РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Москва, 2006 г.

УДК 517.91

А.Д. Брюно. О подвижных особых точках решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение весьма общего вида. Оно обладает свойством Пенлеве, если его решения не имеют подвижных критических точек. Здесь сравниваются два способа анализа уравнения на свойство Пенлеве: способ, основанный на алгоритмах степенной геометрии, и способ, основанный на методе малого параметра.

A.D. Bruno. On movable singular points of solutions to the ordinary differential equations. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2006.

We consider an ordinary differential equation of a very general form. It has the Painleve property, if its solutions have not movable critical points. Here we compare two methods of the analysis of an equation on the Painleve property: one based on algorithms of Power Geometry and another based on the small parameter approach.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050) и программы "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики" Президиума РАН.

E-mail: bruno@keldysh.ru

Сайт: www.keldysh.ru/электронная библиотека/
Каталог публикаций сотрудников ИПМ/препринт/

Введение

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(w^{(n)}, w^{(n-1)}, \dots, w', w, z) = 0, \tag{1}$$

где f — многочлен от указанных аргументов. В препринте [1], статьях [2–4] и в обзорной статье [5] изложены методы степенной геометрии, позволяющие алгоритмически находить при $z \to 0$ или $z \to \infty$ все асмптотические разложения

$$w = c_r z^r + \sum_s c_s z^s \tag{2}$$

решений уравнения (1), где r и s — комплексные числа; $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r$ при $z \to 0$ и $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} r$ при $z \to \infty$; c_r — комплексная постоянная, c_s — многочлены от $\ln z$; а также — все нестепенные асимптотики

$$w \sim \varphi_r z^r, \tag{3}$$

где φ_r — ряд по убывающим степеням логарифмов, может быть кратных.

Для этого по уравнению (1) вычисляется его носитель $\mathbf{S}(f)$, т.е. множество векторных показателей степеней его мономов. С помощью многоугольника $\Gamma(f)$, который является выпуклой оболочкой носителя $\mathbf{S}(f)$, находятся все укороченные уравнения $\hat{f}_j^{(d)} = 0$ и их нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если разложение (2) удовлетворяет уравнению (1), то его первый член $w = c_r z^r$ удовлетворяет укороченному уравнению $\hat{f}_j^{(d)} = 0$, если вектор $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, где $\omega = -1$ при $z \to 0$ и $\omega = 1$ при $z \to \infty$. Это справедливо и для разложений с первым членом (3). После нахождения первого члена разложения (2) по укороченному уравнению вычисляются его критические числа. По носителю $\mathbf{S}(f)$ уравнения (1), показателю r и критическим числам вычисляется носитель разложения (2), т.е. множество показателей s. Затем вычисляются коэффициенты c_s. Все это делается алгоритмически.

Этот подход был применен для изучения решений уравнений Пенлеве и их аналогов [6] вблизи их особых точек.

Для уравнений вида (1) пенлеве-анализом называется выяснение наличия у решений уравнения (1) подвижных особых точек, в том числе — критических. Его можно делать с помощью указанных алгоритмов степенной геометрии. Для этого надо рассмотреть уравнение (1) вблизи его произвольной простой точки z_0 и найти при $z - z_0 \to 0$ все асимптотические разложения и все нестепенные асимптотики (3). Если все разложения (2) являются рядами Лорана, т.е. содержат лишь целые степени $z - z_0$ и не содержат логарифмов, а нестепенные асимптотики (3) отсутствуют, то решения уравнения (1) не имеют подвижных критических точек, т.е. уравнение (1) обладает свойством Пенлеве. Для шестого уравнения Пенлеве эта программа осуществлена в препринте [7].

С другой стороны, недавно вышла книга [8], в которой для частных видов уравнения (1) проводится Пенлеве-анализ с помощью предложенной ее автором модификации метода малого параметра. Классический метод малого параметра [9, гл. III, §§ 2–4] заключается в следующем. В уравнение (1) так вводится малый параметр α с помощью замены переменных

$$w = \eta(v, \alpha), \quad z = \xi(x, \alpha),$$

что оно принимает вид

$$v^{(n)} = g(v^{(n-1)}, \ldots, v', v, z, \alpha) \tag{4}$$

или приводится к системе

$$V' = G(V, z, \alpha),$$

где функция g и вектор-функция G аналитичны вблизи некоторй точки $V = V_0$, $z = z_0$, $\alpha = 0$. При $\alpha = 0$ из (4) получается *упрощенное* уравнение

