

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.
III. Одномерная идеальная МГД.

Москва 2006

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

**Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.
III. Одномерная идеальная МГД.**

Аннотация

В работе предложена методика решения системы уравнений идеальной магнитной газодинамики в одномерном случае с помощью кусочно-параболической разностной схемы на локальном шаблоне (PPML). Данная схема является предложенной авторами модификацией стандартного кусочно-параболического метода (PPM). Модификация основана на использовании свойства сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений и позволяет улучшить диссипативные свойства схемы. Проведено тестирование метода PPML на примере нескольких одномерных задач магнитной газодинамики.

S.D. Ustyugov, M.V. Popov

**Piecewise parabolic method on local stencil.
III. 1D ideal MGD.**

Abstract

Technique for solving of ideal MGD system of equations in 1D case with the help of piecewise parabolic method on local stencil (PPML) is suggested. This method is proposed by the authors modification of standard piecewise parabolic method (PPM). The modification is based on the property of Riemann invariants to conserve when moving along the characteristic curves of hyperbolic system of equations and improves the dissipative properties of PPM. Testing of PPML was carried out for some 1D test problems of ideal MGD.

Содержание

1	Введение	3
2	Уравнения идеальной МГД	3
3	Численная схема	7
3.1	Вычисление состояний на границах разностных ячеек	7
3.2	Вычисление состояний в центрах разностных ячеек	9
3.3	Модификация граничных состояний в областях немонотонного решения	11
4	Монотонизация решения в задачах МГД	12
5	Тестирование	14
6	Заключение	25

1 Введение

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (PPML), предложенный авторами, был исследован на примере решения задачи Коши для линейного уравнения переноса и невязкого уравнения Бюргерса в одномерном случае [1]. Была также разработана методика применения PPML для решения задач газодинамики [2]. Предложенный метод является модификацией стандартного кусочно-параболического метода (PPM) [3] и основан на использовании свойства сохранения инвариантов Римана при их переносе вдоль характеристической кривой на следующий шаг по времени для нахождения граничных точек кусочной параболы вместо интерполяционной процедуры по четырехточечному шаблону, применяемой в PPM. За счет использования локального шаблона предложенная модификация позволяет улучшить диссипативные свойства численной схемы и получать более точные решения. Метод PPML удобен также для решения задач на адаптивных разностных сетках.

В данной работе метод PPML будет расширен для решения одномерных задач идеальной магнитной газодинамики. Как и система уравнений газодинамики, система МГД является нелинейной, и для применения характеристического анализа необходимо определить локально в каждой разностной ячейке базис собственных векторов. В этом случае нелинейная задача определения потоков величин на границах ячеек линеаризуется в окрестности каждой границы ячейки, что позволяет использовать кусочно-параболическое распределение физических переменных [2].

Тестирование численной схемы мы проведем на нескольких стандартных задачах МГД.

2 Уравнения идеальной МГД

Система уравнений идеальной МГД выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}), \\ (\rho \mathbf{v})_t = -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{I} \left(p + \frac{B^2}{2} \right) - \mathbf{B} \mathbf{B} \right], \\ \mathbf{B}_t = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ E_t = -\operatorname{div} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right], \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где ρ - плотность, \mathbf{v} - вектор скорости (его компоненты в дальнейшем будем обозначать как u , v и w), p - гидродинамическое давление, \mathbf{B} - вектор

магнитного поля (чтобы не загромождать уравнения (2.1), мы включили множитель $1/\sqrt{4\pi}$ в определение \mathbf{B}), E - полная энергия, γ - показатель адиабаты. Система (2.1) дополняется уравнением для полной энергии

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{2}$$

и уравнением состояния, которое в случае идеального газа имеет вид:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon,$$

где ε - удельная внутренняя энергия.

В одномерном случае уравнение эволюции компоненты B_x магнитного поля превращается тождество - компонента B_x не меняется со временем.

Дивергентная форма системы (2.1), записанная для консервативных переменных и одномерного случая имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, E)^T, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + \bar{p}, \rho uv - B_x B_y, \rho uw - B_x B_z, u B_y - v B_x, \\ u B_z - w B_x, u(E + \bar{p}) - B_x(u B_x + v B_y + w B_z))^T, \quad (2.4)$$

$$\bar{p} = p + \frac{B^2}{2}. \quad (2.5)$$

Все величины в (2.3)-(2.5) зависят только от координаты x и времени t .

Введем обозначения:

$$(b_x, b_y, b_z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (B_x, B_y, B_z), \quad b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2.$$

Тогда скорость звука c , альвеновская скорость c_a , быстрая скорость c_f и медленная скорость c_s запишутся в виде:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}}{\rho}},$$

$$c_a = |b_x|,$$

$$c_{f,s} = \left(\frac{1}{2} (c^2 + b^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 + b^2)^2 - 4c^2 b_x^2} \right)^{1/2}.$$

Для проведения характеристического анализа и построения решения методом РРМЛ систему (2.2) необходимо переписать в физических переменных в квазилинейной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{V} = (\rho, u, v, w, B_y, B_z, p)^T$$

Матрицу A_x можно вычислить через Якобиан консервативной системы $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$:

$$A_x = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} M, \quad (2.7)$$

где M - матрица перехода:

$$M = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \rho v & \rho w & B_y & B_z & \frac{1}{\gamma - 1} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma - 1)u^2}{2} & k u & k v & k w & k B_y & k B_z & (\gamma - 1) \end{pmatrix},$$

где $k = 1 - \gamma$. Матрица A_x , согласно (2.7) имеет вид:

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & B_y/\rho & B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 & -B_x/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & -B_x/\rho & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы матрицы A_x могут иметь сингулярности в точках вырождения собственных значений. Чтобы этого избежать Брио и Бу предложили нормировку вида [4]:

$$(\beta_y, \beta_z) = \begin{cases} \frac{(B_y, B_z)}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} & \text{если } B_y^2 + B_z^2 \neq 0, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$(\alpha_f, \alpha_s) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{c^2 - c_s^2}, \sqrt{c_f^2 - c^2})}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} & \text{если } B_y^2 + B_z^2 \neq 0 \text{ или } \gamma p \neq B_x^2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.10)$$

Собственные значения Якобиана A_x имеют вид:

$$\lambda^{1,7} = u \pm c_f, \quad \lambda^{2,6} = u \pm c_a, \quad \lambda^{3,5} = u \pm c_s, \quad \lambda^4 = u.$$

$\lambda^{1,7}$ соответствуют паре быстрых магнито-акустических волн, $\lambda^{2,6}$ - паре альвеновских волн, $\lambda^{3,5}$ - паре медленных магнито-акустических волн, λ^4 - энтропийной волне.

Левые и правые собственные векторы с учетом нормировки (2.9)-(2.10) имеют вид:

$$\mathbf{l}^{1,7} = \left(0, \pm \frac{\alpha_f c_f}{2c^2}, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} c} \beta_y, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} c} \beta_z, \frac{\alpha_f}{2\rho c^2} \right), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{r}^{1,7} = \left(\rho \alpha_f, \pm \alpha_f c_f, \mp \alpha_s c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_y, \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_f \gamma p \right)^T, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{l}^{2,6} = \left(0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \pm \frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}}, \mp \frac{\beta_y}{\sqrt{2\rho}}, 0 \right), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{r}^{2,6} = \left(0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_z, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_y, 0 \right)^T, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{l}^{3,5} = \left(0, \pm \frac{\alpha_s c_s}{2c^2}, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. - \frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} c} \beta_y, - \frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} c} \beta_z, \frac{\alpha_s}{2\rho c^2} \right), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{r}^{3,5} = \left(\rho \alpha_s, \pm \alpha_s c_s, \pm \alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. - \alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_y, - \alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_s \gamma p \right)^T, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{l}^4 = \left(1, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{c^2} \right), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{r}^4 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \quad (2.18)$$

Записанные таким образом собственные векторы ортонормированны.

3 Численная схема

В методе RPML, как и в исходном RPM, решение на разностной сетке аппроксимируется с помощью кусочных парабол. Для построения решения на каждом шаге по времени необходимо вычислить состояния на границах разностных ячеек и в их центрах. При этом применяется та же методика, что и при решении задач газодинамики [2]. Далее, как и в [1, 2], все величины с целыми индексами (i) будут относиться к центрам разностных ячеек, величины с полуцелыми индексами ($i \pm 1/2$) - к их границам.

