

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.
II. Уравнения газодинамики.

Москва 2006

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

**Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.
II. Уравнения газодинамики.**

Аннотация

В работе предложена методика решения системы уравнений газодинамики с помощью кусочно-параболической разностной схемы на локальном шаблоне (PPML). Данная схема является предложенной авторами модификацией стандартного кусочно-параболического метода (PPM). Модификация основана на использовании свойства сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений и позволяет улучшить диссипативные свойства схемы. Проведено тестирование метода PPML на примере нескольких одномерных и двухмерных задач газовой динамики.

S.D. Ustyugov, M.V. Popov

**Piecewise parabolic method on local stencil.
II. Gasdynamics equations.**

Abstract

Technique for solving of gasdynamics system of equations with the help of piecewise parabolic method on local stencil (PPML) suggested. This method is suggested by authors modification of standard piecewise parabolic method (PPM). The modification is based on the property of Riemann invariants to conserve when moving along the characteristic curves of hyperbolic system of equations and improves the dissipative properties of PPM. Testing of PPML was carried out for some 1D and 2D test problems of gas dynamics.

Содержание

1	Введение	3
2	Численная схема	3
2.1	Вычисление граничных значений кусочных парабол	5
2.2	Вычисление потоков на границах разностных ячеек	9
3	Тестирование	12
3.1	1D тесты	12
3.2	2D тесты	14
4	Заключение	20

1 Введение

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (PPML), предложенный авторами, был исследован на примере решения задачи Коши для линейного уравнения переноса и невязкого уравнения Бюргерса в одномерном случае. [1] Данный метод является модификацией стандартного кусочно-параболического метода (PPM) [2] и основан на использовании свойства сохранения инвариантов Римана при их переносе вдоль характеристической кривой на следующий шаг по времени для нахождения граничных точек кусочной параболы вместо интерполяционной процедуры по четырехточечному шаблону, применяемой в методе PPM.

В данной работе мы собираемся расширить предложенный метод для решения системы уравнений газодинамики. Теперь, в общем случае, имеются три характеристики, вдоль которых сохраняются инварианты Римана, имеющие смысл амплитуд волн. Система уравнений газодинамики является нелинейной, и для применения характеристического анализа при решении задачи мы определяем локально в каждой разностной ячейке базис собственных векторов. В этом случае нелинейную задачу определения потоков величин на границах ячеек удастся линеаризовать в окрестности каждой границы ячейки, что позволяет использовать кусочно-параболическое распределение физических переменных.

Тестирование метода PPML мы проведем на одномерных и двумерных задачах газодинамики.

2 Численная схема

Для численного решения используется консервативная форма уравнений газодинамики, которая в двумерном случае имеет вид:

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} + \partial_y \mathbf{G} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (E + p) u \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (E + p) v \end{pmatrix}.$$

Систему (2.1) необходимо дополнить уравнением состояния и уравнением для полной энергии. Для идеального газа они имеют вид:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (2.2)$$

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2}, \quad (2.3)$$

где ε - удельная внутренняя энергия.

Для решения мы применяем консервативную разностную схему следующего вида:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\tau}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right) - \frac{\tau}{\Delta y} \left(\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (2.4)$$

Полуцелые пространственные индексы у потоков показывают, к каким границам разностной ячейки они относятся. Полуцелый номер шага по времени $n + 1/2$ означает, что берутся усредненные значения потоков по временному шагу τ , что дает второй порядок аппроксимации по времени.

Для вычисления потоков на границах ячеек мы применяем метод PRM, который предполагает, что решение внутри каждой разностной ячейки аппроксимируется параболой вдоль каждой координатной оси, причем граничные точки каждой кусочной параболы определяются из свойства сохранения значений инвариантов Римана вдоль характеристик исходной линеаризованной системы. Далее мы преобразуем обобщенную Риманову проблему о распаде разрыва, в которой распределение искомой функции внутри ячейки произвольно, в эквивалентную Риманову проблему, где это распределение задается кусочно-постоянной функцией.

В исходном методе PRM кусочная парабола внутри каждой ячейки строится с использованием физических переменных $\mathbf{V} = (\rho, u, v, p)^T$, поэтому для определения потоков приходится дополнительно использовать систему уравнений газодинамики в неконсервативной форме:

$$\partial_t \mathbf{V} + A \partial_x \mathbf{V} + B \partial_y \mathbf{V} = 0, \quad (2.5)$$

Матрицы A и B можно вычислить через Якобианы консервативной системы и матрицу перехода

$$M = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}. \quad (2.6)$$

Например, для матрицы A имеем:

$$A = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} M.$$

Матрицы A и B имеют полный набор правых и левых собственных векторов, отвечающих действительным собственным значениям (система уравнений газодинамики - гиперболическая). Следовательно, A и B можно разложить по своим собственным векторам. Например, для матрицы A , отвечающей за направление x , имеем:

$$A = R_x \Lambda_x L_x, \quad (2.7)$$

где R_x - матрица, столбцы которой есть правые собственные векторы \mathbf{r}_x^p ($p = 1, \dots, 4$), L_x - обратная ей матрица, строки которой есть левые собственные векторы \mathbf{l}_x^p :

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{c}{\rho} & 0 & 0 & -\frac{c}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad L_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{2c} & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & -\frac{\rho}{2c} & 0 & \frac{1}{2c^2} \end{pmatrix}.$$

Λ_x - диагональная матрица собственных значений: $(\Lambda_x)_{ij} = 0$ для $i \neq j$, $(\Lambda_x)_{ij} = \lambda^p$ для $i = j = p$, где λ^p - решения характеристического уравнения

$$\det|\lambda E - A| = 0. \quad (2.8)$$

Решением (2.8) являются следующие собственные значения: $\lambda^1 = u + c$, $\lambda^2 = \lambda^3 = u$, $\lambda^4 = u - c$, где c - скорость звука: $c^2 = (p_\rho)_s = (p_\rho)_\varepsilon + (p_\varepsilon)_\rho p / \rho^2$.

Для построения кусочных парабол на следующем шаге по времени необходимо определить значения величин (состояния) на границах разностных ячеек и значения величин в их центрах.

