РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно и В.Ю. Петрович

ДЕСИНГУЛЯРИЗАЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Москва, 2006 г.

УДК 521.1+531.314

А.Д. Брюно, В.Ю. Петрович. Десингуляризации ограниченной задачи трех тел. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006.

Рассматривается плоская круговая ограниченная задача трех тел при малых значениях отношения масс μ. Невозмущенная задача (т.е. задача двух тел во вращающейся системе координат) имеет сингулярные возмущения, связанные с телом массы μ, вблизи этого тела и вблизи семейства неподвижных точек. В работе выделяются первые приближения уравнений вблизи этих особенностей и предлагаются замены координат, которые преобразуют эти первые приближения в невозмущенные системы.

A.D. Bruno, V. Yu. Petrovich. Desingularizations of the restricted three-body problem. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2006.

We consider the planar circular restricted three-body problem for small values of the mass ratio μ. Unperturbed problem (i.e. the two-body problem in the rotating frame) has singular perturbations, related with the body with mass μ, near the body and near a family of stationary points. Here we select the first approximations of the system near these singularities and propose the changes of coordinates which transform the first approximations into unperturbed systems.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050) и программы "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики"Президиума РАН.

E-mail: bruno@keldysh.ru

Сайт: www.keldysh.ru/электронная библиотека/
Каталог публикаций сотрудников ИПМ/препринт/

Введение

Пусть два тела $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ с массами $1-\mu$ и μ соответственно вращаются по круговым орбитам вокруг их общего центра масс с периодм T. Плоская круговая ограниченная задача трех тел состоит в исследовании плоского движения тела $\mathbf{P}_3$ бесконечно малой массы под действием ньютонова притяжения тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Во вращающейся (синодической) стандартизованной системе координат задача описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы

$$\dot{x}_j = \partial H/\partial y_j, \;\; \dot{y}_j = -\partial H/\partial x_j, \;\; j = 1, 2 \tag{1}$$

и одним параметром μ. Функция Гамильтона имеет вид [1]

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1-\mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}} + \mu x_1. \tag{2}$$

Здесь тело $\mathbf{P}_1 = \{X, Y : x_1 = x_2 = 0\}$ и тело $\mathbf{P}_2 = \{X, Y : x_1 = 1, \; x_2 = 0\}$. Рассмотрим малые значения отношения масс μ.

Для $\mu = 0$ задача становится задачей двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$. Но здесь нужно удалить из фазового пространства точки, соответствующие столкновениям тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$. Точки столкновения расщепляют решения задачи двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$ на части.

Для малых $\mu > 0$ вблизи тела $\mathbf{P}_2$ имеется сингулярное возмущение случая $\mu = 0$. При $\mu \to +0$ объекты ограниченной задачи (1), (2) в координатах x_j, y_j стремятся к предельным положениям. При этом для некоторых объектов предельные положения имеют меньшую размерность, чем допредельные. В этом и проявляется сингулярные возмущения. Чтобы устранить сингулярность возмущения при $\mu > 0$, надо вводить новые (зависящие от μ) координаты, в которых размерность предельного объекта равна размерности допредельного. При этом в качестве предельной получается задача, соответствующая первому приближению сингулярного возмущения. Введение таких координат мы называем *десингуляризацией*. Известный пример десингуляризации — это лунная задача Хилла [3], которая описывает движение Луны вблизи Земли и учитывает влияние Солнца. Задача Хилла получается из ограниченной задачи (1), (2) введением координат $\tilde{\xi}_i$ и $\tilde{\eta}_i$ по формулам

$$x_1 = 1 + \mu^{1/3}\tilde{\xi}_1, \;\; x_2 = \mu^{1/3}\tilde{\xi}_2, \;\; y_1 = \mu^{1/3}\tilde{\eta}_1, \;\; y_2 = 1 + \mu^{1/3}\tilde{\eta}_2. \tag{3}$$

При $\mu \to 0$ в координатах $\tilde{\xi}_j$, $\tilde{\eta}_j$ получается предельная задача