3.1 Вычисление состояний на границах разностных ячеек

Разложим вектор-функцию состояния $\mathbf{V}(x, t)$ в ячейке с номером i по локальному базису правых собственных векторов \mathbf{r}^p , фиксированному для данной ячейки:

$$\mathbf{V}(x, t) = \sum_p \alpha^p(x, t) \mathbf{r}^p. \quad (3.1)$$

Коэффициенты $\alpha^p(x, t)$ в разложении (3.1) (амплитуды волн) будут являться инвариантами Римана, сохраняющимися вдоль характеристик системы (2.6). Поэтому значения $\alpha^p(x, t)$ на правой границе ячейки при $x = x_{i+1/2}$ в момент времени $t + \tau$ можно вычислить, зная их значения в момент времени t :

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda^p \tau, t) \quad \text{для } \lambda^p > 0. \quad (3.2)$$

(На состояние на правой границе влияют только те волны внутри ячейки с номером i , которые распространяются вдоль характеристик, отвечающих положительным λ^p .)

В свою очередь, значения амплитуд в момент времени t в (3.2) вычисляются в соответствии с (3.1) путем домножения состояния $\mathbf{V}(x, t)$ в точке $x^p = x_{i+1/2} - \lambda^p \tau$ на соответствующие левые собственные векторы, фиксированные в каждой ячейке i :

$$\alpha^p(x^p, t) = \mathbf{l}^p \cdot \mathbf{V}(x^p, t) \quad \text{для } \lambda^p > 0.$$

Состояние на правой границе ячейки i будет являться левым относительно интерфейса между ячейками i и $i + 1$. Обозначим его как \mathbf{V}^L . После определения амплитуд по формуле (3.2) оно вычисляется по формуле (3.1) путем суммирования по собственным векторам, фиксированным в ячейке i , отвечающим положительным собственным значениям.

Аналогичным образом определяется состояние \mathbf{V}^R справа от интерфейса, при этом в ячейке с номером $i + 1$ рассматриваются характеристики, отвечающие $\lambda^p < 0$. После этого методом Роу [5] решается задача Римана о распаде разрыва между состояниями \mathbf{V}^L и \mathbf{V}^R и вычисляется состояние $\mathbf{V}_{i+1/2}$ на интерфейсе:

$$\mathbf{V}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{V}^L + \mathbf{V}^R}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p(\lambda^{*p} > 0)} \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*) - \frac{1}{2} \sum_{p(\lambda^{*p} < 0)} \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*). \quad (3.3)$$

Значения компонент правых собственных векторов \mathbf{r}^p в (3.3) вычисляются по состоянию \mathbf{V}^* , определяемому с помощью следующих формул:

$$\rho^* = \sqrt{\rho^L \rho^R}, \quad (3.4)$$

$$\xi^* = \frac{\sqrt{\rho^L} \xi^L + \sqrt{\rho^R} \xi^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}}, \quad \text{для } \xi = u, v, w, h \quad (3.5)$$

$$B_x^* = \frac{B_x^L + B_x^R}{2}, \quad (3.6)$$

$$B_{y,z}^* = \frac{B_{y,z}^L / \sqrt{\rho^L} + B_{y,z}^R / \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \sqrt{\rho^L \rho^R}, \quad (3.7)$$

$$p^* = \left(\rho^* h^* - W^* - B^* \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad (3.8)$$

где

$$W^* = \rho^* \frac{(u^*)^2 + (v^*)^2 + (w^*)^2}{2},$$

$$B^* = (B_x^*)^2 + (B_y^*)^2 + (B_z^*)^2,$$

Величина $h = (E + \bar{p})/\rho$ есть удельная энтальпия. Значения амплитуд α^{*p} в (3.3) вычисляются по состоянию \mathbf{V}^* в соответствии с (3.1):

$$\mathbf{V}^* = \sum_p \alpha^{*p} \mathbf{r}^p(\mathbf{V}^*).$$

Таким образом, состояния на границах разностных ячеек определены.

3.2 Вычисление состояний в центрах разностных ячеек

Состояния в центрах ячеек вычисляются с помощью консервативной разностной схемы вида:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\tau}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (3.9)$$

где \mathbf{U} - вектор состояния в консервативных переменных (2.3), τ - шаг по времени. Полуцелый номер шага по времени $n + 1/2$ у потоков \mathbf{F} означает их усреднение по временному шагу, что необходимо для получения второго порядка аппроксимации.

Опишем последовательные шаги, необходимые для вычисления потока $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ на интерфейсе между ячейками с номерами i и $i + 1$.

1. Вычисляем собственные векторы (2.11)-(2.18) в центре ячейки i . (Выбор точки, в которой фиксируются собственные векторы, не оказывает заметного влияния на результаты.)

2. Разлагаем вектор состояния $\mathbf{V}(x)$ в ячейке с номером i , определенный в момент времени t , по базису правых собственных векторов \mathbf{r}_i^p , фиксированных для данной ячейки. Коэффициентами разложения будут являться амплитуды волн.

$$\mathbf{V}(x) = \sum_p \alpha^p(x) \mathbf{r}_i^p = \sum_{p(\lambda^p > 0)} \alpha^p(x) \mathbf{r}_i^p + \sum_{p(\lambda^p < 0)} \alpha^p(x) \mathbf{r}_i^p. \quad (3.10)$$

3. На состояние $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ слева от границы $x = x_{i+1/2}$ в момент времени $t + \tau$ будут влиять только волны, распространяющиеся вдоль характеристик, отвечающих положительным собственным значениям. Домножаем (3.10) на левые собственные векторы \mathbf{l}_i^p , отвечающие $\lambda^p > 0$ и получаем соответствующие амплитуды, как функции координаты x :

$$\alpha^p(x) = \mathbf{l}_i^p \mathbf{V}(x) \quad \text{для } \lambda^p > 0. \quad (3.11)$$

4. Для получения второго порядка аппроксимации потоков по времени необходимо усреднить амплитуды волн (3.11) по своей области влия-

ния. Областью влияния для каждой волны с номером p является отрезок $[x_{i+1/2} - \lambda^p \tau \dots x_{i+1/2}]$.

$$\bar{\alpha}_{i+1/2}^{-p} = \frac{1}{\lambda^p \tau} \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \alpha^p(x) dx = \frac{1}{\lambda^p \tau} \mathbf{l}_i^p \int_{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau}^{x_{i+1/2}} \mathbf{V}(x) dx = \mathbf{l}_i^p \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p}. \quad (3.12)$$

5. Далее используем усредненные амплитуды (3.12) для вычисления состояния $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ слева от границы $x = x_{i+1/2}$:

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^L = \sum_{p(\lambda^p > 0)} \bar{\alpha}_{i+1/2}^{-p} \mathbf{r}_i^p.$$

Можно показать, что справедлива также формула:

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^L = \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,max} + \sum_{p(\lambda^p > 0)} \mathbf{r}^p \left(\mathbf{l}^p \left(\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,p} - \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,max} \right) \right). \quad (3.13)$$

Здесь $\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{L,max}$ - усредненный по своей области влияния вклад в левое граничное состояние за счет волны, распространяющейся вдоль характеристики, отвечающей максимальному собственному значению.

6. Повторяем пункты 1-5 для ячейки с номером $i + 1$ и вычисляем состояние $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$ справа от границы $x = x_{i+1/2}$, при этом рассматриваются волны, распространяющиеся вдоль характеристик, отвечающих отрицательным собственным значениям $\lambda^p < 0$:

$$\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,p} = \frac{1}{|\lambda^p| \tau} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2} - \lambda^p \tau} \mathbf{V}(x) dx,$$

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^R = \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,max} - \sum_{p(\lambda^p < 0)} \mathbf{r}^p \left(\mathbf{l}^p \left(\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,p} - \bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,max} \right) \right). \quad (3.14)$$

Здесь $\bar{\mathbf{V}}_{i+1/2}^{R,max}$ - усредненный по своей области влияния вклад в правое граничное состояние за счет волны, распространяющейся вдоль характеристики, отвечающей максимальному по модулю отрицательному собственному значению.