2.1 Вычисление граничных значений кусочных парабол

Для простоты вместо (2.5) будем рассматривать одномерную систему уравнений. Далее на стр. 8 будет рассмотрен двухмерный случай.

$$\partial_t \mathbf{V}(x, t) + A \partial_x \mathbf{V}(x, t) = 0. \quad (2.9)$$

Подставим (2.7) в (2.9) и домножим на матрицу L слева, тогда

$$L \partial_t \mathbf{V} + \Lambda L \partial_x \mathbf{V} = 0. \quad (2.10)$$

Разложим вектор $\mathbf{V}(x, t)$ по локальному базису правых собственных векторов \mathbf{r}^p , фиксированному для данной ячейки:

$$\mathbf{V}(x, t) = \sum_p \alpha^p(x, t) \mathbf{r}^p \quad (2.11)$$

и подставим в (2.10), тогда

$$\partial_t \alpha^p + \lambda^p \partial_x \alpha^p = 0, \quad p = 1, \dots, 4. \quad (2.12)$$

Уравнения (2.12) означают, что коэффициенты $\alpha^p(x, t)$ в разложении (2.11) (величины, соответствующие амплитудам волн) сохраняются вдоль каждой

характеристики $x^p(t)$, определяемой из условия

$$\frac{dx^p}{dt} = \lambda^p,$$

т.е. являются инвариантами Римана. Значение инварианта Римана на границе ячейки при $x = x_{i+1/2}$ в момент времени $t + \tau$ можно вычислить через его значение в момент времени t :

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda^p \tau, t). \quad (2.13)$$

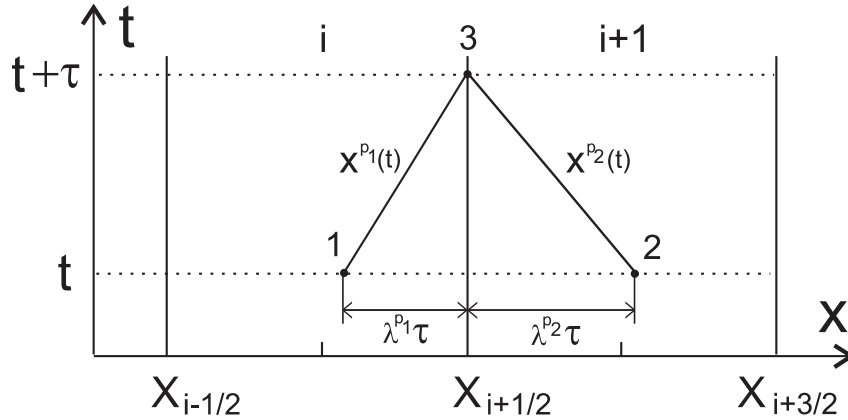


Рис. 1. Характеристики в смежных ячейках для $\lambda^{p_1} > 0$ и $\lambda^{p_2} < 0$.

В качестве примера на рис. 1 показаны две смежные ячейки с номерами i и $i + 1$. Набор характеристик в ячейке i обозначен индексом p_1 , в ячейке $i + 1$ - индексом p_2 . В ячейке i показана одна из характеристик $x^{p_1}(t)$ с собственным значением $\lambda^{p_1} > 0$. В ячейке $i + 1$ показана характеристика $x^{p_2}(t)$, отвечающая $\lambda^{p_2} < 0$. Согласно (2.13) амплитуда волны в точке 3, распространяющейся в ячейке i вдоль характеристики $x^{p_1}(t)$, отвечающей собственному значению λ^{p_1} , определяется по значению амплитуды в точке 1. Аналогично, амплитуда волны в точке 3, распространяющейся в ячейке $i + 1$ вдоль характеристики $x^{p_2}(t)$ с собственным значением λ^{p_2} , определяется по ее значению в точке 2.

Состояние в точке 3, вычисленное по формуле (2.11) путем суммирования по собственным векторам, фиксированным в ячейке i , отвечающим положительным собственным значениям (т.е. по индексу p_1 для всех $\lambda^{p_1} > 0$) будет являться левым относительно границы. Обозначим его как \mathbf{V}^L . Аналогично, состояние в точке 3, вычисленное путем суммирования по собственным векторам ячейки $i + 1$, т.е. по индексу p_2 для всех $\lambda^{p_2} < 0$ будет являться правым относительно границы и обозначаться как \mathbf{V}^R .

На рис. 2 показана возможная аппроксимация одной из компонент $V(x)$ вектор-функции $\mathbf{V}(x, t)$ в некоторый момент времени внутри разностных

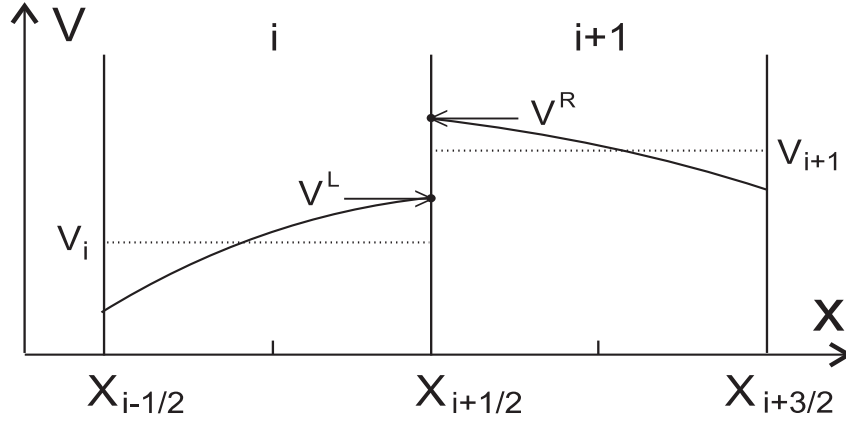


Рис. 2. Аппроксимация $\mathbf{V}(x)$ в смежных ячейках.

