

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.  
I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса.

Москва 2006

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

**Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.  
I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса.**

**Аннотация**

В работе предложена модификация кусочно-параболической разностной схемы, уменьшающая диссипацию за счет исключения из нее процедуры интерполяции по четырехточечному шаблону. Проведено сравнение со стандартной кусочно-параболической схемой (PPM) на тестовых задачах для линейного уравнения переноса и невязкого уравнения Бюргерса. Сравнение проводилось на основании значений ошибок в различных нормах.

S.D. Ustyugov, M.V. Popov

**Piecewise parabolic method on local stencil.  
I. Advection equation and Burgers' equation.**

**Abstract**

Modification of piecewise parabolic method reducing dissipation of it due to exclusion the interpolation procedure on four-point stencil suggested. Comparison with standard piecewise parabolic method (PPM) was carried out with the help of test problems for linear advection equation and for inviscid Burgers' equation. The comparison was carried out on the basis of values of errors in different norms.

## Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Кусочно-параболический метод (PPM)</b>	<b>3</b>
<b>3 Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (PPML)</b>	<b>6</b>
<b>4 Тестирование методов</b>	<b>7</b>
4.1 Результаты расчетов методом PPM . . . . .	10
4.2 Результаты расчетов методом PPML . . . . .	13
<b>5 Невязкое уравнение Бюргерса</b>	<b>16</b>
<b>6 Заключение</b>	<b>20</b>

## 1 Введение

Кусочно-параболический метод численного решения гиперболических систем (РРМ) впервые был предложен в работе [1] и хорошо зарекомендовал себя в задачах вычислительной астрофизики. Метод имеет третий порядок аппроксимации по пространственным переменным и второй порядок по времени. Одним из его недостатков является использование процедуры интерполяции величин по четырехточечному шаблону для вычисления их значений на границах смежных ячеек разностной сетки при построении кусочных парабол. Такая процедура приводит к диссипации величин и сглаживанию фронта ударной волны и контактного разрыва для задачи Римана о распаде разрыва. В данной работе предложен способ устранить процедуру интерполяции за счет использования информации с предыдущего шага по времени. Впервые подобная идея была использована при построении разностной схемы с линейной аппроксимацией величин внутри ячеек задолго до изобретения метода РРМ [2]. См. также [3], где обсуждается метод Годунова на малых шаблонах. Мы предлагаем сокращенную аббревиатуру модифицированного метода - РРМЛ (Piecewise Parabolic Method on Local stencil). В работе проведено сравнение методов РРМ и РРМЛ на примере численного решения задачи Коши для линейного уравнения переноса и нелинейного невязкого уравнения Бюргерса с финитными начальными условиями. Анализ схем проведен в соответствии с методикой, использованной в работах [4, 5, 6] при аналогичном исследовании различных разностных схем.

## 2 Кусочно-параболический метод (РРМ)

Рассмотрим однородную одномерную разностную сетку с шагом  $h$  с определенной на ней искомой функцией  $q(x)$ . Значения  $q_i$  будем соотносить с центрами ячеек, значения на их границах будем обозначать  $q_{i+1/2}$ . В методе РРМ предполагается, что внутри каждой разностной ячейки функцию  $q(x)$  можно аппроксимировать с помощью параболы (рис. 1):

$$q(x) = q_i^L + \xi \left( \Delta q_i + q_i^{(6)} (1 - \xi) \right), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_{i-1/2}) h^{-1}, \quad \Delta q_i = q_i^R - q_i^L, \\ q_i^{(6)} &= 6 \left( q_i - 1/2 (q_i^L + q_i^R) \right). \end{aligned}$$

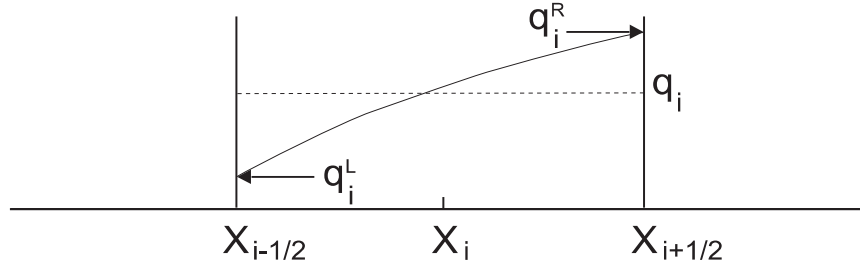


Рис. 1. Аппроксимация функции  $q(x)$  внутри разностной ячейки.

Формула (2.1) удовлетворяет соотношению:

$$q_i = h^{-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx.$$

В областях гладкой функции  $q(x)$  в отсутствии экстремумов, т.е. если

$$q_{i+1/2} \in [q_i \dots q_{i+1}], \quad (2.2)$$

справедливы выражения  $q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2}$  и  $q_i^L = q_{i-1}^R = q_{i-1/2}$ . Для вычисления  $q_{i+1/2}$  используется интерполяционная процедура четвертого порядка:

$$q_{i+1/2} = 1/2 (q_i + q_{i+1}) - 1/6 (\delta q_{i+1} - \delta q_i), \quad (2.3)$$

где

$$\delta q_i = 1/2 (q_{i+1} + q_{i-1}).$$

Чтобы выполнить условие отсутствия экстремума (2.2) значения  $\delta q_i$  в (2.3) необходимо заменить на

$$\delta_m q_i = \begin{cases} \min (|\delta q_i|, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|) \operatorname{sign} (\delta q_i), \\ \quad \text{при } (q_{i+1} - q_i) (q_i - q_{i-1}) > 0 \\ 0, \quad \text{при } (q_{i+1} - q_i) (q_i - q_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

В областях немонотонного решения  $q(x)$  следует переопределять значения  $q_i^L$  и  $q_i^R$ . Если  $q_i$  является локальным максимумом или минимумом, то интерполяционная функция (2.1) должна быть константой, т.е.  $q_i^L = q_i^R = q_i$ . Если  $q_i$  лежит слишком близко к  $q_i^L$  или  $q_i^R$ , то парабола (2.1) может иметь экстремум внутри разностной ячейки (при этом  $|\Delta q_i| < |q_i^{(6)}|$ ). В этом случае  $q_i^L$  и  $q_i^R$  должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть экстремум ее границам. Эти условия можно записать в виде:

$$q_i^L = q_i, \quad q_i^R = q_i, \quad \text{если } (q_i^R - q_i) (q_i - q_i^R) \leq 0 \quad (2.4)$$

и

$$\begin{aligned} q_i^L &= 3q_i - 2q_i^R, & \text{если } \Delta q_i \cdot q_i^{(6)} > (\Delta q_i)^2, \\ q_i^R &= 3q_i - 2q_i^L, & \text{если } \Delta q_i \cdot q_i^{(6)} < -(\Delta q_i)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

После того, как функция  $q(x)$  определена, можно вычислить ее среднее значение на отрезке  $[x_{i+1/2} - y \dots x_{i+1/2}]$  (при  $y > 0$ ):

$$\begin{aligned} \bar{q}_{i+1/2}^L(y) &= y^{-1} \int_{x_{i+1/2}-y}^{x_{i+1/2}} q(x) dx = \\ & q_i^R - 1/2 y h^{-1} \left( \Delta q_i - (1 - 2/3 y h^{-1}) q_i^{(6)} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рассмотрим линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