7. Методом Роу [5] вычисляем поток на интерфейсе:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{F}^L + \mathbf{F}^R}{2} - \frac{1}{2} \sum_p |\lambda^p(\mathbf{V}^*)| \Delta \alpha_{i+1/2}^p \mathbf{r}_{\mathbf{U}}^p(\mathbf{U}^*),$$

где потоки слева и справа от интерфейса вычисляются согласно (2.4) по полученным состояниям (3.13) и (3.14): $\mathbf{F}^L = \mathbf{F}(\mathbf{V}_{i+1/2}^L)$ и $\mathbf{F}^R = \mathbf{F}(\mathbf{V}_{i+1/2}^R)$,

$$\Delta\alpha_{i+1/2}^p = \mathbf{1}^p(\mathbf{V}^*) \left(\mathbf{V}_{i+1/2}^R - \mathbf{V}_{i+1/2}^L \right), \quad (3.15)$$

$\mathbf{r}_{\mathbf{U}}^p = M \mathbf{r}^p$ - правый собственный вектор для консервативной системы МГД (M - матрица перехода (2.8)). При записи (3.15) мы воспользовались свойством

$$\mathbf{1}_{\mathbf{U}}^p \Delta \mathbf{U} = \mathbf{1}^p \Delta \mathbf{V},$$

которое позволило нам обойтись без вычисления левых собственных векторов в консервативных переменных. Компоненты вектора \mathbf{V}^* вычисляются с помощью (3.4)-(3.8) относительно состояний $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ и $\mathbf{V}_{i+1/2}^R$. \mathbf{U}^* - состояние, соответствующее \mathbf{V}^* в консервативных переменных.

3.3 Модификация граничных состояний в областях немонотонного решения

Зная состояния на границах разностных ячеек $\mathbf{V}_{i+1/2}$, вычисленные согласно (3.3), и состояния в их центрах \mathbf{V}_i , вычисленные согласно (3.9) (имеется взаимоднозначное соответствие между простыми и консервативными переменными $\mathbf{V} \rightleftharpoons \mathbf{U}$), мы можем построить $\mathbf{V}(x)$ - решение системы (2.1) на следующем шаге по времени $t + \tau$, аппроксимированное с помощью кусочных парабол.

Однако, если внутри ячейки, например, с номером i компонента $V(x)$ вектор-функции $\mathbf{V}(x)$ немонотонна, следует переопределять значения $V_{i-1/2}$ и $V_{i+1/2}$. Эта процедура предусмотрена в стандартном методе РРМ [3]. Если V_i является локальным максимумом или минимумом, то интерполяционная функция должна быть константой, т.е. $V_{i-1/2} = V_{i+1/2} = V_i$. Если V_i лежит слишком близко к $V_{i-1/2}$ или $V_{i+1/2}$, то интерполяционная функция (парабола) может иметь экстремум внутри разностной ячейки. В этом случае $V_{i-1/2}$ и $V_{i+1/2}$ должны быть выбраны так, чтобы сдвинуть экстремум ее границам. Эти условия можно записать в виде:

$$V_{i-1/2} = V_i, \quad V_{i+1/2} = V_i, \quad \text{если } (V_{i+1/2} - V_i)(V_i - V_{i+1/2}) \leq 0 \quad (3.16)$$

и

$$\begin{aligned} V_{i-1/2} &= 3V_i - 2V_{i+1/2}, & \text{если } \Delta V_i \cdot V_i^{(6)} &> (\Delta V_i)^2, \\ V_{i+1/2} &= 3V_i - 2V_{i-1/2}, & \text{если } \Delta V_i \cdot V_i^{(6)} &< -(\Delta V_i)^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\Delta V_i = V_{i+1/2} - V_{i-1/2}, \quad V_i^{(6)} = 6 \left(V_i - \frac{1}{2} (V_{i-1/2} + V_{i+1/2}) \right).$$

4 Монотонизация решения в задачах МГД

Численная схема, представленная в разделе 3, хорошо работает для задач газодинамики (см. [2]), однако при решении системы уравнений МГД возникают области с сильными осцилляциями. Для подавления осцилляций и получения гладкого решения без потери точности численной схемы мы предлагаем проделать следующие три процедуры:

1. Аппроксимирующую параболу в каждой разностной ячейке будем ограничивать некоторой функцией $\phi(V)$ - лимитером. В этом случае парабола внутри ячейки i для каждой компоненты $V(x)$ состояния $\mathbf{V}(x, t)$ в некоторый момент времени записывается в виде:

$$V(x) = V_i + \phi(V) \left[s_i(x - x_i) + \frac{\sigma_i}{2} \left((x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right) \right], \quad (4.1)$$

где

$$\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \quad s_i = \frac{\Delta V_i}{\Delta x}, \quad \sigma_i = 6 \frac{V_{i+1/2} - 2V_i + V_{i-1/2}}{\Delta x^2}.$$

В качестве лимитера будем использовать функцию следующего вида [6]:

$$\phi(V) = \min \left(1, \frac{|V_i - \max(V_j)|}{|V_i - \max(V_{i-1/2}, V_{i+1/2})|}, \frac{|V_i - \min(V_j)|}{|V_i - \min(V_{i-1/2}, V_{i+1/2})|} \right), \quad (4.2)$$

где $j = i - 2, i - 1, i + 1, i + 2$.

С помощью ограниченной аппроксимирующей параболы (4.1) для каждой ячейки с номером i мы вычисляем новые граничные значения компонент $V_{i-1/2}^R$ и $V_{i+1/2}^L$ (напомним, что индексы $i - 1/2$ и $i + 1/2$ обозначают левую и правую границы ячейки, индексы R и L означают, что вычисленные величины являются компонентами правого и левого состояния относительно этих границ). После данной процедуры кусочные параболы оказываются не сшитыми на границах ячеек: $V_{i+1/2}^L \neq V_{i+1/2}^R \neq V_{i+1/2}$.

2. Далее необходимо еще раз проверить монотонность в каждой разностной ячейке согласно разделу 3.3, воспользовавшись формулами (3.16)-(3.17), заменив в них $V_{i-1/2}$ на $V_{i-1/2}^R$ и $V_{i+1/2}$ на $V_{i+1/2}^L$.

3. Для сохранения третьего порядка точности по пространственной координате вблизи экстремумов воспользуемся методикой, предложенной в [7], позволяющей отличать искусственные локальные экстремумы в областях гладкого решения от естественного разрыва $O(1)$ на фронте ударных волн. Методика была исследована также в работе [8] и применима к любым схемам высокого порядка. Суть ее в том, чтобы правильно определять пределы, в которых допускается изменение компонент граничных состояний

$\mathbf{V}_{i-1/2}^R$ и $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ для каждой разностной ячейки. Однако при решении системы уравнений МГД методом РРМЛ ограничивать нужно не физические переменные, а амплитуды волн. Они вычисляются путем домножения состояний $\mathbf{V}_{i-1/2}^R$ и $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ на соответствующие собственные векторы, фиксированные в каждой ячейке i :

$$\begin{aligned}\alpha_{i-1/2}^p &= \mathbf{l}_i^p \mathbf{V}_{i-1/2}^R, \\ \alpha_{i+1/2}^p &= \mathbf{l}_i^p \mathbf{V}_{i+1/2}^L.\end{aligned}$$

Амплитуды в центрах ячеек вычисляются аналогично:

$$\alpha_i^p = \mathbf{l}_i^p \mathbf{V}_i.$$

Введем функции

$$\begin{aligned}\min\text{mod}(a, b) &= \frac{\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)}{2} \min(|a|, |b|), \\ \min\text{mod}(a, b, c, d) &= \frac{\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b) + \text{sgn}(c) + \text{sgn}(d)}{4} \min(|a|, |b|, |c|, |d|), \\ \text{median}(a, b, c) &= a + \min\text{mod}(b - a, c - a).\end{aligned}$$

Определим меру кривизны амплитуд в центре ячейки с номером i как:

$$d_i^p = \alpha_{i+1}^p - 2\alpha_i^p + \alpha_{i-1}^p.$$

Чтобы найти пределы допустимого изменения амплитуд $\alpha_{i+1/2}^p$ волн, влияющих на состояние $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ слева от правой границы ячейки с номером i при переходе к следующему шагу по времени, необходимо, согласно [7], вычислить следующие величины:

левосторонний верхний предел амплитуды:

$$\alpha_{i+1/2}^{p \text{ ul}} = \alpha_i^p + a (\alpha_i^p - \alpha_{i-1}^p), \quad (4.3)$$

медиана амплитуды:

$$\alpha_{i+1/2}^{p \text{ md}} = \frac{1}{2} (\alpha_i^p + \alpha_{i+1}^p) - \frac{1}{2} d_{i+1/2}^p, \quad (4.4)$$

левостороннее значение амплитуды, определенное для максимальной кривизны:

$$\alpha_{i+1/2}^{p \text{ lc}} = \alpha_i^p + \frac{1}{2} (\alpha_i^p - \alpha_{i-1}^p) + \frac{b}{3} d_{i-1/2}^p. \quad (4.5)$$

