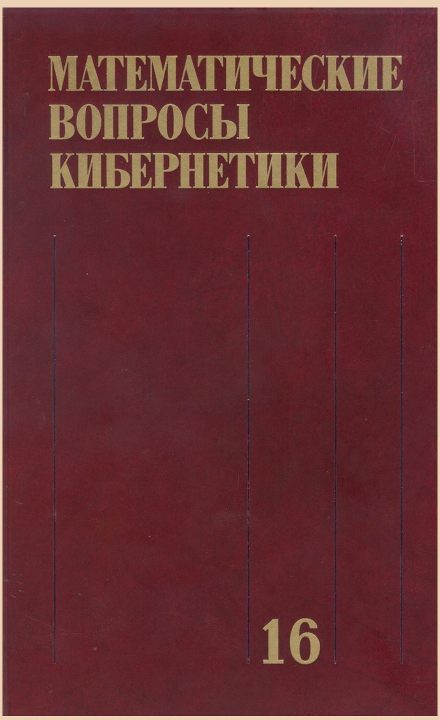

В. А. Буевич,
М. А. Подколзина

Критерий полноты S-множеств детерминированных функций

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ S-МНОЖЕСТВ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. БУЕВИЧ, М. А. ПОДКОЛЗИНА

(МОСКВА)

Введение

Одной из важных проблем, рассматриваемых в математической кибернетике, является проблема полноты для функциональных систем. Функциональная система представляет собой множество функций и множество операций над этими функциями. Проблема полноты для функциональной системы состоит в описании всех таких подмножеств функций, используя которые с помощью операций функциональной системы можно выразить все принадлежащие функциональной системе функции.

Центральное место среди функциональных систем принадлежит функциональным системам, представляющим собой множество детерминированных функций с определенными на этом множестве операциями суперпозиции и обратной связи. В свою очередь эти функциональные системы могут быть разделены на два типа: истинностные функциональные системы и последовательностные функциональные системы. В первом случае функции, принадлежащие функциональной системе, вычисляются без использования, а во втором — с использованием «памяти».

Важнейшими примерами истиностных и последовательностных функциональных систем, являются k-значные логики, с одной стороны, и функциональные системы автоматных функций, с другой. Отличительной чертой этих функциональных систем является возможность с их помощью аппроксимировать функции, принадлежащие произвольным функциональным системам: k-значные логики за счет увеличения числа k аппроксимируют логики любой значности, т. е. любые истиностные функциональные системы, а функциональные системы автоматных функций с конечной памятью и ограниченным временем вычислений могут аппроксимировать все последовательностные функциональные системы. Кроме того, аппроксимационный подход к изучению функциональных систем дискретных функций обладает еще одной важной особенностью. Он позволяет аппроксимировать операцию обратной связи через операцию суперпозиции. Таким образом, с аппроксимационной точки зрения изучение функциональных систем дискретных функций сводится к изучению двух центральных моделей — k-значных логик с операциями суперпозиции и функциональных систем автоматных функций с конечной памятью, ограниченным временем вычислений и также с операциями суперпозиции. Тем самым эти две модели являются ключевыми в теории функциональных систем дискретных функций.

Для k-значных логик — функциональных систем P_k, основная проблема в теории функциональных систем — проблема полноты была решена. Усилиями многих авторов (Е. Пост, С. В. Яблонский, А. В. Кузнецов, А. И. Мальцев, Ло-Чжу-Кай, И. Розенберг и др.) были последовательно в явном виде построены все предполные классы в P_k, образующие минимальную критериальную систему для распознования полноты систем функций k-значных логик. Важно отметить, что для явного задания множества предполных классов в P_k был использован аппарат сохранения функциями k-значных логик отношений. Именно на этом пути И. Розенбергом было проведено завершающее построение множества всех предполных классов в k-значных логиках [15, 16].

В данной работе проблема полноты рассматривается в последовательностной функциональной системе P_k^τ, элементами которой являются детерминированные функции, определенные на словах длины τ, составленных из букв алфавита $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Заметим, что каждая такая функция может быть «вычислена» конечным автоматом за первые τ тактов его работы. Из определения детерминированных функций [11, 13] следует, что проблема полноты в k-значных логиках эквивалентна проблеме полноты в P_k^1, т. е. при $\tau = 1$. Вместе с тем, при $\tau \geqslant 2$ существует принципиальное различие между функциональной системой, элементами которой являются функции k-значных логик, и функциональной системой P_k^1. Множество всех детерминированных отображений, рассматриваемых на словах длины τ, порождает специальное замкнутое подмножество в k^τ-значных логиках, существенно зависящее от двух параметров — параметра k и параметра τ. Используя естественную аналогию между проблемой полноты в P_k^τ и проблемой полноты в конечнопорожденных замкнутых классах k^τ-значной логики, можно ввести понятие предполного класса в P_k^τ и показать, что всякое множество является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда оно целиком не содержится ни в одном из предполных в P_k^τ классов; совокупность предполных классов в P_k^τ конечна, может быть описана эффективно и образует минимальную критериальную систему для распознавания полноты систем функций из P_k^τ; при этом множество предполных классов в P_k изоморфно некоторому подмножеству предполных классов в P_k^τ.

В общем случае для любых $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$ задача о полноте в P_k^τ решена в [1–4]. В терминах сохранения отношений описаны все предполные классы в P_k^τ. Однако это описание оказалось довольно сложным. В частности, отношения, классы сохранения которых совпадают с предполными в P_k^τ классами, могут иметь любую арность от 1 до k^τ, а их число даже при малых k и τ очень велико. В связи с этим естественной представляется задача об исследовании на полноту систем детерминированных функций, которые обладали бы некоторыми наперед заданными и вместе с тем достаточно общими свойствами. В предлагаемой работе рассматривается задача о полноте в P_k^τ так называемых S-множеств, состоящих только из S-функций — детерминированных функций, вычисляемых конечными автоматами, в каждом состоянии которых реализуется функция k-значной логики, принимающая все k значений. Легко видеть, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^τ существует S-функция $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, также принадлежащая P_k^τ, такая, что $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n, x_n)$. По аналогии с общим случаем введено понятие S-предполного в P_k^τ класса и показано, что произвольное S-множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не содержится ни в одном из S-предполных в P_k^τ классов. Таким образом, возникает задача об описании множества всех S-предполных в P_k^τ классов. Отметим, что эта задача в случае, когда $\tau = 1$, т. е. для k-значных логик, была впервые поставлена и решена В. Б. Кудрявцевым [9, 10]. Авторами настоящей работы с использованием аппарата сохранения отношений для любых $k \geqslant 2$

и $\tau \geqslant 1$ представлено описание всех S-предполных классов в P_k^τ. Оказалось, что совокупность отношений, классы сохранения которых совпадают с S-предполными, распадается на шесть семейств — семейства $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$. Семейство $Z(k,\tau)$ состоит из унарных отношений; отношения, принадлежащие семействам $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$ бинарны; отношения, принадлежащие семейству $L(k,\tau)$, имеют арность, равную четырем; при этом семейства $Z(k,1)$, $D(k,1)$, $N(k,1)$, $I(k,1)$ и $L(k,1)$ совпадают с теми, которые описаны в [9, 10]. Заметим, что каждый S-предполный в P_k^τ класс является в то же время одним из предполных классов в P_k^τ, однако описание S-предполных классов значительно проще, чем описание всех предполных классов в P_k^τ, полученное в [1–4].

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору С. В. Алёшину и к. ф.-м. н. П. А. Пантелееву, прочитавшим рукопись данной работы и сделавшим ряд полезных замечаний, а также профессору В. Б. Кудрявцеву за внимание к ней.

§ 1. Основные понятия и результаты

Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Пусть E_k^τ — множество всех слов длины τ, составленных из элементов E_k. Произвольный элемент a, принадлежащий множеству E_k^τ будем обозначать следующим образом: $a = (a(1), \ldots, a(\tau))$. Пусть $x, x_1, \ldots, y, y_1, \ldots$ — переменные, принимающие значения из E_k^τ. Всякую такую переменную (например, x) представим в виде $x = (x(1), \ldots, x(\tau))$. Для любого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$ на множестве E_k^τ введем отношение t-эквивалентности. Элементы a_1 и a_2 из E_k^τ назовем *t-эквивалентными* ($a_1 \sim^t a_2$), если $a_1(1) = a_2(1)$, ..., $a_1(t) = a_2(t)$.

Определение. Пусть $n \geqslant 1$. Через $E_k^\tau(n)$ обозначим множество $\underbrace{E_k^\tau \times \ldots \times E_k^\tau}_{n}$. Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, отображающая множество $E_k^\tau(n)$ в E_k^τ называется *детерминированной* (д.функцией), если для всякого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$ и для любой пары $(a_1, \ldots, a_n), (a_1', \ldots, a_n')$ наборов элементов из E_k^τ такой, что $a_1 \sim^t a_1'$, ..., $a_n \sim^t a_n'$, выполняется $f(a_1, \ldots, a_n) \sim^t f(a_1', \ldots, a_n')$.

Заметим, что любая д.функция для заданного $\tau \geqslant 1$ может быть вычислена некоторым конечным автоматом за первые τ тактов его работы.

Пусть P_k^τ — множество всех д.функций, зависящих от переменных, которые принимают значения из множества E_k^τ. Будем считать, что на множестве P_k^τ задана операция суперпозиции. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$. Замыкание множества $\mathfrak{M}$ относительно этой операции обозначим $[\mathfrak{M}]$ [11–13].

Определение. Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *полным в* P_k^τ, если $[\mathfrak{M}] = P_k^\tau$.

Известно [10–12], что для любых $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$ существуют конечные системы, полные в P_k^τ.

Определение. Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Пусть $D = \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots\}$ — некоторая система подмножеств множества P_k^τ. Система D называется *критериальной*, если справедливо следующее: множество $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не содержится целиком ни в одном из множеств системы D.

Из общих алгебраических соображений [7, 10, 12] следует, что минимальной критериальной системой в P_k^τ является множество, состоящее из предполных классов в P_k^τ.

Определение. Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Замкнутое множество $\mathfrak{N} \subset P_k^\tau$ называется *предполным классом в* P_k^τ, если $\mathfrak{N}$ не является полным, но для любой д.функции $f \notin \mathfrak{N}$ замыкание множества $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ совпадает с P_k^τ.

Имеет место [1–4, 10–12]

Теорема 1.1. *Пусть* $k \geqslant 2$ *и* $\tau \geqslant 1$. *Множество* $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ *является полным в* P_k^τ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}$ *не принадлежит целиком ни одному из предполных в* P_k^τ *классов, причем число предполных классов в* P_k^τ *конечно.*

Определение. Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Пусть $h \geqslant 1$, а $T = (t_1,\ldots,t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел такой, что $\max\{t_1,\ldots,t_h\} \leqslant \tau$. Пусть $E_k^T = \underbrace{E_k^{t_1} \times \ldots \times E_k^{t_h}}_{h}$. Произвольное непустое множество $R \subseteq E_k^T$ называется *отношением, заданным на* E_k^T, а число h — *арностью* этого отношения.

Определение. Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Д.функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ из P_k^τ *сохраняет отношение* $R \subset E_k^T$, если для любой совокупности $(a_1^1,\ldots,a_h^1),\ldots,(a_1^n,\ldots,a_h^n)$ элементов из R набор $(f(a_1^1,\ldots,a_1^n),\ldots$ $\ldots,f(a_h^1,\ldots,a_h^n))$ также принадлежит R. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ *сохраняет отношение* R, если каждая д.функция из $\mathfrak{M}$ сохраняет это отношение.

Множество всех д.функций, сохраняющих некоторое отношение R, обозначим через $U(R)$. Нетрудно видеть, что для любого R множество $U(R)$ замкнуто.

Можно показать [1–5, 10–12, 15, 17], что справедлива

Теорема 1.2. *Пусть* $k \geqslant 2$ *и* $\tau \geqslant 1$. *Для того, чтобы произвольное множество д.функций* $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ *было полным в* P_k^τ *необходимо и достаточно, чтобы для любых* $h \geqslant 1$, $T = (t_1,\ldots,t_h)$, $R \subset E_k^T$ *таких, что* $\max\{t_1,\ldots,t_h\} \leqslant \tau$ *и* $U(R)$ *не является полным в* P_k^τ, *в* $\mathfrak{M}$ *содержалась д.функция, не сохраняющая отношения* R.

Определение. Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k^\tau$. Д.функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ назовем *S-функцией*, если в любом состоянии вычисляющего ее автомата реализуется функция k-значной логики, не выпускающая ни одного значения из множества E_k.

Определение. Пусть $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$. Множество $\mathfrak{M}$ назовем *S-множеством*, если любая д.функция из $\mathfrak{M}$ является S-функцией.

Легко убедиться в том, что существуют S-множества, образующие полные системы в P_k^τ и состоящие из конечного числа S-функций.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$, причем $\mathfrak{M}$, вообще говоря, не является S-множеством. Через $S(U(\mathfrak{M}))$ обозначим подмножество $\mathfrak{M}$, содержащее все S-функции из $\mathfrak{M}$.

Определение. Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Пусть $D = \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots\}$ — некоторая система подмножеств множества P_k^τ. Систему D назовем *S-критериальной*, если справедливо следующее: S-множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ целиком не содержится ни в одном из множеств системы D.

Очевидно, любая критериальная система является также и S-критериальной. Однако обратное не верно. Пусть $\{\mathfrak{N}_1,\ldots,\mathfrak{N}_m\}$ — совокупность предполных классов в P_k^τ. Тогда множество $\{S(\mathfrak{N}_1),\ldots,S(\mathfrak{N}_m)\}$ образует S-критериальную систему в P_k^τ.

Определение. Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. S-множество $\mathfrak{N} \subset P_k^\tau$ называется *S-предполным классом в* P_k^τ, если $\mathfrak{N}$ не является полным в P_k^τ, но для любой S-функции $f \notin \mathfrak{N}$ замыкание множества $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ совпадает с P_k^τ.

Легко убедиться в том, что множество всех S-предполных классов в P_k^τ является подмножеством множества $\{S(\mathfrak{N}_1),\ldots,S(\mathfrak{N}_m)\}$, но не совпадает с ним.

Теорема 1.3. *Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Любая S-критериальная система в P_k^τ в качестве своего подмножества содержит множество всех S-предполных классов. Пусть $D = \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots\}$ — такая система. Множество $\mathfrak{M}_i$ $(i \geqslant 1)$ является S-предполным классом в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_i \not\subseteq \mathfrak{M}_j$ для любого j $(j \geqslant 1$ и $j \neq i)$.*

Теорема 1.4. *Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. S-множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не принадлежит целиком ни одному из S-предполных классов.*

Множество всех S-предполных классов в терминах сохранения отношений для всякого $k \geqslant 2$ при $\tau = 1$ описано в [9, 10]. Интерес представляет аналогичное описание для любых $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$.

Рассмотрим шесть семейств отношений — семейства $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$.

Семейство $\boldsymbol{Z(k,\tau)}$. ($Z(k,\tau) \neq \varnothing$ для любых $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$.) Унарное отношение R принадлежит семейству $Z(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$ $R \subset E_k^t$, причем при $\tau \geqslant 2$ и $t \geqslant 2$ имеет место следующее: для любого $a \in E_k^{t-1}$, где $a = (a(1), \ldots, a(t-1))$, существуют $a(t) \in E_k$, $a'(t) \in E_k$ такие, что $a(t) \neq a'(t)$, $(a(1), \ldots, a(t-1), a(t))$ принадлежит, а $(a(1), \ldots, a(t-1), a'(t))$ не принадлежит R.

Семейство $\boldsymbol{D(k,\tau)}$. ($D(k,\tau) \neq \varnothing$ для любых $k \geqslant 3$ и $\tau \geqslant 1$.) Бинарное отношение R принадлежит семейству $D(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$ $R \subset E_k^t(2)$, R является определенным на E_k^t отношением эквивалентности, причем имеет место следующее. Существует принадлежащий R набор (a_1, a_2) такой, что $a_1(t) \neq a_2(t)$. Если $\tau \geqslant 2$, $t \geqslant 2$ и набор (a_1, a_2) принадлежит R, то $a_1(1) = a_2(1)$, $\ldots$, $a_1(t-1) = a_2(t-1)$. Кроме того, для любого $a \in E_k^t$ существует $a' \in E_k^t$ такое, что $a(t) \neq a'(t)$, набор (a, a') не принадлежит R и при $\tau \geqslant 2$, $t \geqslant 2$ выполнено $a(1) = a'(1)$, $\ldots$, $a(t-1) = a'(t-1)$.

Семейство $\boldsymbol{N(k,\tau)}$. ($N(k,\tau) \neq \varnothing$ для любых $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$.) Бинарное отношение R принадлежит семейству $N(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$ $R \subset E_k^t(2)$, существует определенная на E_k^t подстановка σ_R, разлагающаяся в произведение циклов одинаковой простой длины $p \geqslant 2$, график которой совпадает с R, причем, если $\tau \geqslant 2$, $t \geqslant 2$ и набор (a_1, a_2) принадлежит R, то $a_1(1) = a_2(1)$, $\ldots$, $a_1(t-1) = a_2(t-1)$. Таким образом, для любого $a \in E_k^t$ выполнено $(a, \sigma_R(a)) \in R$ и для всякого набора (a_1, a_2) из R верно равенство $a_2 = \sigma_R(a_1)$.

Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Пусть Σ — множество всех подстановок (перестановок), определенных на E_k. Пусть $t \in \{1, \ldots, \tau\}$ и Φ_t — совокупность отображений множества E_k^t в Σ такая, что при $t = 1$ для любых $\varphi \in \Phi_t$, $a \in E_k$, $a' \in E_k$ выполнено $\varphi(a) = \varphi(a')$, а при $\tau \geqslant 2$ и $t \geqslant 2$ для любых $\varphi \in \Phi_t$, $a \in E_k^t$, $a' \in E_k^t$ равенство $\varphi(a) = \varphi(a')$ верно, если $a(1) = a'(1)$, $\ldots$, $a(t-1) = a'(t-1)$. Подстановку, которую отображение $\varphi \in \Phi_t$ ставит в соответствие элементу $a \in E_k^t$, обозначим через $\sigma_{\varphi(a)}$.

Семейство $\boldsymbol{I(k,\tau)}$. ($I(k,\tau) \neq \varnothing$ для любых $k \geqslant 5$ и $\tau \geqslant 1$.) Пусть $h \geqslant 5$, $m \geqslant 1$, $k = h^m$. Бинарное отношение R принадлежит подсемейству $I_h(k,\tau)$ семейства отношений $I(k,\tau)$, если для некоторых t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$, $\varphi \in \Phi_t$ имеет место следующее: $R \subset E_k^t(2)$, набор (a_1, a_2) принадлежит R тогда и только тогда, когда для любого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ i-е компоненты чисел $\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t))$, $\sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t))$ при разложении их по степеням числа h различны, причем при $\tau \geqslant 2$ и $t \geqslant 2$ выполнено $a_1(1) = a_2(1)$, $\ldots$, $a_1(t-1) = a_2(t-1)$. Семейство отношений $I(k,\tau)$ есть объединение семейств $I_h(k,\tau)$, взятое по всем $h \geqslant 5$, таким, что $h^m = k$ и $m \geqslant 1$.

Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $p \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$. Пусть $G = \langle E_k, \oplus \rangle$ — произвольная элементарная абелева p-группа. В каждой такой группе всякий ненулевой элемент имеет порядок p (см., например, [7]). Пусть $\tau \geqslant 1$.

Семейство $L(k,\tau)$. ($L(k,\tau) \neq \varnothing$ для любого $\tau \geqslant 1$, если $k = p^m$, где p — простое число, $p \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$.) Отношение R, арность которого равна четырем, принадлежит семейству $L(k,\tau)$, если для некоторых t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$ и $\varphi \in \Phi_t$ имеет место следующее: $R \subset E_k^t(4)$, набор (a_1, a_2, a_3, a_4) принадлежит R тогда и только тогда, когда $\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t)) = \sigma_{\varphi(a_1)}(a_3(t)) \oplus \sigma_{\varphi(a_1)}(a_4(t))$, причем при $\tau \geqslant 2$ и $t \geqslant 2$ выполнено $a_1(1) = a_2(1) = a_3(1) = a_4(1)$, $\ldots$, $a_1(t-1) = a_2(t-1) = a_3(t-1) = a_4(t-1)$.

Заметим, что семейства отношений $Z(k,1), D(k,1), N(k,1), I(k,1)$ и $L(k,1)$ совпадают с семействами отношений, с помощью которых в [9, 10] описываются все S-предполные классы в k-значных логиках.

Семейство $V(k,\tau)$. ($V(k,\tau) \neq \varnothing$ для любых $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 2$.) Бинарное отношение R принадлежит семейству $V(k,\tau)$, если для некоторых t $(2 \leqslant t \leqslant \tau)$ и $\varphi \in \Phi_t$ имеет место следующее: $R \subset E_k^t(2)$, набор (a_1, a_2) принадлежит R тогда и только тогда, когда либо $a_1(t-1) = a_2(t-1)$ и $a_1(t) = a_2(t)$, либо $a_1(t-1) \neq a_2(t-1)$ и существует $\alpha \in E_k$ такое, что $a_1(t) = \sigma_{\varphi(a_1)}(\alpha)$, $a_2(t) = \sigma_{\varphi(a_2)}(\alpha)$, причем при $\tau \geqslant 3$ и $t \geqslant 3$ выполнено $a_1(1) = a_2(1)$, $\ldots$, $a_1(t-2) = a_2(t-2)$.

Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $W(k,\tau)$ — объединение семейств $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$.

Целью данной работы является доказательство теорем 1.4, 1.5, 1.6, 1.7.

Теорема 1.4. *Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Произвольное S-множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения R из $W(k,\tau)$.*

Теорема 1.5. *Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольный S-предполный класс в P_k^τ. Тогда существует отношение $R \in W(k,\tau)$ такое, что $\mathfrak{N} = S(U(R))$.*

Теорема 1.6. *Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Пусть $R \in W(k,\tau)$. Тогда множество $S(U(R))$ образует S-предполный класс в P_k^τ.*

Теорема 1.7. *Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Имеет место следующее.*

а) *Пусть $R \in W(k,\tau)$, $R' \in W(k,\tau) \setminus N(k,\tau)$, $R \neq R'$. Тогда $S(U(R)) \neq S(U(R'))$.*

б) *Пусть $R \in N(k,\tau)$, $R' \in N(k,\tau)$. Тогда равенсто $S(U(R)) = S(U(R'))$ равносильно тому, что одна из подстановок σ_R и $\sigma_{R'}$, графики которых образуют отношения R и R' соответственно, является степенью другой.*

§ 2. Отношения. Тупиковые и приведенные отношения

Пусть $\tau \geqslant 1$ и $k \geqslant 2$. Расширим область определения д.функций из P_k^τ, полагая, что для всякого $h \geqslant 1$ и любого набора $T = (t_1, \ldots, t_h)$ положительных целых чисел такого, что $\max\{t_1, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$, переменные $x_1, \ldots, x_n$ д.функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и сама эта функция могут принимать значения из множества $E_k^T = E_k^{t_1} \times \ldots \times E_k^{t_h}$. Сделаем это следующим образом. Пусть переменные $x_1, \ldots, x_n$ принимают значения $A_1, \ldots, A_n$ соответственно, причем $A_1 \in E_k^T$, $\ldots$, $A_n \in E_k^T$. Пусть $A_1 = (a_1^1, \ldots, a_h^1)$, $\ldots$, $A_n = (a_1^n, \ldots, a_h^n)$. Значением $f(A_1, \ldots, A_n)$ д.функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе $(A_1, \ldots, A_n)$ будет являться элемент $A = (a_1, \ldots, a_h)$, принадлежащий E_k^T, такой, что $a_1 = f(a_1^1, \ldots, a_1^n)$, $\ldots$, $a_h = f(a_h^1, \ldots, a_h^n)$.