При распаде разрыва на границе двух смежных ячеек в точке  $x_{i+1/2}$  возникает некоторое среднее состояние  $q^*(x_{i+1/2}, t)$ . Т.к. уравнение переноса имеет одну характеристику, которая определяется из условия  $dx/dt = a$ , то при  $a > 0$  решение в момент времени  $t = t_0 + \tau$  будет определяться усреднением по пространственному интервалу  $[x_{i+1/2} - a\tau \dots x_{i+1/2}]$ , т.е.  $q^*(x_{i+1/2}, t_0 + \tau) = q_{i+1/2}^L = \bar{q}_{i+1/2}^L(a\tau)$ . При  $a < 0$  определяющим интервалом (зоной влияния) будет  $[x_{i+1/2} \dots x_{i+1/2} + a\tau]$ . В этом случае  $q^*(x_{i+1/2}, t_0 + \tau) = q_{i+1/2}^R = \bar{q}_{i+1/2}^R(-a\tau)$ , где

$$\begin{aligned} \bar{q}_{i+1/2}^R(y) &= y^{-1} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2}+y} q(x) dx = \\ & q_{i+1}^L + 1/2 y h^{-1} \left( \Delta q_{i+1} + (1 - 2/3 y h^{-1}) q_{i+1}^{(6)} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь также  $y > 0$ . Поток на границе смежных ячеек в задаче Римана определяется как

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(q^*(x_{i+1/2}, t)) dt.$$

Для удобства можно ввести функции  $a^+ = \max(a, 0) = (a + |a|)/2$  и  $a^- = \min(a, 0) = (a - |a|)/2$ , тогда

$$F_{i+1/2} = a^+ q_{i+1/2}^L + a^- q_{i+1/2}^R. \quad (2.9)$$

Величины  $q_{i+1/2}^L$  при  $a < 0$  и  $q_{i+1/2}^R$  при  $a > 0$  можно взять любыми.

### 3 Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (PPML)

Недостатком метода PPM является использование интерполяционной процедуры (2.3) по четырехточечному шаблону. Ее применение приводит к сглаживанию разрывных решений  $q(x)$ , например, на фронте ударной волны или на контактном разрыве. Вместо интерполяционной процедуры мы предлагаем определять значение  $q_{i+1/2}$  на правой границе ячейки с помощью переноса значения на параболе с предыдущего шага по времени вдоль характеристики  $dx/dt = a$ . Или, другими словами, чтобы вычислить  $q_{i+1/2}$  в момент времени  $t = t_0 + \tau$  предлагается двигаться от точки  $x_{i+1/2}$  на правой границе ячейки со значением  $q_{i+1/2}$  вдоль характеристики до момента  $t = t_0$  (рис. 2).

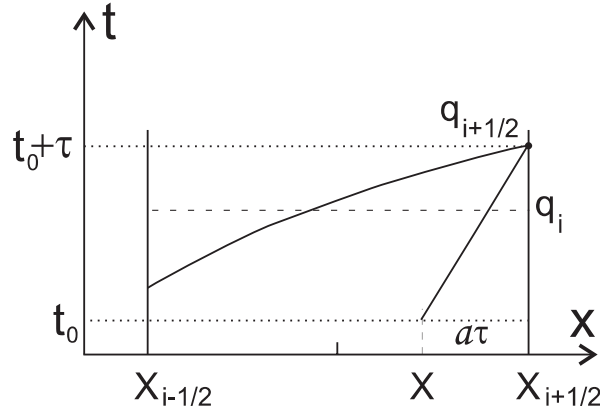


Рис. 2. Характеристика внутри разностной ячейки для  $a > 0$ .

Следовательно, для  $a > 0$

$$q_{i+1/2}(t_0 + \tau) = q_i^R(t_0 + \tau) = q_i^L + \xi \left( \Delta q_i + q_i^{(6)}(1 - \xi) \right), \quad (3.1)$$

где  $\xi = (x - x_{i-1/2}) h^{-1} = (h - a\tau) h^{-1} = 1 - a\tau h^{-1}$ . Все величины в правой части (3.1) берутся с предыдущего шага по времени  $t = t_0$ . При  $a < 0$  значение  $q_{i+1/2}$  определяется по параболе в ячейке с номером  $i + 1$ :

$$q_{i+1/2}(t_0 + \tau) = q_{i+1}^L(t_0 + \tau) = q_{i+1}^L + \xi \left( \Delta q_{i+1} + q_{i+1}^{(6)}(1 - \xi) \right),$$

где  $\xi = -a\tau h^{-1}$ .

Таким образом аппроксимирующая парабола строится в каждой ячейке. Далее, после проверки условий (2.4)-(2.5), переходим к формулам (2.6) и (2.8) для вычисления  $\bar{q}_{i+1/2}^L(a\tau)$  при  $a > 0$  или  $\bar{q}_{i+1/2}^R(-a\tau)$  при  $a < 0$  и вычисляем потоки (2.9).

Предложенная модификация позволяет реализовать вычислительный алгоритм на локальном шаблоне, т.к. для определения граничных точек кусочной параболы при переходе к последующему шагу по времени не используется информация о решении в соседних ячейках.

## 4 Тестирование методов

Тестирование представленных методов было проведено в соответствии с методикой, изложенной в работе [5]. Рассматривалась задача Коши для линейного уравнения переноса (2.7) с финитным начальным условием  $q(x, 0)$ :  $q(x, 0) = 0$  при  $x \in (-\infty, l_1) \cup (l_2, +\infty)$  и  $q(x, 0) = q_0(x)$  при  $x \in [l_1, l_2]$ . В качестве  $q_0(x)$  использовались различные профили:

$$\begin{aligned}
 q_0(x) &= \frac{1}{l_2 - l_1} (x - l_1) \quad - \text{”левый треугольник”}, \\
 q_0(x) &= 1 \quad - \text{”прямоугольник”}, \\
 q_0(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{l_2 - l_1} (x - l_1) \right) \quad - \text{”косинус”}, \\
 q_0(x) &= \begin{cases} -\frac{2}{3(l_{11} - l_1)} (x - l_1) + 1, & x \in [l_1, l_{11}), \\ \frac{1}{3}, & x \in [l_{11}, l_{22}], \\ \frac{2}{3(l_2 - l_{22})} (x - l_2) + 1, & x \in (l_{22}, l_2]; \end{cases} \quad - \text{”зуб”}, \\
 q_0(x) &= \begin{cases} -\frac{2}{3(l_{12} - l_1)} (x - l_1) + 1, & x \in [l_1, l_{12}), \\ \frac{2}{3(l_2 - l_{12})} (x - l_2) + 1, & x \in [l_{12}, l_2]; \end{cases} \quad - \text{”М”}, \\
 q_0(x) &= \frac{1}{l_2 - l_1} (l_2 - x) \quad - \text{”правый треугольник”}.
 \end{aligned}$$

Численное решение уравнения (2.7) сравнивалось с точным, которое имеет вид:

$$q_0(x) = \begin{cases} 0, & x - at < l_1, \\ u_0(x - at), & l_1 \leq x - at \leq l_2, \\ 0, & x - at > l_2. \end{cases}$$