В (4.3) параметр a определяется из условия

$$\sigma < \frac{1}{1 + a},$$

где σ - число Куранта. Параметр b в (4.5) характеризует степень изменения величин при использовании больших значений локальной кривизны. Так же как и в [8], мы брали $b = 4$. Способы вычисления величин $d_{i+1/2}^{p\ md}$ и $d_{i-1/2}^{p\ lc}$ обсуждаются в [7, 8]. В наших расчетах мы использовали следующую формулу:

$$d_{i+1/2}^{p\ md} = d_{i+1/2}^{p\ lc} = \min\text{mod} \left(4d_i^p - d_{i+1}^p, 4d_{i+1}^p - d_i^p, d_i^p, d_{i+1}^p \right).$$

После того как величины (4.3)-(4.5) вычислены, пределы допустимого изменения амплитуд $\alpha_{i+1/2}^p$ определяются как

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1/2}^{p\ min} &= \max \left[\min \left(\alpha_i^p, \alpha_{i+1}^p, \alpha_{i+1/2}^{p\ md} \right), \min \left(\alpha_i^p, \alpha_{i+1/2}^{p\ ul}, \alpha_{i+1/2}^{p\ lc} \right) \right] \\ \alpha_{i+1/2}^{p\ max} &= \min \left[\max \left(\alpha_i^p, \alpha_{i+1}^p, \alpha_{i+1/2}^{p\ md} \right), \max \left(\alpha_i^p, \alpha_{i+1/2}^{p\ ul}, \alpha_{i+1/2}^{p\ lc} \right) \right] \end{aligned}$$

Амплитуды волн, влияющие на состояние $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$, сохраняющие монотонность решения определяются по формуле:

$$\alpha_{i+1/2}^p = \text{median} \left(\alpha_{i+1/2}^p, \alpha_{i+1/2}^{p\ min}, \alpha_{i+1/2}^{p\ max} \right). \quad (4.6)$$

После того, как амплитуды (4.6) определены, состояние $\mathbf{V}_{i+1/2}^L$ вычисляется согласно формуле:

$$\mathbf{V}_{i+1/2}^L = \sum_{p\ (\lambda^p > 0)} \alpha_{i+1/2}^p \mathbf{r}_i^p.$$

Аналогичным образом вычисляется состояние $\mathbf{V}_{i-1/2}^R$ справа от левой границы ячейки с номером i .

5 Тестирование

Представленная численная схема была протестирована на примере нескольких стандартных задач МГД. Все расчеты проводились на отрезке $x \in [0 \dots 1]$. Отрезок делился пополам, начальные значения физических переменных задавались слева и справа:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{V}^L, & x \leq 0.5, \\ \mathbf{V}^R, & x > 0.5. \end{cases}$$

Шаг по времени τ определялся из условия Куранта

$$\tau = \sigma \frac{\Delta x}{\max_i (|u_i| + (c_f)_i)}$$

с числом Куранта $\sigma = 0.5$. Время счета обозначалось буквой T , количество разностных ячеек - N , в выражении (4.3) использовался параметр $a = 1$. Применялись "исторические" граничные условия - значения величин в граничных точках не менялись со временем.

Тест 1 В задаче демонстрируется решение системы (2.1), состоящее из быстрой волны разрежения,двигающейся налево, промежуточной ударной волны и медленной волны разрежения, контактного разрыва, медленной ударной волны и еще одной быстрой волны разрежения,двигающихся направо. Промежуточная ударная волна и медленная волна разрежения формируют структуру, которая называется составной волной (compound wave). Подробное обсуждение данного решения содержится в [4, 9].

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}(\rho^L, u^L, v^L, w^L, B_y^L, B_z^L, p^L) &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1), \\(\rho^R, u^R, v^R, w^R, B_y^R, B_z^R, p^R) &= (0.125, 0, 0, 0, -1, 0, 0.1).\end{aligned}$$

Компонента магнитного поля $B_x = 0.75$, показатель адиабаты $\gamma = 2$, $N = 512$, $T = 0.1$. Результаты расчетов представлены на рис. 1-5.

Тест 2 Задача демонстрирует ситуацию с вращением компонент магнитного поля. Решение состоит из двух быстрых ударных волн, скорости которых составляют 1.22 и 1.28 чисел Маха, двух медленных ударных волн,двигающихся со скоростями 1.09 и 1.07 чисел Маха, двух вращательных и одного контактного разрыва. Задача обсуждается в [10].

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}(\rho^L, u^L, v^L, w^L, B_y^L, B_z^L, p^L) &= (1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 3.6, 2, 0.95), \\(\rho^R, u^R, v^R, w^R, B_y^R, B_z^R, p^R) &= (1, 0, 0, 0, 4, 2, 1).\end{aligned}$$

$B_x = 2$, $\gamma = 5/3$, $N = 512$, $T = 0.2$. Результаты расчетов представлены на рис. 6-12.

Тест 3 Решение состоит из двух быстрых ударных волн,двигающихся налево и направо со скоростями 1.84 и 2.01 Маха соответственно, двух медленных ударных волн,двигающихся налево и направо со скоростями 1.38 и 1.49 Маха соответственно, одного вращательного и двух контактных разрывов. Задача обсуждается в [11].

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}(\rho^L, u^L, v^L, w^L, B_y^L, B_z^L, p^L) &= \\&= (0.18405, 3.8964, 0.5361, 2.4866, 2.394, 1.197, 0.3641), \\(\rho^R, u^R, v^R, w^R, B_y^R, B_z^R, p^R) &= (0.1, -5.5, 0, 0, 2, 2, 0.1).\end{aligned}$$

$B_x = 4$, $\gamma = 5/3$, $N = 400$, $T = 0.15$. Результаты расчетов представлены на рис. 13-19.

На рис. 1-19 сплошной линией показано точное решение. Оно получено с помощью расчетов на более подробной сетке: $N = 5120$ для тестов 1 и 2, и $N = 4000$ для теста 3.

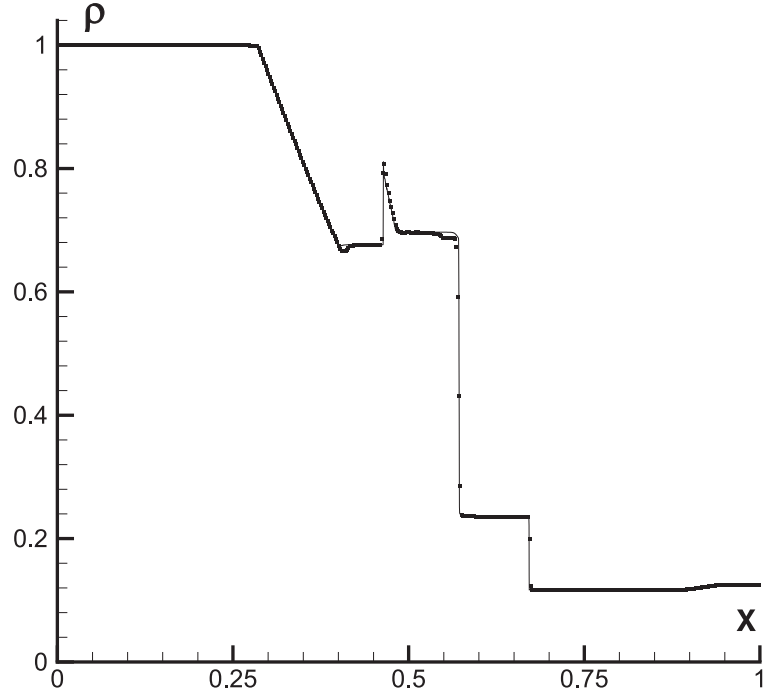


Рис. 1. Тест 1: плотность.

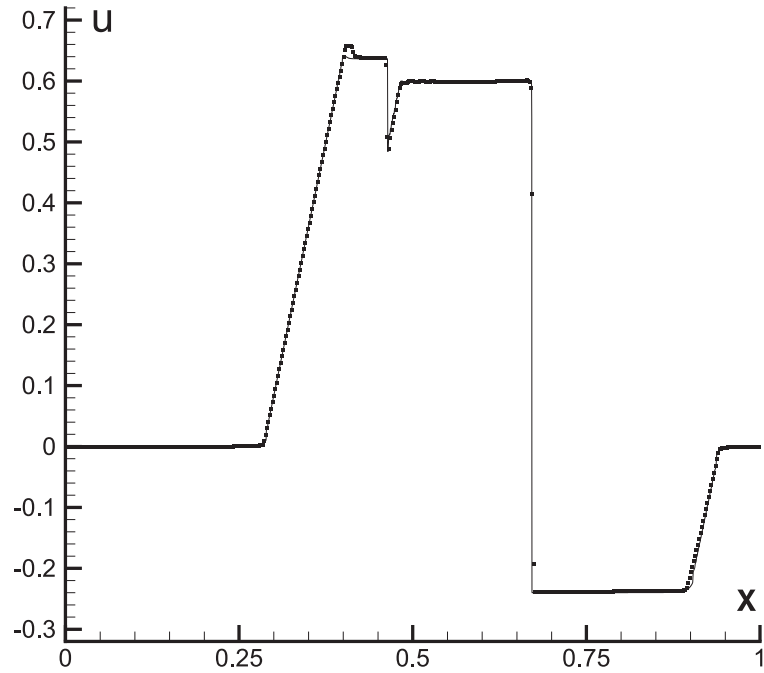


Рис. 2. Тест 1: компонента u скорости.

