирования. Последнее неприемлемо затратно, поэтому, предлагается начать с применения джокера с максимально простой конфигурацией. В каче-

стве последней представляется целесообразным использование прямой  $y = y_f$  (рис. 8), выбор которой продиктован соображением сохранения такого принципиального свойства системы, как размещение точки фокуса на линии падения (что, собственно, и обеспечивает наличие хаотического режима шильниковского типа).



**Рис. 8. Система с джокерами**

Фазовые траектории системы (10)– $J_0$ –(11)– $J_1$  (используется джокер  $J_0$  с упрощённой конфигурацией в виде прямой  $y = y_f$ ). Джокеры показаны жирными линиями. Сплошными линиями обозначены траектории системы (11), пунктирными – системы (10). Стрелками показано направление движения, жирной точкой – начальные условия. В окрестности области джокера  $J_1$  хорошо заметно изменение типа движения, сопровождающееся нарушением гладкости траектории.

Таким образом, можно представить, что джокеры  $J_0$  и  $J_1$  «сшивают» фазовые пространства двух различных систем. В этом заключается их принципиальное отличие от рассмотренных ранее джокеров, действие которых заключается в перемещении в пределах одного фазового пространства. С учётом особенностей срабатывания и конфигурации, новому джокеру можно присвоить название *джокер типа «шов»*.

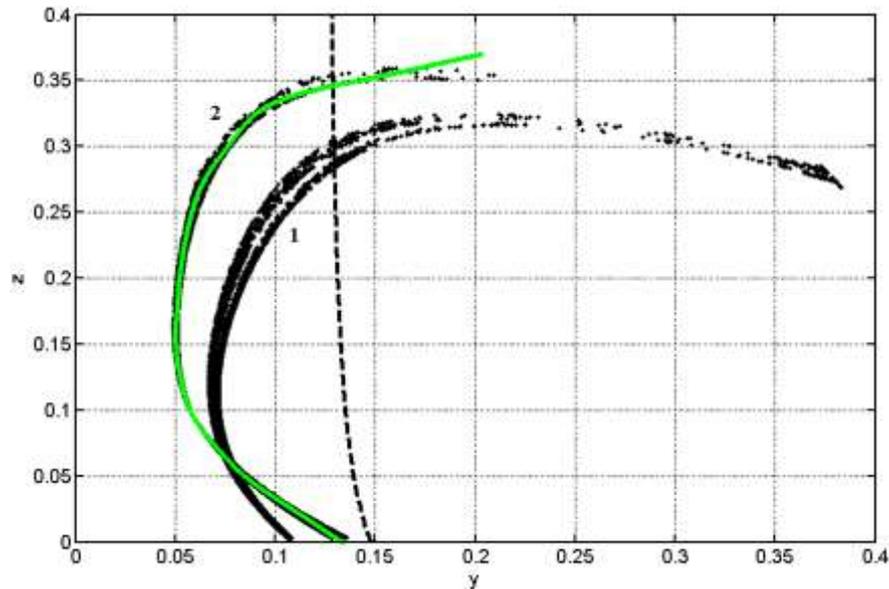
Если для данного конечно малого значения параметра  $\zeta$  выбранные простые конфигурации и правила срабатывания джокеров  $J_0$  и  $J_1$  не обеспечивают необходимой степени сходства фазовых портретов исходной и упрощённой систем, то следует пересмотреть выбор в сторону усложнения.

Например, для джокера  $J_0$  можно, воспользовавшись данными наблюдений, изменить конфигурацию, а также правило срабатывания (с учётом того факта, что точка падения при  $\zeta > 0$  не совпадает с точкой срыва в проекции на координатную плоскость  $x = 0$ ). Здесь возникает ряд вопросов технического характера, в частности, каким образом можно точно определить точки срыва и падения. При численном интегрировании удобно считать, что срыв на линии  $\Sigma_0$  происходит в тот момент, когда  $x$ -составляющая вектора фазовой скорости ста-

новится преобладающей (то есть, начинает выполняться условие  $\dot{x} > \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ ). Определение точки падения представляет собой более сложную задачу вследствие криволинейности  $\Gamma_1$ . Для её решения предлагается разложить вектор фазовой скорости в каком-либо ортонормированном базисе, один из векторов которого ортогонален некоторой касательной плоскости к  $\Gamma_1$  (например, касательной в точке фокуса). В этом случае падением будет считаться момент, когда прекращает выполняться условие преобладания составляющей фазовой скорости, направленной ортогонально касательной плоскости.