Для этого вычислялись нормы в пространствах  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $W_2^1$  на  $\Omega = (-\infty, +\infty) * [0, T]$  (интегрально по времени):

$$\|f\|_C = \max_{\Omega} |f|, \quad \|f\|_{L_1} = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |f| dx dt, \quad \|f\|_{L_2} = \left( \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dx dt \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{W_2^1} = \left( \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (f_x')^2 dx dt \right)^{1/2};$$

и на  $R = (-\infty, +\infty)$  при  $t = T$  (локально по времени):

$$\|f\|_C = \max_R |f|, \quad \|f\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| dx, \quad \|f\|_{L_2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{W_2^1} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (f_x')^2 dx \right)^{1/2}.$$

В расчетах использовались следующие параметры:  $l = 520$ ,  $l_1 = 10$ ,  $l_2 = 30$ ,  $l_{11} = 16\frac{2}{3}$ ,  $l_{22} = 23\frac{1}{3}$ ,  $l_{12} = 20$ ,  $T = 400$ ,  $h = 1$ ,  $a = 1$ . При таких значениях параметров  $h$  и  $a$  число Куранта  $\sigma$  совпадает с шагом по времени  $\tau$ . За время  $T = 400$  профиль успевает пробежать 20 своих длин, что достаточно для выявления свойств используемой численной схемы. Вычисления проводились при  $\sigma = 0.1, 0.25, 0.5$ , и  $0.8$ .

В работе [5] проводился анализ конечно-разностных схем. В таких схемах значения величин между узлами разностной сетки не определены, и для вычисления норм необходимо использовать их конечноразностные аналоги, заменяющие интегралы суммами по узлам сетки и шагам по времени. В кусочно-параболическом методе решение внутри разностных ячеек аппроксимируется параболой, поэтому пространственные интегралы в формулах для норм в пространствах  $L_1$  и  $L_2$  можно вычислять точно.

Для вычисления нормы в пространстве  $C$  каждая разностная ячейка с номером  $i$  дробилась на  $M = 200$  узлов (с номерами  $j$ ), в которых определялись значения  $q_{i,j}^k$  в момент времени  $k$ :

$$\|q\|_C = \max_{0 \leq i \leq N; 0 \leq j \leq M; 0 \leq k \leq K} |q_{i,j}^k| \quad - \text{интегрально по времени};$$

$$\|q\|_C = \max_{0 \leq i \leq N; 0 \leq j \leq M} |q_{i,j}| \quad - \text{локально при } t = T.$$

Здесь  $N$ -число разностных ячеек,  $K$ -число шагов по времени ( $k = K$  соответствует  $t = T$ ).



При вычислении нормы в пространстве  $W_2^1$  следует иметь в виду, что во всех начальных профилях  $q_0(x)$  кроме "косинуса" имеются точки разрыва, в которых  $q_x' = \infty$ , поэтому вычисление точных интегралов теряет смысл. Вместо этого мы, также как было сделано в работе [5], воспользовались конечноразностным аналогом  $W_2^1$ , определяя ее как:

$$\|q\|_{W_2^1} = \left( \tau h^{-1} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^K (q_{i-1}^k - q_i^k)^2 \right)^{1/2} \quad \text{- интегрально по времени;}$$

$$\|q\|_{W_2^1} = \left( h^{-1} \sum_{i=0}^N (q_{i-1} - q_i)^2 \right)^{1/2} \quad \text{- локально при } t = T.$$

В этом случае значения нормы в пространстве  $W_2^1$ , очевидно, зависят от того, насколько подробна разностная сетка и стремятся к  $\infty$  при  $h \rightarrow 0$  для профилей, имеющих точки разрыва.

Для перевода абсолютных ошибок численного решения в относительные можно использовать нормы точного решения, приведенные в таблицах:

Нормы точного решения интегрально по времени

	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	1	1	1	1	1	1
$L_1$	4000	8000	4000	4444.4400	5333.3300	4000
$L_2$	51.6398	89.4427	54.7723	53.5182	62.0633	51.6398
$W_2^1$	19.9875	28.2843	9.8953	27.7529	27.9205	19.9875

Нормы точного решения локально при  $t = T$

	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	1	1	1	1	1	1
$L_1$	10	20	10	11.1111	13.3333	10
$L_2$	2.5820	4.4721	2.7386	2.6759	3.1032	2.5820
$W_2^1$	0.99938	1.4142	0.49477	1.3876	1.3960	0.99938

Заметим, что значения нормы в пространстве  $W_2^1$  отличаются от представленных в [5]. Это связано с тем, что в [5] значения  $q_i$  задавались в узлах  $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , тогда как в кусочно-параболическом методе они соотносятся с центрами ячеек, в которых  $x = 1/2, 3/2, \dots, N - 1/2$ . В этом случае точке  $x = 0$  соответствует левая граница первой ячейки.

Ниже представлены результаты численного решения уравнения (2.7).

### 4.1 Результаты расчетов методом РРМ

Решение показано в виде рисунков для каждой из шести форм начального профиля  $q_0(x)$  для двух значений числа Куранта:  $\sigma = 0.1$  и  $0.8$  на моменты времени от  $t = 0$  до  $T$  (рис. 3, 4). Также представлены таблицы ошибок, содержащие нормы разности между точным и численным решением. В левом верхнем углу указано  $\sigma$ . Заметим, что при сдвиге точного решения вдоль направления  $x$  на величину не кратную расстоянию между узлами  $h$ , ее проекция на узлы разностной сетки будет изменяться, что будет приводить к скачкообразному изменению нормы разности точного и численного решения в пространстве  $W_2^1$ , т.к. в этом пространстве используется конечно-разностный аналог нормы.

Таблицы ошибок интегрально по времени (метод РРМ).

0.1	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	М	правый треугольник
$C$	0.78013	0.77971	0.11541	0.84664	0.82433	0.80646
$L_1$	709.2900	965.2680	230.2030	1507.9800	1396.6500	641.1570
$L_2$	13.1505	17.2448	3.4284	20.6813	19.4520	12.9661
$W_2^1$	16.8997	23.7344	2.5295	24.8912	24.1902	16.8612

0.25	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	М	правый треугольник
$C$	0.60859	0.60442	0.10868	0.62256	0.61652	0.59983
$L_1$	638.8410	924.2660	181.6920	1415.8400	1312.0400	609.1250
$L_2$	12.8076	16.8743	2.9151	19.9931	18.8210	12.6943
$W_2^1$	16.8274	23.5396	2.1456	24.7273	24.0374	16.7484

0.5	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	М	правый треугольник
$C$	0.51436	0.49944	0.093620	0.53011	0.50996	0.51977
$L_1$	563.4810	855.1270	134.9150	1272.4500	1185.9500	562.9400
$L_2$	12.1841	16.2155	2.3444	18.8859	17.7784	12.1730
$W_2^1$	16.5596	23.1943	1.8363	24.3658	23.7236	16.5607

0.8	левый треугольник	прямоугольник	косинус	зуб	М	правый треугольник
$C$	<u>0.66672</u>	<u>0.64466</u>	0.065666	<u>0.68878</u>	<u>0.67407</u>	<u>0.66621</u>
$L_1$	448.1290	714.6680	101.9580	1001.1000	998.2290	473.5950
$L_2$	10.8551	14.7612	1.7026	16.5501	15.8830	10.9834
$W_2^1$	15.5816	22.0077	1.5848	22.8209	22.4006	15.6465

Таблицы ошибок локально при  $t = T$  (метод РРМ).