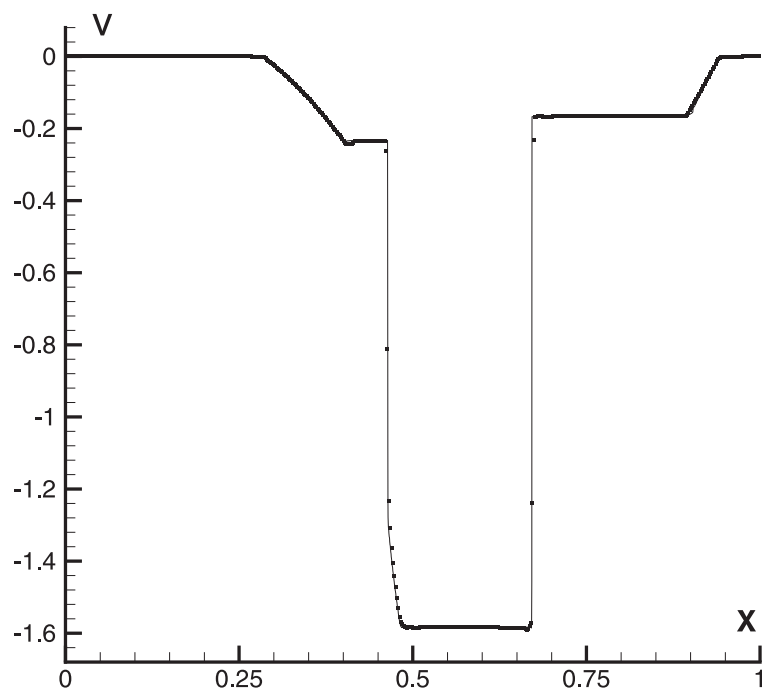


Рис. 3. Тест 1: компонента v скорости.

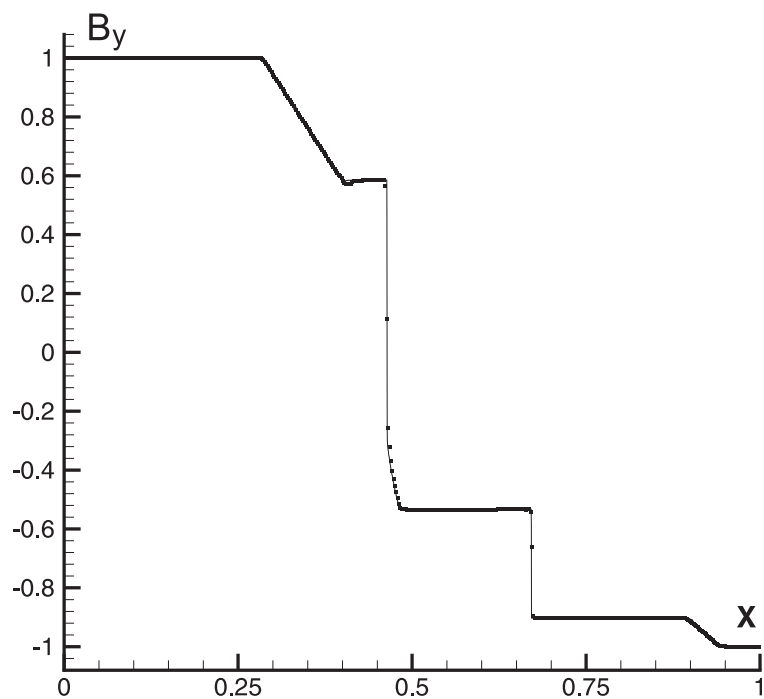


Рис. 4. Тест 1: компонента B_y магнитного поля.

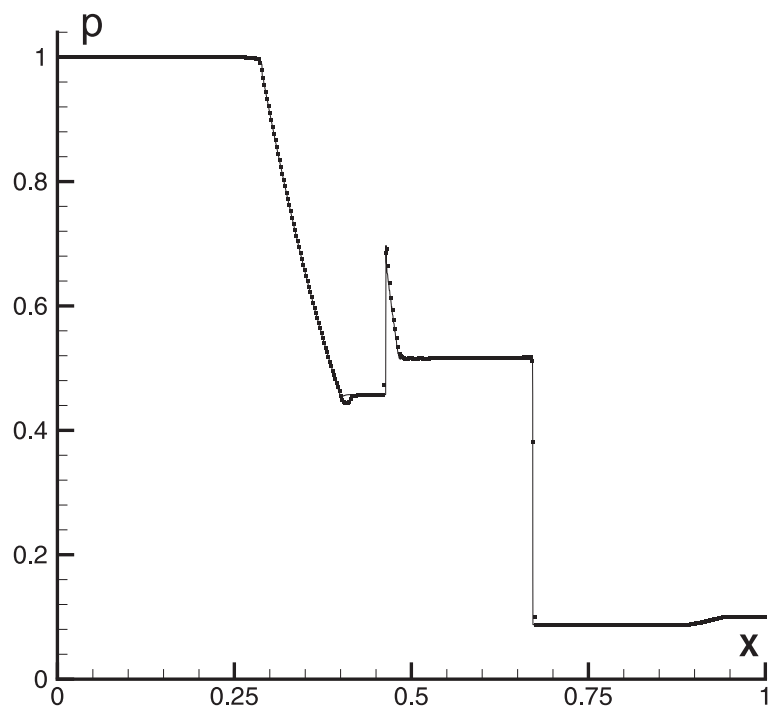


Рис. 5. Тест 1: давление.

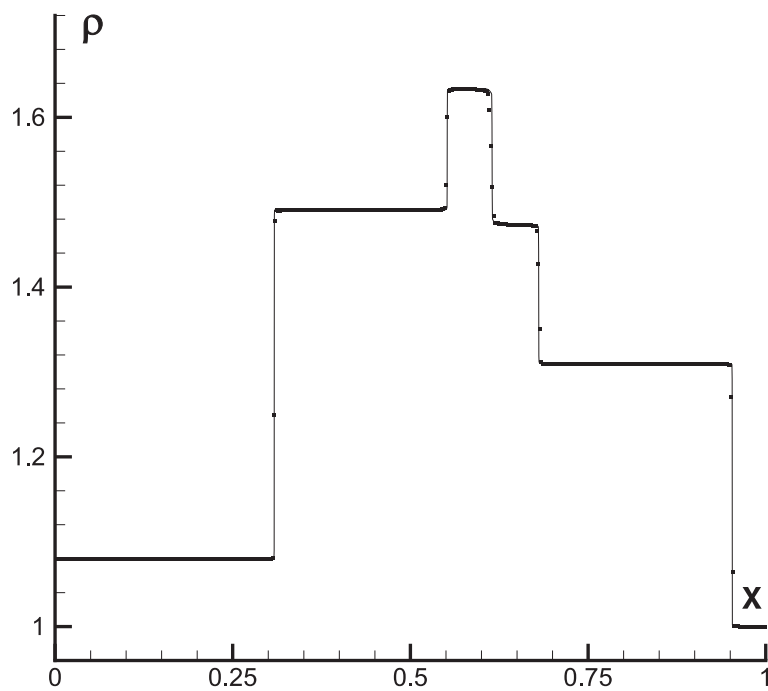


Рис. 6. Тест 2: плотность.