Для нахождения конфигурации джокера определённые экспериментально точки срыва и падения можно, например, аппроксимировать кубическим сплайном, или использовать сглаживание (рис. 9). Также, вместо данных наблюдений, можно попробовать использовать интерполяцию численного решения уравнения (9) для ряда значений  $z$ . При этом, однако, следует иметь в виду, что уравнение (9) представляет собой предельный случай при  $\zeta \rightarrow 0$ . Поэтому, перед использованием данного метода необходимо убедиться, что для заданного  $\zeta$  уравнение (9) достаточно хорошо аппроксимирует экспериментально определённую линию срыва  $\Sigma_0$  (на рис. 9 хорошо видно, что в случае набора значений параметров (6) это условие не выполняется).

В случае джокера  $\mathbf{J}_1$  изменение линии срыва на основе данных наблюдений затруднено тем, что функция (12) не определена в области  $y > \bar{y}$ . Для решения этой проблемы можно, например, вместо решения вырожденной системы использовать асимптотическое приближение более высокого порядка, а также ввести в рассмотрение погранслоиную часть асимптотики.



**Рис. 9. Экспериментально определённые точки срыва и падения**

1 – экспериментально определённые точки срыва, 2 – точки падения. Сплошной линией показана аппроксимация линии падения кубическим сплайном. Пунктирной линией показана линия срыва  $\Sigma_0$ , определённая согласно уравнению (9).

Если же упрощённая система, наоборот, хорошо аппроксимирует исходную, то можно попробовать продвинуться по пути дальнейшего упрощения, например, заменив в уравнениях (11) функцию (12) сначала её первым, а затем нулевым приближением в точке  $y = y_f$  (данная точка выбрана по причине того, что положение точки фокуса по отношению к области джокера  $\mathbf{J}_0$  не должно измениться). Первое приближение (уравнение касательной), как несложно показать, имеет вид

$$f_1^{-1}(\bullet, y) \equiv \frac{1}{-2x_f - \beta_1 + 1}(y - y_f) + x_f, \quad (13)$$

а нулевое приближение, соответственно,

$$f_0^{-1}(\bullet, y) \equiv x_f. \quad (14)$$

Фазовые траектории системы (11) с приближениями (13) и (14) показаны на рис. 7 (в) и (г), соответственно.

Сравнение исходной системы и различных вариантов системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  порождает ряд дополнительных вопросов, первый из которых – выбор характеристик для сравнения, а остальные относятся к определению характеристик системы с джокером (в последнем случае стандартные методы определения количественных показателей могут потребовать доработки). Будем сравнивать исходную и упрощённые системы по следующим характеристикам: значения ляпуновских характеристических показателей, функции автокорреляции переменных  $y$  и  $z$ , корреляционные интегралы.

Кроме того, рассматривая линию  $\Sigma$  как сечение Пуанкаре для системы (8), построим для каждой из систем одномерное отображение последования  $\pi_S(z): \Sigma_+ \rightarrow \Sigma_+$  ( $z_{n+1} = \pi_S(z_n)$ ), где  $\Sigma_+$  – часть  $\Sigma$ , лежащая в области  $z > z_f$ . Сравним построенные отображения.

Значения ляпуновских характеристических показателей исходной системы, определённые экспериментально с помощью варианта алгоритма Бенеттина [3] для дифференциальных уравнений, составляют  $\lambda_1 = 0,04$ ,  $\lambda_2 = 10^{-4}$ ,  $\lambda_3 = -13,6$ . Проблема применения данного алгоритма к системе (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  заключается в том, что в области джокера фазовые траектории не являются гладкими, и матрица Якоби (а следовательно, и линеаризованная система) не определена.