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{\xi}}_j = \partial\Omega/\partial\tilde{\eta}_j, \;\; \dot{\tilde{\eta}}_j = -\partial\Omega/\partial\tilde{\xi}_j, \;\; j = 1, 2, \\ \Omega = \frac{1}{2}(\tilde{\eta}_1^2 + \tilde{\eta}_2^2) + \tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_1 - \tilde{\xi}_1\tilde{\eta}_2 - \tilde{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\xi}_2^2 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2}}. \end{gathered} \tag{4}$$

А в исходных координатах x_j, y_j при $\mu \to 0$ в пределе получаем только точку $x_1 = y_2 = 1$, $x_2 = y_1 = 0$.

Здесь рассмотрим другие десингуляризации ограниченной задачи (1), (2) вблизи тела $\mathbf{P}_2$ (§ 1) и вблизи окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$, но вдали от тела $\mathbf{P}_2$ (§ 2), т.е. вблизи разорванной окружности.

§ 1. Окрестность тела $\mathbf{P}_1$

Для того чтобы найти все первые приближения ограниченной задачи трех тел вблизи тела $\mathbf{P}_2$, нужно ввести локальные координаты

$$\xi_1 = x_1 - 1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - 1$$

и разложить функцию Гамильтона по этим координатам. После разложения $1/\sqrt{(\xi_1+1)^2 + \xi_2^2}$ в ряд Маклорена функция Гамильтона (2) примет вид

$$\begin{gathered} h + \frac{3}{2} - 2\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 + \\ + f(\xi_1, \xi_2^2) + \mu\left\{\xi_1^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} - f(\xi_1, \xi_2^2)\right\}, \end{gathered} \tag{5}$$

где f — сходящийся степенной ряд, не содержащий членов порядка меньше трех. Согласно [2] носитель $\mathbf{S}_1$ ряда в правой части (5) состоит из точек $R = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = (\operatorname{ord}\xi_1, \operatorname{ord}\xi_2, \operatorname{ord}\eta_1, \operatorname{ord}\eta_2, \operatorname{ord}\mu)$: $(0,0,2,0,0)$, $(0,0,0,2,0)$, $(0,1,1,0,0)$, $(1,0,1,0,0)$, $(2,0,0,0,0)$, $(0,2,0,0,0)$, $(k,2l,0,0,0)$, $(2,0,0,0,1)$, $(0,2,0,0,1)$, $(-1,0,0,0,1)$, $(0,-1,0,0,1)$, $(k,2l,0,0,1)$, где $k,l \geq 0$, $k+2l \geq 3$, и из отрезка J, соединяющего точки $(-1,0,0,0,1)$ и $(0,-1,0,0,1)$. Этот отрезок является носителем члена $\mu/\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$. При этом конус задачи $\mathbf{K} = \{W \in \mathbb{R}^5_* : w_1 < 0, w_2 < 0, w_5 < 0\}$.

Сделаем проекцию $\pi R = R'' \stackrel{\text{def}}{=} (p,q,s) \in \mathbb{R}^3$, где

$$p = r_1 + r_2 = \operatorname{ord}\xi_i, \quad q = r_3 + r_4 = \operatorname{ord}\eta_i, \quad s = r_5 = \operatorname{ord}\mu.$$

Множество $\mathbf{S}_1''$ этих точек R'' состоит из $(0,2,0)$, $(1,1,0)$, $(2,0,0)$, $(k,0,0)$, $(2,0,1)$, $(-1,0,1)$, $(k,0,1)$, где $k = 3,4,5,\ldots$ Внешняя выпуклая оболочка CNV $\mathbf{S}_1''$ множества $\mathbf{S}_1''$ это многогранник $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{R}^3$. Поверхность $\partial\mathbf{\Gamma}$ многогранника $\mathbf{\Gamma}$ состоит из граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$, ребер $\mathbf{\Gamma}_j^{(1)}$ и вершин $\mathbf{\Gamma}_j^{(0)}$. Каждому такому элементу $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствует укороченный гамильтониан $\hat{h}_j^{(d)}$, являющийся суммой тех членов ряда (5), точки которых R'' принадлежат $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$. Укороченные функции Гамильтона $\hat{h}_j^{(d)}$ это различные первые приближения функции (5), справедливые в различных областях пространства $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \mu)$. При этом конус задачи $\mathbf{K}'' = \{W'' \in \mathbb{R}^3_* : w_1 < 0, w_3 < 0\}$.