ячеек с помощью кусочных парабол. Стрелками показаны значения слева и справа от границы, причем $V^L \neq V^R$. Пунктиром показаны средние значения для каждой ячейки, например, для ячейки с номером i :

$$V_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} V(x) dx.$$

Состояния \mathbf{V}^L и \mathbf{V}^R требуются для построения кусочных парабол на следующем шаге по времени, однако в стандартном PPM они ”сшиваются”, т.е. выполняется

$$\mathbf{V}^L = \mathbf{V}^R = \mathbf{V}_{i+1/2}. \quad (2.14)$$

В методе PPM условие (2.14) выполняется по построению, т.к. значение $\mathbf{V}_{i+1/2}$ вычисляется с помощью интерполяционной процедуры четвертого порядка по четырехточечному шаблону [2]. В нашем случае для ”сшивки” парабол необходимо решить задачу о распаде разрыва между состояниями \mathbf{V}^L и \mathbf{V}^R . Для этого можно воспользоваться, например, методом Рои [3]:

$$\mathbf{V}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{V}^L + \mathbf{V}^R}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda^* p > 0} \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*) - \frac{1}{2} \sum_{\lambda^* p < 0} \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*). \quad (2.15)$$

В (2.15) значения \mathbf{V}^L и \mathbf{V}^R вычисляются в соответствии с выбранным базисом собственных векторов в ячейках i и $i+1$. Как выбирается состояние, по которому фиксируется базис собственных векторов в каждой ячейке будет показано ниже (см. стр. 10). Значения компонент правых собственных векторов \mathbf{r}^p в (2.15) вычисляются по состоянию \mathbf{V}^* , определяемому с помощью следующих формул [3]:

$$\rho^* = \sqrt{\rho^L \rho^R}, \quad \xi^* = \frac{\sqrt{\rho^L} \xi^L + \sqrt{\rho^R} \xi^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}, \quad \text{для } \xi = u, h, \quad (2.16)$$

где u - компонента скорости, $h = (E + p)/\rho$ - удельная энтальпия.

Собственные значения λ^{*p} имеют вид: $\lambda^{*1} = u^* + c^*$, $\lambda^{*2} = \lambda^{*3} = u^*$, $\lambda^{*4} = u^* - c^*$, где $c^* = \sqrt{(p^*)_s}$ ($p^* = p(\rho^*, \varepsilon^*)$). Значения амплитуд α^{*p} вычисляются по состоянию \mathbf{V}^* в соответствии с (2.11):

$$\mathbf{V}^* = \sum_p \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*).$$

При использовании метода РРМЛ для решения задач в двумерной постановке можно расщеплять систему (2.5) по пространственным переменным и решать одномерные уравнения отдельно вдоль каждой координатной оси. Однако при этом необходимо учесть дополнительное изменение величин в граничных точках за счет потоков в соответствующих направлениях. В методе РРМ такая процедура не требуется.

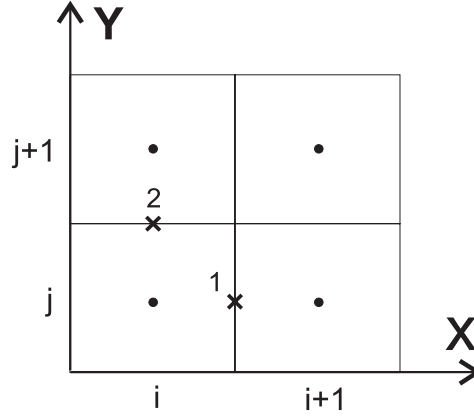


Рис. 3. Двухмерная разностная сетка.

Дополнительное изменение величин, например, в точке 1 на рис. 3 между ячейками (i, j) и $(i + 1, j)$ за счет потока в направлении y при переходе к следующему моменту времени можно учесть, решив уравнение (2.5) в направлении x , рассматривая слагаемое, отвечающее за направление y , как источник. В этом случае вместо (2.12) будем иметь:

$$\partial_t \alpha^p + \lambda^p \partial_x \alpha^p = D^p, \quad p = 1, \dots, 4, \quad (2.17)$$

$$D^p = -l^p B^p \partial_y V^p, \quad (2.18)$$

где l^p - левый вектор Якобиана A , B^p - столбец Якобиана B , отвечающего за направление y . Значения компонент l^p и B^p в (2.18) мы предлагаем вычислять по тому же состоянию, по которому фиксируется базис собственных векторов в ячейке (i, j) для волн, распространяющихся вдоль характеристик с положительными собственными значениями, либо в ячейке $(i, j + 1)$ для волн, отвечающих отрицательным собственным значениям

(см. стр. 10). Частные производные $\partial_y V^p$ можно вычислить, заменив их разностными:

$$\partial_y V^p = \frac{V_{i,j+1}^p - V_{i,j}^p}{\Delta y}.$$

Решение уравнения (2.17) записывается аналогично (2.13) с добавлением слагаемого, связанного с источником:

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda^p \tau, t) + D^p \tau. \quad (2.19)$$

Левое и правое граничные состояния \mathbf{V}^L и \mathbf{V}^R в точке 1 вычисляются по формуле (2.11) путем суммирования соответствующих амплитуд (2.19), умноженных на правые собственные векторы Якобиана A . Далее для вычисления граничного состояния $\mathbf{V}_{i+1/2,j}$ используем формулу (2.15).

Состояние $\mathbf{V}_{i,j+1/2}$ в точке 2 вычисляется аналогично. В этом случае в источнике будет учитываться изменение за счет потока в направлении x .

2.2 Вычисление потоков на границах разностных ячеек

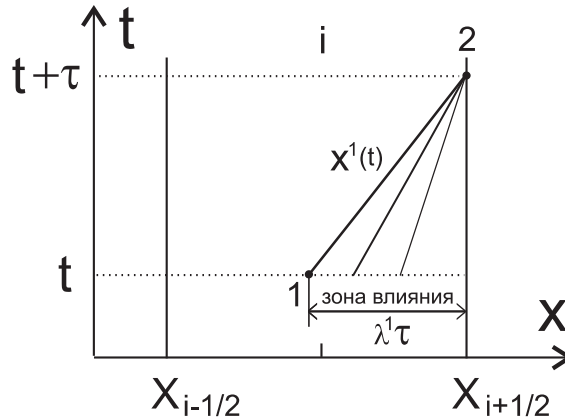


Рис. 4. Набор характеристик внутри разностной ячейки.

На рис. 4 показан набор характеристик, отвечающих $\lambda^p > 0$, внутри разностной ячейки с номером i . Характеристика $x^1(t)$ отвечает максимальному собственному значению λ^1 . Точка 1 - это точка пересечения данной характеристики с кусочной параболой на предыдущем шаге по времени. Очевидно, на состояние в точке 2 (левое граничное состояние) влияет только область от границы ячейки $x = x_{i+1/2}$ до точки 1.