$$v^{(n)} = g(v^{(n-1)}, \ldots, v', v, z, 0) \tag{5}$$

По свойствам решения $v = \varphi_0(x)$ упрощенного уравнения (5) делается вывод о свойствах решения полного уравнения (4). Правомерность такого вывода обосновывается с помощью разложения

$$v = \varphi_0(x) + \sum_{s>0} \varphi_s(x)\alpha^s \tag{6}$$

решений уравнения (4) по степеням малого параметра, где $v = \varphi_0(x)$ — решение упрощенного уравнения (5).

Модификация метода малого параметра, предложенная в [8], не требует разрешимости полученного уравнения относительно старшей производной; более того — в ней допускается малый параметр при старшей производной. В остальном эта модификация аналогична классическому методу. А именно, в уравнение (1) вводится малый параметр, получается уравнение

$$h(v^{(n)}, v^{(n-1)}, \ldots, v', v, z, \alpha) = 0.$$

При $\alpha = 0$ оно дает *упрощенное* уравнение

$$h(v^{(n)}, v^{(n-1)}, \dots, v', v, z, 0) = 0.$$

Затем решение $v = \varphi_0(z)$ упрощенного уравнения продолжается по малому параметру α в виде разложения (6). Основой этой модификации является теорема 2.3 [8]. Однако эта теорема ошибочна (см. ниже замечание 10). Таким образом, оказываются необоснованными многие выводы книги [8] о существовании при $\alpha \neq 0$ решений преобразованного уравнения, т.е. уравнения (1), с теми же свойствами, которыми обладает решение $v = \varphi_0(x)$ упрощенного уравнения. А само это решение $v = \varphi_0(x)$ не является решением исходного уравнения (1).

Иногда упрощенное уравнение совпадает с укороченным уравнением. В этих случаях иногда разложение решения по малому параметру может совпадать с его асимптотическим разложением, но зачастую они различны и асимптотическое разложение сложнее разложения по малому параметру.

Ниже проводится сравнение методов анализа книги [8] и статьи [5] в форме замечаний.

§ 1. Общие замечания

1. Иногда упрощенное уравнение книги [8] является укороченным уравнением из [5]. Но укороченное уравнение получается по определенному алгоритму, а упрощенное уравнение получается с помощью введения малого параметра. Каждый раз это введение малого параметра осуществляется по-своему, а общего алгоритма его введения в книге не предложено, т.е. это искусство, а не алгоритм. Кроме того, при введении новой независимой переменной дифференцирование по ней надо бы отличать от дифференцирования по старой независимой переменной. Например, обозначать точкой сверху. В книге [8] это не делается (аналогично книге [9]).

2. В книге [8] отсутствует такое понятие из [5] как "нормальный конус укороченного уравнения". Из-за этого в случаях, когда укороченное уравнение соответствует вершине, выводы книги [8] о наличии подвижных особенностей решений не всегда правильны (см. ниже замечание 5). Аналогично для "конуса задачи" (см. замечание 14).

3. Как правило, в книге [8] пенлеве-анализ проводится только для одного укороченного уравнения, соответствующего определенному левому ребру многоугольника уравнения. Остальные укороченные уравнения, соответствующие другим левым ребрам и левым вершинам, не исследуются. Хотя им также могут соответствовать подвижные особенности.

4. В книге [8] не показано, как с помощоью ее методов провести пенлеве-анализ уравнений Пенлеве. Возникают сомнения в достаточности этих методов для такого анализа, а также — для пенлеве-анализа высших аналогов уравнений Пенлеве [6].