Для решения проблемы можно, например, использовать модификацию варианта алгоритма Бенеттина для отображений (шаг отображения представляет собой интегрирование системы в течение некоторого фиксированного времени  $\Delta t$ ). В этой модификации вместо итераций линеаризованной системы для возмущений относительно начала координат, где возмущения ортонормированы, выполняются итерации исходной системы для возмущений относительно начальных данных, где возмущения ортогонализированы, малы и одинаковы по модулю. Шаг  $\Delta t$  и величина малого возмущения  $r$  подбираются опытным путём, с учётом характерной величины фазовой скорости  $v$ , таким образом, чтобы  $r$  и произведение  $v \cdot \Delta t$  совпадали по порядку величины. Вблизи области джокера

ортогонализация возмущений не выполняется (соответственно, не вычисляется текущая оценка показателей), то есть, для начальных данных и возмущений выполняется несколько итераций отображения подряд. Последнее правило обусловлено тем, что в области джокера траектории системы не являются гладкими, и ортогонализация возмущений приводит к значительным погрешностям.

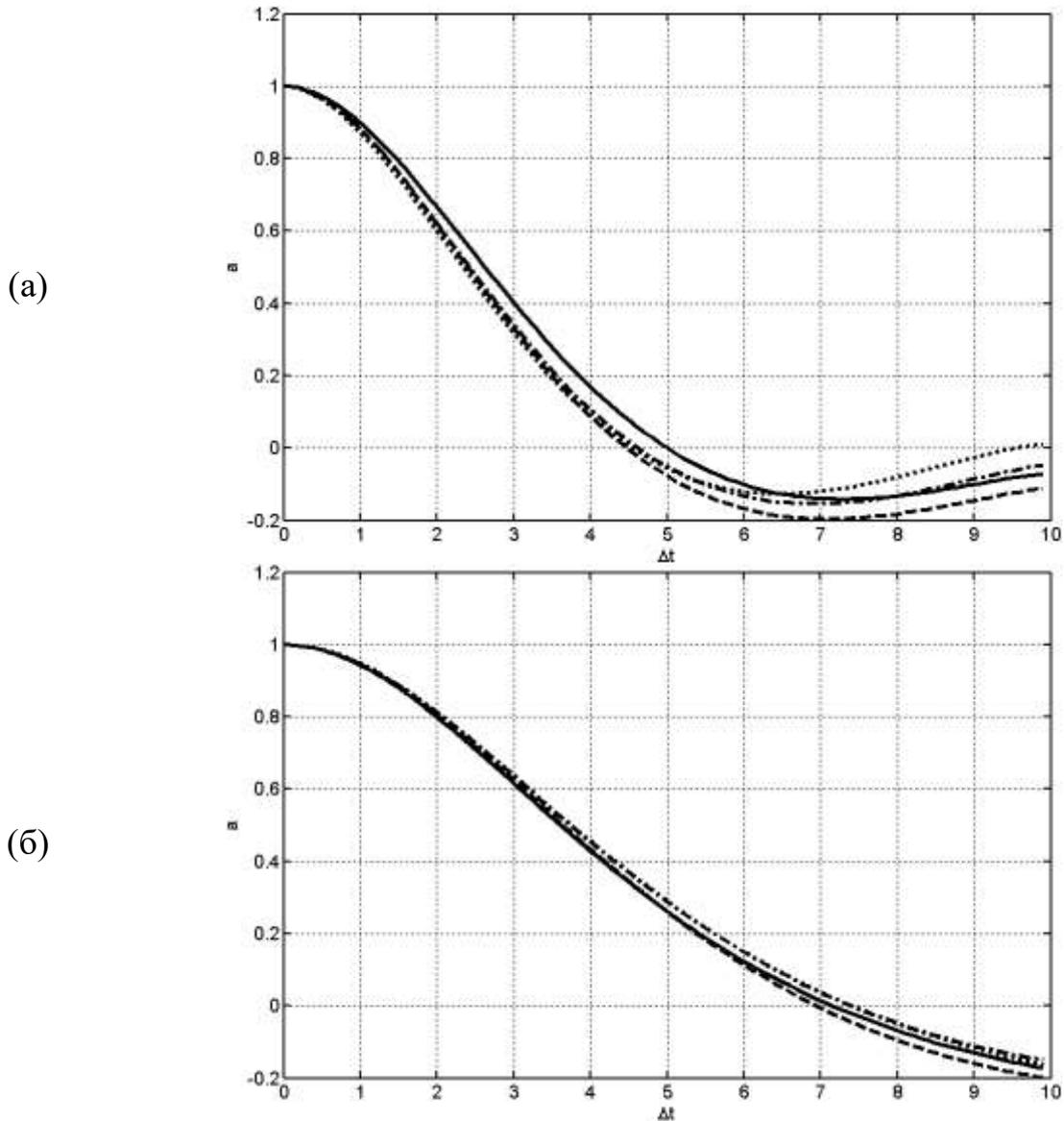
Значения ляпуновских характеристических показателей системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  в варианте с функцией (12), определённые данным методом, составляют  $\lambda_1 = 0,095$  и  $\lambda_2 = 0,015$ . Для сравнения, тот же алгоритм, применённый к проекции исходной системы на плоскость  $x = 0$ , даёт значения  $\lambda_1 = 0,09$  и  $\lambda_2 = 0,02$ . Таким образом, есть основания считать, что исходная система и система русел и джокеров похожи в части «разбегания» траекторий в соответствующей проекции.