0.1	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.50427	0.51160	0.11541	0.54759	0.51292	0.51450
$L_1$	2.1445	2.8814	0.82444	4.7370	4.4819	1.9858
$L_2$	0.72962	0.94465	0.22876	1.1707	1.1176	0.72155
$W_2^1$	0.87754	1.2316	0.15235	1.2984	1.2623	0.87738

0.25	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.49955	0.50587	0.10868	0.54101	0.50711	0.50712
$L_1$	1.9471	2.7699	0.68338	4.4572	4.1481	1.8808
$L_2$	0.71131	0.92588	0.20014	1.1312	1.0729	0.70619
$W_2^1$	0.87191	1.2230	0.13096	1.2858	1.2497	0.87159

0.5	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<u>0.50605</u>	0.49943	0.093620	0.53011	0.50235	0.50345
$L_1$	1.7375	2.5691	0.50444	4.0302	3.6287	1.7374
$L_2$	0.67729	0.89138	0.16139	1.0717	1.0018	0.67702
$W_2^1$	0.85915	1.2066	0.11172	1.2662	1.2284	0.85909

0.8	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<u>0.51770</u>	<u>0.50687</u>	0.065666	0.51217	<u>0.51087</u>	0.50339
$L_1$	1.3883	2.1313	0.37939	3.1478	2.9691	1.4699
$L_2$	0.60253	0.80883	0.11711	0.93662	0.88103	0.60926
$W_2^1$	0.82093	1.1576	0.10047	1.2063	1.1765	0.82317

Видно, что с увеличением числа Куранта ошибки уменьшаются, что связано с уменьшением численной вязкости схемы. Исключение составляют некоторые значения нормы в пространстве  $C$ . В таблицах они подчеркнуты. Особенности поведения нормы в пространстве  $C$  будут обсуждаться ниже (см. стр. 14).

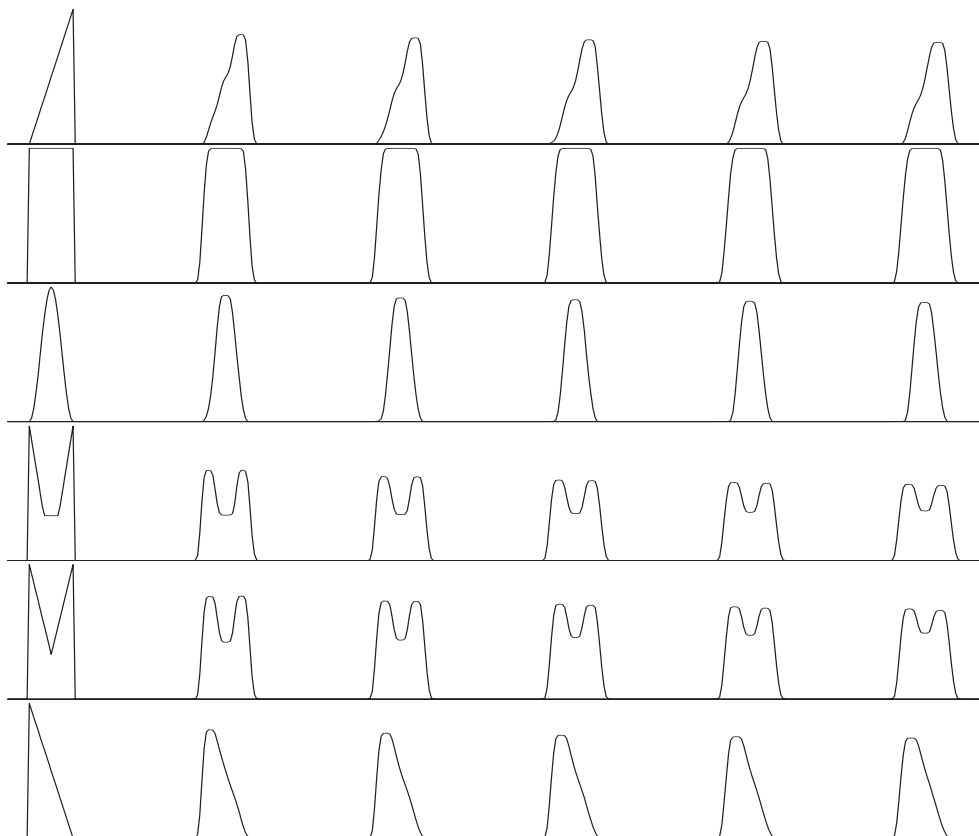


Рис. 3. Профили для  $\sigma = 0.1$  (метод PPM).

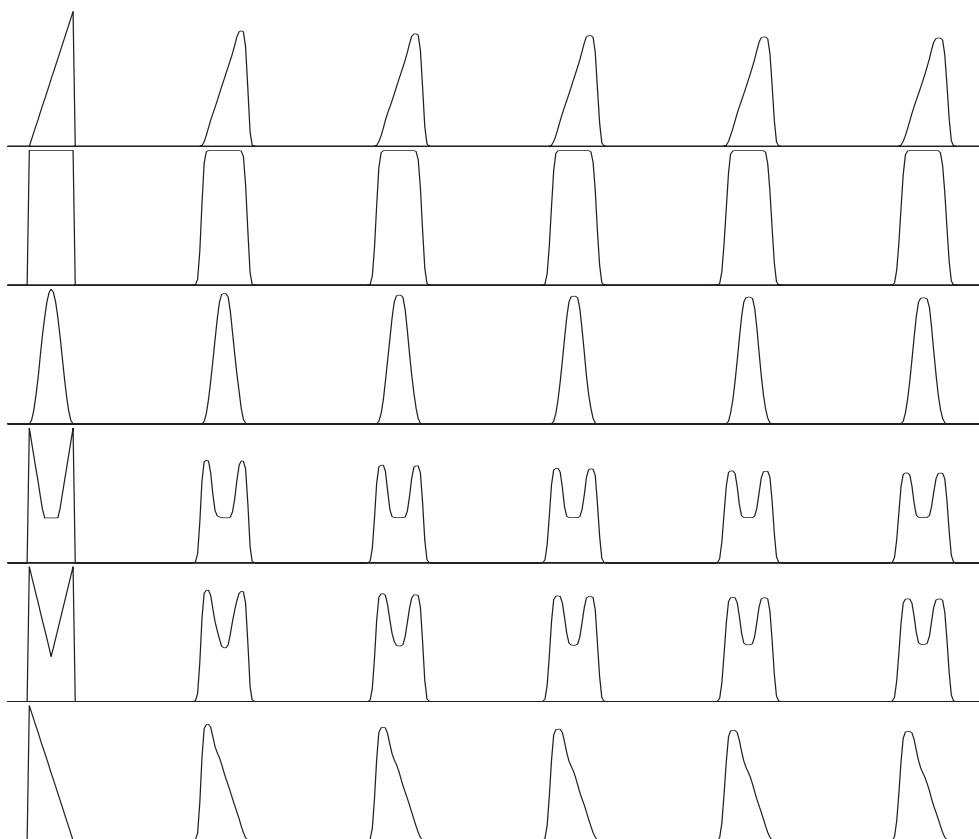


Рис. 4. Профили для  $\sigma = 0.8$  (метод PPM).