Для получения второго порядка аппроксимации по времени необходимо усреднить амплитуды $\alpha^p(x, t)$, отвечающие каждой характеристике, по своей области влияния. Если рассмотреть волну, распространяющуюся внутри ячейки i вдоль характеристики с $\lambda^p > 0$, то ее усредненная амплитуда на

границе $x = x_{i+1/2}$ в момент времени $t + \tau$ будет вычисляться по формуле:

$$\overline{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \alpha^p(x) dx, \quad \lambda^p > 0. \quad (2.20)$$

Из (2.11) следует, что вклад каждой характеристики с $\lambda^p > 0$ внутри ячейки i в левое граничное состояние $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ есть

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^{L,p}(x) = \alpha^p(x) \mathbf{r}^p.$$

Отсюда,

$$\alpha^p(x) = \mathbf{l}^p \mathbf{V}_{i+1/2}^{L,p}(x). \quad (2.21)$$

Подставляем (2.21) в (2.20):

$$\overline{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \mathbf{l}^p \mathbf{V}_{i+1/2}^{L,p}(x) dx, \quad \lambda^p > 0.$$

Т.к. базис собственных векторов фиксирован в каждой ячейке, то \mathbf{l}^p можно вынести из-под знака интеграла, тогда

$$\overline{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \mathbf{l}^p \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p}, \quad \lambda^p > 0,$$

где

$$\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \mathbf{V}_{i+1/2}^{L,p}(x) dx. \quad (2.22)$$

Необходимо выбрать состояние, по которому будем вычислять собственные векторы, фиксированные для каждой ячейки. В качестве такого состояния для ячейки i предлагается взять $\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}$ - усредненный по формуле (2.22) вклад в левое граничное состояние, соответствующий амплитуде волны в точке 1 в момент времени t . Как показали численные расчеты, этот выбор практически не влияет на результаты.

Т.к. волны, распространяющиеся внутри ячейки i вдоль характеристик с $\lambda^p < 0$, очевидно, не влияют на состояние в точке 2, то для $\overline{\alpha}_{i+1/2}^p$ при $\lambda^p < 0$ можно взять любое число, например, ноль. Однако из удобства предлагается использовать следующую общую формулу:

$$\overline{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \begin{cases} \mathbf{l}^p \left(\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} \right) \cdot \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p}, & \lambda^p > 0, \\ \mathbf{l}^p \left(\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} \right) \cdot \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1}, & \lambda^p < 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Состояние $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ слева от границы получается по формуле (2.11) с помощью суммирования амплитуд (2.23), домноженных на правые векторы, однако удобно использовать формулу для разложения приращения вектора состояния по базису правых собственных векторов. Чтобы ее получить, запишем (2.23) в виде

$$\overline{\alpha}_{i+1/2}^p = \Theta(\lambda^p) \left(\mathbf{1}^p \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} \right) + (1 - \Theta(\lambda^p)) \left(\mathbf{1}^p \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} \right). \quad (2.24)$$

(Мы опустили аргументы собственных векторов.) Домножив (2.24) на \mathbf{r}^p и просуммировав по p , после простых преобразований можно получить

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^L - \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} = \sum_{p (\lambda^p > 0)} \mathbf{r}^p \left(\mathbf{1}^p \left(\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} - \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,1} \right) \right). \quad (2.25)$$

До сих пор мы рассматривали разностную ячейку с номером i . Рассмотрим ячейку с номером $i + 1$ и характеристики с отрицательными собственными значениями, можно получить аналогичную формулу для определения состояния $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$ справа от границы:

$$\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1} - \mathbf{V}_{i+1/2}^R = \sum_{p (\lambda^p < 0)} \mathbf{r}^p \left(\mathbf{1}^p \left(\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,p} - \overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1} \right) \right). \quad (2.26)$$

Здесь \mathbf{r}^p и $\mathbf{1}^p$ - собственные векторы, фиксированные в ячейке $i + 1$. Состояние $\overline{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,1}$ - это усредненный по соответствующей области влияния в ячейке $i + 1$ вклад в $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$ за счет волны, распространяющейся вдоль характеристики, отвечающей максимальному по модулю отрицательному собственному значению.

Формулы (2.25) - (2.26) имеют наглядную интерпретацию - они показывают, что приращение каждой физической переменной в окрестности границы складывается из соответствующих приращений этих величин при пересечении каждой характеристики слева направо от одного состояния к другому.

Теперь необходимо определить поток $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ на границе $x = x_{i+1/2}$. Снова воспользуемся методом Роу [3]. Для начала перейдем от физических переменных \mathbf{V} к консервативным \mathbf{U} (имеется взаимоднозначное соответствие $\mathbf{V} \rightleftharpoons \mathbf{U}$) и вычислим потоки слева и справа от границы: $\mathbf{F}^L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L)$ и $\mathbf{F}^R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R)$. Далее воспользуемся формулой

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{F}^L + \mathbf{F}^R}{2} - \frac{1}{2} \sum_p |\lambda^p(\mathbf{V}^*)| \Delta \alpha_{i+1/2}^p \mathbf{r}_U^p(\mathbf{U}^*), \quad (2.27)$$

где

$$\Delta \alpha_{i+1/2}^p = \mathbf{1}^p(\mathbf{V}^*) \left(\mathbf{V}_{i+1/2}^R - \mathbf{V}_{i+1/2}^L \right), \quad (2.28)$$

$\mathbf{r}_U^p = M \mathbf{r}^p$ - правый собственный вектор для консервативной системы газодинамики (M - матрица перехода (2.6)). При записи (2.28) мы воспользовались свойством

$$\mathbf{l}_U^p \Delta \mathbf{U} = \mathbf{l}^p \Delta \mathbf{V},$$

которое позволило нам обойтись без вычисления левых собственных векторов в консервативных переменных. Компоненты \mathbf{V}^* вычисляются с помощью (2.16) относительно состояний $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ и $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$. \mathbf{U}^* - состояние, соответствующее \mathbf{V}^* в консервативных переменных.

В двумерной постановке, вычислив потоки на границах между ячейками для направления x , аналогично определяем потоки для направления y . Далее, используя разностную схему (2.4), вычисляем состояния в центрах ячеек $\mathbf{U}_{i,j}^{n+1}$ на следующем шаге по времени.

Осталось переопределить граничные значения кусочных парабол $\mathbf{V}_{i,j+1/2}^{n+1}$ и $\mathbf{V}_{i+1/2,j}^{n+1}$, вычисленные по формуле (2.15), в областях немонотонного решения согласно методу PPM (см. [1] или [2]), и задача решена.

3 Тестирование

Предложенный метод был протестирован на примере нескольких одномерных и двумерных задач газовой динамики. Во всех расчетах уравнение состояния и уравнение для энергии бралось для случая идеального газа (2.2)-(2.3) с $\gamma = 1.4$.