§ 2. Конкретные замечания

5. В примере 1.5 на стр. 17–18 [8] рассматривается уравнение

$$w^2 w''' - a(z) w'^3 - F(w', w, z) = 0, \tag{7}$$

где $a(z_0) \neq 0$, F — полином по w, w' не выше второй степени по w'. Это уравнение имеет укороченное уравнение

$$w^2 w''' - a(z_0) w'^3 = 0, \tag{8}$$

соответствующее вершине $Q_1 = (-3, 3)$ и совпадающее с упрощенным в книге [8]. В примере 1.5 [8] правильно указано, что характеристическое уравнение для (8) имеет хотя бы один нецелый корень s_1, и отсюда делается вывод, что уравнение (7) имеет решения вида

$$w = c(z - z_0)^{s_1} + \dots \tag{9}$$

с критическими подвижными особенностями. Но если в уравнении (7) $F = \text{const} \neq 0$, то укороченное уравнение (8) имеет нормальный конус

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) : \; -p_1 + p_2 > 0\}$$

вершины Q_1. На рис. 1 показан многоугольник Γ для такого уравнения (7), а на рис. 2 — нормальные конусы его граней. Согласно [5], если вектор $-(1, s_1)$ не лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_1^{(1)}$, т.е. $s_1 > 1$, то уравнение (7) не имеет решений вида (4). Поэтому наличие нецелого корня s_1 еще не гарантирует существование у уравнения (7) решений с подвижными критическими точками. Для доказательства их существования нужен боле глубокий анализ.

6. В примере 1.6 на стр. 18 [8] в уравнении $w'' = ww' + a(z)w$ делается замена $w = \alpha^{-1} v$ и $z = z_0 + \alpha x$. После умножения на α^3 получается уравнение

$$d^2 v/dx^2 = v\, dv/dx + \alpha^2 a(z_0 + \alpha x) v.$$

А в примере вместо α^2 ошибочно стоит α. Поэтому в результате дальнейшей замены $v = -2/(x+C)+\alpha u$ получается однородное упрощенное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2}{x+C}\frac{du}{dx} + \frac{2u}{(x+C)^2},$$

решения которого не имеют подвижных критических особенностей, а не неоднородное уравнение, выписанное в книге.

7. В примере 1.7 на стр. 18–19 [8] рассматривается уравнение

$$w'' - 6w^2 - aw' - z = 0. \tag{10}$$

Для его решений $w(z)$, соответствующих укороченному уравнению $w'' - 6w^2 = 0$, ищутся разложения в ряд Лорана

$$w = w_{-2}(z-z_0)^{-2} + w_{-1}(z-z_0)^{-1} + w_0 + w_1(z-z_0) + \ldots \tag{11}$$

При этом посередине стр. 19 [8] для коэффициентов w_r выписывается уравнение

$$r(r-1)w_r = 12w_{-2}w_r + a(r-1)w_{r-1}, \tag{12}$$

где $w_{-2} = 1$. Это неправильно: уравнение для w_r имеет вид

$$r(r-1)w_r = 12w_{-2}w_r + b_r, \tag{13}$$

где b_r — многочлен от всех w_s с $s < r$. Из неправильного уравнения (12) делается вывод, что при $r = 4$ уравнение (12) удовлетворяется только при $a = 0$, т.е. при $a \neq 0$ разложение (11) имеет член с логарифмом: $w_4(z-z_0)^4 \ln(z-z_0)$. На самом деле, для такого вывода надо по уравнению (13) убедиться, что условие совместности $b_4 = 0$ не выполнено. В частности, для аналогичного (10) уравнения

$$w'' - 6w^2 - aw' = 0$$

условие совместности $b_4 = 0$ выполнено при $a = 6$.

8. Уравнение (2.3) на стр. 25 [8]

$$w'''w - 3w''w' + a(w'^2w - 2w''w) = 0 \tag{14}$$

не является барьерным в соответствии с определением 2.3 на стр. 47 [8].

В терминах статьи [5] это определение формулируется так. Уравнение

$$w^{(n)} = P(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w', w, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z, w), \tag{15}$$

где P — многочлен от своих аргументов, называется *барьерным*, если его носитель лежит на одной прямой с нормальным вектором $N = (1, r)$ и его определяющее уравнение

$$r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1) = f(z, cz^r)/c, \tag{16}$$

где $f(z, cz^r)$ — это многочлен P, в который подставлено $w = cz^r$, имеет только бесконечные корни c, т.е. в многочлене по c

$$f(z, cz^r)/c \tag{17}$$

все коэффициенты при степенях c равны нулю.