Здесь имеет смысл отметить, что для систем, включающих джокеры ранее описанных типов, определение ляпуновских характеристических показателей затруднено или невозможно. Действительно, две сколь угодно близкие траектории, пройдя область джокера, например, третьего рода, могут, следуя вероятностному правилу, мгновенно разойтись на сравнительно большое расстояние. Обратный пример: две различные траектории, проходя джокер первого рода, объединяются в одну. Таким образом, при использовании стандартных методов, оценка показателя в первом случае стремится к  $+\infty$ , а во втором – обращается в ноль. Следовательно, необходимо доопределение понятия ляпуновского характеристического показателя для систем с джокером. Возможно, также потребуется интегрировать систему в течение очень долгого времени (достаточно долго, чтобы фазовая точка прошла область джокера столько раз, сколько необходимо для сбора статистики), что может быть весьма затратно.

Джокер типа «шов», в отличие от предыдущих, сохраняет единственность решения и его непрерывность по начальным данным, что даёт возможность использовать общепринятое определение ляпуновского характеристического показателя и позволяет избежать чрезмерных затрат вычислительных ресурсов.

Графики функции автокорреляции переменных  $y$  и  $z$  показаны на рис. 10. Можно видеть, что для каждой переменной все графики (и для исходной системы, и для всех вариантов системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$ ) в области до первого нуля функции автокорреляции практически совпадают (для переменной  $y$  различия более выражены).

Для переменной  $y$  значения первых нулей функций автокорреляции составляют:  $\Delta t = 5,00$  для исходной системы,  $\Delta t = 4,48$  для системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  в варианте с функцией (12),  $\Delta t = 4,62$  – в варианте с функцией (13) и  $\Delta t = 4,54$  – в варианте с функцией (14). Для переменной  $z$  значения первых нулей функций автокорреляции составляют:  $\Delta t = 7,16$  для исходной системы,  $\Delta t = 6,95$  для системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  в варианте с функцией (7),  $\Delta t = 7,40$  – в варианте с функцией (13) и  $\Delta t = 7,40$  – в варианте с функцией (14).