Рис. 1 изображает многогранник $\mathbf{\Gamma}$, являющийся полубесконечной трехгранной призмой с косым основанием. Он имеет четыре грани и шесть ребер. Рассмотрим их.

Грань $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$, являющаяся косым основанием призмы $\mathbf{\Gamma}$, содержит вершины $(0,2,0)$, $(2,0,0)$, $(-1,0,1)$ и точку $(1,1,0)$. Ее нормальный вектор $N_1'' = -(1,1,3)$. Ей соответствует укороченная функция гамильтона

$$\hat{h}_1^{(2)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}. \tag{6}$$

Она описывает задачу Хилла [3], которая является неинтегрируемой. Степенное преобразование

$$\tilde{\xi}_i = \xi_i \mu^{-1/3}, \;\; \tilde{\eta}_i = \eta_i \mu^{-1/3}, \;\; i = 1,2 \tag{7}$$

приводит соответствующую систему Гамильтона к системе Гамильтона (4).

Грань $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ содержит точки $(0,2,0)$, $(1,1,0)$, $(2,0,0)$ и $(k,0,0)$. Ее нормальный вектор $N_2'' = (0,0,-1) \subset \mathbf{K}''$. Ей соответствует укороченная функция гамильтона $\hat{h}_2^{(2)}$, которая получается из функции h при $\mu = 0$. Она описывает задачу двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$, которая является интегрируемой.

Остальные две грани имеют нормальные векторы $(0,-1,0)$ и $(0,1,2)$, лежащие вне конуса задачи $\mathbf{K}''$. Поэтому соответствующие укорочения не годятся. Рассмотим ребра. Из шести ребер одно несобственное. Оно проходит через точку $(0,2,0)$ параллельно вектору $(1,0,0)$. На трех ребрах $q = 0$, т.е. для них укороченная функция Гамильтона не зависит от η_1, η_2, и у решений соответствующей системы Гамильтона ξ_1, $\xi_2 = \mathrm{const}$, т.е. они неинтересны. Остаются два ребра.

Ребро $\mathbf{\Gamma}_1^{(1)}$. Оно содержит точки $(0,2,0)$ и $(-1,0,1)$ множества $\mathbf{S}_1''$. Соответствующая укороченная функция Гамильтона есть

$$\hat{h}_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}. \tag{8}$$

Она описывает задачу двух тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$. Степенное преобразование

$$\xi_j = \mu\tilde{\xi}_j, \;\; \eta_j = \tilde{\eta}_j, \;\; t = \mu\tilde{t}, \;\; i = 1,2 \tag{9}$$

переводит ее в систему Гамильтона с функцией Гамильтона вида (8), где ξ_j, η_j, μ заменены на $\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, 1$ соответственно.

Ребро $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$ содержит точки $(2,2,0)$ и $(1,1,0)$, $(0,2,0)$ множества $\mathbf{S}_1''$. Ему соответствует укороченная функция Гамильтона (6) с $\mu = 0$. Она описывает промежуточную задачу (между задачей Хилла и задачей двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$), которая является интегрируемой. Это первое приближение ввел Хенон [4].

Поскольку нормальный вектор к грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ есть $N_1'' = -(1,1,3)$, а нормальный вектор к грани $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ есть $N_2'' = (0,0,-1)$, то нормальный конус к ребру $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$ состоит из векторов $\alpha N_1'' + \beta N_2''$, где $\alpha, \beta > 0$. Положим $\alpha = \beta = 1$, тогда получаем вектор $-(1,1,4)$, лежащий в нормальном конусе ребра $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$. Ему соответствует степенное преобразование

$$\xi_j = \mu^{1/4}\tilde{\xi}_j, \quad \eta_j = \mu^{1/4}\tilde{\eta}_j, \quad i = 1,2.$$

В координатах $\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j$ при $\mu \to 0$ получаем предельную функцию Гамильтона (6) с $\mu = 0$, где вместо ξ_j, η_j стоят $\tilde{\xi}_j$ и $\tilde{\eta}_j$ соответственно.