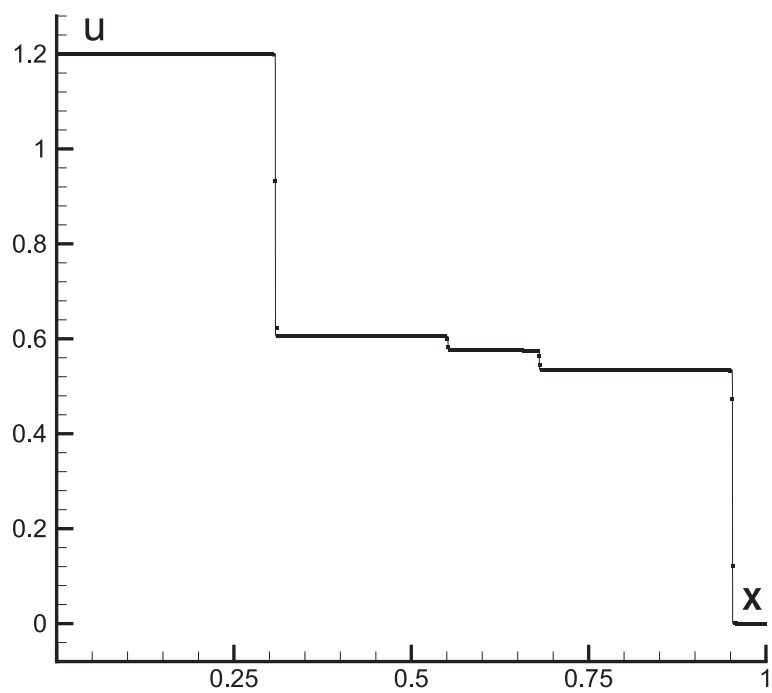


Рис. 7. Тест 2: компонента u скорости.

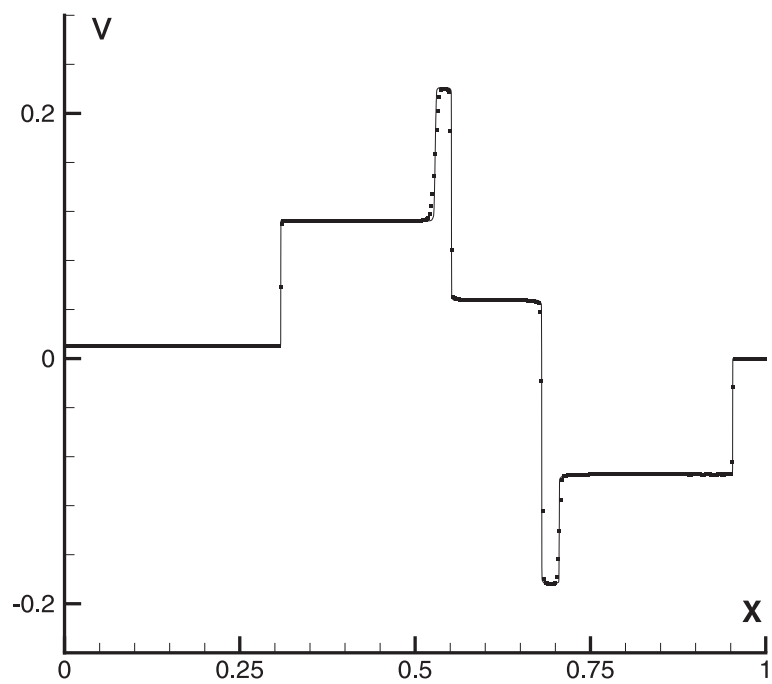


Рис. 8. Тест 2: компонента v скорости.

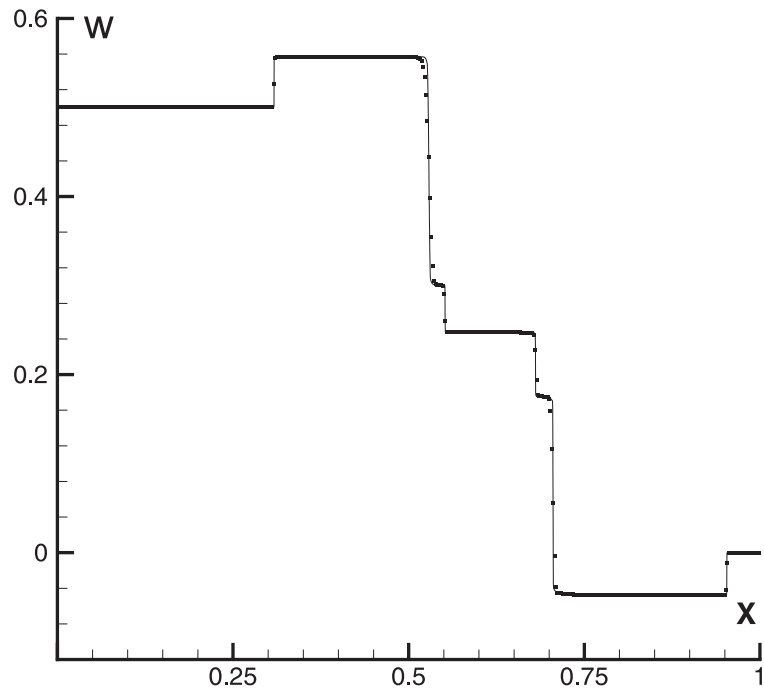


Рис. 9. Тест 2: компонента w скорости.

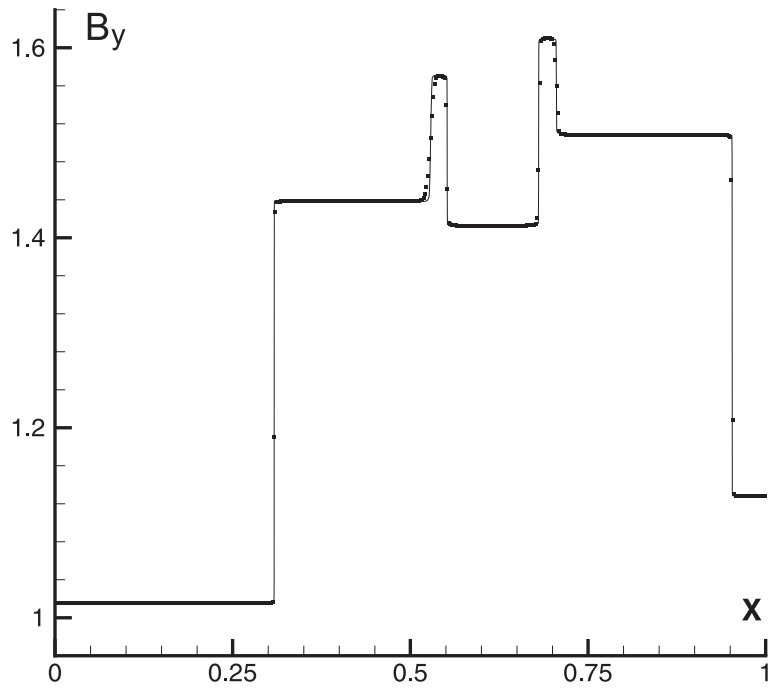


Рис. 10. Тест 2: компонента B_y магнитного поля.

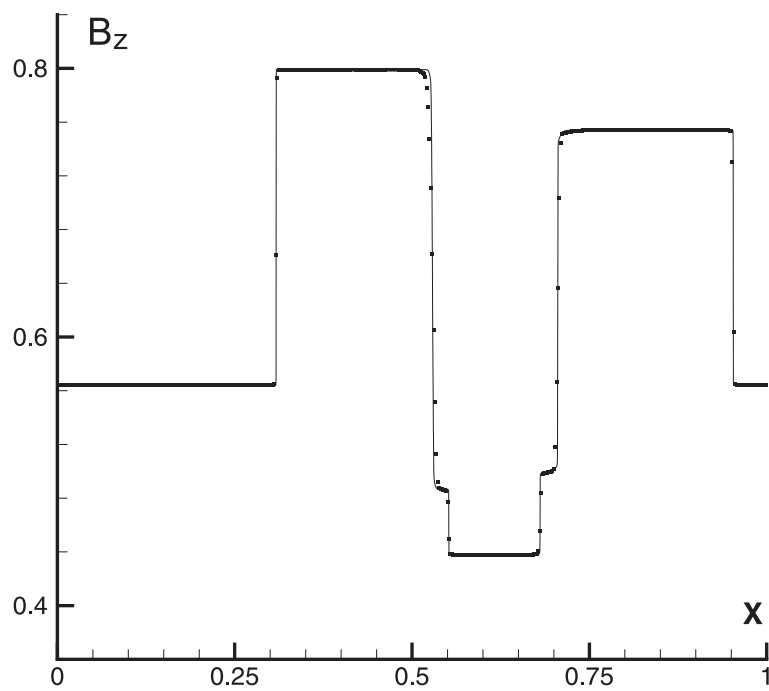


Рис. 11. Тест 2: компонента B_z магнитного поля.