Пусть $h \geqslant 1$, $\{T\}_h$ — множество всех наборов $T = (t_1, \ldots, t_h)$, составленных из неотрицательных целых чисел, исключая набор, целиком состоящий из нулей. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\max\{(t_1, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$.

На множестве $\{T\}_h$ определим отношение частичного порядка «$\leqslant$» [7]: $T \leqslant T'$, где $T=(t_1,\ldots,t_h)$, $T'=(t'_1,\ldots,t'_h)$, тогда и только тогда, когда $t_i \leqslant t'_i$ для любого i $(1\leqslant i\leqslant h)$; $T=T'$, если $t_i=t'_i$ для любого i $(1\leqslant i\leqslant h)$.

Заметим, что существует h наборов из $\{T\}_h$, минимальных по отношению частичного порядка $\leqslant$. Каждый такой набор содержит ровно одну единицу, а все остальные его компоненты — нули.

Определение. Пусть $h\geqslant 1$, $T=(t_1,\ldots,t_h)$, $T'=(t'_1,\ldots,t'_h)$, $t'_1\neq 0$, $\ldots$, $t'_h\neq 0$, $T\leqslant T'$. Пусть $i_1,\ldots,i_{\tilde h}$ — все числа из $\{1,\ldots,h\}$ такие, что $t_{i_1}\neq 0$, $\ldots$, $t_{i_{\tilde h}}\neq 0$, причем $i_1<i_2<\ldots<i_{\tilde h}$. Пусть $\widetilde T=(t_{i_1},\ldots,t_{i_{\tilde h}})$. Пусть $A\in E_k^{T'}$, $A=(a_1,\ldots,a_h)$. Элемент $A_T=(\widetilde a_1,\ldots,\widetilde a_{\tilde h})$ из $E_k^{\tilde T}$ назовем *T-фундаментом элемента* A, если для любых j $(1\leqslant j\leqslant \widetilde h)$ и $t\leqslant t_{i_j}$ имеет место равенство $\widetilde a_j(t)=a_{i_j}(t)$.

Из данного определения следует, что A_T является T-фундаментом A, если для любого j $(1\leqslant j\leqslant \widetilde h)$ слово $\widetilde a_j$ является префиксом длины t_{i_j} слова a_{i_j}. Очевидно, при $T=T'$ наборы A и A_T совпадают.

Определение. Пусть $R\subseteq E_k^{T'}$, $T\leqslant T'$. Назовем *T-фундаментом отношения* R множество R_T, состоящее из T-фундаментов всех элементов из R.

Лемма 2.1. *Пусть $R\subseteq E_k^T$, $T\leqslant T'$. Тогда $U(R)\subseteq U(R_T)$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная д.функция из $U(R)$. Пусть $A_1,\ldots,A_n$ — набор элементов из R_T и $f(A_1,\ldots,A_n)=A$. Пусть $A'_1,\ldots,A'_n$ — элементы из R, T-фундаментами которых являются $A_1,\ldots,A_n$ соответственно. Пусть $f(A'_1,\ldots,A'_n)=A'$. В силу того, что $f\in U(R)$, имеем $A'\in R$. Из детерминированности функции f легко следует, что A является T-фундаментом A' и, следовательно, должно принадлежать R_T. Поэтому $f\in U(R_T)$ и $U(R)\subseteq U(R_T)$. Лемма доказана.

Определение. Пусть $h\geqslant 1$, T — произвольный набор длины h, составленный из положительных целых чисел. Отношение $R\subset E_K^T$ назовем *тупиковым*, если $U(R)\neq P_k^\tau$ и либо $h=1$, $T=(1)$, $R\subset E_k$, либо, в противном случае, для всякого $\widetilde T<T$ выполнено $U(R_{\tilde T})=P_k^\tau$.

Теорема 2.2. *Пусть $R'\subset E_k^{T'}$, $U(R')\neq P_k^\tau$. Существует тупиковое отношение R такое, что $U(R')\subseteq U(R)$; отношение R для некоторого $T\leqslant T'$ совпадает с T-фундаментом отношения R', при этом арность отношения R не больше арности отношения R'.*

Доказательство. Пусть $h\geqslant 1$ и $T'\in\{T\}_h$. Минимальным по отношению частичного порядка $\leqslant$ элементом из $\{T\}_h$ является любой набор, содержащий одну единицу и $h-1$ нулей. Пусть $\widetilde T$ — такой набор. Очевидно, $R'_{\tilde T}$ — унарное отношение, являющееся подмножеством множества E_k. Если $U(R'_{\tilde T})\neq P_k^\tau$, то отношение $R'_{\tilde T}$ тупиковое по определению, $U(R')\subseteq U(R'_{\tilde T})$, и в качестве R можно взять отношение $R'_{\tilde T}$. Пусть все д.функции из $U(R')$ не сохраняют ни одного собственного подмножества множества E_k. Нетрудно видеть, что тогда существует $T\leqslant T'$ такое, что $U(R'_T)\neq P_k^\tau$ и для любого $\widetilde T<T$ имеет место равенство $U(R'_{\tilde T})=P_k^\tau$. Пусть $R=R'_T$. Очевидно, отношение R тупиковое и его арность не больше арности отношения R'. Из леммы следует, что $U(R')\subseteq U(R)$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 2.2. *Пусть $\tau\geqslant 1$ и $k\geqslant 2$. Множество классов сохранения тупиковых отношений — подмножеств множеств E_k^T, где $T=(t_1,\ldots,t_h)$ и $h\geqslant 1$ таковы, что для любого i $(1\leqslant i\leqslant h)$ $t_i\geqslant 1$ и $\max\{t_1,\ldots,t_h\}\leqslant\tau$, образует критериальную и, следовательно, S-критериальную систему в P_k^τ.*

Сформулируем и докажем несколько лемм, характеризующих свойства тупиковых отношений.

Определение. Пусть $R \subseteq E_k^T$, $R' \subseteq E_k^{T'}$. Отношения R и R' назовем *эквивалентными*, если $U(R) = U(R')$.

Лемма 2.3. *Пусть $h \geqslant 1$, R — отношение арности h и σ — произвольная подстановка (перестановка) чисел $1, \ldots, h$. Пусть R^σ — отношение, которое получается из R следующим образом: $(a_1, \ldots, a_h)$ принадлежит R^σ тогда и только тогда, когда в R существует элемент $(a'_1, \ldots, a'_h)$ такой, что наборы слов $(a_1, \ldots, a_h)$ и $(a'_{\sigma(1)}, \ldots, a'_{\sigma(h)})$ совпадают. Отношения R и R' эквивалентны, причем если R — тупиковое отношение, то R^σ — также тупиковое отношение.*

Справедливость леммы 2.3. прямо следует из определения сохранения д.функциями отношений.

Определение. Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$, $R \subseteq E_k^T$. Отношение R назовем *приведенным*, если либо $h = 1$, либо $h \geqslant 2$ и для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$, $i \neq j$, в R существует элемент $(a_1, \ldots, a_h)$ такой, что $a_i(t) \neq a_j(t)$ для некоторого $t \leqslant \min\{t_i, t_j\}$.

Лемма 2.4. *Пусть $h \geqslant 2$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$, $R \subseteq E_k^T$, отношение R не является приведенным. Существует приведенное отношение R', эквивалентное отношению R.*

Доказательство. Так как R не является приведенным, то существуют i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ такие, что $i \neq j$ и для любых $t \leqslant \min\{t_i, t_j\}$ и $(a_1, \ldots, a_h)$ из R выполнено $a_i(t) = a_j(t)$. Пусть $i \leqslant j$. Тогда, как нетрудно видеть, слово a_i является префиксом длины t_i слова a_j. Пусть $T_1 = (t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_h)$ и $R_1 = R_{T_1}$. Очевидно, отношения R и R_1 эквивалентны, причем арность отношения R_1 равна $h - 1$. Если отношение R_1 не является приведенным, то повторим изложенную выше процедуру еще раз и т. д. Получим некоторую последовательность отношений $R_1, \ldots, R_s$, каждое из которых эквивалентно R, а отношение R_s приведенное. Лемма доказана.

Следствие из леммы 2.4. *Пусть $R \subset E_k^T$, R является тупиковым отношением. Тогда R — приведенное отношение.*

Определение. Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$, причем, если $h = 1$, то $t_1 > 1$. Пусть $i \in \{1, \ldots, h\}$, $T_i = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_h)$. Пусть $A \in E_k^T$. Будем называть T_i-фундамент A также *i-фундаментом A* и обозначать $A_{(i)}$.

Определение. Пусть $R \subseteq E_k^T$, $i \in \{1, \ldots, h\}$; *i-фундаментом отношения R* назовем множество $R_{(i)}$, состоящее из i-фундаментов всех элементов из R.

Определение. Пусть $k \geqslant 2$, $R \subset E_k^T$, A — произвольный элемент из E_k^T, $A = (a_1, \ldots, a_h)$. Пусть $i \in \{1, \ldots, h\}$, $A_{(i)}$ — i-фундамент элемента A. Через $\rho_R(A(i))$ обозначим множество, состоящее из всех тех и только тех α из E_k, для которых в R существует элемент $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \ldots, a_h)$ такой, что $\alpha'(t_i) = \alpha$ и, если $t_i > 1$, то $a'_i(1) = a_i(1)$, ..., $a'_i(t_i - 1) = a_i(t_i - 1)$.

Лемма 2.5. *Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$, причем, если $h = 1$, то $t_1 > 1$. Пусть $R \subset E_k^T$, R — тупиковое отношение. Пусть A — произвольный элемент из E_k^T такой, что для некоторых $A^1, \ldots, A^n$ из R и д.функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^τ выполнено $f(A^1, \ldots, A^n) = A$. Тогда $\rho_R(A_{(i)}) \neq \varnothing$ для любого i $(1 \leqslant i \leqslant h)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ такое, что $\rho_R(A_{(i)}) = \varnothing$. Рассмотрим i-фундамент отношения R — отношение $R_{(i)}$. Очевидно, i-фундаменты $A^1_{(i)}, \ldots, A^n_{(i)}$ элементов $A^1, \ldots, A^n$

принадлежат $R_{(i)}$, но i-фундамент $A_{(i)}$ элемента A отношению $R_{(i)}$ не принадлежит. Однако это противоречит тупиковости отношения R. Лемма доказана.

§ 3. Понятие π-множества. Δ-рефлексивные отношения

Пусть $\tau \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, $h \geqslant 1$, $T=(t_1,\ldots,t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел, такой, что $\max\{t_1,\ldots,t_h\} \leqslant \tau$. На множестве $E_k^T = E_k^{t_1} \times \ldots \times E_k^{t_h}$ введем отношение предпорядка «$\preceq$» [7]. Для этого рассмотрим функцию π, для любых пар t', t'' $(1 \leqslant t', t'' \leqslant \tau)$ отображающую множество $E_k^{t'} \times E_k^{t''}$ в $\{0,1,\ldots,\tau\}$. Функцию π определим следующим образом.

Пусть $a' \in E_k^{t'}$, $a'' \in E_k^{t''}$, $t = \min\{t', t'\}$. Тогда

$\pi(a', a'') = 0$, если $a'(1) = a''(1), \ldots, a'(t) = a''(t)$;

$\pi(a', a'') = i$ $(1 \leqslant i \leqslant t-1)$, если $a'(1) = a''(1), \ldots, a'(t-i) = a''(t-i)$, но $a'(t-i+1) \neq a''(t-i+1)$;

$\pi(a', a'') = t$, если $a'(1) \neq a''(1)$.

Очевидно, если $\pi(a', a'') = 0$ и $t' = t''$, то $a' = a''$; если $\pi(a', a'') = 0$ и $t' < t''$, то слово a' является префиксом длины t' слова a''. «Геометрическая» интерпретация функции π представлена на рис. 1.

Пусть $A = (a_1,\ldots,a_h)$ и $A' = (a'_1,\ldots,a'_h)$ — произвольные элементы из E_k^T; соотношение $A' \preceq A$ имеет место тогда и только тогда, когда для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ выполнено неравенство $\pi(a'_i, a'_j) \leqslant \pi(a_i, a_j)$; соотношение $A' \prec A$ имеет место, если хотя бы для одной пары i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ верно неравенство $\pi(a'_i, a'_j) < \pi(a_i, a_j)$. Элементы A' и A совпадают по отношению предпорядка $\preceq$, если $A' \preceq A$ и $A \preceq A'$.

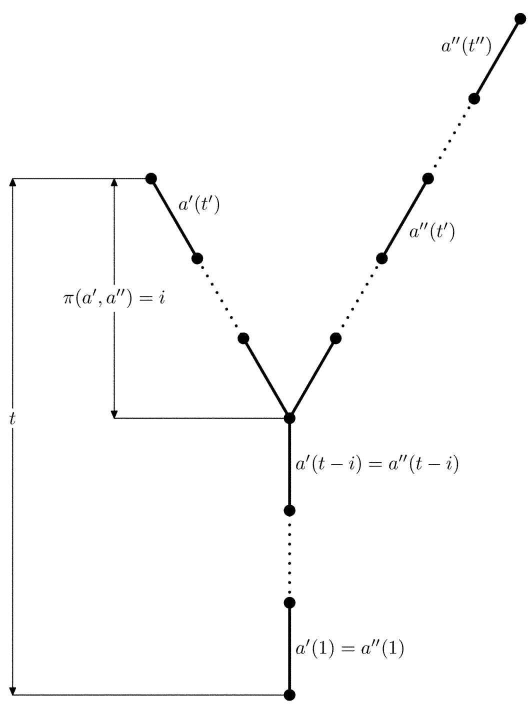

Рис. 1

Л е м м а 3.1. *Пусть $A_1,\ldots,A_n$ — некоторые элементы из E_k^T, где $A_1 = (a_1^1,\ldots,a_h^1)$, ..., $A_n = (a_1^n,\ldots,a_h^n)$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная д.функция из множества P_k^τ, $f(A^1,\ldots,A^n) = A$, $A = (a_1,\ldots,a_h)$. Тогда для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ имеет место неравенство*

$$\pi(a_i, a_j) \leqslant \max\{\pi(a_i^1, a_j^1), \ldots, \pi(a_i^n, a_j^n)\}. \tag{1}$$

Справедливость леммы 3.1 сразу следует из детерминированности функции f и определения функции π.

Л е м м а 3.2. *Пусть A, A' — произвольные элементы из E_k^T, причем $A' \preceq A$. Тогда существует д.функция $f(x)$ такая, что $f(A) = A'$.*

Лемма 3.3. *Пусть* $h \geqslant 2$, $A = (a_1, \ldots, a_h)$ — *элемент из* E_k^T *такой, что для некоторых* i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ *выполнено* $\pi(a_i, a_j) \neq 0$, *причем для любого* l $(1 \leqslant l \leqslant h)$ *либо* $\pi(a_l, a_i) = 0$, *либо* $\pi(a_l, a_j) = 0$. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *произвольная д.функция из* P_k^τ *и* $A_1, \ldots, A_n$ — *элементы из* E_k^T *такие, что* $A_1 \prec A, \ldots, A_n \prec A$. *Тогда* $f(A_1, \ldots, A_n) \prec A$.

Справедливость лемм 3.2 и 3.3 легко доказывается с использованием неравенства (1).

При доказательстве некоторых лемм наряду с функцией π будем использовать функцию μ, которая определяется следующим образом. Пусть $a' \in E_k^{t'}$, $a'' \in E_k^{t''}$ $(1 \leqslant t', t'' \leqslant \tau)$. Тогда

$$\mu(a', a') = \min\{t', t''\} - \pi(a', a'').$$

Нетрудно видеть, что $\mu(a', a') = 0$, если $a'(1) \neq a''(1)$; $\mu(a', a'') = j$ $(1 \leqslant j \leqslant \tau)$, если $a'(1) = a''(1), \ldots, a'(j) = a''(j)$ и либо $j = \min\{t', t''\}$, либо $a'(j+1) \neq a''(j+1)$. Таким образом, $\mu(a', a'')$ — число первых разрядов, в которых слова a' и a'' совпадают.

Лемма 3.4. *Пусть* $k \geqslant 2$, $h \geqslant 3$, $A = (a_1, \ldots, a_h)$ — *произвольный элемент из* E_k^T *такой, что для некоторых* i, j, l $(1 \leqslant i, j, l \leqslant h)$ *имеют место неравенства* $\pi(a_i, a_j) \neq 0$, $\pi(a_i, a_l) \neq 0$, $\pi(a_j, a_l) \neq 0$. *Тогда существуют элементы* A_1 *и* A_2 *из* E_k^T *и д.функция* $f(x_1, x_2)$ *из* E_k^τ *такие, что* $A_1 \prec A$, $A_2 \prec A$, $f(A_1, A_2) = A$.

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что

$$\mu(a_i, a_j) \leqslant \mu(a_l, a_j) \leqslant \mu(a_l, a_i). \tag{2}$$

Пусть $\widetilde{t}_1 = \mu(a_i, a_l) + 1$, $\widetilde{t}_2 = \mu(a_j, a_l) + 1$. Очевидно, $\widetilde{t}_1 \leqslant \tau$, $\widetilde{t}_2 \leqslant \tau$. Рассмотрим элементы $A_1 = (a_1^1, \ldots, a_h^1)$, $A_2 = (a_1^2, \ldots, a_h^2)$ из E_k^T, для которых имеет место следующее.

а) Для любых s, q $(1 \leqslant s, q \leqslant h)$ $a_s^1 = a_s$, если $\mu(a_i, a_s) \leqslant \widetilde{t}_1 - 1$, и $a_q^2 = a_q$, если $\mu(a_j, a_q) \leqslant \widetilde{t}_2 - 1$.

б) Пусть s $(1 \leqslant s \leqslant h)$ таково, что $\mu(a_i, a_s) \geqslant \widetilde{t}_1$. Тогда для любого t $(1 \leqslant t \leqslant t_s)$, $t \neq \widetilde{t}_1$, $a_s^1(t) = a_s(t)$ и $a_s^1(\widetilde{t}_1) = a_l(\widetilde{t}_1)$.

в) Пусть q $(1 \leqslant q \leqslant h)$ таково, что $\mu(a_j, a_q) \geqslant \widetilde{t}_2$. Тогда для любого t $(1 \leqslant t \leqslant t_q)$, $t \neq \widetilde{t}_2$, $a_q^2(\widetilde{t}_2) = a_q(t)$ и $a_q^2(\widetilde{t}_2) = a_l(\widetilde{t}_2)$.

Нетрудно видеть, что $A_1 \prec A$, $A_1 \prec A$. Рассмотрим два случая.

А) $\widetilde{t}_1 \neq \widetilde{t}_2$. Пусть д.функция $y = f(x_1, x_2)$ такова, что $y(\widetilde{t}_1) = x_2(\widetilde{t}_1)$ и для любого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$, $t \neq \widetilde{t}_1$, $y(t) = x_1(t)$.

Очевидно, $f(A_1, A_2) = A$.

Б) $\widetilde{t}_1 = \widetilde{t}_2$. Учитывая (2), нетрудно видеть, что равенство $\widetilde{t}_1 = \widetilde{t}_2$ будет выполняться лишь тогда, когда $k \geqslant 3$ и $\mu(a_i, a_j) = \mu(a_l, a_j) = \mu(a_l, a_i)$.

Пусть $\widetilde{t} = \widetilde{t}_1 = \widetilde{t}_2$. Пусть $F(x_1, x_2)$ — функция k-значной логики такая, что для любых α, β из E_k выполнены следующие условия: $F(\alpha, \beta) = \alpha$, если $\alpha = \beta$; $F(\alpha, \beta) = \beta$, если $\alpha = a_l(\widetilde{t})$, $\beta = a_i(\widetilde{t})$; $F(\alpha, \beta) = \alpha$, если $\alpha = a_j(\widetilde{t})$, $\beta = a_l(\widetilde{t})$. Заметим, что $a_i(\widetilde{t}) \neq a_l(\widetilde{t})$, $a_i(\widetilde{t}) \neq a_j(\widetilde{t})$, $a_j(\widetilde{t}) \neq a_l(\widetilde{t})$.

Пусть д.функция $y = f(x_1, x_2)$ такова, что $y(\widetilde{t}) = F(x_1(\widetilde{t}), x_2(\widetilde{t}))$ и для любого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$, $t \neq \widetilde{t}$, $y(t) = x_1(t)$. Нетрудно видеть, что $f(A_1, A_2) = A$. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть* $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$, $A = (a_1, \ldots, a_h)$, $A_1 = (a_1', \ldots, a_h')$ — *произвольные элементы из* E_k^T. *Пусть* σ — *произволь-*

ная подстановка (перестановка), определенная на $\{1, \ldots, h\}$. *Пусть* $A^\sigma = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(h)})$, $A_1^\sigma = (a'_{\sigma(1)}, \ldots, a'_{\sigma(h)})$. *Тогда: если* $A \prec A_1$, *то* $A^\sigma \prec A_1^\sigma$; *если* A *и* A_1 *совпадают по отношению предпорядка* $\preceq$, *то* A^σ *и* A_1^σ *также совпадают по отношению предпорядка* $\preceq$; *при этом* A^σ *и* A_1^σ *принадлежат множеству* $E_k^{T^\sigma}$, *где* $T^\sigma = (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(h)})$.

Справедливость утверждения леммы 3.5. прямо следует из определения отношения предпорядка $\preceq$.

Нетрудно видеть, что имеет место

Лемма 3.6. *Пусть* $h \geqslant 3$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$. *Пусть* $A = (a_1, \ldots, a_h)$ *— произвольный элемент из* E_k^T. *Существует определенная на* $\{1, \ldots \ldots, h\}$ *подстановка (перестановка)* σ *такая, что для любых* i, j, l $(1 \leqslant i, j, l \leqslant h)$ *таких, что* $\sigma(i) \leqslant \sigma(j) \leqslant \sigma(l)$, *справедливо неравенство* $\mu(a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(l)}) \leqslant \mu(a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(j)})$.

Определение. Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел. Пусть $A \in E_k^T$. Множество всех элементов A' из E_k^T таких, что $A' \preceq A$ назовем *π-подмножеством множества* E_k^T или просто *π-множеством*; при этом будем считать, что A задает или «порождает» это π-множество.

Для обозначения π-множеств будем использовать символ Δ. Пусть $h \geqslant 2$, $A = (a_1, \ldots, a_h)$, причем для некоторых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ $\pi(a_i, a_j) \neq 0$; π-множество Δ, порожденное элементом A, разбивается на два подмножества: $\Delta^{(M)}$ — множество всех максимальных по отношению предпорядка $\preceq$ элементов из Δ, и $\Delta^{(m)}$ — множество всех оставшихся элементов. Если для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ $\pi(a_i, a_j) = 0$, то будем считать, что $\Delta^{(m)} = \varnothing$ и $\Delta^{(M)} = \Delta$. В частности, при $h = 1$ множество $\Delta^{(m)}$ всегда пусто.