## 4.2 Результаты расчетов методом RPML

Ниже представлены аналогичные таблицы ошибок для расчетов кусочно-параболическим методом на локальном шаблоне (RPML), а также рисунки профилей для  $\sigma = 0.1$  и  $0.8$  на моменты времени от  $t = 0$  до  $T$  (рис. 5, 6).

Таблицы ошибок интегрально по времени (метод RPML).

0.1	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.75613	0.75565	0.076122	0.75662	0.75630	0.69570
$L_1$	552.6660	909.2250	97.4871	1201.1200	1153.4300	550.6460
$L_2$	12.3978	16.7240	1.6815	18.4410	17.7605	12.2170
$W_2^1$	16.5899	23.3516	1.1843	23.9530	23.6335	16.5944

0.25	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.57784	0.57531	0.075961	0.58037	0.57868	0.55589
$L_1$	520.2340	849.5530	92.3369	1142.4200	1094.3400	519.8320
$L_2$	11.9612	16.1403	1.6455	17.9244	17.1779	11.8165
$W_2^1$	16.3502	23.0022	<u>1.2794</u>	23.7965	23.3863	16.4069

0.5	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<b>0.51441</b>	0.49938	0.069115	0.52707	<b>0.51855</b>	<b>0.52555</b>
$L_1$	462.6780	753.0510	79.8622	1019.6700	997.7140	463.3970
$L_2$	11.1813	15.1655	1.4864	16.8236	16.1842	11.1730
$W_2^1$	15.9607	22.4175	<u>1.2891</u>	23.2474	22.8324	15.9688

0.8	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<u>0.61997</u>	<u>0.61360</u>	0.040749	<u>0.62633</u>	<u>0.62209</u>	<u>0.63704</u>
$L_1$	363.3940	625.4640	39.4735	783.3780	790.9780	365.4070
$L_2$	9.9448	13.7838	0.79444	14.7433	14.4267	10.0368
$W_2^1$	14.9228	21.0576	0.81280	21.6119	21.3418	14.9330

Таблицы ошибок локально при  $t = T$  (метод RPML).

0.1	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<b>0.50852</b>	0.50534	0.076053	<b>0.57420</b>	<b>0.54242</b>	<b>0.53360</b>
$L_1$	1.7560	2.8222	0.43658	3.8961	3.6532	1.7501
$L_2$	0.69774	0.93340	0.12711	1.0551	1.0056	0.68697
$W_2^1$	0.87030	1.2243	0.076025	1.2606	1.2368	0.87004

0.25	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<b>0.50922</b>	0.50419	0.075922	<b>0.55337</b>	<b>0.52905</b>	<b>0.52262</b>
$L_1$	1.6560	2.6303	0.39054	3.6944	3.4035	1.6508
$L_2$	0.67365	0.90029	0.12015	1.0239	0.97120	0.66536
$W_2^1$	0.85944	1.2088	<u>0.080633</u>	1.2467	1.2220	0.85853

0.5	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	0.50042	0.49936	0.069115	0.52085	<b>0.50263</b>	0.50152
$L_1$	1.4706	2.3290	0.32561	3.2774	3.07234	1.4706
$L_2$	0.62868	0.84589	0.10624	0.95869	0.91218	0.62828
$W_2^1$	0.83726	1.1793	<u>0.08189</u>	1.2171	1.1946	0.83688

0.8	левый тре- угольник	прямоуголь- ник	косинус	зуб	М	правый тре- угольник
$C$	<b><u>0.51875</u></b>	<b><u>0.50808</u></b>	0.040749	<b><u>0.53798</u></b>	<b><u>0.52421</u></b>	<b><u>0.51644</u></b>
$L_1$	1.1517	1.9318	0.15675	2.4779	2.5142	1.1558
$L_2$	0.55809	0.76870	0.057823	0.83490	0.81268	0.56446
$W_2^1$	0.79661	1.1248	0.054857	1.1529	1.1390	0.79703

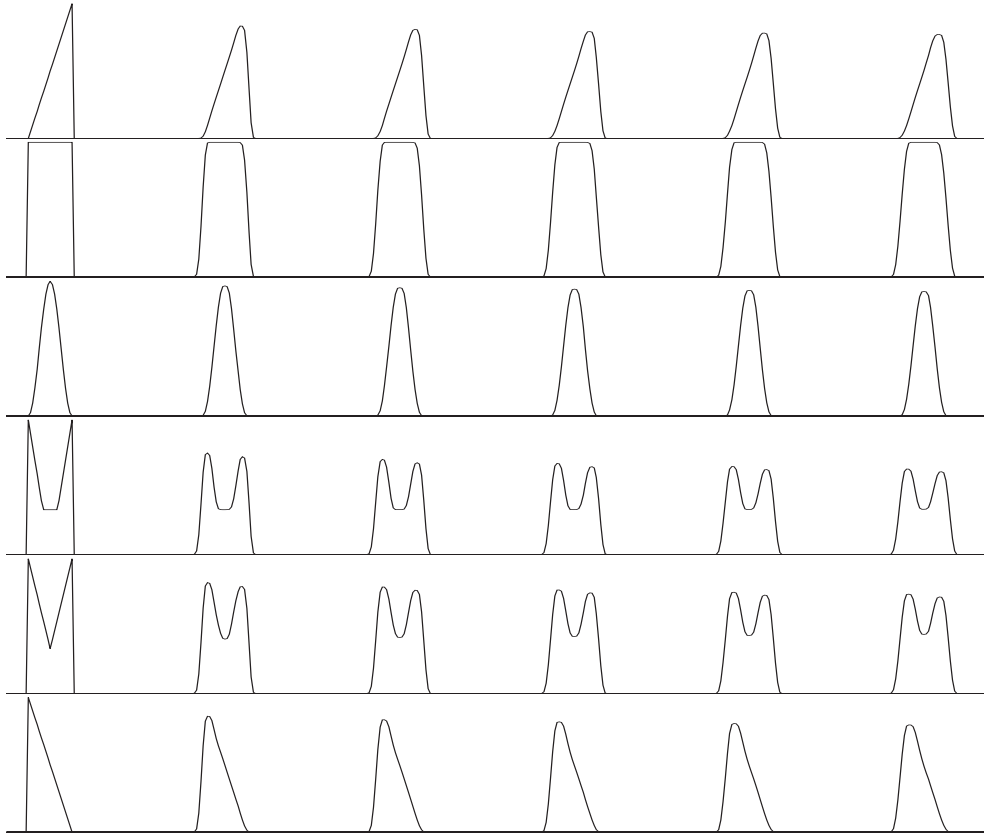


Рис. 5. Профили для  $\sigma = 0.1$  (метод PPML).