**Рис. 10. Графики функции автокорреляции**

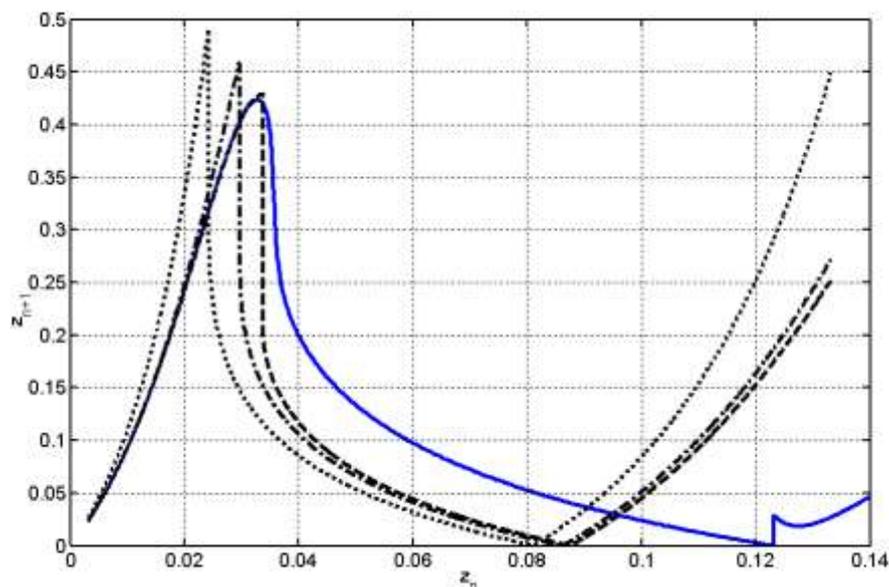
Функция автокорреляции  $a(\Delta t)$  для переменной  $y$  (а) и переменной  $z$  (б). Исходной системе соответствует сплошная линия, системе (10)– $J_0$ –(11)– $J_1$  в варианте с функцией (7) – штриховая линия, в варианте с функцией (13) – штрих-пунктирная линия, с функцией (14) – пунктирная линия.

Отметим, что построение графиков автокорреляции для систем с джокерами может быть выполнено стандартными методами.

Для определения корреляционных показателей [27] необходим массив некоррелированных точек на аттракторе. Поскольку интервал корреляции для каждой из фазовых переменных, как можно видеть на рис. 10, не превышает 10, постольку точки, принадлежащие одной фазовой траектории, брались с интервалом  $\Delta t = 10$ . Вопрос о количестве точек был решён следующим образом. В [27] утверждается, что для расчёта корреляционного показателя с точностью в 5% необходима выборка размером

$$N > 42^M,$$

где  $M$  – целая часть хаусдорфовой размерности аттрактора. В предположении, что ни для исходной системы, ни для системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$   $M$  не превышает 2, минимально необходимое количество некоррелированных точек было оценено как  $42^2 = 1764$ . С учётом этой оценки, корреляционный показатель  $\nu$  рассчитывался для исходной системы по 10000 некоррелированных точек, и составил  $\nu = 1,69$ , а для упрощённой системы – по 4000 точек, и составил  $\nu = 1,4$  при использовании функции (12),  $\nu = 1,65$  при использовании функции (13), и, наконец,  $\nu = 1,72$  при использовании функции (14).



**Рис. 11. Отображение  $\pi_s(z)$**

Одномерное отображение  $z \rightarrow z$  на линии  $\Sigma$  (для участка  $z > z_f$ ) для исходной системы (сплошная линия), для системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  в варианте с функцией (7) (штриховая линия), в варианте с функцией (13) (штрих-пунктирная линия) и с функцией (14) (пунктирная линия).

Экспериментальные графики одномерного отображения  $\pi_s(z)$  показаны на рис. 11. Как и следовало ожидать, лучше всего исходная система аппроксимируется системой (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  в варианте с функцией (7) – от нуля до точки разрыва  $z_D$  графики совпадают. Систему с функцией (13) также можно считать хорошей аппроксимацией. Для исходной системы, для системы (10)– $\mathbf{J}_0$ –(11)– $\mathbf{J}_1$  в варианте с функцией (7), с функцией (13), и с функцией (14), соответственно, максимальные значения  $\pi_s$  равны 0,42, 0,43, 0,46 и 0,49, координаты точки разрыва  $z_D$  – 0,033, 0,034, 0,030 и 0,024, а координаты точки разрыва производной  $z_H$  – 0,123, 0,088, 0,086 и 0,081.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен пример анализа нелинейной задачи методом русел и джокеров, заключающемся в замене системы дифференциальных

уравнений совокупностью систем уменьшенной размерности и простых алгоритмических правил (детерминированных или вероятностных).