Нетрудно видеть, что для задания π-множества Δ можно использовать любой элемент из $\Delta^{(M)}$, и для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ значения $\pi(a_i, a_j)$ и $\mu(a_i, a_j)$ не зависят от выбора элемента $(a_1, \ldots, a_h)$ из $\Delta^{(M)}$. Поэтому числа $\pi(a_i, a_j)$ и $\mu(a_i, a_j)$ будем обозначать через $\pi_\Delta(i, j)$ и $\mu_\Delta(i, j)$ соответственно. Если π-множество Δ является π-подмножеством множества E_k^T, где $T = (t_1, \ldots, t_h)$ для некоторого $h \geqslant 1$, то число h будем называть *арностью π-множества* Δ.

Следствие из леммы 3.1. *Пусть* Δ *— π-подмножество множества* E_k^T. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *— произвольная д.функция из* P_k^τ *и* $A_1, \ldots, A_n$ *— произвольные элементы из* Δ. *Тогда* $f(A_1, \ldots, A_n) \in \Delta$.

Действительно, пусть $A \in \Delta^{(M)}$. Тогда $A_1 \preceq A$, $\ldots$, $A_n \preceq A$. Пусть $f(A_1, \ldots, A_n) = A'$. Из неравенства (1) сразу следует, что $A' \preceq A$, т. е. $A' \in \Delta$.

Имеет место просто доказываемая, но очень важная

Теорема 3.7. *Пусть* $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$ *— набор положительных целых чисел такой, что* $\max\{t_1, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$. *Пусть* R *— произвольное отношение такое, что* $R \subseteq E_k^T$. *Пусть* $\Delta \subseteq E_k^T$ *и* $R' = R \cap \Delta$. *Тогда, если* $R' \neq \varnothing$, *то* $U(R) \subseteq U(R')$.

Определение. Пусть $h \geqslant 1$ и $A = (a_1, \ldots, a_h)$ — произвольный элемент из E_k^T. Набор слов A назовем *приведенным*, если либо $h = 1$, либо $h \geqslant 2$ и для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ таких, что $i \neq j$, $\pi(a_i, a_j) \neq 0$.

Это означает, что все слова в наборе A попарно различны.

Определение. Произвольное π-подмножество множества E_k^T назовем *приведенным*, если каждый элемент из $\Delta^{(M)}$ является приведенным набором слов.

Следствие из леммы 2.4. *Пусть* $\Delta \subseteq E_k^T$ *и* $R \subseteq \Delta$. *Существуют приведенное π-множество* $\widetilde{\Delta}$ *и отношение* $\widetilde{R}$, *эквивалентное отношению* R, *такие, что* $\widetilde{R} \subseteq \widetilde{\Delta}$.

Пусть $h \geqslant 1$, Δ — произвольное π-множество арности h и σ — произвольная подстановка (перестановка) чисел $1, \ldots, h$. Через Δ^σ обозначим множество, которое получается из Δ следующим образом: набор слов A принадлежит множеству Δ^σ тогда и только тогда, когда в Δ существует элемент $(a_1, \ldots, a_h)$ такой, что $A = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(h)})$.

Следствие 1 из леммы 3.5. *Пусть $h \geqslant 1$, Δ — произвольное π-множество арности $h \geqslant 1$. Тогда для любой подстановки (перестановки) σ чисел $1, \ldots, h$ множество Δ^σ также является π-множеством.*

Следствие 2 из леммы 3.5. *Пусть $h \geqslant 1$, Δ — произвольное приведенное π-множество арности h и $R \subseteq \Delta$. Тогда для любой подстановки (перестановки) σ чисел $1, \ldots, h$ существует $R' \subseteq \Delta^\sigma$ такое, что $R' = R^\sigma$, т. е. отношения R' и R эквивалентны.*

Лемма 3.8. *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $h \geqslant 3$, Δ — произвольное приведенное π-множество арности h. Пусть $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ и $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения R такого, что $R \subset \Delta$, $U(R) \neq P_k^\tau$. Тогда для любого $A \in \Delta^{(M)}$ и для некоторых $A_1 \in \Delta^{(m)}$ и $A_2 \in \Delta^{(m)}$ в замыкании множества $\mathfrak{M}$ содержится д.функция $f(x_1, x_2)$ такая, что $f(A_1, A_2) = A$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $A \in \Delta^{(M)}$ такое, что для любых A_1', A_2' из $\Delta^{(m)}$ и для любой д.функции $f'(x_1, x_2)$, принадлежащей $[\mathfrak{M}]$, $f'(A_1', A_2') \neq A$. Так как $h \geqslant 3$, то в силу леммы 3.4 существуют $A_1 \prec A$, $A_2 \prec A$ и д.функция $f(x_1, x_2)$ из P_k^τ такие, что $f(A_1, A_2) = A$. Очевидно, $A_1 \in \Delta^{(m)}$, $A_2 \in \Delta^{(m)}$ и в силу сделанного выше предположения $f(x_1, x_2) \notin [\mathfrak{M}]$. Рассмотрим отношение $\widetilde{R}$, которое определим следующим образом: $A_1 \in \widetilde{R}$, $A_2 \in \widetilde{R}$; произвольный набор слов $\widetilde{A}$ принадлежит отношению $\widetilde{R}$ тогда и только тогда, когда в $[\mathfrak{M}]$ существует д.функция $\widetilde{f}(x_1, x_2)$ такая, что $\widetilde{f}(A_1, A_2) = \widetilde{A}$. Из леммы 3.3 следует, что $\widetilde{A} \prec A$ и, таким образом, $\widetilde{R} \subset \Delta$. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{M}$ сохраняет отношение $\widetilde{R}$ и д.функция $f(x_1, x_2)$ не принадлежит $U(\widetilde{R})$, т. е. $U(\widetilde{R}) \neq P_k^\tau$. Из возникшего противоречия следует справедливость утверждения доказываемой леммы.

Легко убедиться, что имеет место также

Лемма 3.9. *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, Δ — произвольное приведенное π-множество арности h, где либо $h = 1$, либо $h = 2$. Пусть $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ и $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения R такого, что $R \subset \Delta$ и $U(R) \neq P_k^\tau$. Тогда для любых A из $\Delta^{(M)}$ и A' из Δ в замыкании множества $\mathfrak{M}$ содержится д.функция $f(x)$ такая, что $f(A) = A'$.*

Определение. Пусть $h \geqslant 1$, Δ — произвольное приведенное π-множество арности h и $R \subset \Delta$. Отношение R назовем Δ-*рефлексивным*, если либо $h = 1$, либо $h \geqslant 2$ и $\Delta^{(m)} \subseteq R$.

Определение. Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$, $\Delta \subseteq E_k^T$. Пусть $\widetilde{T} \leqslant T$; $\widetilde{T}$-*фундаментом π-множества* Δ назовем π-множество $\Delta_{\widetilde{T}}$, состоящее из $\widetilde{T}$-фундаментов всех элементов, принадлежащих π-множеству Δ.

Лемма 3.10. *Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$, $\Delta \subseteq E_k^T$, Δ — приведенное π-множество. Пусть R — произвольное Δ-рефлексивное отношение, $U(R) \neq P_k^\tau$. Существует $\widetilde{T} \leqslant T$ такое, что $\Delta_{\widetilde{T}}$ — приведенное π-множество, $R_{\widetilde{T}}$ — тупиковое и $\Delta_{\widetilde{T}}$-рефлексивное отношение, $U(R) \subseteq U(R_{\widetilde{T}})$; при этом арности отношений R и $R_{\widetilde{T}}$ совпадают.*

Доказательство. В силу теоремы 2.2 существует $\widetilde{T} \leqslant T$ такое, что $R_{\widetilde{T}}$ — тупиковое отношение и $U(R) \subseteq U(R_{\widetilde{T}})$. Очевидно, $R_{\widetilde{T}} \subset E_k^{\widetilde{T}}$. Пусть $\widetilde{T} = (\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_h)$. Рассмотрим π-множество $\Delta_{\widetilde{T}}$. Ясно, что $R_{\widetilde{T}} \subset \Delta_{\widetilde{T}}$. Если либо

$\widetilde{h} < h$, либо существуют i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ такие, что $i \neq j$ и $\pi_{\Delta_{\tilde{T}}}(i, j) = 0$, то, как нетрудно видеть, в силу Δ-рефлексивности отношения R отношение $R_{\tilde{T}}$ будет совпадать с $\Delta_{\tilde{T}}$. Но тогда $U(R_{\tilde{T}}) = P_k^\tau$. Однако это противоречит тупиковости отношения $R_{\tilde{T}}$. Лемма доказана.

Дадим «геометрическую» интерпретацию приведенным π-множествам. Пусть Δ — приведенное π-множество арности $h \geqslant 1$, $\Delta \subseteq E_k^T$, где $T = (t_1, \ldots, t_h)$. Если $h \geqslant 3$, то исходя из утверждения леммы 3.6 будем считать, что для любых i, j, l $(1 \leqslant i, j, l, \leqslant h)$ таких, что $i < j < l$, выполнено $\mu_\Delta(i, l) < \mu_\Delta(i, j)$. Приведенному π-множеству Δ поставим в соответствие дерево D_Δ, ребрам которого приписаны некоторые числа из E_k^T. Сделаем это следующим образом.

Дерево D_Δ имеет корень v и h концевых вершин — $v_1, \ldots, v_h$. Для любого i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ длина цепи c_i, соединяющей корень дерева v с концевой вершиной v_i равна t_i. Пусть $j \neq i$ $(1 \leqslant j \leqslant h)$. Пусть c_i и c_j — последовательности ребер $p_1^i, \ldots, p_{t_i}^i$ и $p_1^j, \ldots, p_{t_j}^j$ соответственно. Если $\mu_\Delta(i, j) = 0$, то цепи c_i и c_j не имеют общих ребер. Если $\mu_\Delta(i, j) = t$, где $t \neq 0$, то ребро p_1^i совпадает с ребром p_1^j, $\ldots$, ребро p_t^i совпадает с ребром p_t^j, но ребра p_{t+1}^i и p_{t+1}^j различны. Отсюда легко следует, что при $h \geqslant 3$ в силу того, что для любых i, j, l $(1 \leqslant i < j < l \leqslant h)$ $\mu_\Delta(i, l) < \mu_\Delta(i, j)$, цепи c_i, c_j, c_l можно расположить на плоскости так, чтобы они не пересекались, а вершину v_j расположить «левее» вершины v_l и «правее» вершины v_i. Отметим, что при $h = 1$ дерево D_Δ состоит из одной цепи, а при $h = 2$ — из двух.

Каждому ребру дерева D_Δ припишем одно из чисел множества E_k. Если ребрам $p_1^i, \ldots, p_{t_i}^i$ цепи c_i приписаны числа $a_i(1), \ldots, a_i(t_i))$ соответственно, то цепи c_i соответствует слово $a_i(1) \ldots a_i(t_i)$ из $E_k^{t_i}$. Легко видеть, что набор слов $A = (a_1, \ldots, a_h)$ принадлежит Δ; при этом, если для любых i, j таких, что $i \neq j$, $(\mu_\Delta(i, j) + 1)$-м ребрам в цепях c_i и c_j приписаны разные числа, то $A \in \Delta^{(M)}$, в противном же случае $A \in \Delta^{(m)}$. Нетрудно видеть, что таким способом может быть получен любой элемент из π-множества Δ.

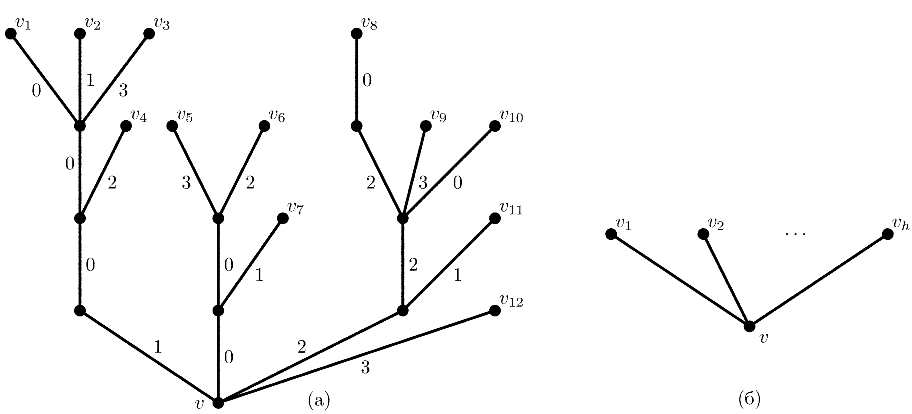

Рис. 2

На рис. 2 (а) при $k = 4$ и $\tau \geqslant 4$ для некоторого приведенного π-множества Δ арности 12 изображено дерево D_Δ. Ребра дерева D_Δ отмечены символами из множества E_4 так, что данная разметка соответствует элементу

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$$

из $\Delta^{(M)}$ такому, что $a_1 = (1000)$, $a_2 = (1001)$, $a_3 = (1003)$, $a_4 = (102)$, $a_5 = (003)$, $a_6 = (002)$, $a_7 = (01)$, $a_8 = (2220)$, $a_9 = (223)$, $a_{10} = (220)$, $a_{11} = (2, 1)$, $a_{12} = (3)$.

Очевидно, что Δ является π-подмножеством множества E_4^T, где $T=(4,4,4,3,3,3,2,4,3,3,2,1)$.

На рис. 2 (б) изображено дерево D'_Δ для π-множества Δ' арности h (при этом $h\leqslant k$), которое является π-подмножеством множества $E_k^{T'}$, где $T=\underbrace{(1,\ldots,1)}_{h}$.

§ 4. Семейства отношений $G_1(k,\tau)$, $N_1(k,\tau)$, $V_1(k,\tau)$, $L_1(k,\tau)$, $Q_0(k,\tau)$, $Q_1(k,\tau)$, $Q_2(k,\tau)$

Пусть $k\geqslant 2, \tau\geqslant 1$.

Семейство $G_1(k,\tau)$. ($G_1(k,\tau)\neq\varnothing$ для любых $k\geqslant 2, \tau\geqslant 1$.) Отношение R принадлежит семейству $G_1(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда существуют $h\geqslant 1$, набор положительных целых чисел $T=(t_1,\ldots,t_h)$, приведенное π-подмножество Δ множества E_k^T такие, что $\max\{t_1,\ldots t_h\}\leqslant\tau$, $R\subset\Delta$, R является тупиковым и Δ-рефлексивным.

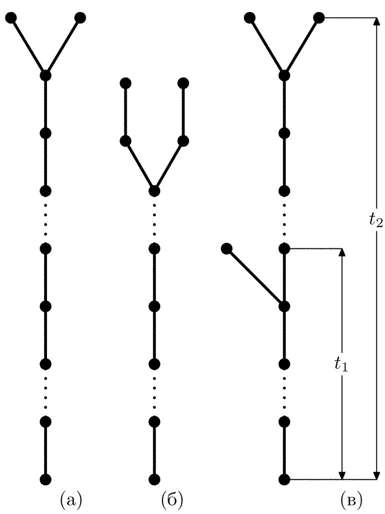

Рис. 3

Пусть $T=(t,t)$ $(1\leqslant t\leqslant\tau)$, Δ_t — π-подмножество множества E_k^T такое, что $\pi_{\Delta_t}(1,2)=1$ (рис. 3 (а))

Семейство $N_1(k,\tau)$. ($N_1(k,\tau)\neq\varnothing$ при любых $k\geqslant 2, \tau\geqslant 1$.) Тупиковое отношение R принадлежит семейству $N_1(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $t\leqslant\tau$ $R\subset\Delta_t$ и $\Delta_t^{(m)}\cap R=\varnothing$.

Пусть $\tau\geqslant 2$, $T=(t,t)$ $(2\leqslant t\leqslant\tau)$. Пусть $\widetilde{\Delta}_t$ — π-подмножество множества E_k^T такое, что $\pi_{\widetilde{\Delta}_t}(1,2)=2$ (рис. 3 (б)).

Семейство $V_1(k,\tau)$. ($V_1(k,\tau)\neq\varnothing$, если $k\geqslant 2, \tau\geqslant 2$.) Тупиковое отношение R принадлежит семейству $V_1(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого t $(2\leqslant t\leqslant\tau)$ $R\subset\widetilde{\Delta}_t$, $\widetilde{\Delta}_t^{(M)}\cap R\neq\varnothing$ и для любого набора (a_1,a_2) из $\widetilde{\Delta}_t^{(m)}$ имеет место следующее: (a_1,a_2) принадлежит R, если $\pi(a_1,a_2)=0$, (a_1,a_2) не принадлежит R, если $\pi(a_1,a_2)=1$.

Пусть $h\geqslant 3$, $T=\underbrace{(t,\ldots,t)}_{h}$ $(1\leqslant t\leqslant\tau)$. Через $B_k(t,h)$ обозначим подмножество множества E_k^T, состоящее из всех наборов $(a_1,\ldots,a_h)$ слов из E_k^T таких, что для любых i,j $(1\leqslant i,j\leqslant h)$ $\pi(a_i,a_j)\leqslant 1$.

Семейство $L_1(k,\tau)$. ($L_1(k,\tau)\neq\varnothing$ при любых $k\geqslant 2, \tau\geqslant 1$.) Тупиковое отношение R принадлежит семейству $L_1(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторых $h\geqslant 3$ и $t\leqslant\tau$ $R\subset B_k(t,h)$ и имеет место следующее:

а) любой набор из $B_k(t,h)$, составленный из единственного элемента множества E_k^t, принадлежит отношению R;

б) в множестве $B_k(t,h)$ существует набор $B=(b_1,\ldots,b_h)$, составленный из двух различных элементов множества E_k^t, не принадлежащий R, но такой, что для любого i $(1\leqslant i\leqslant h)$ в R найдется набор $(b_1,\ldots,b_{i-1},b'_i,b_{i+1},\ldots,b_h)$, отличный от набора B только в одной компоненте.

Пусть $\tau\geqslant 2$, $T=(t_1,t_2,t_2)$ $(1\leqslant t_1<t_2\leqslant\tau)$. Пусть Δ_Q — π-подмножество множества E_k^T такое, что $\pi_{\Delta_Q}(1,2)=\pi_{\Delta_Q}(1,3)=\pi_{\Delta_Q}(2,3)=1$ (рис. 3 (в)).

Семейство $Q_0(k,\tau)$. ($Q_0(k,\tau)\neq\varnothing$, если $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 2$.) Пусть $\tau\geqslant 2$. Тупиковое отношение R принадлежит семейству $Q_0(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторых t_1 и t_2 таких, что $1\leqslant t_1<t_2\leqslant\tau$, $R\subset\Delta_Q$, $\Delta_Q^{(M)}\cap R\neq\varnothing$ и для любого набора (a_1,a_2,a_3) из $\Delta_Q^{(m)}$ имеет место следующее: (a_1,a_2,a_3) принадлежит R лишь в том случае, когда $\pi(a_1,a_2)=\pi(a_1,a_3)=\pi(a_2,a_3)=0$.

Семейство $Q_1(k,\tau)$. ($Q_1(k,\tau)\neq\varnothing$, если $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 2$.) Пусть $\tau\geqslant 2$. Тупиковое отношение R принадлежит семейству $Q_1(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторых t_1 и t_2 таких, что $1\leqslant t_1<t_2\leqslant\tau$, $R\subset\Delta_Q$, $\Delta_Q^{(M)}\cap R\neq\varnothing$ и для любого набора (a_1,a_2,a_3) из $\Delta_Q^{(m)}$ имеет место следующее: (a_1,a_2,a_3) принадлежит R лишь в том случае, когда $\pi(a_2,a_3)=0$.

Семейство $Q_2(k,\tau)$. ($Q_2(k,\tau)\neq\varnothing$, если $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 2$.) Пусть $\tau\geqslant 2$. Тупиковое отношение R принадлежит семейству $Q_2(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторых t_1 и t_2 таких, что $1\leqslant t_1<t_2\leqslant\tau$, $R\subset\Delta_Q$, $\Delta_Q^{(M)}\cap R\neq\varnothing$ и для любого набора (a_1,a_2,a_3) из $\Delta_Q^{(m)}$ имеет место следующее: (a_1,a_2,a_3) принадлежит R лишь в том случае, когда $\pi(a_1,a_2)=\pi(a_1,a_3)=0$.

Теорема 4.1. *Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 1$, $h\geqslant 1$, $T=(t_1,\ldots,t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел такой, что $\max\{t_1,\ldots,t_h\}\leqslant\tau$. Пусть $R\subset E_k^T$ и R — тупиковое отношение. Существует отношение R', принадлежащее объединению семейств $G_1(k,\tau)$, $N_1(k,\tau)$, $V_1(k,\tau)$, $L_1(k,\tau)$, $Q_0(k,\tau)$, $Q_1(k,\tau)$, $Q_2(k,\tau)$ такое, что $U(R)\subseteq U(R')$.*

Доказательство. Пусть $B=(b_1,\ldots,b_h)$ — набор слов из E_k^T, не принадлежащий отношению R и такой, что $f(A_1,\ldots,A_n)=B$ для некоторых д.функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ из P_k^τ и элементов $A_1,\ldots,A_n$ из R. Очевидно, в E_k^T такой набор существует. В силу леммы 2.5 набор B удовлетворяет следующему свойству: $\rho_R(B_{(i)})\neq\varnothing$ для любого i $(1\leqslant i\leqslant h)$. Зафиксируем некоторый набор с данным свойством и будем считать, что

а) если в E_k^T существует набор $B'\prec B$, то $B'\in R$ (действительно, в противном случае в качестве B можно было бы взять набор B'),

б) $\max\{t_1,\ldots,t_h\}=t_h$. (Пусть $\max\{t_1,\ldots,t_h\}\neq t_h$. Тогда, очевидно, существуют подстановка σ чисел $1,\ldots,h$, эквивалентное R отношение R^σ такие, что $R^\sigma\subset E_k^{T^\sigma}$, где $T^\sigma=(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(h)})$ и $\max\{t_1,\ldots,t_h\}=t_{\sigma(h)}$.)

Рассмотрим отношение $\widetilde{R}$, получающееся из R следующим образом.

Пусть Δ — π-подмножество множества E_k^T, порожденное элементом B, т. е. $B\in\Delta^{(M)}$. Пусть $\widetilde{R}=\Delta\cap R$.

Доказательство теоремы будет состоять в доказательстве нескольких утверждений, характеризующих свойства отношения R, набора B, π-множества Δ и отношения $\widetilde{R}$.

Утверждение 1. *Пусть $h\geqslant 2$, $B'=(b'_1,\ldots,b'_h)$ — произвольный элемент из R такой, что $B\preceq B'$. Тогда $\pi(b'_i,b'_j)\neq 0$ для любых i,j $(1\leqslant i,j\leqslant h)$, $i\neq j$.*

Предположим противное. Пусть существуют числа i,j $(1\leqslant i,j\leqslant h)$, $i\neq j$ такие, что $\pi(b'_i,b'_j)=0$. Рассмотрим π-множество Δ', порожденное элементом B'. Пусть $R_1=\Delta'\cap R$. В силу теоремы 3.7 имеем $U(R)\subseteq U(R_1)$. Очевидно, $B'\in R_1$, но $B\notin R_1$. Так как $B\preceq B'$, существует д.функция $f(x)\in P_k^\tau$ такая, что $f(B')=B$ (лемма 3.2). Поэтому $U(R_1)\neq P_k^\tau$. Однако π-множество Δ' не является приведенным, что противоречит тупиковости отношения R. Таким образом, для любых i,j $(1\leqslant i,j\leqslant h)$, $i\neq j$, $\pi(b'_i,b'_j)\neq 0$.