Из таблиц видно, что в подавляющем большинстве тестов метод PPML показал лучшие результаты, чем PPM. Исключение составляют значения норм, выделенные жирным шрифтом, однако все они наблюдаются в пространстве  $C$ . Норма в пространстве  $C$  - это максимальная разность между точным и численным решением. Для профилей, имеющих разрыв (все кроме "косинуса"), максимальная разность достигается вблизи этого разрыва, что показано на рис. 7. Значение нормы определяется одной из двух

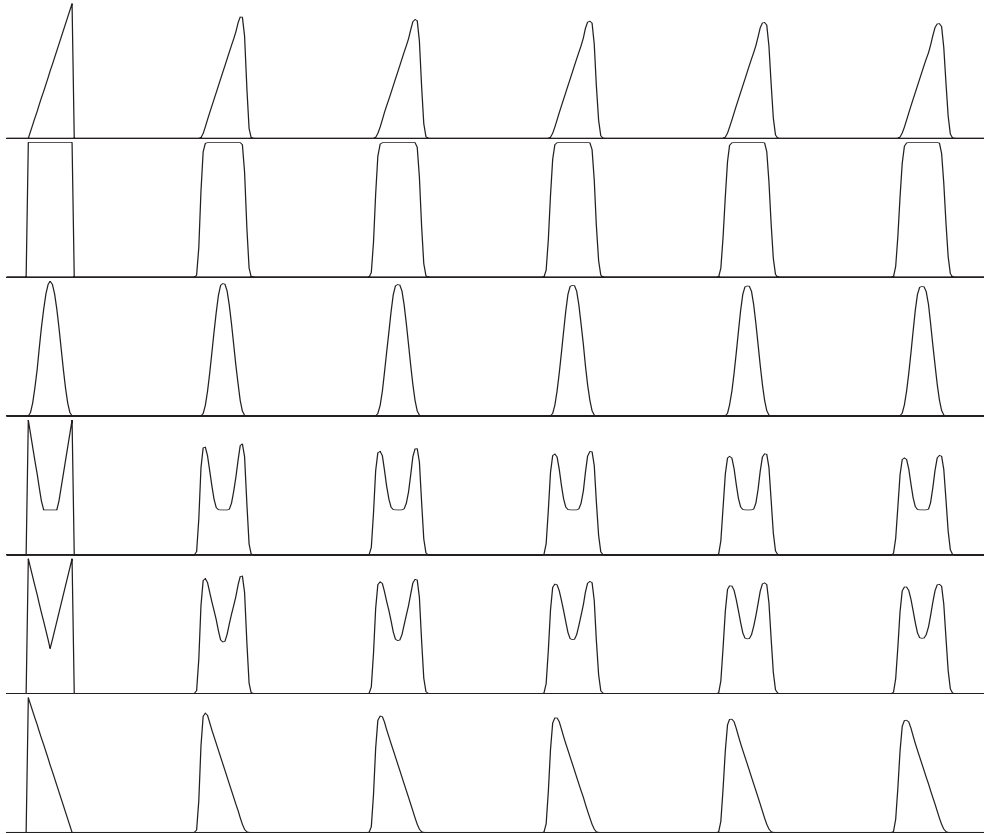


Рис. 6. Профили для  $\sigma = 0.8$  (метод PPML).

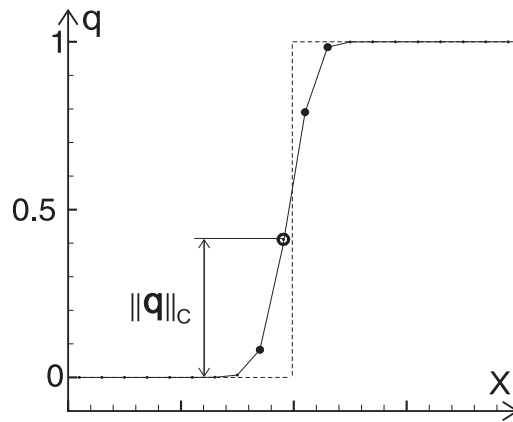


Рис. 7. Определение значения нормы в пространстве  $C$  вблизи точки разрыва.

ближайших к линии разрыва точного решения (показана пунктирной линией) точек, в которой вычисляется  $q_{i,j}$ . На рисунке такая точка показана жирным кружком. Очевидно, что значение нормы в пространстве  $C$  будет колебаться вблизи 0.5, и отклонение от этого значения в ту или иную сторону несущественно для сравнения численных схем. Для всех профилей кроме "косинуса" значение нормы интегрально по времени в пространстве  $C$  определялось, как правило, в первый шаг по времени. Для профиля "косинус" значение этой нормы характеризует степень "проседания" решения

при переносе. Метод РРМЛ дал существенно лучшие результаты для такого профиля. Например, при  $\sigma = 0.8$  на конечный момент времени  $t = T$ , его "проседание", как видно из таблиц, меньше на 38%, а ошибка в остальных нормах меньше, примерно, в 2 раза. Проведенное исследование показало, что степень "проседания" всех профилей (кроме "прямоугольника", который не проседает) в процессе переноса при расчете методом РРМЛ уменьшается.

## 5 Невязкое уравнение Бюргерса

Мы также применили представленные численные схемы при решении задачи Коши для невязкого уравнения Бюргерса, которое описывает возникновение и распространение ударных волн. Возникающие ударные волны аналогичны волнам в задачах газовой динамики. Уравнение Бюргерса имеет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{2} \right) = 0,$$

или

$$q_t + qq_x = 0. \quad (5.1)$$

Очевидно, характеристическая кривая уравнения (5.1) определяется из условия  $dx/dt = q$ . Т.к. характеристическая скорость  $q \neq const$ , то уравнение (5.1) является нелинейным. Скорость распространения в каждой точке описываемой уравнением волны может быть разной, и в результате возможно формирование разрывных решений и ударных волн. В некоторых случаях можно записать аналитическое решение (5.1) в виде:

$$q(x, t) = q_0(x - qt), \quad (5.2)$$

где  $q(x, 0) = q_0(x)$  - начальный профиль. Решение (5.2) справедливо в случае гладкого начального профиля вплоть до момента появления ударных волн. После их появления решение записывается в виде кусочной функции.

Т.к. поток в уравнения Бюргерса есть  $F = q^2/2$ , то вместо (2.9) будем иметь:

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \bar{q}_{i+1/2}^L(a_{i+1/2} \tau) \right)^2, & a_{i+1/2} \geq 0; \\ \frac{1}{2} \left( \bar{q}_{i+1/2}^R(-a_{i+1/2} \tau) \right)^2, & a_{i+1/2} < 0, \end{cases}$$

где  $\bar{q}_{i+1/2}^L(y)$  и  $\bar{q}_{i+1/2}^R(y)$  вычисляются по формулам (2.6) и (2.8) соответственно,  $a_{i+1/2}$  - скорость на границе смежных ячеек. Она вычисляется путем



усреднения правого и левого граничного состояния:

$$a_{i+1/2} = \frac{1}{2} (q_i^R + q_{i+1}^L).$$

Мы воспользовались тестовыми задачами, использованными в работе [6] для сравнения численных схем высокого порядка (включая РРМ) при решении уравнения Бюргера. Первый тест - эволюция параболического профиля, он демонстрирует процесс формирования и распространения ударных волн. Второй тест - эволюция разрывного профиля, предполагающего столкновение ударных волн и расширение областей разрежения.