В уравнении (14) векторные показатели степени $Q = (q_1, q_2)$ мономов суть

$$(-4, 1),\ \ (-3, 2),\ \ (-3, 2),\ \ (-2, 3),\ \ (-2, 2).$$

Первые четыре точки Q лежат на прямой $q_1 - q_2 = -5$, т.е. $r = -1$. Но для пятой точки Q имеем $q_1 - q_2 = -4$, т.е. она не лежит на прямой $q_1 - q_2 = -5$. Если считать, что в показателе степени последнего слагаемого имеется опечатка, и что этот член есть $-a2w''w^2$, то его векторный показатель $Q_4 = (-2, 3)$ и $q_1 - q_2 = -5$, т.е. носитель уравнения (14) расположен на прямой $q_1 - q_2 = -5$. Теперь сделаем в правую часть уравнения (14) подстановку $w = cz^r$, т.е. $w = cz^{-1}$, и вычислим многочлен (17). Получаем

$$f(z, cz^{-1}) = ac^3(1 - 2 \cdot 2) = -3ac^3 \not\equiv 0.$$

Уравнение (14) будет барьерным, если выражение в скобках с множителем a заменить на $a(2w'^2 w - w''w^2)$.

9. На стр. 26 [8] рассматривается уравнение

$$w''' = ww'' - 2w'^2. \tag{18}$$

Заменой

$$z = z_0 + e^{x/\alpha},\ \ w = \alpha^{-2}v/(z - z_0)$$

оно приводится к уравнению

$$0 = vv' + \alpha(vv'' - 2v'^2 + 6v) - 11\alpha^2 v' + 6\alpha^3 v'' - \alpha^4 v''.$$

Упрощенное уравнение $vv' = 0$ имеет решение $v = 1$. Ему соответствует разложение решения по степеням α:

$$v = 1 - 6x\alpha + 6x\alpha^3 + 18x^2\alpha^4 + O(\alpha^5).$$

Далее, на основании (ошибочной) теоремы 2.3. автор делает вывод, что уравнение (18) имеет решение вида

$$w = \alpha^{-2}(z-z_0)^{-1} - 6\ln(z-z_0)(z-z_0)^{-1} + O(\alpha).$$

Покажем, как исследуется уравнение (18) методами степенной геометрии. Носитель уравнения (18) лежит на прямой $q_1 - q_2 = -4$ (см. рис. 3). Многоугольник уравнения Γ является наклонным ребром. Поэтому согласно п. 5.3 [5] делаем в уравнении (18) степенное преобразование $w = y/z$ и получаем уравнение

$$z^3y''' - 3z^2y'' + 6zy' - 6y = yz^2y'' + 2yzy' - 2z^2y'^2 \tag{19}$$

с вертикальным носителем. Теперь согласно п. 5.2 [5] в уравнении (19) делаем логарифмическое преобразование $\ln\, z = t$. Получаем уравнение

$$\dddot{y} - 6\ddot{y} + 11\dot{y} - 6y = y\ddot{y} + y\dot{y} - 2\dot{y}^2. \tag{20}$$

Его носитель и многоугольник Γ показаны на рис. 4. Поскольку $t = \ln\, z \to \infty$ при $z \to 0$, то ищем решения уравнения (20) при $t \to \infty$, т.е. $p_1 > 0$. Согласно рис. 4 многоугольник имеет правое наклонное ребро, которому соответствует укороченное уравнение

$$-6y = y\dot{y}.$$

Оно имеет подходящее решение $y = -6t$. Если теперь по технике § 3 [5] построить соответствующее разложение решений уравнения (20) по убывающим степеням t, то получим

$$y = -6t - \ln\, t + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\ln t)t^n, \tag{21}$$

где C_0 — произвольная постоянная, а c_n — многочлен от $\ln t$ степени n. Разложению (21) в исходном уравнении (18) соответствует разложение

$$w \sim \frac{\ln(z-z_0)}{z-z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} a_{jk} \frac{(\ln\, \ln(z-z_0))^k}{(\ln(z-z_0))^j}, \tag{22}$$

выписанное на стр. 25 [8]. При этом не похоже, что уравнение (18) имеет решение, разложение которого не содержит двукратного логарифма. Из разложений (21) и (22) следует существование подвижных критических особенностей у решений уравнения (18).