Исходная задача представляет собой математическую модель сосредоточенной экосистемы, образованной популяциями трёх видов (жертва, хищник, суперхищник), составляющих пищевую цепь (модель Розенцвейга-Макартура). Модель имеет вид системы трёх нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с тремя неизвестными (численности популяций).

В качестве предмета для изучения, из всего многообразия динамических режимов модели, выбран режим шильниковского хаоса, для возникновения которого требуется, в частности, чтобы характерные времена популяционной динамики хищников и суперхищников совпадали по порядку величины (массы тел хищника и суперхищника сравнимы). При этом, характерное время популяционной динамики жертв сравнительно мало, то есть, система является сингулярно возмущённой (содержащей малый параметр в виде множителя при одной из производных).

В фазовом пространстве исследуемой системы, работающей в выбранном режиме, выделяются зоны медленной и быстрой динамики (описан ряд методов определения пространственной конфигурации таких зон). В зонах медленной динамики фазовая точка проводит наибольшую часть времени. По этой причине было предложено выбрать зоны медленной динамики в качестве русел, а зоны быстрой динамики (вместе с областями перехода от одного типа динамики к другому) заменить джокерами.

Для описания медленной динамики было предложено использовать вырожденную систему, что позволило исключить из рассмотрения одну из переменных (численность жертв), понизив тем самым размерность модели. Это привело к разделению исходной системы на две различные более простые системы, описывающие динамику в двух различных зонах медленного движения. Кроме того, были дополнительно исследованы два варианта дальнейшего упрощения одного из русел, связанные с рассмотрением первого и нулевого приближений функции, описывающей поверхность медленного движения.

Быстрое движение имеет место при переходе между непересекающимися зонами медленной динамики, поэтому действие соответствующего джокера заключается в мгновенном перемещении вошедшей в область джокера фазовой точки из одного русла в другое. Поскольку быстрое движение, в основном, связано с резким изменением численности жертв, постольку было предложено пренебречь сопутствующим изменением численностей остальных популяций. Кроме того, численность жертв – скрытая переменная (не входящая в систему с уменьшенной размерностью), поэтому считается, что в результате срабатывания джокеров происходит только изменение закона движения (соответствующее смене русла), без перемещения в фазовом пространстве. Следовательно, не требуется введения каких-либо вероятностных правил, определяющих положение фазовой точки после срабатывания джокера. Таким образом, предложен новый тип джокера – «шов», срабатывание которого приводит не к перемещению фазовой точки, но к изменению поля фазовых скоростей.

Конфигурация одной из областей джокеров определяется конфигурацией линии срыва в вырожденной системе, и область джокера (в пределе, при малом параметре, стремящемся к нулю) представляет собой полупрямую. Конфигурация другой области джокера приближённо (тем точнее, чем меньше малый параметр) определяется уравнением, аналитическое решение которого неизвестно. Для простоты, было предложено также использовать конфигурацию в виде полупрямой. Другой возможный путь – использование таблично заданной функции (таблица строится заранее, с использованием численного решения уравнения или результата применения какого-либо сглаживающего алгоритма к экспериментально определённым точкам срыва или падения).

Важной особенностью джокеров типа «шов» является то, что для системы с джокером данного типа может быть использовано общепринятое определение ляпуновского характеристического показателя; при этом, для вычисления показателей достаточно простой модификации стандартного алгоритма.