Начальный параболический профиль задается в виде:

$$y = x - 2.5;$$

$$q_0(y) = \max [0, y(1 - y)], \quad y \geq 0;$$

$$q_0(y) = -q_0(y), \quad y < 0,$$

где  $x \in [0 \dots 5]$ . На рис. 8 представлено аналитическое решение (5.1) для данного начального профиля на моменты времени от  $t = 0$  до 12. Видно,

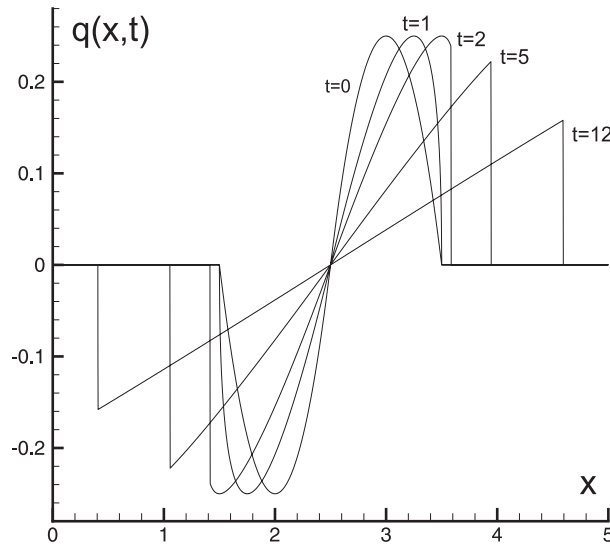


Рис. 8. Аналитическое решение для параболического профиля.

что примерно при  $t = 1$  начинают появляться две ударные волны, движущиеся в противоположные стороны. Скорость их распространения  $q_s = 1/2 (q_l + q_r)$ , где  $q_l$  и  $q_r$  скорости слева и справа от фронта.

Мы разбили расчетную область на  $N = 50$  ячеек и провели вычисления при  $\sigma = 0.4$ . Шаг по времени определялся из условия Куранта:

$$\tau = \sigma \min_i (h/|q_i|).$$

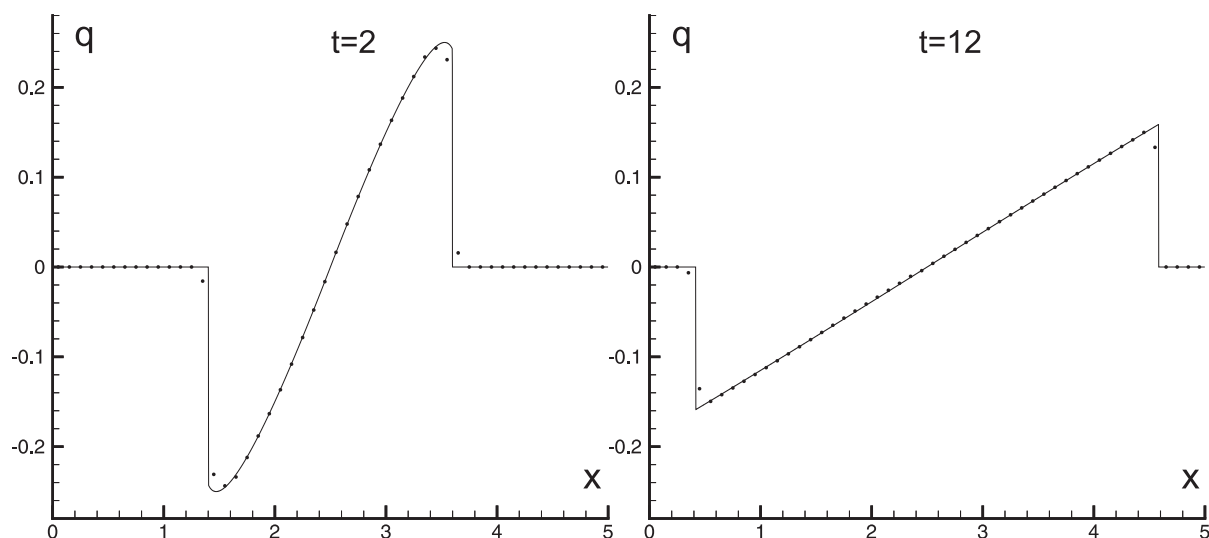


Рис. 9. Тест 1: метод RPML.

На рис. 9 представлены результаты расчетов методом RPML на моменты времени  $t = 2$  и  $12$ . Точками показано численное решение, сплошной линией - точное. Оказалось, что на данном тесте преимущества метода RPML никак не проявляются. Результаты, полученные стандартным методом РРМ визуально почти неотличимы, поэтому мы их не приводим.

Начальный профиль для второго теста имеет вид:

$$q_0(x) = \begin{cases} 1.0, & 0.2 < x < 2.0, \\ -0.5, & 2.0 < x < 3.0, \\ -1.0, & 3.0 < x < 4.8, \\ 0, & x < 0.2 \text{ и } x > 4.8. \end{cases}$$

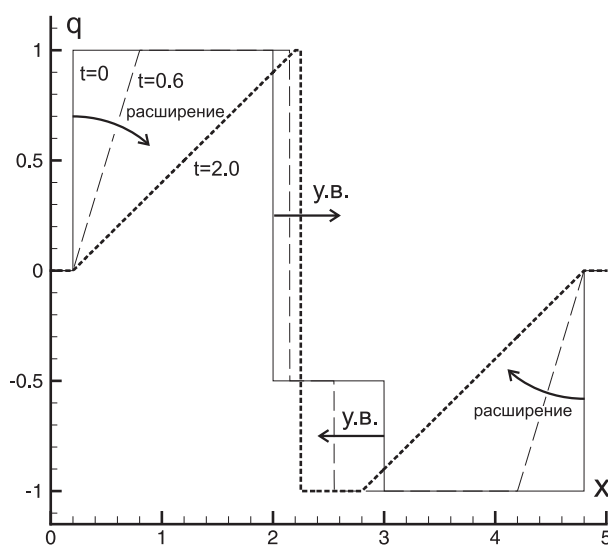


Рис. 10. Аналитическое решение для разрывного профиля.

На рис. 10 представлено аналитическое решение (5.1) для данного начального профиля на моменты времени  $t = 0, 0.6$  и  $2.0$ . В начальный момент времени в точках  $x = 2$  и  $x = 3$  имеются две ударные волны, движущиеся навстречу друг другу, в точке  $x = 0.2$  имеется разрыв, расширяющийся направо, в точке  $x = 4.8$  – разрыв, расширяющийся налево. Видно, что с течением времени в точках  $x = 0.2$  и  $4.8$  появляются два расширяющихся веера. При  $t = 1$  ударные волны сталкиваются и сливаются в одну, движущуюся налево.

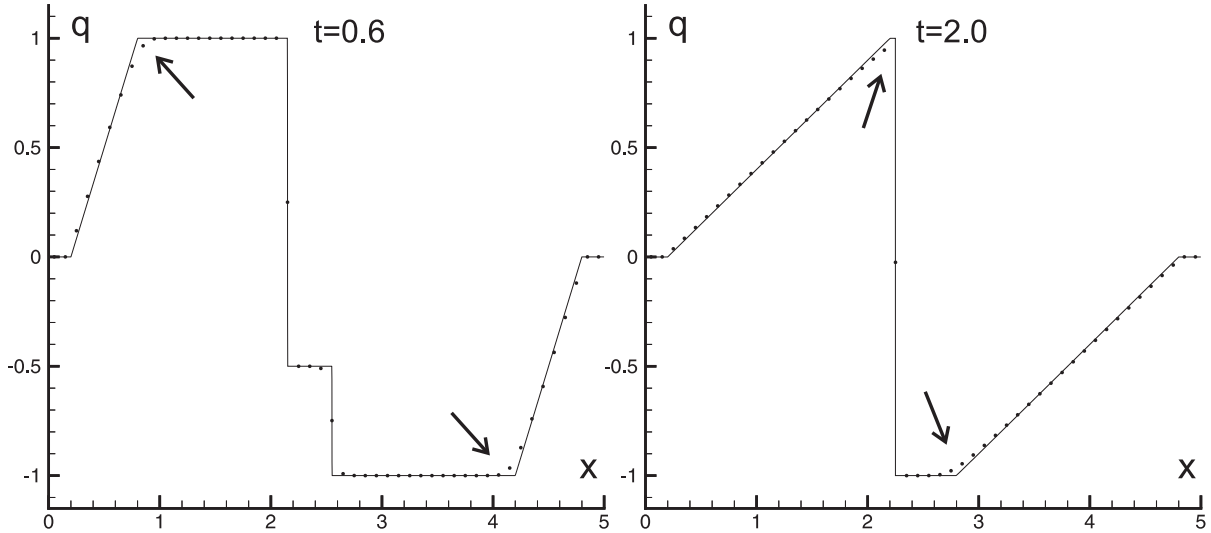


Рис. 11. Тест 2: метод РРМ.