Утверждение 2. *Пусть $h\geqslant 2$, $\widetilde{R}=\varnothing$. Тогда $\pi(b_i,b_j)=0$ для любых i,j $(1\leqslant i,j\leqslant h)$.*

Утверждение 3. *Пусть $h\geqslant 2$, $\widetilde{R}\neq\varnothing$. Тогда существует i $(1<i<h)$ такое, что $\pi(b_i,b_h)\neq 0$.*

Утверждение 4. *Пусть* $h \geqslant 2$, $\Delta^{(M)} \cap \widetilde{R} = \varnothing$. *Тогда для любого* i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ *существует* j $(1 \leqslant j \leqslant h)$, $i \neq j$, *такое, что* $\pi(b_i, b_j) \leqslant 1$ *и* $t_i \leqslant t_j$.

Предположим противное. Пусть существует i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ такое, что для любого j $(1 \leqslant j \leqslant h)$, $i \neq j$, либо $\pi(b_i, b_j) \geqslant 2$, либо, если $\pi(b_i, b_j) \leqslant 1$, то $t_i > t_j$. В силу выбора набора B в E_k^T существует набор $B^i = (b_1, \ldots, b_{i-1}, b'_i, b_{i+1}, \ldots, b_h)$, принадлежащий R, такой, что $\pi(b_i, b'_i) = 1$. В рассматриваемом случае, как нетрудно видеть, набор B^i совпадает с B по отношению предпорядка $\preceq$. Это означает, что $B^i \in \Delta$. Таким образом, возникает противоречие с исходным предположением, т. е. с тем, что $\Delta^{(M)} \cap R = \varnothing$.

Утверждение 5. *Пусть* $h = 1$. *Тогда, очевидно,* $R \in G_1(k, \tau)$ *и в качестве* R' *можно взять само отношение* R.

Утверждение 6. *Пусть* $h \geqslant 2$, $\widetilde{R} = \varnothing$. *Тогда существует отношение* R', *принадлежащее семейству* $N_1(k, \tau)$, *такое, что* $U(R) \subseteq U(R')$.

Так как $\widetilde{R} = \varnothing$, то (согласно утверждению 2) $\pi(b_i, b_j) = 0$ для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$. Вместе с тем, в соответствии с выбором элемента B в R существует набор слов $B^h = (b_1, \ldots, b_{h-1}, b'_h)$ такой, что $\pi(b_h, b'_h) = 1$. Ясно, что $B \prec B^h$. Из тупиковости отношения R следует, что $h = 2$ (утверждение 1 — если $h > 2$, то $\pi(b_1, b_2)$ не может равняться нулю). В силу утверждения 4 ($\Delta^{(M)} \cap \widetilde{R} = \varnothing$) $t_1 = t_2$. Пусть $t_1 = t_2 = t$. Рассмотрим π-множество Δ_t, порожденное элементом $B^2 = (b_1, b'_2)$, и отношение $R' = \Delta_t \cap R$. Очевидно, $U(R') \neq P_k^\tau$, $U(R) \subseteq U(R')$. Нетрудно видеть, что $R' \in N_1(k, \tau)$.

Утверждение 7. *Пусть* $h \geqslant 2$, $\Delta^{(M)} \cap \widetilde{R} \neq \varnothing$. *Тогда в качестве* R' *можно взять отношение* $\widetilde{R}$; *при этом* $\widetilde{R} \in G_1(k, \tau)$.

Так как $B \in \Delta^{(M)}$ и $\Delta^{(M)} \cap \widetilde{R} \neq \varnothing$, то существуют $A \in \Delta^{(M)} \cap \widetilde{R}$ и д.функция $f(x)$ такие, что $f(A) = B$. Это означает, что $U(\widetilde{R}) \neq P_k^\tau$. Однако $U(R) \subseteq U(\widetilde{R})$. Очевидно, $\widetilde{R}$ — Δ-рефлексивное отношение. Из тупиковости отношения R следует, что $\widetilde{R}$ также тупиковое отношение.

Утверждение 8. *Пусть* $h = 2$, $\widetilde{R} \neq \varnothing$, $\Delta^{(M)} \cap \widetilde{R} = \varnothing$. *Тогда существует отношение* R', *принадлежащее семейству* $V_1(k, \tau)$, *такое, что* $U(R) \subseteq U(R')$.

Исходя из утверждений 3, 4 легко видеть, что $t_1 = t_2$ и $\pi(b_1, b_2) = \pi_\Delta(1, 2) = 1$. Пусть $t_1 = t_2 = t$. Отношение R тупиковое. Следовательно, это отношение приведенное, и существует элемент $A = (a_1, a_2)$ из R такой, что $\pi(a_1, a_2) \neq 0$. Так как $\Delta^{(M)} \cap \widetilde{R} = \varnothing$ и $\pi_\Delta(1, 2) = 1$, то $\pi(a_1, a_2) \geqslant 2$. Пусть $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2)$ — произвольный элемент из E_k^T такой, что $\pi(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2) = 2$. Очевидно, $\widetilde{A} \preceq A$. Поэтому существует д.функция $f(x)$ такая, что $f(A) = \widetilde{A}$. Если $\widetilde{A} \notin R$, то $\rho_R(A_{(1)}) \neq \varnothing$ и $\rho_R(A_{(2)}) \neq \varnothing$ в силу тупиковости отношения R. Отсюда следует, что в R существует элемент $A' = (a'_1, a'_2)$ такой, что $\pi(a'_1, a'_2) = 2$. Пусть $\widetilde{\Delta}_t$ — π-множество, порожденное элементом A'. Пусть $R' = \widetilde{\Delta}_t \cap R$. Очевидно, $U(R) \subseteq U(R')$. Так как $B \prec A'$, то $B \in \widetilde{\Delta}_t$. Однако, $B \notin R$, $B \notin R'$ и, таким образом, $U(R') \neq P_k^\tau$. Нетрудно видеть, что $R' \in V_1(k, \tau)$.

Утверждение 9. *Пусть* $h \geqslant 3$, $\widetilde{R} \neq \varnothing$, $\Delta^{(M)} \cap \widetilde{R} = \varnothing$ *и существуют* i, j, l $(1 \leqslant i < j < l \leqslant h)$ *такие, что* $\pi(b_i, b_j) \neq 0$, $\pi(b_i, b_l) \neq 0$, $\pi(b_j, b_l) \neq 0$. *Тогда в качестве* R' *можно взять отношение* $\widetilde{R}$; *при этом* $\widetilde{R} \in G_1(k, \tau)$.

Действительно, нетрудно видеть, что $\Delta^{(m)} \neq \varnothing$, $\Delta^{(m)} \subset \widetilde{R}$, $U(R) \subseteq U(\widetilde{R})$ и в силу леммы 3.4 выполнено $U(\widetilde{R}) \neq P_k^\tau$. Исходя из утверждения 4 и тупиковости отношения R, легко показать, что $\widetilde{R} \in G_1(k, \tau)$.

Утверждение 10. *Пусть* $h\geqslant 4$, $\widetilde{R}\neq\varnothing$, $\Delta^{(M)}\cap\widetilde{R}=\varnothing$. *Пусть существует* i $(1\leqslant i\leqslant h)$ *такое, что* $t_i<t_h$. *Тогда существуют* j,l $(1\leqslant j,l\leqslant h)$, $j\neq l$, $j\neq h$, $l\neq h$, *такие, что* $\pi(b_j,b_l)\neq 0$, $\pi(b_j,b_h)\neq 0$, $\pi(b_l,b_h)\neq 0$.

Так как $\widetilde{R}\neq\varnothing$, то существует j $(1\leqslant j\leqslant h)$ такое, что $\pi(b_j,b_h)\neq 0$ (утверждение 3). Рассмотрим возникающие случаи.

Пусть либо $\pi(b_j,b_h)\geqslant 2$, либо $\pi(b_j,b_h)=1$ и $t_j<t_h$. В силу утверждения 4 существует l $(1\leqslant l\leqslant h)$, $l\neq h$, такое, что $t_l=t_h$ и $\pi(b_l,b_h)\geqslant 0$. Пусть $\pi(b_l,b_h)=0$ для любого такого l. Из выбора элемента B следует, что в R существует элемент $B^l=(b_1,\ldots,b_{l-1},b'_l,b_{l+1},\ldots,b_h)$ такой, что $\pi(b_l,b'_l)=1$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае $B\prec B^l$ и возникает противоречие с утверждением 1 — так как $h\geqslant 4$, то существует m $(1\leqslant m<h)$, $m\neq j$, такое, что либо $\pi(b_m,b_j)=0$, либо $\pi(b_m,b_h)=0$.

Пусть для любого j $(1\leqslant j\leqslant h)$ такого, что $\pi(b_j,b_h)\neq 0$, выполнено $\pi(b_j,b_h)=1$ и $t_j=t_h$. Рассмотрим набор $B^i=(b_1,\ldots,b_{i-1},b'_i,b_{i+1},\ldots,b_h)$, принадлежащий R и такой, что $\pi(b_i,b'_i)=1$. Однако $t_i<t_h$. Поэтому $B\prec B^i$ и также, как и в предыдущем случае, возникает противоречие с утверждением 1.

Утверждение 11. *Пусть* $h=3$, $\widetilde{R}\neq\varnothing$, $\Delta^{(M)}\cap\widetilde{R}=\varnothing$, $t_1<t_3$, $\pi(b_1,b_3)=0$. *Тогда существует отношение* R', *принадлежащее объединению семейств* $Q_0(k,\tau)$ *и* $Q_1(k,\tau)$, *такое, что* $U(R)\subseteq U(R')$.

Из утверждений 3, 4 легко следует, что $t_2=t_3$ и $\pi(b_2,b_3)=1$. В силу выбора набора B в R существует элемент $B^1=(b_1^1,b_2,b_3)$ такой, что $\pi(b'_1,b_1)=1$. Очевидно, $B\prec B^1$. Пусть Δ_Q — π-множество, порожденное элементом B^1. Пусть $R'=\Delta_Q\cap R$. Ясно, что $U(R)\subseteq U(R')$, $U(R')\neq P_k^\tau$. Пусть Δ_1 — множество всех элементов из Δ_Q, совпадающих с B по отношению предпорядка $\preceq$. Нетрудно видеть, что $\Delta_1\cap R'=\varnothing$ (иначе возникало бы противоречие с утверждением 1). Кроме того, $\rho_R(\widetilde{B}_{(1)})\neq\varnothing$, $\rho_R(\widetilde{B}_{(2)})\neq\varnothing$, $\rho_R(\widetilde{B}_{(3)})\neq\varnothing$ для любого $\widetilde{B}$ из Δ_1. Отсюда следует тупиковость отношения R'. Пусть $A=(a_1,a_2,a_3)$ — элемент из Δ_Q такой, что $\pi(a_1,a_2)=\pi(a_1,a_3)=1$, $\pi(a_2,a_3)=0$, и Δ_2 — множество всех элементов из Δ_Q, совпадающих с A по отношению предпорядка $\preceq$. Возникают два случая: либо $\Delta_2\cap R'=\varnothing$, либо $\Delta_2\cap R'=\Delta_2$. В первом случае отношение R' принадлежит семейству $Q_0(k,\tau)$, а во втором — семейству $Q_1(k,\tau)$

Утверждение 12. *Пусть* $h=3$, $\widetilde{R}\neq\varnothing$, $\Delta^{(M)}\cap\widetilde{R}=\varnothing$, $t_1<t_3$, $\pi(b_2,b_3)=0$. *Тогда существует отношение* R', *принадлежащее объединению семейств* $Q_0(k,\tau)$ *и* $Q_2(k,\tau)$, *такое, что* $U(R)\subseteq U(R')$.

Доказательство справедливости утверждения 12 совершенно аналогично доказательству справедливости утверждения 11.

Утверждение 13. *Пусть* $h\geqslant 3$, $\widetilde{R}\neq\varnothing$, $\Delta^{(M)}\cap\widetilde{R}=\varnothing$. *Пусть существует* i $(1\leqslant i<h)$ *такое, что для любого* j $(1\leqslant j\leqslant h)$ *либо* $\pi(b_j,b_i)=0$, *либо* $\pi(b_j,b_h)=0$. *Тогда* $\pi(b_i,b_h)=1$.

Из утверждения 3 следует, что $\pi(b_i,b_h)\neq 0$. Предположим, что $\pi(b_i,b_h)\geqslant 2$. Нетрудно видеть, что тогда (в силу утверждения 4) h должно быть не меньше четырех и должны существовать j,l $(1\leqslant j,l\leqslant h)$, $j\neq i$, $l\neq h$, такие, что $t_j=t_i$, $t_l=t_h$, $\pi(b_j,b_i)=0$, $\pi(b_l,b_h)=0$. Однако набор слов B выбран так, что в R существует элемент $B^i=(b_1,\ldots,b_{i-1},b'_i,b_{i+1},\ldots,b_h)$ такой, что $\pi(b'_i,b_i)=1$. Ясно, что в данном случае $B\prec B^i$. Вместе с тем, $\pi(b_l,b_h)=0$ и возникает противоречие с утверждением 1. Таким образом, $\pi(b_i,b_j)=1$. Кроме того, заметим, что $t_1=\ldots=t_h$ при $h\geqslant 4$ (утверждение 10).

Утверждение 14. *Пусть $h \geqslant 3$, $\widetilde{R} \neq \varnothing$, $\Delta^{(M)} \cap \widetilde{R} = \varnothing$. Пусть $t_1 = \ldots = t_h$ и существует i $(1 \leqslant i < h)$ такое, что для любого j $(1 \leqslant j \leqslant h)$ либо $\pi(b_j, b_i) = 0$, либо $\pi(b_j, b_h) = 0$. Тогда существует отношение R', принадлежащее семейству $L_1(k,\tau)$, такое, что $U(R) \subseteq U(R')$.*

В силу утверждения 13 для любых j,l $(1 \leqslant j,l \leqslant h)$ $\pi(b_j,b_l) \leqslant 1$. Пусть $t_1 = \ldots = t_h = t$. Рассмотрим отношение $R' = B_k(t,h) \cap R$. Так как любой набор $(a_1,\ldots,a_h)$ такой, что для любых j,l $(1 \leqslant j,l \leqslant h)$ $\pi(a_j,a_l) = 0$, принадлежит R, то отношение R' не пусто. Очевидно, $U(R) \subseteq U(R')$. Заметим, что в данном случае $B \in B_k(t,h)$, но $B \notin R$. Поэтому $R' \neq B_k(t,h)$. Элемент B из E_k^T выбран так, что в R существуют наборы $B^1 = (b_1', b_2, b_3, \ldots, b_{h-1}, b_h)$, $B^2 = (b_1, b_2', b_3, \ldots, b_{h-1}, b_h)$, $\ldots$, $B^{h-1} = (b_1, b_2, \ldots, b_{h-1}', b_h)$, $B^h = (b_1, b_2, \ldots, b_{h-1}, b_h')$ такие, что $\pi(b_1', b_1) = \pi(b_2', b_2) = \ldots = \pi(b_{h-1}', b_{h-1}) = \pi(b_h', b_h) = 1$. Ясно, что наборы $B^1, B^2, \ldots, B^{h-1}, B^h$ принадлежат отношению R'.

Пусть $F(x_1,\ldots,x_h)$ — функция k-значной логики такая, что

$$
\begin{aligned}
F(b_1'(t), b_1(t), \ldots, b_1(t), b_1(t)) &= b_1(t),\\
F(b_2(t), b_2'(t), \ldots, b_2(t), b_2(t)) &= b_2(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(b_{h-1}(t), b_{h-1}(t), \ldots, b_{h-1}'(t), b_{h-1}(t)) &= b_{h-1}(t),\\
F(b_h(t), b_h(t), \ldots, b_h(t), b_h'(t)) &= b_h(t).
\end{aligned}
$$

Пусть $y = f(x_1,\ldots,x_h)$ — д.функция из P_k^τ такая, что $y(t) = F(x_1(t),\ldots,x_h(t))$ и при $t > 1$ для любого $t' < t$ выполнено $y(t') = x_1(t')$. Легко видеть, что $f(B^1, B^2, \ldots, B^h) = B$. Таким образом, $f \notin U(R')$, т. е. $U(R) \neq P_k^\tau$. Из тупиковости отношения R легко следует тупиковость отношения R'. Очевидно, R' принадлежит семейству отношений $L_1(k,\tau)$.

Нетрудно убедиться в том, что справедливость утверждения теоремы 4.1 следует из справедливости утверждений 1—14.

Следствие из теоремы 1.2 и теоремы 4.1. *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$. Множество классов сохранения отношений, принадлежащих объединению семейств $G_1(k,\tau)$, $N_1(k,\tau)$, $V_1(k,\tau)$, $L_1(k,\tau)$, $Q_0(k,\tau)$, $Q_1(k,\tau)$ и $Q_2(k,\tau)$, образует критериальную и, следовательно, S-критериальную систему в P_k^τ.*

§ 5. S-тупиковые отношения. S-критериальность S-тупиковых отношений

Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $t \in \{1,\ldots,\tau\}$.

Определение. Д.функции $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ и $f_2(x_1,\ldots,x_n)$ из P_k^τ называются *t-эквивалентными*, если $f_1(a_1,\ldots,a_n) = f_2(a_1,\ldots,a_n)$ для любого набора $(a_1,\ldots,a_n)$ элементов из E_k^t.

Определение. Пусть $\mathfrak{M}_1 \subseteq P_k^\tau$, $\mathfrak{M}_2 \subseteq P_k^\tau$. Множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называются *t-эквивалентными*, если для любой д.функции f_1 из $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}_2$ существует д.функция f_2, t-эквивалентная f_1, и наоборот: для любой д.функции g_2 из $\mathfrak{M}_2$ в $\mathfrak{M}_1$ существует t-эквивалентная g_2 функция g_1.

Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1,\ldots,t_h)$, Δ — произвольное приведенное π-подмножество множества E_k^T. На множестве $\{1,\ldots,h\}$ введем отношение Δ-эквивалентности: числа i,j $(1 \leqslant i,j \leqslant h)$ Δ-эквивалентны тогда и только тогда, когда $t_i = t_j$ и $\pi_\Delta(i,j) \leqslant 1$. Таким образом, множество $\{1,\ldots,h\}$ разбивается на классы Δ-эквивалентности. Пусть ω — один из таких классов. Учитывая утверждения леммы 3.6 и следствия 1 из леммы 3.5 можно, очевидно, считать, что существуют числа $l_\omega \geqslant 1$ и $h_\omega \geqslant 1$ такие, что

$\omega=\{l_\omega, l_\omega+1,\ldots,l_\omega+h_\omega-1\}$, т. е. класс Δ-эквивалентности ω содержит подряд следующие числа из $\{1,\ldots,h\}$. На рис. 2 (а) множество $\{1,\ldots,12\}$ разбивается на следующие классы Δ-эквивалентности: $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{5,6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{9,10\}$, $\{11\}$, $\{12\}$.

Определение. Пусть $h\geqslant 1$, $T=(t_1,\ldots,t_h)$, Δ — произвольное приведенное π-подмножество множества E_k^T. Пусть ω — произвольный класс Δ-эквивалентности, $\omega=\{l_\omega,l_\omega+1,\ldots,l_\omega+h_\omega-1\}$. Пусть $\widetilde{T}=(t_1,\ldots,t_{l_\omega-1},t_{l_\omega}-1,\ldots,t_{l_\omega+h_\omega-1}-1,t_{l_\omega+h_\omega},\ldots,t_h)$. Тогда для любого $A\in\Delta$ будем называть $\widetilde{T}$-фундамент элемента A также *ω-фундаментом* A и обозначать A_ω. Кроме того, $\widetilde{T}$-фундамент π-множества Δ будем называть *ω-фундаментом* Δ и обозначать через Δ_ω.

Заметим, что если $\Delta_\omega\neq\varnothing$, то Δ_ω представляет собой приведенное π-множество, арность которого равна $h-h_\omega$.

Определение. Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 2$, $h\geqslant 1$. Пусть $T=(t_1,\ldots,t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел такой, что $\max\{t_1,\ldots,t_h\}=t$, $t\leqslant\tau$, $t\geqslant 2$. Пусть $\Delta\subseteq E_k^T$, Δ — произвольное π-множество. Пусть либо $R\subset\Delta$, либо $R\subset B_k(t,h)$, R — тупиковое отношение. Отношение R назовем *S-тупиковым* в том случае, когда имеет место следующее:

а) множество $S(U(R))$ $(t-1)$-эквивалентно $S(P_k^\tau)$,

б) если $R\subset\Delta$, то для любых класса Δ-эквивалентности ω и $\widetilde{R}\subset\Delta_\omega$ таких, что $U(\widetilde{R})\neq P_k^\tau$, $S(U(R))\nsubseteq U(\widetilde{R})$.

Пусть $\tau\geqslant 1$, набор $T=(t_1,\ldots,t_h)$ таков, что $t_1=\ldots=t_h=1$. Тогда тупиковые отношения, принадлежащие подсемействам $G_1(k,1)$, $N_1(k,1)$, $L_1(k,1)$ семейств отношений $G_1(k,\tau)$, $N_1(k,\tau)$, $L_1(k,\tau)$ соответственно, будем считать S-тупиковыми по определению.

Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 1$. Рассмотрим

Семейство отношений $G_2(k,\tau)$. ($G_2(k,\tau)\neq\varnothing$ для любых $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 1$.) Пусть $h\geqslant 1$. Отношение R арности h принадлежит семейству $G_2(k,\tau)$ — подсемейству семейства отношений $G_1(k,\tau)$, тогда и только тогда, когда для некоторого t $(1\leqslant t\leqslant\tau)$ R является собственным подмножеством множества $B_k(t,h)$.

Теорема 5.1. *Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 1$. Множество классов сохранения S-тупиковых отношений, принадлежащих объединению семейств $G_2(k,\tau)$, $N_1(k,\tau)$, $V_1(k,\tau)$ и $L_1(k,\tau)$ образует S-критериальную систему в P_k^τ.*

Прежде, чем доказывать теорему 5.1, введем ряд понятий, докажем одну теорему и несколько лемм.

Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 1$, $h\geqslant 1$, $T=(t_1,\ldots,t_h)$, Δ — приведенное π-подмножество множества E_k^T и ω — некоторый класс Δ-эквивалентности; $\omega=\{l_\omega,l_\omega+1,\ldots,l_\omega+h_\omega-1\}$, причем $\Delta_\omega\neq\varnothing$. Пусть $\mathfrak{A}_\omega=(A_\omega^1,\ldots,A_\omega^n)$ — набор элементов из Δ_ω такой, что для любого i $(1\leqslant i\leqslant n)$ $A_\omega^i=(a_1^i,\ldots,a_{l_\omega-1}^i,a_{l_\omega}^i,\ldots,a_{l_\omega+h_\omega-1}^i,a_{l_\omega+h_\omega}^i,\ldots,a_h^i)$, если $t_{l_\omega}>1$, и $A_\omega^i=(a_1^i,\ldots,a_{l_\omega-1}^i,a_{l_\omega+h_\omega}^i,\ldots,a_h^i)$, если $t_{l_\omega}=1$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная д.функция из P_k^τ. Через $F_{[f,\mathfrak{A}_\omega,\omega]}(x_1,\ldots,x_n)$ обозначим функцию k-значной логики, реализуемую в состоянии, в которое переходит вычисляющий д.функцию f автомат под действием набора $(a_{l_\omega}^1,\ldots,a_{l_\omega}^n)$, если $t_{l_\omega}>1$, или реализуемую в начальном состоянии этого автомата, если $t_{l_\omega}=1$.