Итак, очень близко к телу $\mathbf{P}_2$ первым приближением исходной ограниченной задачи с функцией Гамильтона (5) является задача двух тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$ с гамильтонианом (8), просто близко — задача Хилла с гамильтонианом (6), подальше от тела $\mathbf{P}_2$ — промежуточная задача, а вдали от тела $\mathbf{P}_2$ — задача двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$. Вблизи тела $\mathbf{P}_2$ периодические решения ограниченной задачи являются возмущениями как периодических решений всех указанных четырех первых приближений, так и результатов склейки гиперболических орбит задачи двух тел $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ с решениями-отрезками либо задачи двух тел $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$, либо промежуточной задачи. В [5, 6–8, 9] периодические решения промежуточной задачи были использованы как порождающие для отыскания периодических квазиспутниковых орбит ограниченной задачи.

Итак, в окрестности тела $\mathbf{P}_2$ имеются три разных десингуляризации, соответствующие ребру $\mathbf{\Gamma}_1^{(1)}$, грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ и ребру $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$. Из них была известна только десингуляризация (7) для задачи Хилла, т.е. для грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$.

§ 2. Окрестность разорванной окружности

При $\mu = 0$ ограниченная задача имеет однопараметрическое семейство неподвижных точек

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad y_1^2 + y_2^2 = 1, \tag{10}$$

т.е. $a = 1$, $e = 0$, $\varepsilon' = 1$. В окрестности этого семейства введем локальные координаты y, z_1, z_2, z_3 следующим образом [1, гл. VIII, § 3]. Начнем с элементов Делоне

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \varepsilon'\sqrt{a(1-e^2)} = c, \quad l = Nt, \quad g = \tilde{\omega} - t,$$

где $\tilde{\omega}$ — аргумент перицентра.

Система канонических координат при $\varepsilon' = 1$

$$L, \;\; \rho_2 = L - G, \;\; y = l + g, \;\; \varphi_2 = -g$$

называется *первой системой элементов Пуанкаре.* Наконец, система канонических координат

$$L, \;\; z_2 = \sqrt{\rho_2} \cos \varphi_2, \;\; y, \;\; z_3 = \sqrt{2\rho_2} \sin \varphi_2$$

называется *второй системой элементов Пуанкаре.*

Семейство (10) выделяется равенствами $L = 1$, $z_2 = z_3 = 0$. Локальными для семейства (10) будут координаты

$$z_1 = L - 1, \;\; z_2, \;\; y, \;\; z_3.$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = H_0 + \mu R,$$
$$H_0 = \rho_2 - z_1 - \frac{1}{2}(1 + z_1)^{-2} = -\frac{1}{2} + \rho_2 - \frac{3}{2} z_1^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty} (k+1)(-z_1)^k,$$
$$R = r^{-1} + r \cos\, h - (1 - 2r \cos\, h + r^2)^{-1/2}$$

(r и h — полярные координаты тела $\mathbf{P}_3$ на плоскости x_1, x_2). При этом $\rho_2 = z_2^2 + z_3^2$.

Функция R разлагается в сходящийся ряд вида

$$R = \sum R_{mnkl} z_1^m z_2^k z_3^l \exp\, iny$$

с целыми m, n, k, l, причем m, k, l — неотрицательные.