3.1 1D тесты

Первые три теста в одномерной постановке мы провели в соответствии с работой [4]. Рассматривались задачи Сода [5], Лакса [6] и Шу [7]. Они решались на отрезке $x \in [-1, 1]$, который в начальный момент времени разбивался границей x_b на две части:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}^L, & x \leq x_b, \\ \mathbf{V}^R, & x > x_b. \end{cases}$$

Использовались "исторические" граничные условия - значения величин в граничных точках не менялись со временем.

Четвертый тест - это задача о взаимодействии двух ударных волн [8], которая решалась на отрезке $x \in [0, 1]$. В начальный момент времени отрезок

разбивался на три части:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}^L, & x < 0.1, \\ \mathbf{V}^M, & 0.1 \leq x < 0.9, \\ \mathbf{V}^R, & x \geq 0.9. \end{cases}$$

В этом тесте использовались граничные условия полного отражения. Для реализации таких граничных условий были введены три дополнительные ячейки с состояниями $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_{-1}, \mathbf{V}_{-2}$ для левой границы и три ячейки с состояниями $\mathbf{V}_{N+1}, \mathbf{V}_{N+2}, \mathbf{V}_{N+3}$ для правой. Значения этих состояний на каждом шаге по времени определялись следующим образом:

$$\rho_{-l+1} = \rho_l, \quad u_{-l+1} = -u_l, \quad p_{-l+1} = p_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

$$\rho_{N+l} = \rho_{N-l+1}, \quad u_{N+l} = -u_{N-l+1}, \quad p_{N+l} = p_{N-l+1}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Время счета обозначалось буквой T , количество разностных ячеек - N . Шаг по времени τ вычислялся из условия Куранта с числом Куранта $\sigma = 0.5$ для всех расчетов.

Тест 1 (Задача Сода [5]). Начальные условия для системы уравнений газодинамики имеют вид:

$$\begin{aligned} (\rho^L, u^L, p^L) &= (1, 0, 1), \\ (\rho^R, u^R, p^R) &= (0.125, 0, 0.1), \\ x_b &= 0, \quad N = 100, \quad T = 0.4. \end{aligned}$$

Тест 2 (Задача Лакса [6]). Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} (\rho^L, u^L, p^L) &= (0.445, 0.698, 3.528), \\ (\rho^R, u^R, p^R) &= (0.5, 0, 0.571), \\ x_b &= 0, \quad N = 100, \quad T = 0.32. \end{aligned}$$

Тест 3 (Задача Шу [7]). Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} (\rho^L, u^L, p^L) &= (3.857143, 2.629369, 10.3333), \\ (\rho^R, u^R, p^R) &= (1 + 0.2 \sin(5\pi x), 0, 1), \\ x_b &= -0.8, \quad N = 300, \quad T = 0.36. \end{aligned}$$

Тест 4 (Задача о взаимодействии ударных волн (1D) [8]). Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} (\rho^L, u^L, p^L) &= (1, 0, 10^3), \\ (\rho^M, u^M, p^M) &= (1, 0, 10^{-2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\rho^R, u^R, p^R) &= (1, 0, 10^2), \\ N &= 400, \quad T = 0.038.\end{aligned}$$

На рис. 5-8 представлены результаты данных тестовых расчетов. Точное решение показано сплошной линией. В задаче о взаимодействии ударных волн образуются три области контактного разрыва, средний из которых очень трудно разрешить любыми численными методами (рис. 8).

3.2 2D тесты

Для двумерных расчетов мы выбрали два варианта начальной конфигурации из предложенных в [9]. В первом случае происходит движение и взаимодействие ударных волн (тест 5), во втором - контактных разрывов (тест 6). Двухмерная область $x \times y = [0, 1] \times [0, 1]$ разбивалась на четыре квадрата с разными начальными состояниями. Использовалась разностная сетка $N_x \times N_y = 400 \times 400$ ячеек, число Куранта $\sigma = 0.2$. Значения величин в граничных ячейках задавались путем переноса. Например, для левой границы задавалось:

$$V_{2,j} = V_{3,j}, \quad V_{1,j} = V_{2,j}, \quad j = 1, \dots, N_y.$$

Кроме того, был проведен тест на отражение наклонной ударной волны [10] (тест 7), и решена задача двойного маховского отражения [11] (тест 8).

Тест 5 (Задача о взаимодействии ударных волн (2D) [9]). Начальные условия имеют вид:

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.1, 0, 0, 1.1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (0.5065, 0.8939, 0, 0.35), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (1.1, 0.8939, 0.8939, 1.1), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (0.5065, 0, 0.8939, 0.35), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases}$$

Время счета составило $T = 0.25$.

Тест 6 (Задача о взаимодействии контактных разрывов [9]). Начальные условия имеют вид:

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0.75, -0.5, 1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (2, 0.75, 0.5, 1), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (1, -0.75, 0.5, 1), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (3, -0.75, -0.5, 1), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases}$$

Время счета составило $T = 0.3$.

Тест 7 (Отражение наклонной ударной волны [10]).

Задача решалась в области $x \times y = [0, 4] \times [0, 1]$ на сетке из 60×40 разностных ячеек с числом Куранта $\sigma = 0.4$. Ударная волна инициировалась за счет условий на границах. На нижней границе задавалась твердая стенка, на правой - сверхзвуковое вытекание, слева и вверху фиксировались следующие значения физических переменных:

$$(\rho^L, u^L, v^L, p^L) = (1, 2.9, 0, 1/\gamma),$$

$$(\rho^T, u^T, v^T, p^T) = (1.69997, 2.61934, -0.50632, 1.52819).$$

При таких граничных условиях формируется наклонная ударная волна,двигающаяся от левого верхнего угла и отражающаяся от нижней границы. После 10000 шагов по времени устанавливалась стационарная картина течения.

Тест 8 (Двойное маховское отражение [11]).

Задача решалась в области $x \times y = [0, 4] \times [0, 1]$ на сетке из 480×120 разностных ячеек с числом Куранта $\sigma = 0.4$. Отражающая стенка задавалась на нижней границе на отрезке $(1/6, 0) - (4, 0)$. На эту стенку в точке $(1/6, 0)$ падала ударная волна со скоростью 10 Махов, образуя угол в 60 градусов с осью x . Параметры среды слева и справа от волны брались:

$$(\rho^L, u^L, v^L, p^L) = (8, 7.1447, -4.125, 116.5),$$

$$(\rho^R, u^R, v^R, p^R) = (1.4, 0, 0, 1).$$

В качестве граничных условий на нижней границе на отрезке $(0, 0)-(1/6, 0)$ и на правой границе использовалась линейная экстраполяция величин, на левой границе - сверхзвуковое втекание, вверху - условия, меняющиеся со временем в зависимости от точного движения ударной волны. Расчет проводился до момента времени $T = 0.2$.