Теорема 5.2. *Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 1$, $\mathfrak{M}\subset P_k^\tau$, $\mathfrak{M}$ — S-множество. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная д.функция из* $[\mathfrak{M}]$. *Пусть Δ — приведенное π-множество, $A^1\in\Delta$, $\ldots$, $A^n\in\Delta$, $f(A^1,\ldots,A^n)=A$. Тогда существуют числа m, $m_1\geqslant 1$, $\ldots$, $m_n\geqslant 1$, принадлежащая замыканию* *множества* $\mathfrak{M}$ *д.функция* $\widetilde{f}(x_1,\ldots,x_m)$ *такие, что* $m_1+\ldots+m_n=m$ *и для любого класса* Δ*-эквивалентности* ω *имеет место следующее*:

$$\widetilde{f}(\underbrace{A^1_\omega,\ldots,A^1_\omega}_{m_1},\underbrace{A^2_\omega,\ldots,A^2_\omega}_{m_2},\ldots,\underbrace{A^n_\omega,\ldots,A^n_\omega}_{m_n})=A_\omega,$$

причем, если $\mathfrak{A}_\omega=(\underbrace{A^1_\omega,\ldots,A^1_\omega}_{m_1},\underbrace{A^2_\omega,\ldots,A^2_\omega}_{m_2},\ldots,\underbrace{A^n_\omega,\ldots,A^n_\omega}_{m_n})$, *то функция* k*-значной логики* $F_{[\tilde{f},\mathfrak{A}_\omega,\omega]}(x_1,\ldots,x_m)$ *не выпускает ни одного значения из множества* E_k.

Доказательство теоремы 5.2 состоит в следующем. Рассмотрим множество $\widetilde{\mathfrak{M}}$ всех д.функций, которые могут быть получены из д.функций множества $\mathfrak{M}$ только с использованием операции бесповторной суперпозиции (операции подстановки без отождествления). Так как $\mathfrak{M}$ — S-множество и $f\in[\mathfrak{M}]$, то, как нетрудно видеть, д.функция $\widetilde{f}$ принадлежит множеству $\widetilde{\mathfrak{M}}$ и удовлетворяет требуемому по условию теоремы свойству; при этом $\widetilde{f}(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{m_1},\underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{m_2},\ldots,\underbrace{x_n,\ldots,x_n}_{m_n})=f(x_1,\ldots,x_n)$.

Лемма 5.3. *Пусть* $h\geqslant 3$, $T=(t_1,\ldots,t_h)$, Δ — *приведенное* π*-подмножество множества* E_k^T. *Пусть существует класс* Δ*-эквивалентности* ω *такой, что* π*-множество* Δ_ω *не пусто и его арность не меньше трех. Тогда никакое* Δ*-рефлексивное отношение не является* S*-тупиковым*.

Доказательство. По условию леммы существует класс Δ-эквивалентности ω такой, что арность π-множества Δ_ω — ω-фундамента Δ не меньше трех. Не ограничивая общности, будем считать, что $\omega=\{1,\ldots,\widetilde{h}\}$. Предположим противное. Пусть сущестует Δ-рефлексивное отношение R, которое является S-тупиковым. Из определения S-тупиковости следует, что множество $S(U(R))$ не сохраняет ни одного отношения R' такого, что $R'\subset\Delta_\omega$ и $U(R')\neq P_k^\tau$. Пусть A — произвольный элемент из $\Delta^{(M)}$, не принадлежащий R; $A=(a_1,\ldots,a_{\tilde{h}},a_{\tilde{h}+1},\ldots,a_h)$.

Пусть A_ω — ω-фундамент A. Очевидно, $A_\omega\in\Delta_\omega^{(M)}$. В силу леммы 3.4 существуют $A^1_\omega\in\Delta_\omega^{(m)}$, $A^2_\omega\in\Delta_\omega^{(m)}$ и д.функция $f(x_1,x_2)$, принадлежащая замыканию множества $S(U(R))$, такие, что $f(A^1_\omega,A^2_\omega)=A_\omega$. Но тогда для некоторых $m_1\geqslant 1$, $m_2\geqslant 1$ и набора $\mathfrak{A}=(\underbrace{A^1_\omega,\ldots,A^1_\omega}_{m_1},\underbrace{A^2_\omega,\ldots,A^2_\omega}_{m_2})$ в $[S(U(R))]$ существует д.функция $\widetilde{f}(x_1,\ldots,x_{m_1},x_{m_1+1},\ldots,x_{m_1+m_2})$ такая, что $\widetilde{f}(\underbrace{A^1_\omega,\ldots,A^1_\omega}_{m_1},\underbrace{A^2_\omega,\ldots,A^2_\omega}_{m_2})=A_\omega$, а функция k-значной логики $F_{[\tilde{f},\mathfrak{A},\omega]}(x_1,\ldots,x_{m_1},x_{m_1+1},\ldots,x_{m_1+m_2})$ не выпускает ни одного значения из множества E_k (теорема 5.2). Пусть $A_\omega=(\widetilde{a},a_{\tilde{h}+1},\ldots,a_h)$, $A^1_\omega==(\widetilde{a}_1,a^1_{\tilde{h}+1},\ldots,a^1_h)$, $A^2_\omega=(\widetilde{a}_2,a^2_{\tilde{h}+1},\ldots,a^2_h)$. Очевидно, $\pi(\widetilde{a},a_1)=\pi(\widetilde{a},a_2)=\ldots$ $\ldots=\pi(\widetilde{a},a_{\tilde{h}})=0$. Пусть $m_1+m_2=m$. Для функции k-значной логики $F_{[\tilde{f},\mathfrak{A},\omega]}(x_1,\ldots,x_{m_1},\ldots,x_m)$ введем обозначение $F(x_1,\ldots,x_{m_1},\ldots,x_m)$. Так как $F(x_1,\ldots,x_{m_1},\ldots,x_m)$ не выпускает ни одного значения из E_k, то существуют наборы $(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^{m_1},\beta_1^1,\ldots,\beta_1^{m_2})$, $\ldots$, $(\alpha_{\tilde{h}}^1,\ldots,\alpha_{\tilde{h}}^{m_1},\beta_{\tilde{h}}^1,\ldots,\beta_{\tilde{h}}^{m_2})$ чисел из E_k такие, что

$$F(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^{m_1},\beta_1^1,\ldots,\beta_1^{m_2})=a_1(t_1),\ \ldots,\ F(\alpha_{\tilde{h}}^1,\ldots,\alpha_{\tilde{h}}^{m_1},\beta_{\tilde{h}}^1,\ldots,\beta_{\tilde{h}}^{m_2})=a_{\tilde{h}}(t_1).$$

Пусть $A_1=(a_1^1,\dots,a_{\tilde h}^1,a_{\tilde h+1}^1,\dots,a_h^1)$, $\dots$, $A_{m_1}=(a_1^{m_1},\dots,a_{\tilde h}^{m_1},a_{\tilde h+1}^1,\dots,a_h^1)$, $A_{m_1+1}=(a_1^{m_1+1},\dots,a_{\tilde h}^{m_1+1},a_{\tilde h+1}^2,\dots,a_h^2)$, $\dots$, $A_m=(a_1^m,\dots,a_{\tilde h}^m,a_{\tilde h+1}^2,\dots,a_h^2)$ — совокупность элементов из Δ таких, что для любого s $(1\leqslant s\leqslant \widetilde{h})$ имеют место равенства

$$\pi(\widetilde{a}_1,a_s^1)=\dots=\pi(\widetilde{a}_1,a_s^{m_1})=0,$$
$$\pi(\widetilde{a}_2,a_s^{m_1+1})=\dots=\pi(\widetilde{a}_2,a_s^m)=0,$$
$$a_s^1(t_1)=\alpha_s^1,\dots,a_s^{m_1}(t_1)=\alpha_s^{m_1},$$
$$a_s^{m_1+1}(t_1)=\beta_s^1,\dots,a_s^m(t_1)=\beta_s^{m_2}.$$

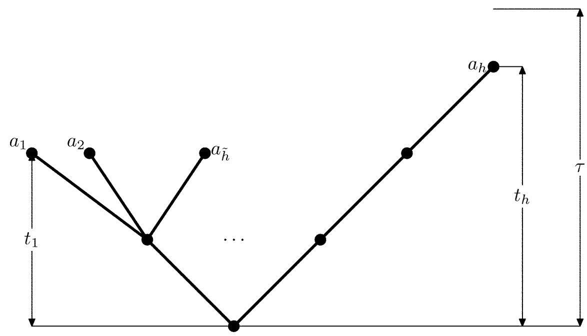

Рис. 4

Из данных равенств следует, что A_ω^1 является ω-фундаментом элементов $A_1,\dots,A_{m_1}$, а A_ω^2 — ω-фундаментом элементов $A_{m+1},\dots,A_m$. Однако $A_\omega^1\in\Delta\omega^{(m)}$, $A_\omega^2\in\Delta\omega^{(m)}$. Поэтому $A_1\in\Delta^{(m)}$, $\dots$, $A_{m_1}\in\Delta^{(m)}$, $A_{m+1}\in\Delta^{(m)}$, $\dots$, $A_m\in\Delta^{(m)}$ и, следовательно, $A_1,\dots,A_m$ принадлежат R. Вместе с тем, как нетрудно видеть, $\widetilde{f}(A_1,\dots,A_{m_1},A_{m_1+1},\dots,A_m)=A$. Так как д.функция $\widetilde{f}$ принадлежит множеству $S(U(R))$, то A также должно принадлежать R. Из возникшего противоречия следует справедливость утверждения доказываемой леммы.

Л е м м а 5.4. *Пусть $h\geqslant 1$, $T=(t_1,\dots,t_h)$, Δ — приведенное π-подмножество множества E_k^T. Пусть $R\subset\Delta$, R — тупиковое и Δ-рефлексивное отношение. Пусть существуют класс Δ-эквивалентности ω и $A\in R\cap\Delta^{(M)}$ такие, что любой элемент A' из $\Delta^{(M)}$ принадлежит R, если ω-фундаменты A и A' совпадают. Тогда отношение R не является S-тупиковым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности будем считать, что $\omega=\{1,\dots,\widetilde{h}\}$. Так как R — тупиковое отношение, то в $\Delta^{(M)}$ существует элемент $\widetilde{A}$, не принадлежащий R. Предположим, что R является также и S-тупиковым. Пусть A_ω и $\widetilde{A}_\omega$ — ω-фундаменты элементов A и $\widetilde{A}$ соответственно. Тогда в силу леммы 5.3 и теоремы 5.2 для некоторого n $(n\geqslant 1)$ в замыкании множества $S(U(R))$ существует д.функция $f(x_1,\dots,x_n)$ такая, что $f(\underbrace{A_\omega,\dots,A_\omega}_{n})=\widetilde{A}_\omega$, а функция k-значной логики $F_{[f,\mathfrak{A},\omega]}(x_1,\dots,x_n)$, где $\mathfrak{A}=(\underbrace{A_\omega,\dots,A_\omega}_{n})$, не выпускает ни одного значения из множества E_k. Пусть $A=(a_1,\dots,a_{\tilde h},a_{\tilde h+1},\dots,a_h)$, $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_1,\dots,\widetilde{a}_{\tilde h},\widetilde{a}_{\tilde h+1},\dots,\widetilde{a}_h)$. Для функции k-значной логики $F_{[f,\mathfrak{A},\omega]}(x_1,\dots,x_n)$ введем обозначение $F(x_1,\dots,x_n)$. Пусть наборы $(\alpha_1^1,\dots,\alpha_1^n)$, $\dots$, $(\alpha_{\tilde h}^1,\dots,\alpha_{\tilde h}^n)$ чисел из E_k таковы, что

$$F(\alpha_1^1,\dots,\alpha_1^n)=\widetilde{a}_1(t_1),\quad \dots,\quad F(\alpha_{\tilde h}^1,\dots,\alpha_{\tilde h}^n)=\widetilde{a}_{\tilde h}(t_1).$$

Рассмотрим совокупность

$$A_1=(a_1^1,\dots,a_{\tilde h}^1,a_{\tilde h+1},\dots,a_h),\quad \dots,\quad A_n=(a_1^n,\dots,a_{\tilde h}^n,a_{\tilde h+1},\dots,a_h)$$

элементов из $\Delta^{(M)}$ таких, что ω-фундаменты $A_1,\dots,A_n$ совпадают с A_ω и для любого s $(1\leqslant s\leqslant\widetilde{h})$ имеют место равенства $a_s^1(t_1)=\alpha_s^1$, $\dots$, $a_s^n(t_1)=\alpha_s^n$.

Нетрудно видеть, что $f(A_1,\ldots,A_n)=\widetilde{A}$. Однако по условию леммы $A_1\in R$, …, $A_n\in R$, но $\widetilde{A}\notin R$. Возникает противоречие, из которого следует справедливость утверждения доказываемой леммы.

Лемма 5.5. *Пусть $k\geqslant 2$, $T=(t_1,t_2,t_2)$, где $t_1<t_2\leqslant\tau$. Пусть $\Delta\subset E_k^T$, причем $\pi_\Delta(1,2)=\pi_\Delta(1,3)=\pi_\Delta(2,3)=1$ (рис. 3 (в)). Пусть $R\subset\Delta$, R — тупиковое, Δ-рефлексивное отношение. Тогда отношение R не является S-тупиковым.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть отношение R является S-тупиковым. Очевидно, множество $\{1,2,3\}$ разбивается на два класса Δ-эквивалентности: $\omega_1=\{1\}$ и $\omega_2=\{2,3\}$. Нетрудно видеть, что при $k=2$ отношение R, в силу леммы 5.3, не может быть S-тупиковым. Поэтому будем считать, что $k\geqslant 3$. Пусть $A=(a_1,a_2,a_3)$ — произвольный элемент из $\Delta^{(M)}$, $a_1(t_1)=\alpha$, $a_2(t_1)=a_3(t_1)=\beta$. Ясно, что $\alpha\neq\beta$. Пусть $\widetilde{F}_1(x_1,\widetilde{x}_1,x_2,\widetilde{x}_2,\ldots,x_k,\widetilde{x}_k)$ — функция k-значной логики такая, что

$$\widetilde{F}_1(\beta,\ldots,\beta)=\beta$$

и для всякого $\delta\in E_k$

$$\begin{aligned}&\widetilde{F}_1(x_1,\widetilde{x}_1,\ldots,x_\delta,\widetilde{x}_\delta,\alpha,\widetilde{x}_{\delta+1},x_{\delta+2},\widetilde{x}_{\delta+2},\ldots,x_k,\widetilde{x}_k)\equiv\delta,\\&\widetilde{F}_1(x_1,\widetilde{x}_1,\ldots,x_\delta,\widetilde{x}_\delta,x_{\delta+1},\alpha,x_{\delta+2},\widetilde{x}_{\delta+2},\ldots,x_k,\widetilde{x}_k)\equiv\delta.\end{aligned}\tag{3}$$

Очевидно, функция $\widetilde{F}_1(x_1,\widetilde{x}_1,\ldots,x_k,\widetilde{x}_k)$ не выпускает ни одного значения из множества E_k.

Пусть $\mathfrak{A}_1=(\underbrace{A_{\omega_1},\ldots,A_{\omega_1}}_{2k})$. Так как по сделанному выше предположению отношение R является S-тупиковым, то замыкание множества $S(U(R))$ должно быть (t_2-1)-эквивалентным $S(P_k^\tau)$. Это означает, что в $[S(U(R))]$ существует д.функция $f(x_1,\widetilde{x}_1,\ldots,x_k,\widetilde{x}_k)$ такая, что $f(\underbrace{A_{\omega_2},\ldots,A_{\omega_2}}_{2k})=\widetilde{A}_{\omega_2}$, где $A_{\omega_2}=(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2,\widetilde{a}_3)$, $\pi(a_1,\widetilde{a}_1)\leqslant 1$, $\pi(a_2,\widetilde{a}_2)\leqslant 1$, $\pi(a_3,\widetilde{a}_3)\leqslant 1$, а функция k-значной логики $F_{[f,\mathfrak{A},\omega_1]}(x_1,\widetilde{x}_1,\ldots,x_k,\widetilde{x}_k)$ совпадает с функцией $\widetilde{F}_1(x_1,\widetilde{x}_1,\ldots,x_k,\widetilde{x}_k)$. В силу теоремы 5.2, существуют числа $m_1,\ldots,m_k,\widetilde{m}_1,\ldots,\widetilde{m}_k,m,\widetilde{m}$ (где $m_1\geqslant 1,\widetilde{m}_1\geqslant 1,\ldots,m_k\geqslant 1,\widetilde{m}_k\geqslant 1$ и $m=m_1+\ldots+m_k$, $\widetilde{m}=\widetilde{m}_1+\ldots+\widetilde{m}_k$) и д.функция $\widetilde{f}(x_1,x_2,\ldots,x_{m+\tilde{m}})$, принадлежащая $[S(U(R))]$, такие, что

$$\widetilde{f}(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{m_1},\underbrace{\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_1}_{\tilde{m}_1},\ldots,\underbrace{x_k,\ldots,x_k}_{m_k},\underbrace{\widetilde{x}_k,\ldots,\widetilde{x}_k}_{\tilde{m}_k})=f(x_1,\widetilde{x}_1,\ldots,x_k,\widetilde{x}_k),$$

а функции k-значной логики $F_{[\tilde{f},\tilde{\mathfrak{A}}_1,\omega_1]}(x_1,\ldots,x_{m+\tilde{m}})$, $F_{[\tilde{f},\tilde{\mathfrak{A}}_2,\omega_2]}(x_1,\ldots,x_{m+\tilde{m}})$, где $\widetilde{\mathfrak{A}}_1=(\underbrace{A_{\omega_1},\ldots,A_{\omega_1}}_{m+\tilde{m}})$, $\widetilde{\mathfrak{A}}_2=(\underbrace{A_{\omega_2},\ldots,A_{\omega_2}}_{m+\tilde{m}})$, не выпускают ни одного значения из множества E_k. Очевидно,

$$\begin{gathered}\widetilde{f}(\underbrace{A_{\omega_2},\ldots,A_{\omega_2}}_{m+\tilde{m}})=\widetilde{A}_{\omega_2},\\F_{[\tilde{f},\tilde{\mathfrak{A}}_1,\omega_1]}(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{m_1},\underbrace{\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_1}_{\tilde{m}_1},\ldots,\underbrace{x_k,\ldots,x_k}_{m_k},\underbrace{\widetilde{x}_k,\ldots,\widetilde{x}_k}_{\tilde{m}_k})=\widetilde{F}_1(x_1,\widetilde{x}_1,\ldots,x_k,\widetilde{x}_k)\end{gathered}\tag{4}$$

Заметим, что в случае, когда $\widetilde{a}_2(t_2) \neq \widetilde{a}_3(t_2)$, можно считать, что $m_1 = \widetilde{m}_1 = \ldots = m_k = \widetilde{m}_k = 1$. Так как функция $F_{[\tilde{f},\tilde{\mathfrak{A}}_2,\omega_2]}(x_1, \ldots, x_{m+\tilde{m}})$ не выпускает ни одного значения из E_k, то существуют s $(1 \leqslant s \leqslant m + \widetilde{m})$ и $\gamma_1, \ldots$ $\ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s, \gamma_{s+1}, \ldots, \gamma_{m+\tilde{m}}, \widetilde{\gamma}_s, \delta_1, \delta_2$ из E_k такие, что $\delta_1 \neq \delta_2$, $F_{[\tilde{f},\tilde{\mathfrak{A}}_2,\omega_2]}(\gamma_1, \ldots$ $\ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s, \gamma_{s+1}, \ldots, \gamma_{m+\tilde{m}}) = \delta_1$, $F_{[\tilde{f},\tilde{\mathfrak{A}}_2,\omega_2]}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \widetilde{\gamma}'_s, \gamma_{s+1}, \ldots, \gamma_{m+\tilde{m}}) = \delta_2$. В силу леммы 5.4 существуют $\delta \in E_k$ и элемент $A' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ из $\Delta^{(M)}$, не принадлежащий R, такие, что $\pi(a'_1, a_1) \leqslant 1$, $\pi(a'_2, a_2) \leqslant 1$, $\pi(a'_3, a_3) \leqslant 1$, $a'_1(t_1) = \delta$, $a'_2(t_2) = \delta_1$, $a_3(t_2) = \delta_2$. Действительно, в противном случае любой элемент A'' из $\Delta^{(M)}$, ω_1-фундамент которого совпадает с A'_{ω_1}, принадлежал бы R, что противоречило бы предположению о S-тупиковости отношения R.

Пусть $n_0 = 0$ и для всякого l $(1 \leqslant l \leqslant k)$ $n_{2l-1} = n_{2l-2} + m_l$ и $n_{2l} = n_{2l-1} + \widetilde{m}_l$. Рассмотрим совокупность $A_1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1)$, $\ldots$, $A_{n_{2k}} = (a_1^{n_{2k}}, a_2^{n_{2k}}, a_3^{n_{2k}})$ элементов из Δ такую, что имеет место следующее:

1) $a_2^s(t_2) = \gamma_s$, $a_3^s(t_2) = \widetilde{\gamma}_s$ и для любого q $(1 \leqslant q \leqslant n_{2k})$, $q \neq s$, $a_2(t_2) = a_3(t_2) = \gamma_q$;

2) пусть $s > n_{2\delta+1}$ и $s \leqslant n_{2\delta}$; тогда $a_1^q(t_1) = \alpha$, если $q > n_{2\delta}$ и $q \leqslant n_{2\delta+1}$, и $a_1(t_1) = \beta$, если $q > n_{2\delta+1}$ и $q \leqslant n_{2\delta}$;

3) пусть $s > n_{2\delta}$ и $s \leqslant n_{2\delta+1}$; тогда $a_1^q(t_1) = \alpha$, если $q > n_{2\delta+1}$ и $q \leqslant n_{2\delta+2}$, и $a_1(t_1) = \beta$, если $q > n_{2\delta+2}$ и $q \leqslant n_{2\delta+1}$.

Исходя из свойств функции k-значной логики $\widetilde{F}_1(x_1, \widetilde{x}_1, \ldots, x_k, \widetilde{x}_k)$ и равенств (3), (4) нетрудно убедиться в том, что $\widetilde{f}(A_1, \ldots, A_{n_{2k}}) = A'$. Кроме того, $A_1 \in \Delta^{(m)}$, $\ldots$, $A_{n_{2k}} \in \Delta^{(m)}$ и, следовательно, $A_1 \in R$, $\ldots$, $A_{n_{2k}} \in R$. Однако $A' \notin R$. Вместе с тем, $\widetilde{f} \in S(U(R))$. Из полученного противоречия следует справедливость доказываемой леммы.