Согласно вычислениям в [1, гл. VIII, п. 5.Б] имеем

$$\beta_{000}(y) = \sum R_{0n00} \exp\, iny = 1 + \cos\, y - [2 - 2\cos\, y]^{-1/2}.$$

Теперь сделаем десингуляризующую замену

$$z_1 = \mu^{1/2} \tilde{z}_1, \;\; \rho_2 = \mu \tilde{\rho}_2, \;\; t = \tilde{t} \mu^{-1/2}.$$

В отличие от случаев § 1 она не является канонической, т.е. не сохраняет гамильтонов характер всей системы. Тем не менее, она дает невозмущенную систему

$$\dot{\rho}_2 = 0, \;\; \dot{\varphi}_2 = \mu^{1/2}, \tag{12}$$

$$\dot{y} = -\partial H/\partial \tilde{z}, \;\; \dot{\tilde{z}} = \partial H/\partial y,$$
$$H = -\frac{3}{2}\tilde{z}^2 + \beta_{000}(y) = -\frac{3}{2}\tilde{z}^2 + \cos\, y - (2 - 2\cos\, y)^{-1/2}. \tag{13}$$

Следовательно, у системы (12) имеется первый интеграл $\rho_2 = \mathrm{const}$. Интегральные кривые последней подсистемы (13), т.е. линии уровня функции

H изображены на рис. 2. Имеются решения трех типов: I) совершающие либрации вокруг L_4 или L_5 — "головастики"; II) асимптотические к L_3; III) совершающие либрацию вокруг "восьмерки"асимптотических решений — с подковообразными интегральными кривыми.

Теперь ограниченную задачу вблизи семейства (10) можно изучать как возмущение системы (12), (13). Подковообразные орбиты изучались в [10–15], а орбиты — головастики — в [16, 17].

Литература

1. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
3. Hill G.W. Researches in the lunar theory // Amer. J. Math. 1878. V. 1. P. 5–26, 129–147, 245–260 // Hill G.W. Collected Mathematical Works. Wash. (D.C.): Carnegie Inst. 1905. V. 1. P. 284–335.
4. Henon M. Numerical exploration of the restricted problem V. Hill′s case: periodic orbits and their stability // Astronomy and astrophysics. 1969. V. 1. P. 223–238.
5. Коган А.Ю. Далекие спутниковые орбиты в ограниченной круговой задаче трех тел // Космические исследования. 1988. Т. 26, No. 6. С. 813–818.
6. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. Квазиспутниковые периодические орбиты // Аналитическая небесная механика/Ред. К.В. Холшевников. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1990. С. 53–57.
7. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. Теория возмущений и анализ эволюции квазиспутниковых орбит в ограниченной задаче трех тел // Космические исследования. 1993. Т. 31, No. 2. С. 75–99.
8. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной // Письма в Астрономический журнал. 1994. Т. 20, No. 3. С. 239–240.
9. Benest D. Libration effects for retrograde satellites in the restricted three-body problem // Celestial Mechanics. 1976. V. 13, No. 2. P. 203–215.
10. Schanzle A.F. Horseshoe-shaped orbits in the Jupiter-Sun restricted problem // Astron. J. 1967. V. 72, No. 2. P. 149–157.

11. Taylor D.B. Horseshoe-shaped periodic orbits in the restricted problem of three bodies for Sun-Jupiter mass ration // Astron. and Astrophys. 1981. V. 103, No. 2. P. 288–294.

12. Ипатов С.И. Взаимное гравитационное влияние двух протопланет в плоской задаче трех тел при первоначально круговых орбитах. Препр. N 183 Ин-та прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР. М., 1979. 32 с.

13. Llibre J. and Olle M. The motion of Saturn coorbital satellites in the restricted three-body problem // Astron. Astrophys. 2001. V. 378. P. 1087–1099.

14. Llibre J. and Olle M. Horseshoe periodic orbits in the restricted three-body problem // in New Adwances in Celestial Mechanics and Hamiltonian Systems (Delgado et al., eds), Kluwer Academic / Plenum Publishers, N.Y., 2004. P. 137–152.

15. Barrabes E. and Mikkola S. Families of periodic horseshoe orbits in the restricted three-body problem // Astron. Astrophys. 2005. V. 432. P. 1225–1129.

16. Henrard J. The web of periodic orbits of L_4 // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2004. V. 83. P. 291–302.

17. Henrard J. and Navarro J.F. Families of periodic orbits emanating from homoclinic orbits in the restricted problem of three bodies // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2004. V. 89. P. 285–304.

Рис. 1. Рис. 1. Рис. 1.

Рис. 2. Рис. 2. Рис. 2.