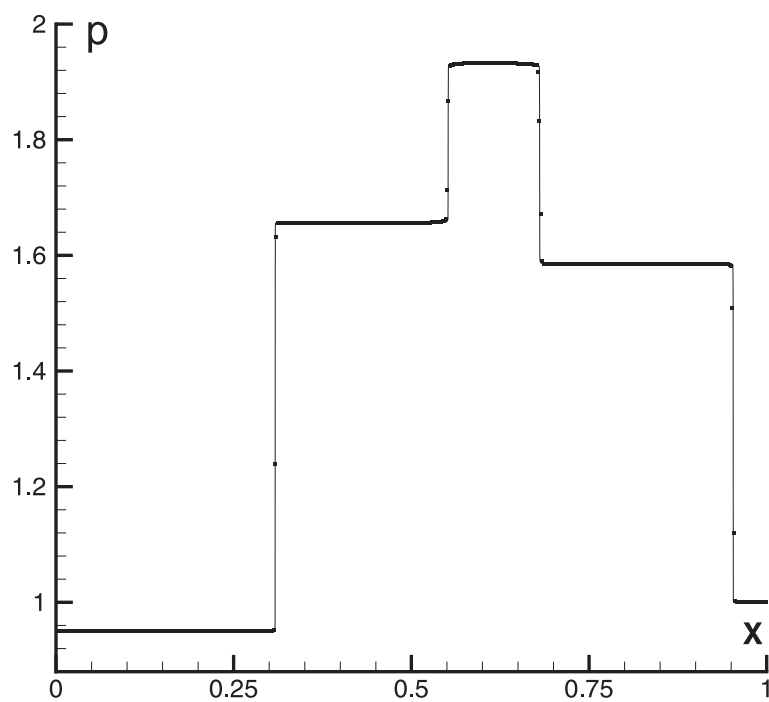


Рис. 12. Тест 2: давление.

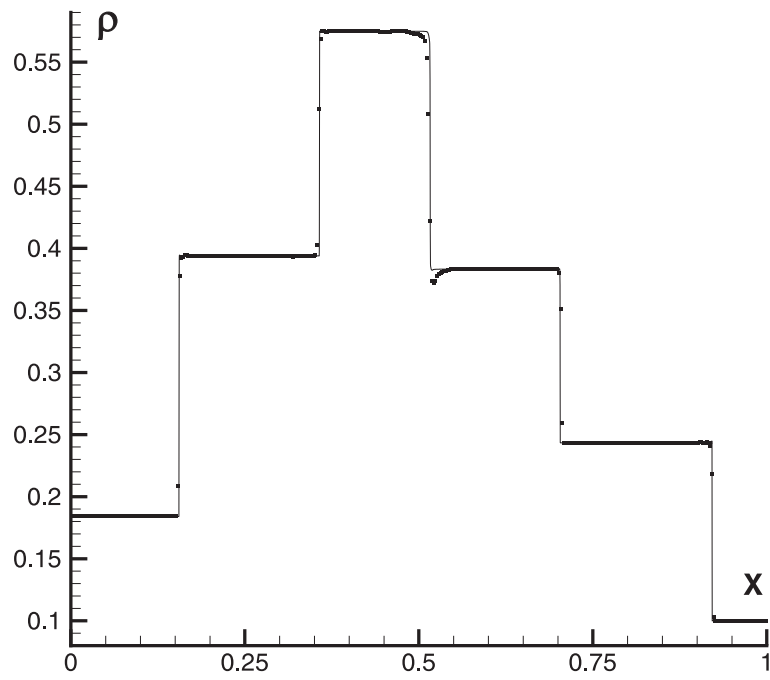


Рис. 13. Тест 3: плотность.

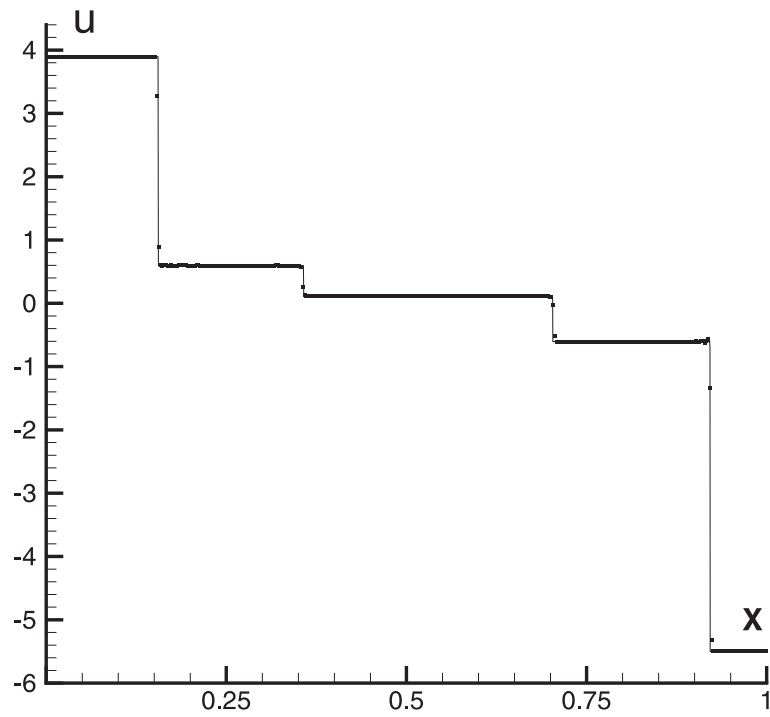


Рис. 14. Тест 3: компонента u скорости.

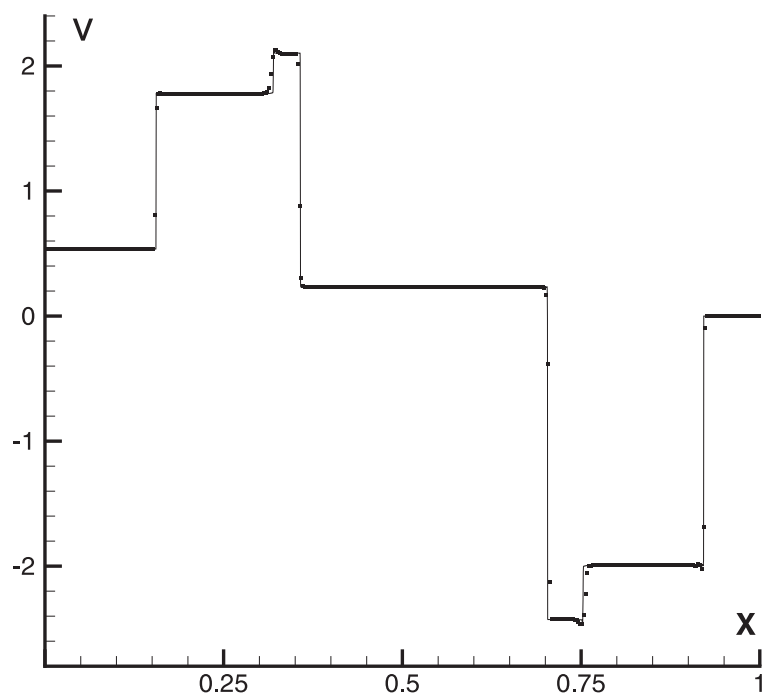


Рис. 15. Тест 3: компонента v скорости.

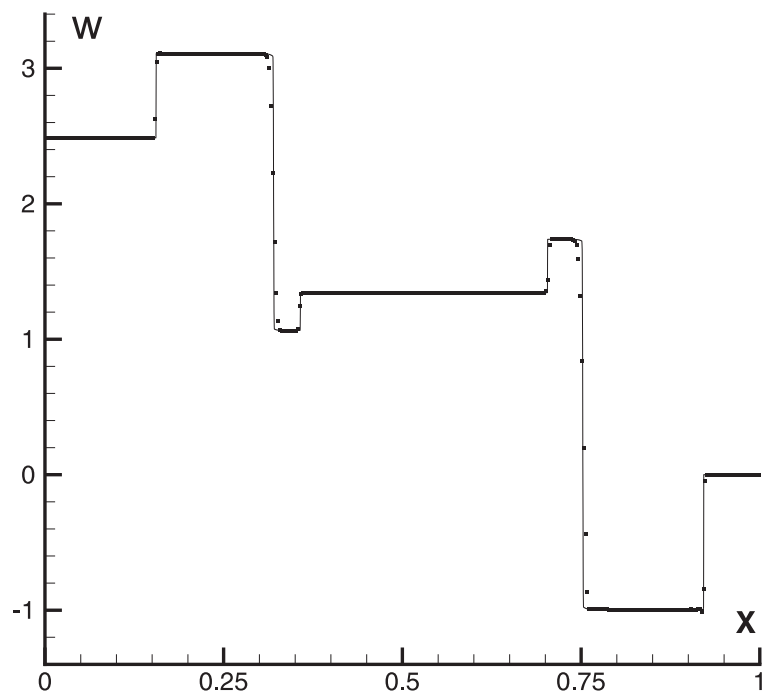


Рис. 16. Тест 3: компонента w скорости.