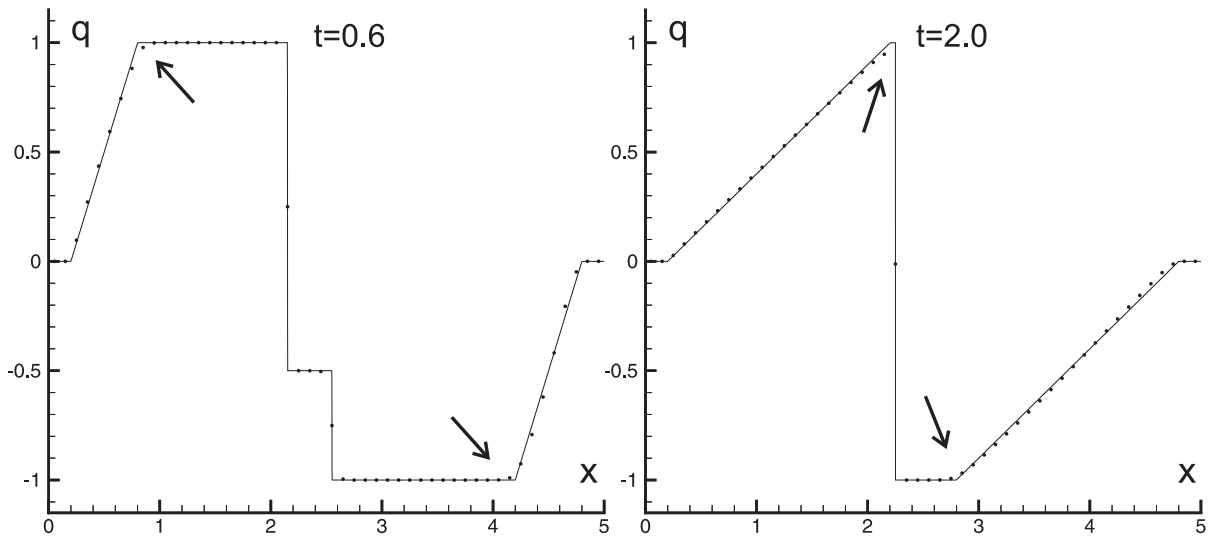


Рис. 12. Тест 2: метод РРМЛ.

На рис. 11 представлены результаты расчетов методом РРМ на моменты времени  $t = 0.6$  и  $2.0$ . Так же как и на рис. 9 точками показано численное решение, сплошной линией - точное. На рис. 12 представлены результаты

расчетов методом РРМЛ на те же моменты времени. Стрелками показаны области, в которых видно отличие между тестируемыми методами. В этих областях решение, полученное методом РРМЛ (рис. 12), ближе к точному, чем полученное методом РРМ (рис. 11). Области расширения, наблюдаемые в данном тестовом расчете аналогичны волнам разрежения в задачах газовой динамики. Это означает, что предложенный метод РРМЛ позволяет получать более точные решения в местах возникновения волн разрежения.

Для теста 2 мы приводим таблицы ошибок в пространстве  $L_1$  при различном  $N$  для  $t = 0.6$  и  $2.0$ , из которых видно, что метод РРМЛ дает существенно лучшие результаты.

Тест 2: ошибки в пространстве  $L_1$  для  $t = 0.6$ .

N	РРМ	РРМЛ
64	$8.60 \times 10^{-2}$	$4.27 \times 10^{-2}$
128	$7.49 \times 10^{-2}$	$5.86 \times 10^{-2}$
256	$4.75 \times 10^{-2}$	$2.33 \times 10^{-2}$
512	$3.18 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-2}$
1024	$1.55 \times 10^{-2}$	$5.81 \times 10^{-3}$

Тест 2: ошибки в пространстве  $L_1$  для  $t = 2.0$ .

N	РРМ	РРМЛ
64	$1.40 \times 10^{-1}$	$7.41 \times 10^{-2}$
128	$9.00 \times 10^{-2}$	$4.95 \times 10^{-2}$
256	$5.84 \times 10^{-2}$	$2.02 \times 10^{-2}$
512	$3.37 \times 10^{-2}$	$8.99 \times 10^{-3}$
1024	$1.89 \times 10^{-2}$	$7.12 \times 10^{-3}$

## 6 Заключение

В работе была предложена модификация кусочно-параболической численной схемы, позволяющая делать расчеты на локальном шаблоне, не используя информацию о решении в соседних ячейках, за счет исключения из схемы процедуры интерполяции. Данная модификация была использована при решении задачи Коши для одномерного линейного уравнения переноса и невязкого уравнения Бюргерса с финитными начальными условиями.

Для уравнения переноса был выполнен ряд тестовых расчетов по переносу различных начальных профилей. Оценка точности была сделана на основе вычисленных норм разности между точным и численным решением в пространствах  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  и  $W_2^1$ . Сравнение ошибок, полученных в расчетах методами РРМ и РРМЛ, позволяет сделать вывод об улучшении схемы. Новая схема уменьшает ошибки в нормах всех пространств за исключением пространства  $C$ , которое не вполне применимо при расчете переноса разрывных профилей. Хорошо заметно снижение диссипации схемы.

Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса позволило исследовать новую схему при описании процессов образования, движения и столкновения ударных волн, а также при исследовании областей разрежения. Метод PPML позволяет улучшить решение в областях разрежения без потери точности в остальном пространстве.

Проведенные исследования говорят о повышении точности численного решения при использовании метода PPML.

## Список литературы

- [1] *P. Collela, P. Woodward* The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations. *J. Comp. Phys.* **54**, 1984, p. 174.
- [2] *B. van Leer* Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comp. Phys.* **14**, 1974, p. 361.
- [3] *V. Guinot* High resolution Godunov-type schemes with small stencils, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **44**, 2004, p. 1119.
- [4] *М.П. Галанин, Т.Г. Еленина* Сравнительный анализ разностных схем для линейного уравнения переноса. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1998, № 52, 33 с.
- [5] *М.П. Галанин, Т.Г. Еленина* Тестирование разностных схем для линейного уравнения переноса. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1999, № 40, 42 с.
- [6] *H.Q. Yang, A.J. Przekwas* A comparative study of advanced shock-capturing schemes applied to Burgers' equation. *J. Comp. Phys.* **102**, 1992, p. 139.