10. Теорема 2.3 на стр. 34 [8] не верна. Вот эта теорема в слегка упрощенном виде. Рассмотрим уравнение

$$F(w^{(n)}, w^{(n-1)}, \ldots, w', w, z, \alpha) = 0, \tag{23}$$

где α — малый параметр и F — многочлен от своих аргументов. При $\alpha = 0$ получаем упрощенное уравнение

$$F(w^{(n)}, w^{(n-1)}, \ldots, w', w, z, 0) = 0. \tag{24}$$

Пусть $w = \varphi(z)$ — аналитическое в некоторой окрестности U точки z_0 решение упрощенного уравнения (24). Если на решении $w = \varphi(z)$ производная $\partial F / \partial w^{(n)} \not\equiv 0$ при $\alpha = 0$, то решение $w = \varphi(z)$ называется регулярным относительно уравнения (23).

Теорема 2.3. *Пусть решение $w = \varphi(z)$ упрощенного уравнения* (24) *является регулярным относительно* (23). *Тогда для всякого сколь угодно большого положительного рационального K существует замкнутое подмножество S комплексной плоскости, содержащее* 0 *в качестве предельной точки, подобласть $U_1 \subset U$ и непрерывная на множестве $U_1 \times S$ аналитическая по z функция $\phi(z, \alpha)$, удовлетворяющая уравнению* (23) *при всех $\alpha \in S$ и такая, что $\phi(z, 0) = \varphi(z)$ и $\phi(z, \alpha) = \phi_0(z, \alpha) + \alpha^K \tilde{\phi}(z, \alpha)$. Здесь ϕ_0 — полином по некоторой рациональной степени α с аналитическими по z в области U_1 коэффициентами, а $\tilde{\phi}(z, \alpha)$ — непрерывная на множестве $U_1 \times S$ аналитическая по z функция.*

Контрпример: пусть уравнение (23) есть

$$F \stackrel{\text{def}}{=} w'z - w + 1 - \alpha z = 0. \tag{25}$$

Упрощенное уравнение $w'z - w + 1 = 0$ имеет регулярные решения $w = 1 + cz$, где c — произвольная постоянная, которые аналитичны вблизи $z_0 = 0$, а полное уравнение (25) имеет решения $w = 1 + cz + \alpha z \ln z$ неаналитические вблизи $z_0 = 0$. При этом все условия теоремы 2.3 выполнены.

11. Для уравнения (2.27) на стр. 46 [8]

$$w^{(n)} = \sum_{\chi \in S} a_\chi (w^{(n-1)})^{\chi_{n-1}} (w^{(n-2)})^{\chi_{n-2}} \ldots (w')^{\chi_1} (w)^{\chi_0}, \tag{26}$$

где a_χ — ненулевые комплексные числа, S — непустое множество кортежей $\chi = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1})$ рациональных чисел. Приписываемые каждому моному числа $\nu(\chi) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} j\chi_j$ и $|\chi| = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \chi_j$ совпадают соответственно с $-q_1$ и q_2, где вектор $Q = (q_1, q_2)$ — векторный показатель степени монома [5]. Следовательно, книга [8] близко подошла к степенной геометрии.

12. На стр. 47 [8] сформулирована

Теорема 2.4. *Если уравнение* (15) *является барьерным, то его решения допускают подвижные критические особые точки.*

Определение барьерного уравнения приведено в замечании 8. Оно означает, что определяющее уравнение (16) имеет только бесконечные корни, т.е. многочлен (17) тождественно равен нулю. На самом деле, для справедливости теоремы 2.4 [8] достаточно одного бесконечного корня определяющего уравнения (16), т.е. обращение в ноль коэффициента при старшей степени c, что равносильно выполнению равенства (2.29) [8] только для максимального d, а не для всех $d > 1$, как требуется в теореме 2.4. Этот результат легко выводится из пп. 5.2 и 5.3 [5] с помощью описанных там степенного и логарифмического преобразований (ср. замечание 9).