Л е м м а 5.6. *Пусть* $k \geqslant 2$, $T = (t_1, t_2)$, *где* $1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \tau$. *Пусть* $\Delta \subset E_k^T$, $\pi_\Delta(1, 2) \geqslant 1$, $R \subset \Delta$, R — *тупиковое,* Δ*-рефлексивное отношение. Тогда либо отношение* R *не является* S*-тупиковым, либо существует отношение* $\widetilde{R} \in G_2(k, \tau)$ *такое, что* $S(U(R)) \subseteq S(U(\widetilde{R}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $t_1 = t_2$, $\pi_\Delta(1, 2) = 1$ и отношение R является S-тупиковым, то, очевидно, $R \in G_2(k, \tau)$.

Пусть либо $t_1 < t_2$, либо $t_1 = t_2$, но $\pi_\Delta(1, 2) \geqslant 2$.

Пусть $a \in E_k^{t_2}$. Пусть (b, a) — произвольный элемент из $\Delta^{(M)}$. В силу леммы 2.5 существует $a' \in E_k^{t_2}$ такое, что $\pi(a, a') \leqslant 1$ и набор (b, a') не принадлежит R. С другой стороны, существует $b' \in E_k^{t_1}$ такое, что $\pi(b, b') \leqslant 1$ и набор (b', a) принадлежит R. Отсюда следует, что существуют числа $h_a \geqslant 1$, $n_a \geqslant 1$ и совокупность $\Gamma_a = \{\varepsilon_a^1, \ldots, \varepsilon_a^{n_a}\}$ подмножеств E_k, каждое из которых состоит из h_a элементов, такие, что имеют место следующие свойства A) и B).

A) Для всякого l $(1 \leqslant l \leqslant n_a)$ существует $b \in E_k^{t_1}$ такое, что $(b, a) \in \Delta^{(M)}$ и для любого $b' \in E_k^{t_1}$ такого, что $\pi(b, b) \leqslant 1$, существуют $\alpha \in \varepsilon_a^l$ и $a' \in E_k^{t_2}$ такие, что $\pi(a, a') \leqslant 1$, $a'(t_2) = \alpha$ и набор (b', a') не принадлежит отношению R.

B) Пусть ε — произвольное подмножество E_k, либо состоящее из h_a элементов и не принадлежащее Γ_a, либо при $h_a > 1$ состоящее менее, чем из h_a элементов. Тогда для любого $b \in E_k^{t_1}$ существует $b' \in E_k^{t_1}$ такое, что $\pi(b, b') \leqslant 1$ и для любого $a' \in E_k^{t_2}$ набор (b', a') принадлежит R, если $\pi(a, a') \leqslant 1$, $a'(t_2) \in \varepsilon$.

Пусть $h = \min h_a$, где минимум берется по всем $a \in E_k^{t_2}$. Пусть $\widetilde{T} = (\underbrace{t_2, \ldots, t_2}_{h})$, $\widetilde{\Delta} \subset E_k^{\tilde{T}}$, причем для любых i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant h)$ $\pi_{\tilde{\Delta}}(i, j) \leqslant 1$.

Рассмотрим отношение $\widetilde{R} \subset \widetilde{\Delta}$ такое, что набор $(a_1, \ldots, a_h)$ из $\widetilde{\Delta}$ не принадлежит $\widetilde{R}$ тогда и только тогда, когда $\{a_1(t_2), \ldots, a_h(t_2)\}$ принадлежит Γ_{a_1}; при этом, очевидно, $h_{a_1} = h$. Покажем, что $S(U(R)) \subseteq S(U(\widetilde{R}))$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная д.функция из $S(U(R))$, $A \notin \widetilde{R}$. Пусть $\mathfrak{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ — произвольный набор элементов из $\widetilde{\Delta}$ такой, что $f(A_1,\ldots,A_n) = A$. Пусть $A = (a_1, \ldots, a_h)$ и для любого m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ $A_m = (a_1^m, \ldots, a_h^m)$. Так как $A \notin \widetilde{R}$, то $\{a_1(t_2),\ldots,a_h(t_2)\}$ принадлежит Γ_{a_1}. Покажем, что существует такое $\widetilde{m}$ $(1 \leqslant \widetilde{m} \leqslant n)$, что множество $\{a_1^{\widetilde{m}}(t_2), \ldots, a_h^{\widetilde{m}}(t_2)\}$ принадлежит совокупности $\Gamma_{a_1^{\widetilde{m}}}$. Пусть $s = (k-1) \cdot k^{t_2 - t_1 - 1}$. Рассмотрим (рис. 5) набор $B = (b_1, \ldots, b_s, a_1, \ldots, a_h)$ слов, составленных из элементов E_k такой, что для любых q, r $(1 \leqslant q, r \leqslant s)$, $q \neq r$, $\pi(b_q, b_r) = \pi_\Delta(1, 2)$, $\pi(b_1, a_1) = \ldots = \pi(b_s, a_1) = \pi_\Delta(1, 2)$.

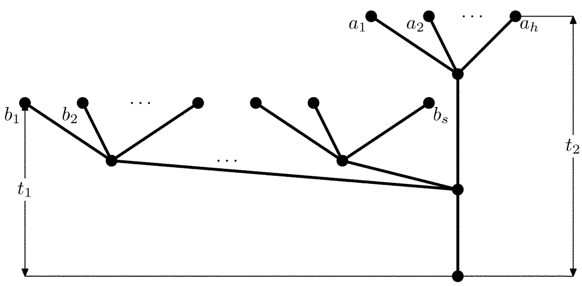

Рис. 5

Пусть наборы слов $B_1 = (b_1^1, \ldots, b_s^1, a_1^1, \ldots, a_h^1)$, $\ldots$, $B_n = (b_1^n, \ldots$ $\ldots, b_s^n, a_1^n, \ldots, a_h^n)$ таковы, что $f(B_1, \ldots, B_n) = B$. Так как $f(x_1, \ldots, x_n)$ — S-функция, то наборы слов с данным свойством существуют. Предположим, что $\{a_1^1(t_2), \ldots, a_h^1(t_2)\}$, $\ldots$, $\{a_1^n(t_2), \ldots, a_h^n(t_2)\}$ не принадлежат совокупностям $\Gamma_{a_1^1}, \ldots, \Gamma_{a_1^n}$ соответственно. Тогда в силу свойства В) существуют наборы слов $\widetilde{B}_1 = (\widetilde{b}_1^1, \ldots, \widetilde{b}_s^1, a_1^1, \ldots, a_h^1)$, $\ldots$, $\widetilde{B}_n = (\widetilde{b}_1^n, \ldots, \widetilde{b}_s^n, a_1^n, \ldots, a_h^n)$ такие, что для любых q $(1 \leqslant q \leqslant s)$, i $(1 \leqslant i \leqslant h)$, m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ набор (b_q^m, a_i^m) принадлежит отношению R. Пусть $f(\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n) = \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} = (\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_s, a_1, \ldots, a_h)$. Так как $\{a_1(t_2), \ldots, a_h(t_2)\}$ принадлежит Γ_{a_1}, то существуют r $(1 \leqslant r \leqslant s)$ и j $(1 \leqslant j \leqslant h)$ такие, что набор $(\widetilde{b}_r, a_j)$ не принадлежит отношению R (свойство А)). Вместе с тем, $f(\widetilde{b}_r^1, \ldots, \widetilde{b}_r^n) = \widetilde{b}_r$, $f(a_j^1, \ldots, a_j^n) = a_j$ и $(\widetilde{b}_r^1, a_j^1) \in R$, $\ldots$, $(\widetilde{b}_r^n, a_j^n) \in R$. Из возникшего противоречия следует, что существует $\widetilde{m}$ $(1 \leqslant \widetilde{m} \leqslant n)$ такое, что $(a_1^{\widetilde{m}}(t_2), \ldots, a_h^{\widetilde{m}}(t_2))$ принадлежит $\Gamma_{a_1^{\widetilde{m}}}$ и, следовательно, набор $(a_1^{\widetilde{m}}, \ldots, a_h^{\widetilde{m}})$ не принадлежит $\widetilde{R}$. Это означает, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $S(U(\widetilde{R}))$. Однако S-функция из $S(U(R))$ и набор $\mathfrak{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ выбраны произвольно. Поэтому $S(U(R)) \subseteq S(U(\widetilde{R}))$. Заметим, что если для некоторых a_1 и a_2 из $E_k^{t_2}$ выполнено $h_{a_1} \neq h_{a_2}$, то отношение $\widetilde{R}$ не может быть S-тупиковым; если же $h_a = h$ для любого $a \in E_k^{t_2}$, то $\widetilde{R}$ принадлежит семейству отношений $G_2(k, \tau)$. Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 2$. Никакое отношение, принадлежащее объединению семейств $Q_0(k, \tau)$, $Q_1(k, \tau)$, $Q_2(k, \tau)$, не является S-тупиковым.*

Доказательство. Пусть $T = (t_1, t_2, t_2)$, $1 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \tau$, $\Delta_Q \subset E_k^T$, $R \subset \Delta_Q$. Рассмотрим два случая — случаи а) и б).

а) Пусть $R \in Q_0(k, \tau) \cup Q_2(k, \tau)$. Пусть $A = (a_1, a_2, a_3)$ — произвольный набор из $\Delta_Q^{(M)}$, принадлежащий отношению R. Пусть a_1' — начало слова a_2 длины t_1, т. е. $a_1' = a_2(1) \ldots a_2(t_1)$. Очевидно, $\pi(a_1, a_1') = 1$. Пусть a_2' — начало слова a_2 длины t_2-1, т. е. $a_2'=a_2(1)\ldots a_2(t_2-1)$. Очевидно, $\pi(a_2',a_2)=0$, $\pi(a_2',a_3)=0$. Рассмотрим д.функцию $f(x_1,\ldots,x_k)$ из P_k^τ со следующими свойствами:

1) $f(\underbrace{a_1',\ldots,a_1'}_{k})=a_1'$ и на любом отличном от набора $(\underbrace{a_1',\ldots,a_1'}_{k})$ наборе слов из $E_k^{t_1}$ значение д.функции f равно a_1;

2) $f(\underbrace{a_2',\ldots,a_2'}_{k})=a_2'$.

Покажем, что д.функции со свойствами 1) и 2) в множестве $U(R)$ не существует. Рассмотрим наборы $(a_3,\ldots,a_3)$, $(a_2,a_3,\ldots,a_3)$, …, $(a_2,\ldots,a_2,a_3)$, $(a_2,\ldots,a_2)$ из $E_k^{t_2}(k)$ и значения функции f на этих наборах. Пусть $f(a_3,\ldots,a_3)=\widetilde{a}_1$, $f(a_2,a_3,\ldots,a_3)=\widetilde{a}_2$, …, $f(a_2,\ldots,a_2)=\widetilde{a}_{k+1}$. Заметим, что в силу свойства 2) д.функции f слова $\widetilde{a}_1,\ldots,\widetilde{a}_{k+1}$ совпадают в первых t_2-1 разрядах, т. е. $\pi(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2)\leqslant 1$, …, $\pi(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_{k+1})\leqslant 1$. Отсюда следует, что существуют i,j $(1\leqslant i<j\leqslant k+1)$ такие, что $\widetilde{a}_i=\widetilde{a}_j$.

Пусть $A_3=(a_1',a_3,a_3)$, $A_2=(a_1',a_2,a_2)$. Из определения семейств $Q_0(k,\tau)$ и $Q_2(k,\tau)$ следует, что $A_3\in R$, $A_2\in R$. Пусть

$$f(\underbrace{A_2,\ldots,A_2}_{i},\underbrace{A,\ldots,A}_{j-i},A_3,\ldots,A_3)=\widetilde{A}.$$

Нетрудно видеть, что $\widetilde{A}=(a_1,\widetilde{a}_i,\widetilde{a}_i)$, причем $\pi(a_1,\widetilde{a}_i)=1$. Поэтому $\widetilde{A}\notin R$ и $f\notin U(R)$. Таким образом, $f\notin[S(U(R))]$ и, следовательно, отношение R не является S-тупиковым.

б) Пусть $R\in Q_1(k,\tau)$, $a\in E_k^{t_2}$, $A=(a',a,a)$ — произвольный элемент из Δ_Q. Пусть $\omega=\{2,3\}$. Предположим, что отношение R является S-тупиковым. Тогда, как нетрудно видеть, для некоторых числа $m\geqslant 1$ и набора $\mathfrak{A}=(\underbrace{A_\omega,\ldots,A_\omega}_{m})$ в замыкании множества $S(U(R))$ содержится удовлетворяющая следующим свойствам 1) и 2) д.функция $g(x_1,\ldots,x_m)$:

1) $\pi(g(\underbrace{a'',\ldots,a''}_{m}),a)=0$ для любого $a''\in E_k^{t_1}$;

2) функция k-значной логики $F(x_1,\ldots,x_m)$, совпадающая с функцией $F_{[g,\mathfrak{A},\omega]}(x_1,\ldots,x_m)$, не выпускает ни одного значения из множества E_k.

Пусть функция $F(x_1,\ldots,x_m)$ существенно зависит от переменной x_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ и $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_m,\alpha_i'$ из E_k таковы, что $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_m)\neq F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i',\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_m)$. Так как отношение R тупиковое, то в R существует набор $A^i=(a_1,a_2^i,a_3^i)$ такой, что $\pi(a_2^i,a)\leqslant 1$, $\pi(a_3^i,a)\leqslant 1$, $a_2^i(t_2)=\alpha_i$, $a_3^i(t_2)=\alpha_i'$. Заметим, что из определения семейства $Q_1(k,\tau)$ следует, что должно иметь место неравенство $a_1(t_1)\neq a_2^i(t_1)$. Для всякого j $(1\leqslant j\leqslant m), j\neq i$, рассмотрим набор $A^j=(a_1,a_2^j,a_2^j)$, принадлежащий $\Delta_Q\cap R$, такой, что $\pi(a_2^j,a)\leqslant 1$, $a_2^j(t_2)=\alpha_j$. Пусть $g(A^1,\ldots,A^{i-1},A^i,A^{i+1},\ldots,A^m)=\widetilde{A}$, $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2,\widetilde{a}_3)$. Очевидно, $\pi(\widetilde{a}_2,\widetilde{a}_3)=1$ и в силу свойства 1) д.функции $g(x_1,\ldots,x_m)$ выполнено $\pi(\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2)=0$. Это означает, что $\widetilde{A}\notin R$. Из возникшего противоречия следует справедливость утверждения леммы и в случае б). Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное S-множество и R_1 — тупиковое отношение такое, что $\mathfrak{M}\subseteq U(R_1)$. Пусть $h\geqslant 1$, и набор неотрицательных целых чисел $T_1=(t_1,\ldots,t_h)$ таков, что $\max\{t_1,\ldots,t_h\}=t$, $2\leqslant t\leqslant\tau$ и $R_1\subseteq E_k^{T_1}$. Пусть R_1 не является S-тупиковым. Тогда в силу определения S-тупиковых отношений и критериальности множества всех тупиковых отношений (теорема 2.2.) существуют $T_2 < T_1$ и тупиковое отношение $R_2 \subseteq E_k^{T_2}$ такие, что $S(U(R_1)) \subseteq U(R_2)$. Продолжая этот процесс, получим некоторую последовательность наборов $T_1, T_2, \ldots$ и последовательность тупиковых отношений $R_1, R_2, \ldots$ таких, что $T_1 > T_2 > T_3 > \ldots$, $R_1 \subseteq E_k^{T_1}$, $R_2 \subseteq E_k^{T_2}$, $R_3 \subseteq E_K^{T_3}, \ldots$ и $\mathfrak{M} \subseteq U(R_1)$, $S(U(R_1)) \subseteq U(R_2)$, $S(U(R_2)) \subseteq U(R_3), \ldots$. Нетрудно убедиться в том, что эти последовательности не могут быть бесконечными, причем существует $i \geqslant 2$ такое, что R_i не только тупиковое, но и S-тупиковое отношение. Таким образом, множество классов сохранения всех S-тупиковых отношений образует S-критериальную систему в P_k^τ. Вместе с тем, множество классов сохранения отношений, принадлежащих объединению семейств $G_1(k,\tau)$, $N_1(k,\tau)$, $V_1(k,\tau)$, $L_1(k,\tau)$, $Q_0(k,\tau)$, $Q_1(k,\tau)$, $Q_2(k,\tau)$ также образует S-критериальную систему в P_k^τ (следствие из теоремы 1.2. и теоремы 4.1). Отсюда и из лемм 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 легко следует справедливость утверждения теоремы.

§ 6. Критерий полноты в P_k и S-критериальные системы в P_k

Пусть $k \geqslant 2$, $\tau = 1$, $h \geqslant 1$, $T = (1, \ldots, 1)$ — набор, содержащий ровно h единиц. Очевидно, существует единственное приведенное π-подмножество Δ множества E_k^T, которое порождается любым разнозначным набором длины h, составленным из элементов множества E_k; при этом $h \leqslant k$. Отсюда следует, что π-множество Δ совпадает с множеством $E_k(h)$, и при $h \geqslant 2$ множество $\Delta^{(M)}$ состоит из всех разнозначных наборов, принадлежащих $E_k(h)$, а множество $\Delta^{(m)}$ — из всех остальных наборов. Таким образом, если $\rho \subseteq \Delta$, то $\rho \subseteq E_k(h)$. В связи с этим в данном случае любое Δ-рефлексивное отношение будем называть просто рефлексивным.

Наряду с семействами отношений $Z(k,1)$, $D(k,1)$, $L(k,1)$, $N(k,1)$, $I(k,1)$ (из 1.) рассмотрим три семейства отношений — семейства $Z_1(k,1)$, $M(k,1)$ и $I_1(k,1)$.

Определение. Пусть $h \geqslant 2$, $\rho \subseteq E_k(h)$. Отношение ρ назовем *симметричным*, если справедливо следующее: набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ из $E_k(h)$ принадлежит ρ тогда и только тогда, когда для любой подстановки (перестановки) σ чисел $1, \ldots, h$ набор $(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(h)})$ также принадлежит ρ.

Определение. Пусть $k \geqslant 2$, $h \geqslant 1$, $\rho \subset E_k(h)$, ρ — рефлексивное и симметричное отношение. Множество $C_\rho \subset E_k$ называется *центром отношения* ρ, если для всякого $\alpha \in C_\rho$ и при $h \geqslant 2$ для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}$ набор $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$ принадлежит ρ; при этом, если $\alpha' \notin C_\rho$, то существуют $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{h-1}$ такие, что набор $(\alpha', \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{h-1})$ не принадлежит ρ. В качестве центра любого унарного отношения будем рассматривать само это отношение.

Семейство отношений $Z_1(k,1)$. Пусть $k \geqslant 2$, $h \geqslant 1$. Отношение ρ арности h принадлежит подсемейству $Z_1^h(k,1)$ семейства отношений $Z_1(k,1)$ тогда и только тогда, когда ρ рефлексивно, симметрично и его центр не является пустым. Семейство отношений $Z_1(k,1)$ есть объединение семейств $Z_1^h(k,1)$, взятое по всем h, принадлежащим множеству $\{1, \ldots, k-1\}$.

Заметим, что семейство отношений $Z(k,1)$ является подсемейством семейства отношений $Z_1(k,1)$.

Семейство отношений $M(k,1)$. Пусть $k \geqslant 2$. Бинарное отношение ρ принадлежит семейству $M(k,1)$ лишь в том случае, когда это отношение является определенным на E_k отношением частичного порядка, имеющим в точности один минимальный и один максимальный элементы.

Определение. Пусть $k\geqslant 3$, $h\geqslant 3$. Отношение $\rho\subset E_k(h)$ называется *h-элементарным* в том случае, если существует разбиение λ_ρ множества E_k на подмножества $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{h-1}$ такое, что произвольный набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$ принадлежит ρ тогда и только тогда, когда существуют i,j,l $(0\leqslant i,j,l\leqslant h-1)$ такие, что $i\neq j$, $\alpha_{i+1}\in\varepsilon_l$, $\alpha_{j+1}\in\varepsilon_l$.

Определение. Пусть $k\geqslant 3$, $h\geqslant 3$, $m\geqslant 1$, $\Re=\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$ — система h-элементарных отношений; при этом отношения $\rho_1,\ldots,\rho_s$ задаются с помощью разбиений

$$\lambda_{\rho_1}:\ E_k=\varepsilon_0^1\cup\ldots\cup\varepsilon_{h-1}^1,\qquad \ldots,\qquad \lambda_{\rho_m}:\ E_k=\varepsilon_0^m\cup\ldots\cup\varepsilon_{h-1}^m$$

соответственно. Система $\Re$ называется *I-совместимой*, если либо $m=1$, либо $m\geqslant 2$ и для любых $\beta_1,\ldots,\beta_m$ из E_h $(0\leqslant\beta_1,\ldots,\beta_m\leqslant h-1)$ выполнено $\varepsilon_{\beta_1}^1\cap\ldots\cap\varepsilon_{\beta_m}^m\neq\varnothing$.

Семейство отношений $I_1(k,1)$. Пусть $k\geqslant 3$, $h\geqslant 3$. Отношение ρ арности h принадлежит подсемейству $I_1^h(k,1)$ семейства отношений $I_1(k,1)$ тогда и только тогда, когда существуют число $s\geqslant 1$ и I-совместимая система $\{\rho_1,\ldots,\rho_s\}$ h-элементарных отношений такие, что $\rho=\cap_{i=1}^s\rho_i$. Система отношений $I_1(k,1)$ есть объединение семейств $I_1^h(k,1)$, взятое по всем h, принадлежащим множеству $\{3,\ldots,k\}$.

Пусть $W_1(k,1)=Z_1(k,1)\cup M(k,1)\cup I_1(k,1)\cup D(k,1)\cup L(k,1)\cup N(k,1)$.

Сформулируем три теоремы из [5, 10, 14–16].

Теорема 6.1. *Пусть $k\geqslant 2$. Множество $\mathfrak{M}\subseteq P_k^1$ является полным в P_k^1 тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения из множества $W_1(k,1)$.*

Теорема 6.2. *Пусть $k\geqslant 2$. Множество $\mathfrak{N}\subseteq P_k^1$ является предполным классом в P_k^1 тогда и только тогда, когда существует $\rho\in W_1(k,1)$ такое, что $U(\rho)=\mathfrak{N}$.*

Теорема 6.3. *Пусть $k\geqslant 2$. Пусть отношения ρ и ρ' принадлежат $W_1(k,1)$. Тогда имеет место следующее.*

а) *Пусть ρ и ρ' принадлежат различным семействам из множества $\{Z_1(k,1),M(k,1),I_1(k,1),D(k,1),L(k,1),N(k,1)\}$. Тогда $U(\rho)\neq U(\rho')$.*

б) *Пусть ρ и ρ' принадлежат объединению семейств $Z_1(k,1)$, $I_1(k,1)$, $D(k,1)$ и $L(k,1)$. Тогда, если $\rho\neq\rho'$, то $U(\rho)\neq U(\rho')$.*

в) *Пусть ρ и ρ' принадлежат семейству $M(k,1)$, $\rho\neq\rho'$. Тогда равенство $U(\rho)=U(\rho')$ равносильно тому, что для любых α_1,α_2 из E_k таких, что $\alpha_1\neq\alpha_2$, выполнены следующие условия: $(\alpha_1,\alpha_2)\in\rho'$, если $(\alpha_2,\alpha_1)\in\rho$; $(\alpha_1,\alpha_2)\notin\rho'$, если $(\alpha_2,\alpha_1)\notin\rho$ (и наоборот: $(\alpha_1,\alpha_2)\in\rho$, если $(\alpha_2,\alpha_1)\in\rho'$ $(\alpha_1,\alpha_2)\notin\rho$, если $(\alpha_2,\alpha_1)\notin\rho'$).*

г) *Пусть ρ и ρ' принадлежат семейству $N(k,1)$. Тогда равенство $U(\rho)=U(\rho')$ равносильно тому, что одна из подстановок $\sigma_\rho,\sigma_{\rho'}$, графики которых образуют отношения ρ,ρ' соответственно, является степенью другой.*

Из теорем 6.1. и 6.2. следует, что совокупность классов сохранения отношений из $W_1(k,1)$ является критериальной и, следовательно, S-критериальной системой. Покажем, что из указанной совокупности некоторые классы могут быть удалены без потери ее S-критериальности.