Сравнение исходной системы и различных вариантов системы русел и джокеров проводилось по следующим характеристикам: значения ляпуновских характеристических показателей, автокорреляции численностей хищников и суперхищников, корреляционные интегралы, а также функции одномерного отображения на области одного из джокеров. Различия таких характеристик, как автокорреляции и локальные максимумы одномерных отображений можно считать незначительными. По прочим характеристикам наблюдается более существенное расхождение, однако, в общем и целом, можно считать, что система русел и джокеров аппроксимирует исходную систему с приемлемой точностью.

Итак, на основе сингулярно возмущённой системы нелинейных дифференциальных уравнений можно построить упрощённую систему пониженной размерности – систему русел и джокеров. Предлагается выбор участков медленного движения в качестве русел, а участков быстрого движения – в качестве джокеров. Целесообразна замена джокерами участков сложного поведения, причиной которого может быть проявление воздействия скрытых или подчинённых переменных. При этом, характеры поведения исходной упрощённой системы будут похожи (с той или иной степенью точности).

Показано, что при понижении размерности системы для воспроизведения эффекта действия скрытой переменной (как правило, имеющей место в случаях, когда моделируемая система плохо формализуема, или часть её показателей недоступна для измерения, как, например, в экономике, или в социологии) имеет смысл использовать джокер нового типа – «шов», при срабатывании не перемещающий (или не только перемещающий) фазовую точку, но меняющий закон её движения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. Джокеры, русла или поиски третьей парадигмы. «Знание – Сила», № 3/1998.
2. Т. Постон, И. Стюарт. Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980.

3. Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002.
4. И.В. Андрианов, Р.Г. Баранцев, Л.И. Маневич. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. М.: УРСС, 2004.
5. А.Н. Тихонов. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. Избранные труды А.Н. Тихонова. М.: МАКС Пресс, 2001.
6. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
7. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
8. Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
9. B. Rossetto, J.-M. Ginoux. Singular Manifolds and Attractors Structure in Predator-Prey models. Université du Sud Toulon-Var, France.  
[rossetto.univ-tln.fr/Recents/Singular%20Manifolds.pdf](http://rossetto.univ-tln.fr/Recents/Singular%20Manifolds.pdf).
10. B. Rossetto, T. Lenzini, S. Ramdani, G. Suchey. Slow-Fast Autonomous Dynamical Systems. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, № 11 (1998).
11. S. Ramdani, B. Rossetto, L.O. Chua, R. Lozi. Slow Manifolds of Some Chaotic Systems with Applications to Laser Systems. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 10, № 12 (2000).
12. Г.Ю. Ризниченко. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
13. B. Deng. Food chain chaos due to junction-fold point. Chaos, Vol. 11, № 3 (September 2001).
14. B. Deng, G. Hines. Food chain chaos due to Shilnikov's orbit. Chaos, Vol. 12, № 3 (2002).
15. B. Deng, G. Hines. Food chain chaos due to transcritical point. Chaos, Vol. 13 Volume 13, № 2, (June 2003).
16. B. Deng. Food chain chaos with canard explosion. Chaos, Vol. 14, № 4 (December 2004)
17. Л.П. Шильников. Об одном случае существования счётного множества периодических движений. Доклады АН СССР, 1965, том 160, №3.
18. Л.П. Шильников. О существовании счётного множества периодических движений в четырёхмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса. Доклады АН СССР, 1967, том 172, №1.
19. Л.П. Шильников. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус. Математический сборник, 1970, том 81, №1.
20. С.П. Кузнецов. Динамический хаос. М.: Физматгиз, 2001.
21. Дж. Гукенхеймер, П. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.: УРСС, 2002.
22. Дж. Сорос. Алхимия финансов. М.: Инфра-М, 1996.
23. Л.В. Белайчук, Г.Г. Малинецкий. Прodelки джокеров на одномерных отображениях. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1997, № 24.
24. Д.С. Чернавский. Синергетика и информация (динамическая теория информации). М.: УРСС, 2004.
25. Я.Г. Синай, Л.П. Шильников (ред.). Странные аттракторы (сборник статей, пер. с англ.). М.: Мир, 1981.
26. А.Д. Базыкин. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
27. Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.