13. В п. 4.2.1 на стр. 65–68 [8] рассматривается уравнение вида (15) или (26), для которого выводится $\Theta = \max \nu(\chi)$ по всем $\chi \in S$, и доказываются две теоремы:

Теорема 4.1. *Решения нелинейных уравнений* (15) *всегда допускают неподвижные особые точки.*

Теорема 4.2. *Если нелинейное уравнение* (26) *обладает свойством Пенлеве, то* $\Theta < n$ *и у его упрощенного уравнения вида* (14) *для всех мономов выполняется равенство* $\nu(\chi) + B|\chi| = n + 1$, *где число* B *— целое (число Бюро).*

Эти результаты легко выводятся методами степенной геометрии, ибо при $\Theta < n$ определяющее уравнение, т.е. уравнение (16) всегда имеет хотя бы один корень (конечный или бесконечный). А при $\Theta \geq n$ можно применить степенное и логарифмическое преобразования как в пп. 5.2 и 5.3 из [5]. Но доказательство в книге [8] для случая $\Theta > n$ ошибочно. Посередине стр. 67 [8] для мономов уравнения (14) определены величины

$$\nu_j(\chi) = \sum_{i=1}^{n-1-j} i\chi_{i+j}, \quad \Theta_j = \max_{\chi \in S} \nu_j(\chi), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$m = \max_{\Theta_j \geq n-j} \{j\}.$$

Затем в случае $\Theta_m = n - m$ упрощенное уравнение строится по тем мономам, на которых выполняется это равенство. Это неправильно. Можно построить примеры, когда упрощенное уравнение, указанное в книге [8], не является укороченным уравнением и не определяет локальное поведение решений исходного уравнения. Например, рассмотрим уравнение

$$w^{(6)} = (w^{(5)})^2 w' + (w^{(4)})^3. \tag{27}$$

Здесь $n = 6$. Обозначим $a_1 = (w^{(5)})^2 w'$, $a_2 = (w^{(4)})^3$. Тогда $\chi(a_1) = (0, 1, 0, 0, 0, 2)$, $\chi(a_2) = (0, 0, 0, 0, 3, 0)$. $|\chi(a_1)| = 3 = |\chi(a_2)|$, $\nu(a_1) = 11$,

$\nu(a_2) = 12$. При $j = 0, \ldots, 5$ значения $\nu(a_1)$, $\nu(a_2)$, $\Theta_j = \max_i \nu_j(a_i)$ и $n - j$ представлены в таблице.

j	$\nu_j(a_1)$	$\nu_j(a_2)$	Θ_j	$n-j$
0	11	12	12	6
1	8	9	9	5
2	6	6	6	4
3	4	3	4	3
4	2	0	2	2
5	0	0	0	1

Из таблицы видно, что $m = 4$, ибо $\Theta_4 = 2 = n - 4$. Но $\nu_4(a_1) = 2$, а $\nu_4(a_2) = 0$. Поэтому процедура книги [8] выделяет упрощенное уравнение $w^{(6)} = a_1$, хотя правильное укороченное уравнение здесь $w^{(6)} = a_2$. Носитель и многоугольник уравнения (27) показаны на рис. 5. На самом деле, здесь у многоугольника уравнения (4.3) [8] надо выделять левое ребро, примыкающее к точке $(-n, 1)$, соответствующей моному $w^{(n)}$.

14. Уравнение Эйлера (4.9) на стр. 69 [8] — это уравнение $\mathcal{L}(x)u = 0$ из [5], которое в степенной геометрии вычисляется через первую вариацию укороченного уравнения на укороченном решении $w = cz^r$. А корни ρ уравнения (4.10) в [8] — это собственные числа решения $w = cz^r$ в [5]. При этом для отсутствия критических особых точек такие ограничения как целочисленность и некратность корней ρ нужны только для ρ с $\operatorname{Re}\rho > -B$, что в книге не оговаривается. Такие ρ в [5] названы "критическими числами".

15. На стр. 74 [8] опять вводятся $\nu_j(\chi)$, а также $|\chi|_j$ и Θ_j. Этих усложнений можно избежать, если пользоваться таким понятием степенной геометрии как "многоугольник уравнения". Аналогично на стр. 92 [8].

Литература

1. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт N 9. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2003. 39 с.

2. Брюно А.Д. Степенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. Т. 392. N 3. С. 295–300.

3. Брюно А.Д. Степенно-логарифмические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. Т. 392. N 4. С. 439–444.

4. Брюно А.Д. Нестепенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. Т. 392. N 5. С. 586–591.

5. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. наук, 2004, т. 59, N 3, с. 31–80.

6. Брюно А.Д., Кудряшов Н.А. Степенныые разложения решений аналога первого уравнения Пенлеве. Препринт N 17. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 25 с.

7. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи регулярной точки. Препринт N 4. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 19 с.

8. Соболевский С.Л. Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, БГУ, 2000. 120 с.

9. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциалных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 436 с.