Лемма 6.4. *Пусть $k\geqslant 2$, $h\geqslant 2$, $\widetilde{\rho}\in Z_1(k,1)$. Существует отношение ρ из $Z(k,1)$ такое, что $S(U(\widetilde{\rho}))\subseteq S(U(\rho))$.*

Доказательство. Пусть $C_{\widetilde{\rho}}$ — центр отношения $\widetilde{\rho}$. Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная S-функция из $S(U(\widetilde{\rho}))$ и $\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1$ — элементы из $C_{\widetilde{\rho}}$. Пусть $F(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1)=\alpha^1$. Предположим, что $\alpha_1\notin C_{\widetilde{\rho}}$. Тогда существуют $\alpha^2,\ldots,\alpha^h$ такие, что набор $(\alpha^1,\ldots,\alpha^h)$ не принадлежит $\widetilde{\rho}$. Очевидно, вместе с тем, что существуют $\alpha_1^2,\ldots,\alpha_1^h,\ldots,\ \alpha_n^2,\ \ldots,\alpha_n^h$

такие, что $F(\alpha_1^2,\ldots,\alpha_n^2)=\alpha^2,\ldots,F(\alpha_1^h,\ldots,\alpha_n^h)=\alpha^h$. Ясно, что наборы $(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^h),\ldots,(\alpha_n^1,\ldots,\alpha_n^h)$ принадлежат $\widetilde{\rho}$, а потому и набор $(\alpha^1,\ldots,\alpha^h)$ должен принадлежать $\widetilde{\rho}$, что противоречит сделанному раньше предположению. Поэтому $\alpha^1\in C_{\widetilde{\rho}}$. Отсюда легко следует, что множество $S(U(\widetilde{\rho}))$ сохраняет унарное отношение $\rho=C_{\widetilde{\rho}}$. Лемма доказана.

Лемма 6.5. *Пусть $k\geqslant 2$, $\widetilde{\rho}\in M(k,1)$. Существует отношение $\rho\in Z(k,1)$ такое, что $S(U(\widetilde{\rho}))\subseteq S(U(\rho))$.*

Доказательство. Пусть α_0 — минимальный элемент по отношению частичного порядка $\widetilde{\rho}$. Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная S-функция из $S(U(\widetilde{\rho}))$. Пусть $F(\alpha_0,\ldots,\alpha_0)=\alpha$. Предположим, что $\alpha\neq\alpha_0$. Пусть $\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1$ — числа из E_k такие, что $F(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')=\alpha_0$. Очевидно, наборы $(\alpha_0,\alpha_1'),\ldots,(\alpha_0,\alpha_n')$ принадлежат $\widetilde{\rho}$. Однако набор (α,α_0) не принадлежит $\widetilde{\rho}$. Из полученного противоречия следует, что $\alpha=\alpha_0$ и, таким образом, множество $S(U(\widetilde{\rho}))$ сохраняет унарное отношение $\rho=\{\alpha_0\}$. Лемма доказана.

Пусть $W_2(k,1)=Z(k,1)\cup I_1(k,1)\cup D(k,1)\cup L(k,1)\cup N(k,1)$.

Следствие из теорем 6.1, 6.2 и лемм 6.4 и 6.5. *Для любого $k\geqslant 2$ совокупность классов сохранения отношений, принадлежащих множеству $W_2(k,1)$, образует S-критериальную систему в P_k^1.*

Рассмотрим два важных понятия — понятия σ-двойственных функций и σ-двойственных отношений.

Определение. Пусть $k\geqslant 2$. Пусть σ — произвольная подстановка, определенная на множестве E_k. Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)\in P_k^1$. Функция $F^\sigma(x_1,\ldots,x_n)$ называется *σ-двойственной* к функции $F(x_1,\ldots,x_n)$, если имеет место равенство

$$F^\sigma(x_1,\ldots,x_n)=\sigma(F(\sigma^{-1}(x_1),\ldots,\sigma^{-1}(x_n))).$$

Пусть $\mathfrak{M}\subseteq P_k^1$. Через $\mathfrak{M}^\sigma$ обозначим множество всех тех и только тех функций, которые являются σ-двойственными к функциям множества $\mathfrak{M}$.

Нетрудно видеть, что справедлива легко доказываемая

Лемма 6.6. *Пусть σ — произвольная подстановка, определенная на E_k. Пусть $\mathfrak{M}_1\subseteq P_k^1$ и $\mathfrak{M}_2\subseteq P_k^1$. Тогда*

1) *если $\mathfrak{M}_1$ — замкнутое множество, то $\mathfrak{M}_1^\sigma$ — замкнутое множество,*

2) *если $\mathfrak{M}_1$ — предполный класс в P_k^1, то $\mathfrak{M}_1^\sigma$ — предполный класс в P_k^1,*

3) *если $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{M}_2$, то $\mathfrak{M}_1^\sigma\subseteq\mathfrak{M}_2^\sigma$,*

4) *если $\mathfrak{M}_1\nsubseteq\mathfrak{M}_2$, то $\mathfrak{M}_1^\sigma\nsubseteq\mathfrak{M}_2^\sigma$,*

5) *если $\mathfrak{M}_1$ — S-множество, то $\mathfrak{M}_1^\sigma$ — S-множество,*

6) *если $\mathfrak{M}_1$ — S-предполный класс в P_k^1, то $\mathfrak{M}_1^\sigma$ — S-предполный класс в P_k^1.*

Определение. Пусть $k\geqslant 2$, $h\geqslant 1$, $\rho\subseteq E_k(h)$. Пусть σ — произвольная подстановка, определенная на множестве E_k. Через ρ^σ обозначим отношение арности h такое, что имеет место следующее: набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$ принадлежит ρ^σ тогда и только тогда, когда набор $(\sigma^{-1}(\alpha_1),\ldots,\sigma^{-1}(\alpha_h))$ принадлежит отношению ρ. Отношение ρ^σ называется *σ-двойственным к отношению ρ.*

Лемма 6.7. *Пусть $k\geqslant 2$, $h\geqslant 1$, $\rho\subset E_k(h)$. Пусть $\mathfrak{M}\subseteq P_k^1$ и $\mathfrak{M}$ сохраняет отношение ρ. Пусть σ — произвольная подстановка, определенная на E_k. Тогда $\mathfrak{M}^\sigma$ сохраняет отношение ρ^σ.*

Доказательство. Пусть $F^\sigma(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция из $\mathfrak{M}^\sigma$ и $(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_h^1),\ldots,(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_h^n)$ — произвольная совокупность элементов из ρ^σ. Покажем, что набор

$$(F^\sigma(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^n),\ldots,F^\sigma(\alpha_h^1,\ldots,\alpha_h^n)) \tag{5}$$

также принадлежит ρ^σ. Из определения $\mathfrak{M}^\sigma$ следует, что в $\mathfrak{M}$ существует функция $F(x_1,\ldots,x_n)$ такая, что $(F^\sigma(x_1,\ldots,x_n)) = \sigma(F(\sigma^{-1}(x_1),\ldots$ $\ldots,\sigma^{-1}(x_n)))$. Ясно, что для любого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ набор $(\sigma^{-1}(\alpha_1^i),\ldots,\sigma^{-1}(\alpha_h^i))$ принадлежит ρ. Так как F сохраняет отношение ρ, то и набор

$$(F(\sigma^{-1}(\alpha_1^1),\ldots,\sigma^{-1}(\alpha_1^n)),\ldots,F(\sigma^{-1}(\alpha_h^1),\ldots,\sigma^{-1}(\alpha_h^n)))$$

принадлежит отношению ρ. Но тогда набор

$$(\sigma(F(\sigma^{-1}(\alpha_1^1),\ldots,\sigma^{-1}(\alpha_1^n))),\ldots,\sigma(F(\sigma^{-1}(\alpha_h^1),\ldots,\sigma^{-1}(\alpha_h^n)))),$$

совпадающий с набором (5), принадлежит отношению ρ^σ. Лемма доказана.

Следствие из леммы 6.7. *Пусть $k \geqslant 2$, $h \geqslant 1$, $\rho \subseteq E_k(h)$. Для любой определенной на E_k подстановки σ имеют место следующие соотношения*: $U^\sigma(\rho) = U(\rho^\sigma)$, $S(U^\sigma(\rho)) \subseteq S(U(\rho^\sigma))$.

Учитывая то, что все элементарные абелевы p-группы изоморфны между собой [7], нетрудно видеть, что справедливо

Утверждение 8. *Для любой подстановки σ, определенной на множестве E_k, отношение ρ и σ-двойственное к ρ отношение ρ^σ принадлежат одному и тому же семейству из множества семейств отношений* $\{Z(k,1), I_1(k,1), D(k,1), L(k,1), N(k,1)\}$.

§ 7. Семейства отношений $Z(k,1)$, $I_3(k,1)$, $D(k,1)$, $L(k,1)$, $N(k,1)$

Пусть $\tau \geqslant 1$. Для любого $k \geqslant 3$ рассмотрим семейство отношений $I_2(k,1)$.

Семейство отношений $I_2(k,1)$ есть подмножество семейства отношений $I_1(k,1)$, содержащее те и только те отношения арности h, где $h \geqslant 3$, которые являются пересечением m $(m \geqslant 1)$ h-элементарных отношений, причем $h^m = k$. Это означает, что для любых $\beta_1,\ldots,\beta_m$ из E_h множество $\varepsilon^1_{\beta_1} \cap \ldots \cap \varepsilon^m_{\beta_m}$ содержит только один элемент из E_k (см. определение семейства отношений $I_1(k,1)$ в §6.).

Лемма 7.1. *Пусть $k \geqslant 3$, $h \geqslant 3$. Пусть $\widetilde{\rho}$ — отношение арности h, $\widetilde{\rho} \in I_1 \setminus I_2$, $m \geqslant 1$, $\widetilde{\rho} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \rho_i$, где $\rho_1,\ldots,\rho_m$ — h-элементарные отношения. Существует отношение $\rho \in D(k,1)$ такое, что $S(U(\widetilde{\rho})) \subseteq S(U(\rho))$.*

Доказательство. По определению семейства $D(k,1)$ каждое отношение из этого семейства определяется с помощью некоторого нетривиального разбиения множества E_k. Рассмотрим разбиение λ множества E_k на подмножества $\widetilde{\varepsilon}_0,\ldots,\widetilde{\varepsilon}_{h^m-1}$, которое определяется следующим образом. Пусть $\gamma \in E_{h^m}$ и разложение числа γ по степеням числа h имеет вид

$$\gamma = \beta_1 + \beta_2 h + \ldots + \beta_m h^{m-1}.$$

Тогда $\widetilde{\varepsilon}_\gamma = \varepsilon^1_{\beta_1} \cap \ldots \cap \varepsilon^m_{\beta_m}$. Очевидно, для любых γ,γ' из E_{h^m} имеем $\widetilde{\varepsilon}_\gamma \cap \widetilde{\varepsilon}_{\gamma'} = \varnothing$, если $\gamma \neq \gamma'$. Так как $h^m < k$, то существует $\widetilde{\gamma} \in E_{h^m}$ такое, что мощность множества $\widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{\gamma}}$ больше единицы. Бинарное отношение ρ из $D(k,1)$ определим с использованием разбиения λ: набор (α,α') принадлежит ρ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \widetilde{\varepsilon}_\gamma$ и $\alpha' \in \widetilde{\varepsilon}_\gamma$ для некоторого $\gamma \in E_{h^m}$. Покажем, что $S(U(\widetilde{\rho})) \subseteq S(U(\rho))$. Заметим, что набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$ из $E_k(h)$ не принадлежит отношению $\widetilde{\rho}$ лишь тогда, когда для любых i,j $(1 \leqslant i,j \leqslant h)$ таких, что $i \neq j$, α_i и α_j принадлежат разным классам разбиения λ. Это означает, что $(\alpha_i,\alpha_j) \notin \rho$. Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция из $S(\widetilde{\rho})$ и $(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1)$, $(\alpha_1^2,\ldots,\alpha_n^2)$ — наборы из $E_k(n)$ такие, что $(\alpha_1^1,\alpha_1^2) \in \rho$, $\ldots$, $(\alpha_n^1,\alpha_n^2) \in \rho$. Пусть $F(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1) = \alpha^1$ и $F(\alpha_1^2,\ldots,\alpha_n^2) = \alpha^2$. Покажем, что набор (α^1,α^2) также принадлежит ρ. Предположим противное. Очевидно, тогда должны существовать $\alpha_3,\ldots,\alpha_h$ из E_k такие, что набор $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_h)$ не принадлежит $\widetilde{\rho}$. В силу того, что $F(x_1,\ldots,x_n)$ — S-функция, существуют наборы $(\alpha_1^3,\ldots,\alpha_n^3),\ldots,(\alpha_1^h,\ldots,\alpha_n^h)$, для которых имеют место равенства $F(\alpha_1^3,\ldots,\alpha_n^3)=\alpha_3,\ \ldots,\ F(\alpha_1^h,\ldots,\alpha_n^h)=\alpha_h$. Так как для любого i $(1\leqslant i\leqslant n)$ $(\alpha_i^1,\alpha_i^2)\in\rho$, то каждый из наборов $(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^h),\ldots,(\alpha_n^1,\ldots,\alpha_n^h)$ принадлежит отношению $\widetilde{\rho}$. Однако $F(x_1,\ldots,x_n)\in S(U(\widetilde{\rho}))$. Поэтому и набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$ должен принадлежать $\widetilde{\rho}$. Из полученного противоречия следует, что (α_1,α_2) принадлежит отношению ρ и, таким образом, $S(U(\widetilde{\rho}))\subseteq S(U(\rho))$. Лемма доказана.

Покажем теперь, что для любого отношения $\widetilde{\rho}$ из семейства $I_2(k,1)$, арность которого равна либо трем, либо четырем, существует отношение ρ, принадлежащее семейству $L(k,1)$ такое, что $S(U(\widetilde{\rho}))\subseteq S(U(\rho))$. Для этого введем ряд понятий и докажем несколько лемм.

Определение. Пусть $k\geqslant 3$. Пусть λ — произвольное разбиение множества E_k на h $(h\geqslant 3)$ подмножеств $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{h-1}$. Будем считать, что S-функция $F(x_1,\ldots,x_n)$ из P_k^1 зависит *λ-существенно* от переменной x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, если существуют $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n,\alpha_i,\alpha_{i'}$ из E_k такие, что $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$ и $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i'},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$ принадлежат разным подмножествам разбиения λ. Если S-функция $F(x_1,\ldots,x_n)$ зависит λ-существенно от переменной x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, то переменную x_i назовем *λ-существенной переменной функции $F(x_1,\ldots,x_n)$*.

Лемма 7.2. (Аналог леммы С. В. Яблонского [13, 14].) *Пусть $k\geqslant 3$, $h\geqslant 3$, λ — разбиение множества E_k на подмножества $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{h-1}$. Пусть $n\geqslant 2$ и $F(x_1,\ldots,x_n)$ — S-функция из P_k^1, λ-существенно зависящая более чем от одной переменной. Пусть x_1 — λ-существенная переменная функции $F(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда существуют три набора*

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),\ (\alpha_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n),\ (\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n),$$

на которых функция $F(x_1,\ldots,x_n)$ принимает значения из трех попарно различных подмножеств разбиения λ.

Доказательство этой леммы лишь в деталях отличается от доказательства аналогичной леммы в [13, 14]. Так как x_1 — λ-существенная переменная, то существуют $\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n$ из E_k такие, что последовательность

$$F(0,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n),F(1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n),\ldots,F(k-1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n) \tag{6}$$

содержит представителей по крайней мере из двух разных подмножеств разбиения λ. Возможны два случая.

а) Существует i $(1\leqslant i\leqslant h-1)$ такое, что в последовательности (6) нет представителей из множества ε_i. Так как $F(x_1,\ldots,x_n)$ — S-функция, то существует набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ такой, что $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\varepsilon_i$. Пусть $F(\alpha_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n)\in\varepsilon_j$. Пусть $(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n)$ — набор из (6) такой, что $F(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n)\in\varepsilon_l$, $l\neq j$. Очевидно, что ε_i, ε_j, ε_l — различные подмножества разбиения λ.

б) Пусть в последовательности (6) есть представители всех подмножеств разбиения λ. Так как функция $F(x_1,\ldots,x_n)$ λ-существенно зависит по крайней мере от двух переменных, то существует $\alpha_1\in E_k$ такое, что в множестве значений функции $F(\alpha_1,x_2,\ldots,x_n)$ содержатся элементы как минимум из двух разных подмножеств разбиения λ. Пусть $F(\alpha_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n)\in\varepsilon_i$. Тогда существуют $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ такие, что $F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in\varepsilon_j, i\neq j$. Очевидно, можно выбрать $\widetilde{\alpha}_1$ из E_k так, что $F(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_n)\in\varepsilon_l$, причем $l\neq i$, $l\neq j$. Таким образом, $\varepsilon_i,\varepsilon_j,\varepsilon_l$ — различные подмножества разбиения λ. Лемма доказана.

Следствие 1 из леммы 7.2. *Пусть $k \geqslant 3$, $h \geqslant 3$ и λ — разбиение множества E_k на подмножества $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{h-1}$. Пусть $n \geqslant 2$ и $F(x_1, \ldots, x_n)$ — S-функция, λ-существенно зависящая более чем от одной переменной. Тогда существует система*

$$(\alpha_0^1, \ldots, \alpha_{h-1}^1), \ \ldots, \ (\alpha_0^n, \ldots, \alpha_{h-1}^n)$$

неразнозначных наборов такая, что

$$F(\alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^n) \in \varepsilon_0, \quad \ldots, \quad F(\alpha_{h-1}^1, \ldots, \alpha_{h-1}^n) \in \varepsilon_{h-1}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что x_1 — λ-существенная переменная функции $F(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда в силу леммы 7.2 существуют три набора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$, $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$, на которых функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значения из трех попарно различных подмножеств разбиения λ — подмножеств $\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_l$. Так как $F(x_1, \ldots, x_n)$ — S-функция, то для любого q $(0 \leqslant q \leqslant h-1)$ существует набор $(\alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^n)$ такой, что $F(\alpha_q^1, \ldots, \alpha_q^n) \in \varepsilon_q$. Полагая, что $(\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$ совпадает с $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n)$ совпадает с $(\alpha_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$, а $(\alpha_l^1, \ldots, \alpha_l^1)$ совпадает с $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$ легко убедиться в справедливости следствия 1 из леммы 7.2.

Лемма 7.3. *Пусть $k \geqslant 3$, $h \geqslant 3$, ρ — отношение арности h, $\rho \in I_2(k,1)$, $m \geqslant 1$, ρ представимо в виде $\rho = \bigcap_{i=1}^{m} \rho_i$, где $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — h-элементарные отношения, которые задаются с помощью разбиений $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ соответственно. Пусть λ — разбиение множества E_k на h подмножеств такое, что любой набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ не принадлежит отношению ρ, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ принадлежат попарно различным подмножествам разбиения λ. Тогда существует i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ такое, что разбиение λ совпадает с разбиением λ_i.*

Доказательство. Пусть для любого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ $E_k = \varepsilon_0^i \cup \ldots \cup \varepsilon_{h-1}^i$ — разбиение λ_i, а $E_k = \varepsilon_0 \cup \ldots \cup \varepsilon_{h-1}$ — разбиение λ. Пусть $\alpha \in E_k$. Так как $\rho \in I_2(k,1)$, то по α однозначно определяется набор $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ чисел из E_k такой, что α — единственный элемент содержащийся в пересечении множеств $\varepsilon_{\beta_1}^1, \ldots, \varepsilon_{\beta_m}^m$. Таким образом, между множествами E_k и $E_h(m)$ можно установить взаимно-однозначное соответствие σ: $\sigma(\alpha) = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ тогда и только тогда, когда $\{\alpha\} = \varepsilon_{\beta_1}^1 \cap \ldots \cap \varepsilon_{\beta_m}^m$. Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ — произвольный набор элементов из E_k и $\sigma(\alpha_1) = (\beta_1^1, \ldots, \beta_m^1)$, $\ldots$, $\sigma(\alpha_h) = (\beta_1^h, \ldots, \beta_m^h)$. Из определения семейства отношений $I_2(k,1)$ следует, что имеет место

Свойство A наборов из $E_k(h)$: набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ не принадлежит отношению ρ тогда и только тогда, когда существует i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ такое, что i-е компоненты в совокупности наборов $\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_h)$ попарно различны.

Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ — набор из $E_k(h)$ такой, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ принадлежат попарно различным подмножествам разбиения λ. Пусть $\alpha_1 \in \varepsilon_0$, $\ldots$, $\alpha_h \in \varepsilon_{h-1}$. Рассмотрим возникающие случаи.

а) Существуют i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ и α, α', α'' из E_k такие, что $\sigma(\alpha) = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m)$, $\sigma(\alpha') = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_i', \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m)$, $\sigma(\alpha'') = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_i'', \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m)$, т. е. наборы $\sigma(\alpha), \sigma(\alpha'), \sigma(\alpha'')$ являются соседними по i-й компоненте, причем $\beta_i \neq \beta_i'$, $\beta_i \neq \beta_i''$, $\beta_i' \neq \beta_i''$, α' и α'' принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения λ, а α и α' — разным подмножествам.

Не ограничивая общности, будем считать, что α совпадает с α_1, а α' и α'' принадлежат подмножеству ε_1 разбиения λ. Очевидно, что числа $\alpha_1,\alpha',\alpha_2,\ldots,\alpha_h$, а также числа $\alpha_1,\alpha'',\alpha_2,\ldots,\alpha_h$ принадлежат попарно различным подмножествам разбиения λ, и по условию леммы наборы $(\alpha_1,\alpha',\alpha_3,\ldots,\alpha_h)$, $(\alpha_1,\alpha'',\alpha_3,\ldots,\alpha_h)$ не могут принадлежать отношению ρ. Вместе с тем, либо совокупность наборов $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha'),\sigma(\alpha_3),\ldots,\sigma(\alpha_h)$, либо совокупность наборов $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha''),\sigma(\alpha_3),\ldots,\sigma(\alpha_h)$ не удовлетворяет свойству A. Из полученного противоречия следует, что случай а) не может иметь места.