На рис. 9-12 представлены результаты данных двумерных расчетов. Для тестов 5, 6 и 8 линиями показаны уровни постоянной плотности. Для теста 7 (рис. 11) приведено давление вдоль линии $y = 0.55$, что соответствует номеру $j = 11$. Точное решение показано сплошной линией.

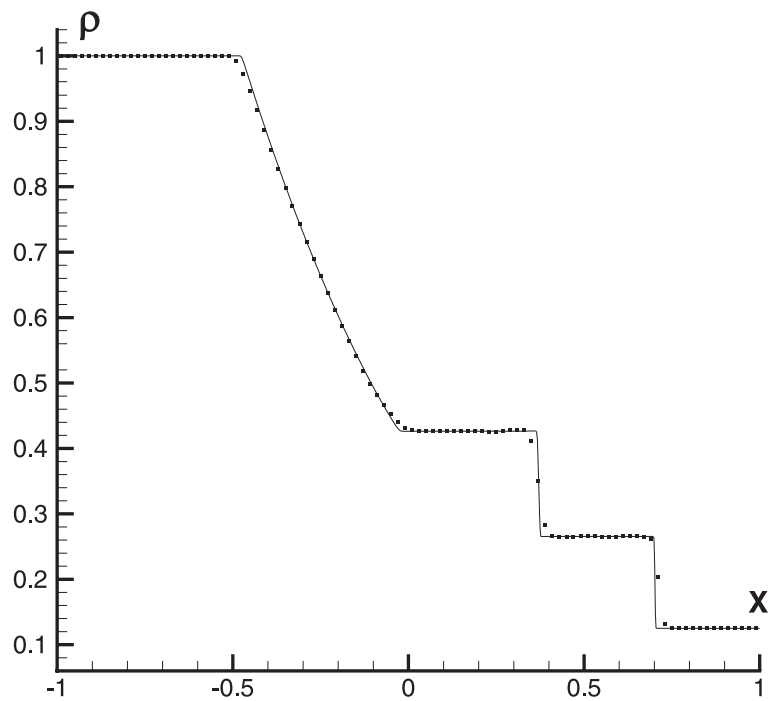


Рис. 5. Задача Сода [5].

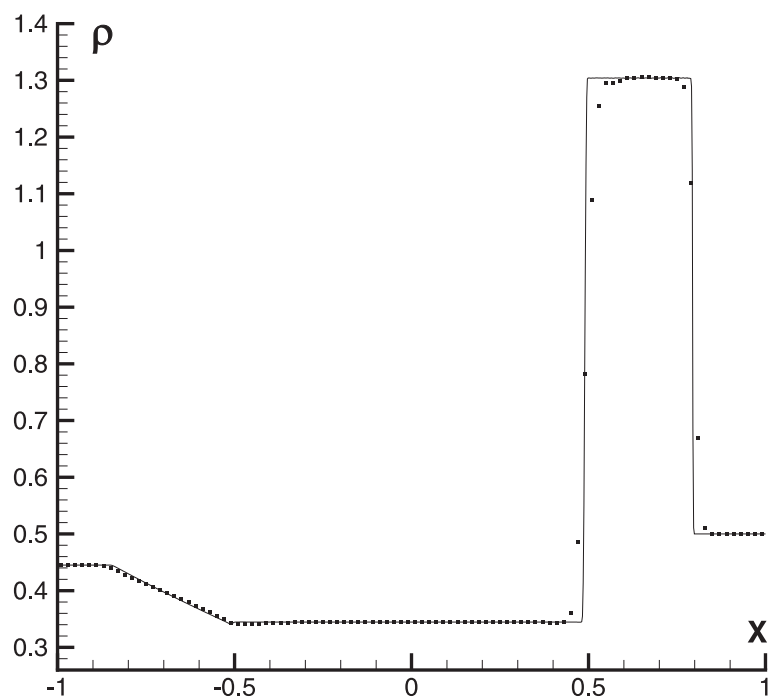


Рис. 6. Задача Лакса [6].

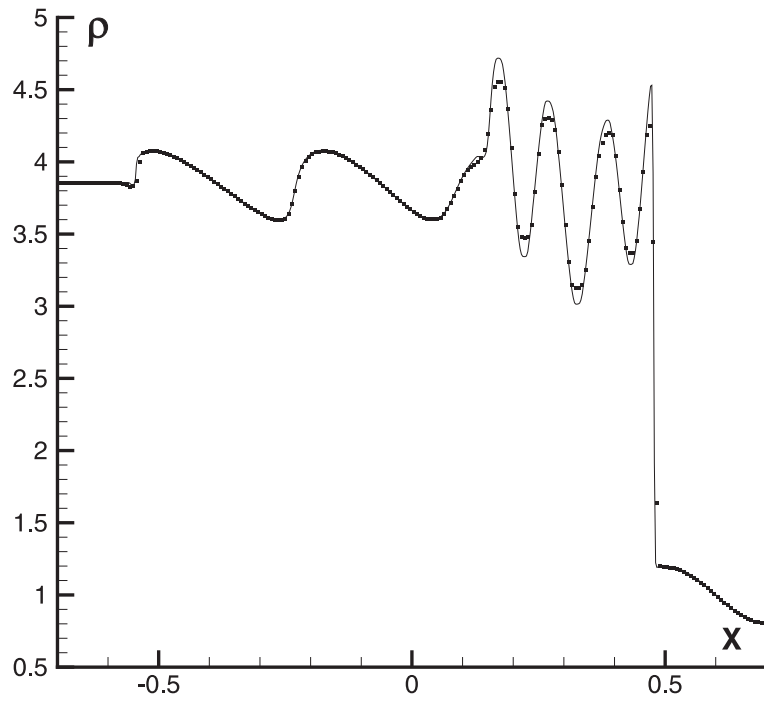


Рис. 7. Задача Шу [7].