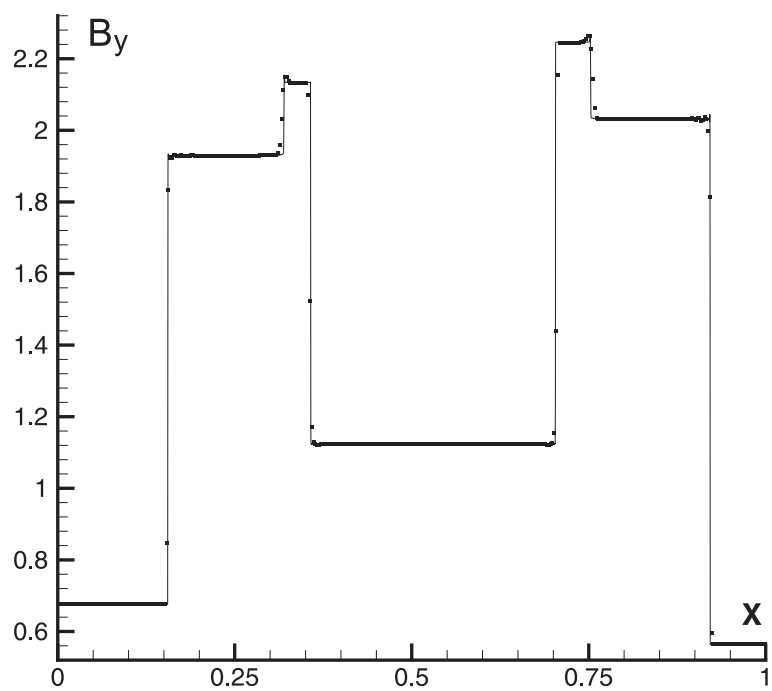


Рис. 17. Тест 3: компонента B_y магнитного поля.

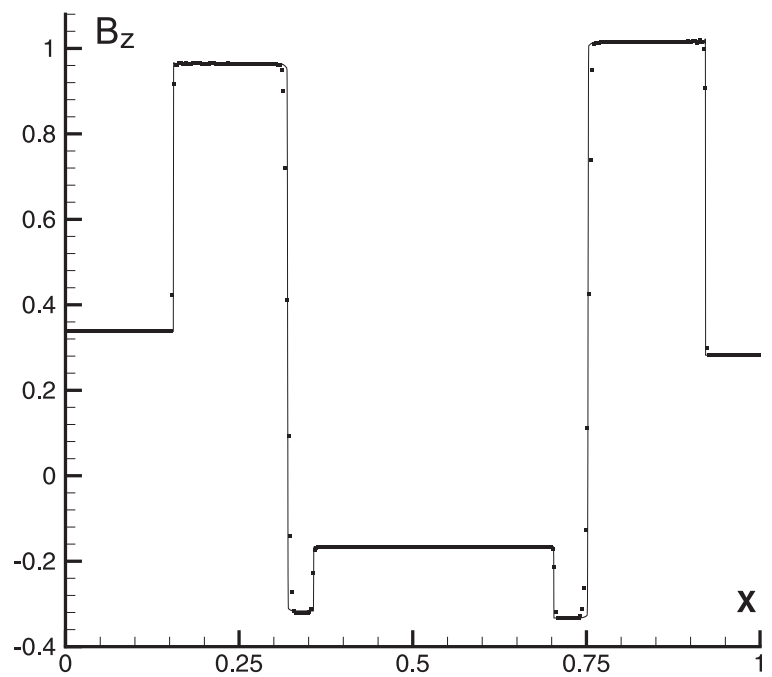


Рис. 18. Тест 3: компонента B_z магнитного поля.

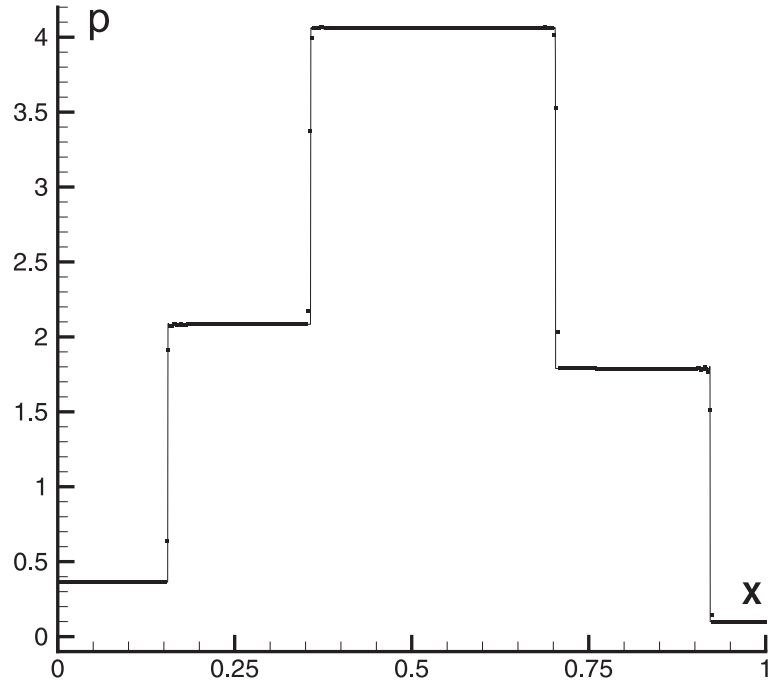


Рис. 19. Тест 3: давление.

6 Заключение

В работе представлена численная схема для решения задач одномерной идеальной МГД методом PRML. Как и в случае уравнений газодинамики, для применения характеристического анализа и построения решения методом PRML необходимо фиксировать в каждой разностной ячейке базис собственных векторов. В этом случае система уравнений МГД (2.1) линеаризуется. Для вычисления состояний в центрах и на границах разностных ячеек применялась та же методика, которая использовалась для решения задач газодинамики (разделы 3.1 и 3.2). Однако учет магнитного поля в уравнениях значительно усложнил численную схему. Оказалось, что для получения гладкого решения стандартной процедуры монотонизации (раздел 3.3), предусмотренной методом PRM, недостаточно. Для подавления искусственных осцилляций было предложено проделать три дополнительных процедуры (раздел 4):

1. Ограничить кусочные параболы с помощью лимитеров вида (4.2) и вычислить новые граничные состояния для каждой разностной ячейки. После этого кусочные параболы оказываются не сшитыми на границах ячеек:

$$V_{i+1/2}^L \neq V_{i+1/2}^R \neq V_{i+1/2}.$$

2. Еще раз применить процедуру монотонизации согласно разделу 3.3.

3. Определить пределы допустимого изменения амплитуд волн, по которым вычисляются граничные состояния.

Использование всех трех перечисленных выше процедур позволяет получить гладкое решение для любых задач идеальной МГД без понижения порядка численной схемы. Однако заметим, что в некоторых случаях достаточно использовать только ограничение с помощью лимитеров согласно пункту 1. Иногда методику пункта 3 достаточно применить для ограничения самих физических величин, как предлагается в [7], а не амплитуд волн.

Необходимо также отметить, что процедуры монотонизации, представленные в разделе 4, не дают вклада в диссипацию схемы, т.к. значения справа и слева на границах разностных ячеек вычисляются точно на локальном шаблоне с помощью метода характеристик. Это подтверждается проведенными тестовыми расчетами. Они показали, что метод PRML дает очень хорошее представление всех разрывов. На фронте ударных волн лежит всего 1-2 точки, на контактных и вращательных разрывах - 3-4 точки.

Список литературы

- [1] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 65, 21 с.
- [2] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. II. Уравнения газодинамики. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 71, 22 с.
- [3] *P. Collela, P. Woodward* The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations. *J. Comp. Phys.* **54**, 1984, p. 174.
- [4] *M. Brio, C.C. Wu* An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **75**, 1988, p. 400.
- [5] *P.L. Roe* Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **18**, 1986, p. 337.
- [6] *T.J. Barth* On unstructured grids and solvers, in *Computational Fluid Dynamics* (Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1990), Lecture Series 1990-04.
- [7] *A. Suresh, H.T. Huynh* Accurate monotonicity preserving scheme with Runge–Kutta time-stepping. *J. Comp. Phys.* **136**, 1997, p. 83.

- [8] *D.S. Balsara, Chi-Wang Shu* Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy. *J. Comp. Phys.* **160**, 2000, p. 405.
- [9] *G.-S. Jiang, C.C. Wu* A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **150**, 1999, p. 561.
- [10] *W. Dai, P. Woodward* An approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **111**, 1994, p. 354.
- [11] *W. Dai, P. Woodward* Extension of the piecewise parabolic method to multidimensional ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **115**, 1994, p. 485.