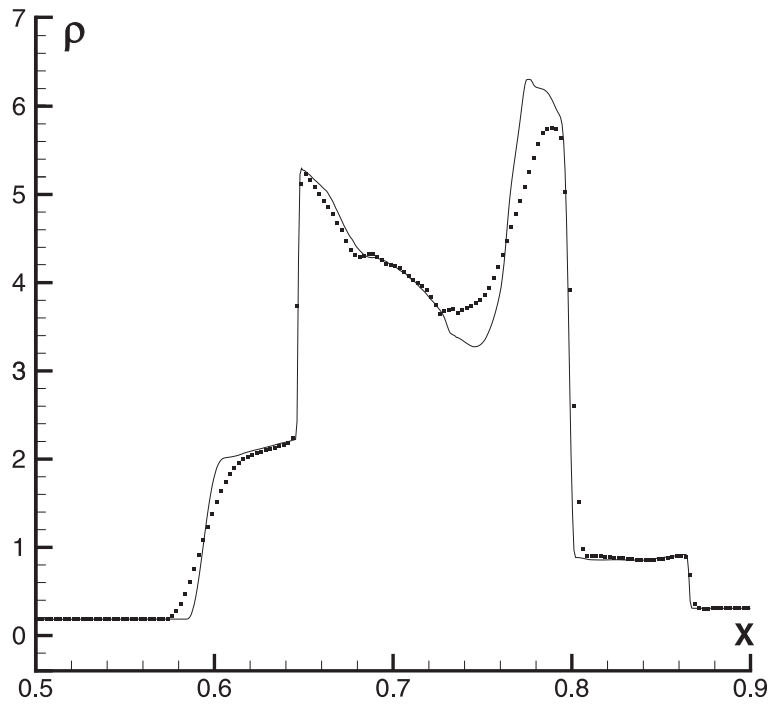


Рис. 8. Задача о взаимодействии ударных волн (1D) [8].

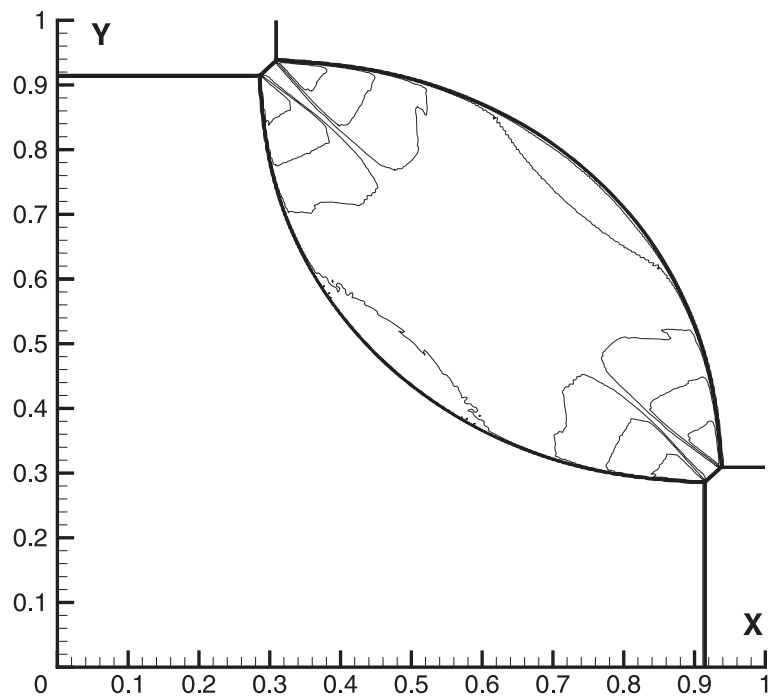


Рис. 9. Задача о взаимодействии ударных волн (2D) [9].

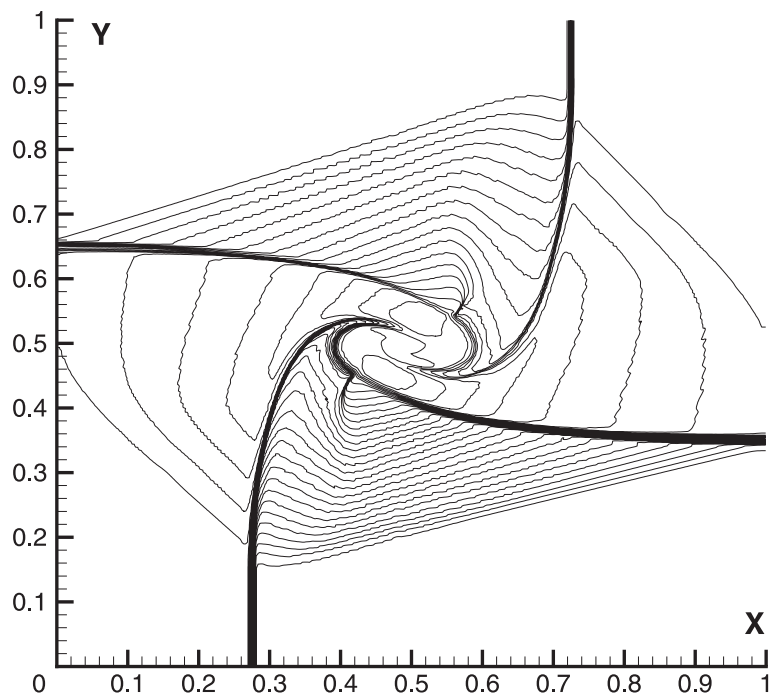


Рис. 10. Задача о взаимодействии контактных разрывов [9].

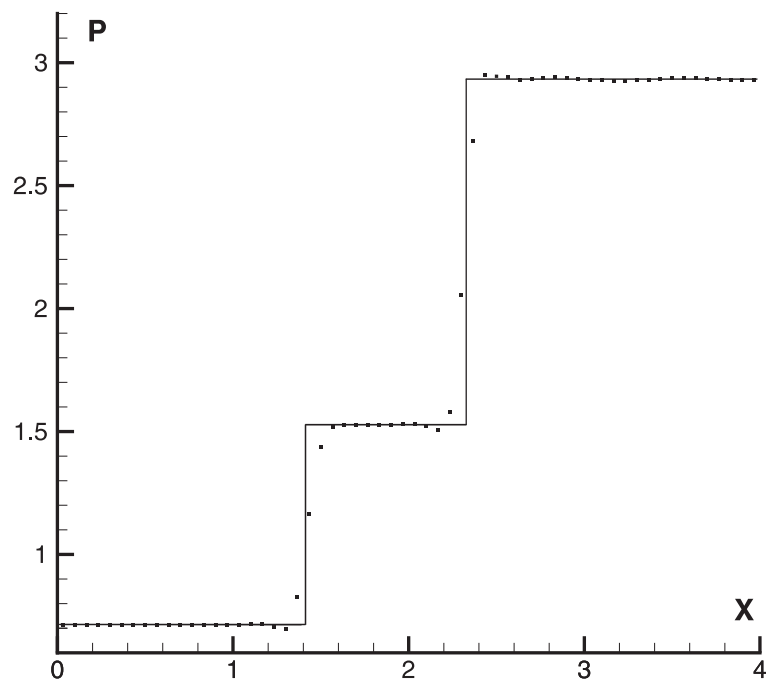


Рис. 11. Отражение наклонной ударной волны [10]. Показано давление вдоль линии $y = 0.55$.

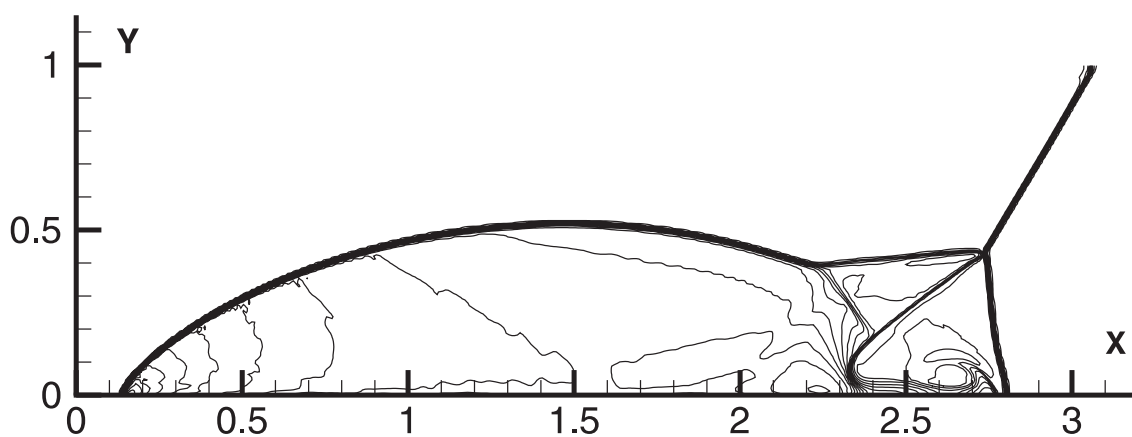


Рис. 12. Задача двойного маховского отражения [11].

4 Заключение

В работе представлена методика решения уравнений газодинамики методом РРМ L , который представляет собой модификацию стандартного кусочно-параболического метода. Данная модификация основана на использовании свойства сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений. Чтобы воспользоваться этим свойством, необходимо линеаризовать систему уравнений газодинамики, зафиксировав базис правых и левых собственных векторов в каждой разностной ячейке. Только в этом случае можно провести характеристический анализ. Как показали тестовые расчеты, выбор состояния, по которому фиксируется базис собственных векторов, практически не влияет на решение.

Для реализации предложенной разностной схемы необходимо решить две задачи. Во-первых, требуется определить граничные значения кусочных парабол в каждой разностной ячейке при переходе к следующему шагу по времени. Отличие метода РРМ L от метода РРМ состоит в том, что теперь, вместо использования интерполяционной процедуры по четырехточечному шаблону для вычисления граничных состояний, они получаются с помощью переноса соответствующих значений амплитуд волн с предыдущего шага по времени вдоль характеристик. При таком подходе для каждой разностной ячейки получаются свои граничные состояния, которые "не сшиты": их значения на одном и том же общем интерфейсе для левой и правой ячейки не совпадают. Для "сшивки" состояний необходимо решить задачу Римана о распаде разрыва между ними. Исключение интерполяционной процедуры позволяет улучшить диссипативные свойства схемы.

Вторая задача состоит в вычислении потоков на границах ячеек. Для общего интерфейса смежных ячеек определяются потоки слева и справа, причем для получения второго порядка аппроксимации по времени при вычислении левого и правого граничного состояния приходится усреднять амплитуды волн по своей области влияния. Поток на границе определяется путем решения еще одной задачи Римана о распаде разрыва. Для решения задач Римана в обоих случаях используется метод Роу, т.к. он относительно прост в реализации и обладает низкой схемной вязкостью. Состояния в центрах ячеек легко определяются через потоки по формуле (2.4).

После того как состояния в центрах разностных ячеек на следующем шаге по времени будут вычислены необходимо переопределить граничные состояния в областях немонотонного решения согласно стандартному методу РРМ и задача решена.

При решении двух- и трехмерных задач имеется еще одно отличие мето-

да PRML от PRM: при вычислении граничных значений кусочных парабол в методе PRML требуется учесть их изменение за счет потоков в соответствующих направлениях. Т.е. при решении системы уравнений газодинамики, например, вдоль направления x требуется учесть производные в направлении y (и z в трехмерной задаче). Эти производные входят в уравнения для амплитуд в виде источников. В этом случае при применении схемы Роу отсутствует феномен "карбункул" [12].

Решение одно- и двухмерных тестовых задач показало, что модифицированный метод сохранил все преимущества метода PRM, обладая при этом более низкими диссипативными свойствами.

Мы также полагаем, что использование локального шаблона в методе PRML упростит алгоритм при решении задач на адаптивных разностных сетках.

Список литературы

- [1] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 65, 21 с.
- [2] *P. Collela, P. Woodward* The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations. *J. Comp. Phys.* **54**, 1984, p. 174.
- [3] *P.L. Roe* Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **18**, 1986, p. 337.
- [4] *A. Suresh, H.T. Huynh* Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge-Kutta time stepping. *J. Comp. Phys.* **136**, 1997, p. 83.
- [5] *G.A. Sod* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.* **27**, 1978, p. 1.
- [6] *P.D. Lax* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Commun. Pure Appl. Math.* **7**, 1954, p. 159.
- [7] *C.-W. Shu* Numerical experiments on the accuracy of ENO and modified ENO schemes. *J. Sci. Comp.* **5**, 1990, p. 127.
- [8] *P. Woodward, P. Collela* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comp. Phys.* **54**, 1984, p. 115.

- [9] *C.W. Schulz-Rinne, J.P. Collins, H.M. Glaz* Numerical solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics. *SIAM J. Sci. Comput.* **14**, 1993, p. 1394.
- [10] *P. Collela* Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.* **87**, 1990, p. 171.
- [11] *P. Woodward, P. Collela* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comp. Phys.* **54**, 1984, p. 115.
- [12] *J.J. Quirk* A Contribution to the Great Riemann Solver Debate. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* **18**, 1994, p. 555.