б) Для любого i $(1\leqslant i\leqslant m)$ и для любых α и α' из E_k таких, что $\sigma(\alpha)=(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_i,\beta_{i+1},\ldots,\beta_m)$ и $\sigma(\alpha')=(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta'_i,\beta_{i+1},\ldots,\beta_m)$, α и α' принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения λ.

Пусть $\alpha\in\varepsilon_0$ и $\alpha'\in\varepsilon_0$. Нетрудно видеть, что тогда в E_k найдется элемент $\widetilde{\alpha}$, также принадлежащий ε_0, и такой, что совокупность наборов $\sigma(\widetilde{\alpha}),\sigma(\alpha_2),\ldots,\sigma(\alpha_h)$ не удовлетворяет свойству A, хотя $(\widetilde{\alpha},\alpha_2,\ldots,\alpha_h)$ по условию леммы не принадлежит ρ. Поэтому случай б), также как и случай а) не может иметь места.

в) Существует i $(1\leqslant i\leqslant m)$ такое, что любые два числа α и α' из E_k принадлежат разным подмножествам разбиения λ, если $\sigma(\alpha)=(\beta_1,\ldots$ $\ldots,\beta_{i-1},\beta_i,\beta_{i+1},\ldots,\beta_m)$, $\sigma(\alpha')=(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta'_i,\beta_{i+1},\ldots,\beta_m)$ и $\beta_i\neq\beta'_i$.

Рассмотрим совокупность $\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_h$ элементов из E_k таких, что

$$\sigma(\widetilde{\alpha}_1)=(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},0,\beta_{i+1},\ldots,\beta_m),\ldots,\sigma(\widetilde{\alpha}_h)=(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},h-1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_m).$$

Очевидно, числа $\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_h$ принадлежат попарно различным подмножествам разбиения λ и по условию леммы не принадлежат ρ. Пусть $\widetilde{\alpha}_1\in\varepsilon_0$, $\ldots$, $\widetilde{\alpha}_h\in\varepsilon_{h-1}$. Если $m=1$, то $\lambda=\lambda_1$. Пусть $m>1$. Тогда существует q $(0\leqslant q\leqslant h-1)$ такое, что мощность подмножества ε_q больше единицы. Пусть $q=0$ и α' — произвольный элемент из ε_0, отличный от $\widetilde{\alpha}_1$. Пусть $\sigma(\alpha')=(\beta'_1,\ldots,\beta'_{i-1},\beta'_i,\beta'_{i+1},\ldots,\beta'_m)$. Пусть $\beta'\neq 0$. Тогда, очевидно, совокупность наборов $\sigma(\alpha'),\sigma(\widetilde{\alpha}_2),\ldots,\sigma(\widetilde{\alpha}_h)$ не удовлетворяет свойству A. Однако $(\alpha',\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_h)$ не принадлежит отношению ρ. Поэтому β'_i должно равняться нулю. Отсюда следует, в чем нетрудно убедиться, что разбиение λ совпадает с разбиением λ_i. Лемма доказана.

Следствие 2 из лемм 7.2, 7.3. *Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная S-функция из $S(U(\rho))$. Тогда для всякого i $(1\leqslant i\leqslant m)$ существуют l $(1\leqslant l\leqslant n)$, j $(1\leqslant j\leqslant m)$ и подстановка $\widetilde{\sigma}$, определенная на E_h, такие, что x_l — единственная λ_i-существенная переменная функции $F(x_1,\ldots,x_n)$ и для любых $\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-1},\alpha_l,\alpha_{l+1},\ldots,\alpha_n$ из E_k значение $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-1},\alpha_l,\alpha_{l+1},\ldots,\alpha_n)$ принадлежит подмножеству ε^i_γ $(0\leqslant\gamma\leqslant h-1)$ разбиения λ_i тогда и только тогда, когда α_l принадлежит подмножеству $\varepsilon^j_{\widetilde{\sigma}(\gamma)}$ разбиения λ_j.*

Доказательство. Пусть $i\in\{1,\ldots,m\}$. С использованием утверждения следствия 1 из леммы 2 нетрудно убедиться в том, что существует единственная λ_i-существенная переменная функции $F(x_1,\ldots,x_n)$. Пусть это будет переменная x_l $(1\leqslant l\leqslant n)$. Пусть $\alpha^l_1,\ldots,\alpha^l_h$ из E_k таковы, что $F(\underbrace{0,\ldots,0}_{l-1},\alpha^l_1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $F(\underbrace{0,\ldots,0}_{l-1},\alpha^l_h,0,\ldots,0)$ принадлежат попарно различным подмножествам разбиения λ_i, и значит $F(\underbrace{0,\ldots,0}_{l-1},\alpha^l_1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $F(\underbrace{0,\ldots,0}_{l-1},\alpha^l_h,0,\ldots,0)$ не принадлежит отношению ρ. Но тогда, очевидно, и набор $(\alpha^l_1,\ldots,\alpha^l_h)$ не принадлежит ρ. Таким образом, с разбиением λ_i можно связать разбиение λ множества E_k на подмножества $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{h-1}$: α из E_k принадлежит подмножеству ε_γ $(0\leqslant\gamma\leqslant h-1)$ разбиения λ тогда и только тогда, когда для любых $\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-1},\alpha_{l+1},\ldots,\alpha_n$ значение $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{l-1},\alpha,\alpha_{l+1},\ldots,\alpha_n)$ принадлежит подмножеству ε^i_γ разбиения λ_i. В силу леммы 3 существует j $(1\leqslant j\leqslant m)$ такое, что разбиение λ совпадает с разбиением λ_j и, следовательно, существует подстановка $\widetilde{\sigma}$, определенная на E_h такая, что $\varepsilon_{\tilde{\sigma}(\gamma)}=\varepsilon_\gamma$ для любого γ $(1\leqslant\gamma\leqslant h-1)$. Следствие 2 из лемм 7.2, 7.3 доказано.

Лемма 7.4. *Пусть $\widetilde{\sigma}$ — произвольная подстановка, определенная на E_3. Пусть $\beta_1+\beta_2\neq\beta_3+\beta_4\,(\mathrm{mod}\,3)$ для некоторых $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ из E_3. Тогда $\widetilde{\sigma}(\beta_1)+\widetilde{\sigma}(\beta_2)\neq\widetilde{\sigma}(\beta_3)+\widetilde{\sigma}(\beta_4)\,(\mathrm{mod}\,3)$.*

Доказательство. Очевидно, среди чисел $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ есть по крайней мере два одинаковых. Нетрудно видеть, что равенство $\beta_1+\beta_2=\beta_3+\beta_4\,(\mathrm{mod}\,3)$ возможно тогда и только тогда, когда имеет место одно из шести условий:

1) если $\beta_1=\beta_2$, $\beta_3\neq\beta_1$, $\beta_4\neq\beta_1$, то $\beta_3\neq\beta_4$,
2) если $\beta_1=\beta_3$, то $\beta_2=\beta_4$,
3) если $\beta_1=\beta_4$, то $\beta_2=\beta_3$,
4) если $\beta_2=\beta_3$, то $\beta_1=\beta_4$,
5) если $\beta_2=\beta_4$, то $\beta_1=\beta_3$,
6) если $\beta_3=\beta_4$, $\beta_1\neq\beta_3$, $\beta_2\neq\beta_3$, то $\beta_1\neq\beta_2$.

Так как подстановка $\widetilde{\sigma}$ осуществляет взаимно-однозначное отображение E_3 на E_3, отсюда сразу следует справедливость утверждения леммы 7.4.

Лемма 7.5. *Пусть $\widetilde{\sigma}$ — произвольная подстановка, определенная на $E_2(2)$. Пусть $(\beta^1_1,\beta^1_2),(\beta^2_1,\beta^2_2),(\beta^3_1,\beta^3_2),(\beta^4_1,\beta^4_2)$ принадлежат $E_2(2)$ и $\widetilde{\sigma}(\beta^1_1,\beta^1_2)=(\widetilde{\beta}^1_1,\widetilde{\beta}^1_2)$, $\widetilde{\sigma}(\beta^2_1,\beta^2_2)=(\widetilde{\beta}^2_1,\widetilde{\beta}^2_2)$, $\widetilde{\sigma}(\beta^3_1,\beta^3_2)=(\widetilde{\beta}^3_1,\widetilde{\beta}^3_2)$, $\widetilde{\sigma}(\beta^4_1,\beta^4_2)=(\widetilde{\beta}^4_1,\widetilde{\beta}^4_2)$. Пусть $\beta^1_s+\beta^2_s\neq\beta^3_s+\beta^4_s\,(\mathrm{mod}\,2)$ для некоторого s $(1\leqslant s\leqslant 2)$. Тогда существует q $(1\leqslant q\leqslant 2)$ такое, что $\widetilde{\beta}^1_q+\widetilde{\beta}^2_q\neq\widetilde{\beta}^3_q+\widetilde{\beta}^4_q\,(\mathrm{mod}\,2)$.*

Доказательство. Предположим противное. Нетрудно видеть, что равенства $\widetilde{\beta}^1_1+\widetilde{\beta}^2_1=\widetilde{\beta}^3_1+\widetilde{\beta}^4_1\,(\mathrm{mod}\,2)$ и $\widetilde{\beta}^1_2+\widetilde{\beta}^2_2=\widetilde{\beta}^3_2+\widetilde{\beta}^4_2\,(\mathrm{mod}\,2)$ одновременно имеют место тогда и только тогда, когда множество $\{(\widetilde{\beta}^1_1,\widetilde{\beta}^1_2),(\widetilde{\beta}^2_1,\widetilde{\beta}^2_2),(\widetilde{\beta}^3_1,\widetilde{\beta}^3_2),(\widetilde{\beta}^4_1,\widetilde{\beta}^4_2)\}$ состоит из одного, двух или четырех попарно различных наборов. Так как подстановка $\widetilde{\sigma}$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие $E_2(2)$ на $E_2(2)$, то множество $\{(\beta^1_1,\beta^1_2),(\beta^2_1,\beta^2_2),(\beta^3_1,\beta^3_2),(\beta^4_1,\beta^4_2)\}$ также состоит из одного, двух или четырех попарно различных наборов. Следовательно, $\beta^1_1+\beta^2_1=\beta^3_1+\beta^4_1\,(\mathrm{mod}\,2)$ и $\beta^1_2+\beta^2_2=\beta^3_2+\beta^4_2\,(\mathrm{mod}\,2)$. Из полученного противоречия следует справедливость утверждения леммы 7.5.

Определение. Пусть $h\geqslant 3$, $m\geqslant 1$, $k=h^m$, ρ — отношение арности h, $\rho\in I_2(k,1)$, ρ представимо в виде $\rho=\bigcap\limits_{i=1}^{m}\rho_i$, где $\rho_1,\ldots,\rho_m$ — h-элементарные отношения, определенные с помощью разбиений $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ соответственно. Отношение ρ называется (h,m)-*элементарным*, если имеет место следующее: числа α и α' из E_k принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения λ_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ тогда и только тогда, когда i-е компоненты в разложении α и α' по степеням числа h совпадают.

Определение. Пусть $m\geqslant 1$, $k=p^m$, где p — простое число. Через ρ_{p^m} обозначим отношение из семейства $L(k,1)$ такое, что сложение $\oplus$ в группе G, задающей ρ_{p^m}, определяется следующим образом. Пусть $\alpha_1\in E_k$, $\alpha_2\in E_k$, $\alpha\in E_k$ и разложения чисел α_1,α_2,α по степеням числа p имеют вид

$$\alpha_1=\beta^1_1+\beta^1_2\cdot p+\ldots+\beta^1_m\cdot p^{m-1},\qquad \alpha_2=\beta^2_1+\beta^2_2\cdot p+\ldots+\beta^2_m\cdot p^{m-1},$$
$$\alpha=\beta_1+\beta_2\cdot p+\ldots+\beta_m\cdot p^{m-1}.$$

Тогда если $\alpha_1\oplus\alpha_2=\alpha$, то $\beta_i=\beta^1_i+\beta^2_i\,(\mathrm{mod}\,p)$ для любого i $(1\leqslant i\leqslant m)$.

Лемма 7.6. *Пусть* $k=3^m$, $m\geqslant 1$, ρ — $(3,m)$*-элементарное отношение. Тогда* $S(U(\rho))\subseteq S(U(\rho_{3^m}))$.

Доказательство. Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная S-функция из $S(U(\rho))$. Предположим, что F не принадлежит $S(\rho_{3^m})$. Это означает, что существуют $\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1$, $\ldots$, $\alpha_1^4,\ldots,\alpha_n^4$ из E_k такие, что наборы $(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3,\alpha_1^4),\ldots,(\alpha_n^1,\alpha_n^2,\alpha_n^3,\alpha_n^4)$ принадлежат отношению ρ_{3^m}, но набор $(F(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1),F(\alpha_1^2,\ldots,\alpha_n^2),(F(\alpha_1^3,\ldots,\alpha_n^3),F(\alpha_1^4,\ldots,\alpha_n^4))$ отношению ρ_{3^m} не принадлежит. Пусть $F(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1)=\alpha_1$, $F(\alpha_1^2,\ldots,\alpha_n^2)=\alpha_2$, $F(\alpha_1^3,\ldots,\alpha_n^3)=\alpha_3$, $F(\alpha_1^4,\ldots,\alpha_n^4)=\alpha_4$. Так как $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ не принадлежит ρ_{3^m}, то существует i $(1\leqslant i\leqslant m)$ такое, что $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ из E_3 — i-е компоненты в разложении чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ по степеням тройки, таковы, что $\beta_1+\beta_2\neq\beta_3+\beta_4\,(\mathrm{mod}3)$. Из определения (h,m)-элементарных отношений следует, что $\alpha_1\in\varepsilon^i_{\beta_1}$, $\alpha_2\in\varepsilon^i_{\beta_2}$, $\alpha_3\in\varepsilon^i_{\beta_3}$, $\alpha_4\in\varepsilon^i_{\beta_4}$. В силу следствия 2 из лемм 7.2, 7.3 существуют l $(1\leqslant l\leqslant n)$, j $(1\leqslant j\leqslant m)$ и определенная на E_3 подстановка $\widetilde{\sigma}$ такие, что $\alpha_l^1\in\varepsilon^j_{\tilde\sigma(\beta_1)}$, $\alpha_l^2\in\varepsilon^j_{\tilde\sigma(\beta_2)}$, $\alpha_l^3\in\varepsilon^j_{\tilde\sigma(\beta_3)}$, $\alpha_l^4\in\varepsilon^j_{\tilde\sigma(\beta_4)}$. Вместе с тем, $\alpha_l^1\in\varepsilon^j_{\tilde\beta_1}$, $\alpha_l^2\in\varepsilon^j_{\tilde\beta_2}$, $\alpha_l^3\in\varepsilon^j_{\tilde\beta_3}$, $\alpha_l^4\in\varepsilon^j_{\tilde\beta_4}$, где $\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\widetilde{\beta}_3,\widetilde{\beta}_4$ — j-е компоненты в разложении чисел $\alpha_l^1,\alpha_l^2,\alpha_l^3,\alpha_l^4$ по степеням тройки. Поэтому $\widetilde{\beta}_1=\widetilde{\sigma}(\beta_1)$, $\widetilde{\beta}_2=\widetilde{\sigma}(\beta_2)$, $\widetilde{\beta}_3=\widetilde{\sigma}(\beta_3)$, $\widetilde{\beta}_4=\widetilde{\sigma}(\beta_4)$. Но тогда в силу леммы 7.4 $\widetilde{\beta}_1+\widetilde{\beta}_2\neq\widetilde{\beta}_3+\widetilde{\beta}_4\,(\mathrm{mod}3)$ и, следовательно, набор $(\alpha_l^1,\alpha_l^2,\alpha_l^3,\alpha_l^4)$ не может принадлежать отношению ρ_{3^m}. Из полученного противоречия следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 7.7. *Пусть* $k=4^m$, $m\geqslant 1$, ρ — $(4,m)$*-элементарное отношение. Тогда* $S(U(\rho))\subseteq S(U(\rho_{2^{2m}}))$.

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 7.6, рассмотрим S-функцию $F(x_1,\ldots,x_n)$ и наборы $(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\alpha_1^3,\alpha_1^4)$, $\ldots$, $(\alpha_n^1,\alpha_n^2,\alpha_n^3,\alpha_n^4)$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. Если предположить, что $F\notin S(U(\rho_{2^{2m}}))$, то существует i $(1\leqslant i\leqslant n)$ такое, что либо $\beta_1^1+\beta_1^2\neq\beta_1^3+\beta_1^4\,(\mathrm{mod}2)$, либо $\beta_2^1+\beta_2^2\neq\beta_2^3+\beta_2^4\,(\mathrm{mod}2)$, где $\beta_1^1,\beta_1^2,\beta_1^3,\beta_1^4$ и $\beta_2^1,\beta_2^2,\beta_2^3,\beta_2^4$ — $(2i-1)$-е и $2i$-е компоненты соответственно чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ при их разложении по степеням двойки. Но тогда, как нетрудно видеть, $(\beta_1^1,\beta_2^1),(\beta_1^2,\beta_2^2),(\beta_1^3,\beta_2^3),(\beta_1^4,\beta_2^4)$ — двоичные представления i-х компонент в разложении $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ по степеням четверки. Из определения (h,m)-элементарных отношений следует, что $\alpha_1\in\varepsilon^i_{(\beta_1^1,\beta_2^1)}$, $\alpha_2\in\varepsilon^i_{(\beta_1^2,\beta_2^2)}$, $\alpha_3\in\varepsilon^i_{(\beta_1^3,\beta_2^3)}$, $\alpha_4\in\varepsilon^i_{(\beta_1^4,\beta_2^4)}$. В силу следствия 2 из лемм 7.2 и 7.3 существуют l $(1\leqslant l\leqslant n)$, j $(1\leqslant j\leqslant m)$ и определенная на E_4 подстановка $\widetilde{\sigma}$ такие, что $\alpha_l^1\in\varepsilon^j_{\tilde\sigma((\beta_1^1,\beta_2^1))}$, $\alpha_l^2\in\varepsilon^j_{\tilde\sigma((\beta_1^2,\beta_2^2))}$, $\alpha_l^3\in\varepsilon^j_{\tilde\sigma((\beta_1^3,\beta_2^3))}$, $\alpha_l^4\in\varepsilon^j_{\tilde\sigma((\beta_1^4,\beta_2^4))}$. Вместе с тем, $\alpha_l^1\in\varepsilon^j_{(\tilde\beta_1^1,\tilde\beta_2^1)}$, $\alpha_l^2\in\varepsilon^j_{(\tilde\beta_1^2,\tilde\beta_2^2)}$, $\alpha_l^3\in\varepsilon^j_{(\tilde\beta_1^3,\tilde\beta_2^3)}$, $\alpha_l^4\in\varepsilon^j_{(\tilde\beta_1^4,\tilde\beta_2^4)}$, где $(\widetilde{\beta}_1^1,\widetilde{\beta}_2^1),(\widetilde{\beta}_1^2,\widetilde{\beta}_2^2),(\widetilde{\beta}_1^3,\widetilde{\beta}_2^3),(\widetilde{\beta}_1^4,\widetilde{\beta}_2^4)$ — двоичные представления j-х компонент в разложении $\alpha_1^l,\alpha_2^l,\alpha_3^l,\alpha_4^l$ по степеням четверки. Поэтому $(\widetilde{\beta}_1^1,\widetilde{\beta}_2^1)=\widetilde{\sigma}((\beta_1^1,\beta_2^1))$, $(\widetilde{\beta}_1^2,\widetilde{\beta}_2^2)=\widetilde{\sigma}((\beta_1^2,\beta_2^2))$, $(\widetilde{\beta}_1^3,\widetilde{\beta}_2^3)=\widetilde{\sigma}((\beta_1^3,\beta_2^3))$, $(\widetilde{\beta}_1^4,\widetilde{\beta}_2^4)=\widetilde{\sigma}((\beta_1^4,\beta_2^4))$. Но тогда в силу леммы 7.5 либо $\widetilde{\beta}_1^1+\widetilde{\beta}_1^2\neq\widetilde{\beta}_1^3+\widetilde{\beta}_1^4\,(\mathrm{mod}\ 2)$, либо $\widetilde{\beta}_2^1+\widetilde{\beta}_2^2\neq\widetilde{\beta}_2^3+\widetilde{\beta}_2^4\,(\mathrm{mod}2)$. Однако $\widetilde{\beta}_1^1,\widetilde{\beta}_1^2,\widetilde{\beta}_1^3,\widetilde{\beta}_1^4$ и $\widetilde{\beta}_2^1,\widetilde{\beta}_2^2,\widetilde{\beta}_2^3,\widetilde{\beta}_2^4$ — соответственно $(2j-1)$-е и $2j$-е компоненты в разложении чисел $\alpha_l^1,\alpha_l^2,\alpha_l^3,\alpha_l^4$ по степеням двойки. Таким образом, набор $(\alpha_l^1,\alpha_l^2,\alpha_l^3,\alpha_l^4)$ не может принадлежать отношению $\rho_{2^{2m}}$. Лемма доказана.

Теорема 7.8. *Пусть* $k\geqslant 3$. *Пусть* $\widetilde{\rho}$ *— произвольное отношение из* $I_2(k,1)$, *арность которого либо равна трем, либо равна четырем. Существует отношение* ρ *из* $L(k,1)$ *такое, что* $S(U(\widetilde{\rho}))\subseteq S(U(\rho))$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что существует определенная на E_k подстановка σ такая, что отношение $\widetilde{\rho}$ является σ-двойственным либо к некоторому $(3,m)$-элементарному отношению ρ_1, если $h=3$, либо к некоторому $(4,m)$-элементарному отношению ρ_2, если $h=4$. В силу лемм 7.6, 7.7 имеем $S(U(\rho_1))\subseteq S(U(\rho_{3^m}))$ и $S(U(\rho_2))\subseteq S(U(\rho_{2^{2m}}))$. Однако $S(U(\rho_1^\sigma))\subseteq S(U(\rho_{3^m}^\sigma))$ и $S(U(\rho_2^\sigma))\subseteq S(U(\rho_{2^{2m}}^\sigma))$ (следствие из леммы 6.7). Вместе с тем, отношения $\rho_{3^m}^\sigma, \rho_{2^{2m}}^\sigma$ принадлежат семейству $L(k,1)$ (утверждение 8 из §4). Теорема доказана.

Рассмотрим семейство отношений $I_3(k,1)$.

Семейство отношений $I_3(k,1)$ есть подмножество семейства отношений $I_2(k,1)$, содержащее те и только те отношения из $I_2(k,1)$, арность которых не меньше пяти.

Пусть $W_3(k,1)=Z(k,1)\cup I_3(k,1)\cup D(k,1)\cup L(k,1)\cup N(k,1)$.

Из результатов этого и предыдущего параграфов следует

Утверждение 9. *Для любого $k\geqslant 2$ совокупность классов сохранения отношений, принадлежащих множеству $W_3(k,1)$, образует S-критериальную систему в P_k^1.*

§ 8. S-предполнота S-множеств, принадлежащих классам сохранения отношений из объединения семейств $Z(k,1)$, $N(k,1)$, $D(k,1)$, $L(k,1)$, $I(k,1)$

Теорема 8.1. *Пусть $k\geqslant 2$. Для любого ρ, принадлежащего объединению семейств $Z(k,1)$, $N(k,1)$, $D(k,1)$ и $L(k,1)$, множество $S(U(\rho))$ является S-предполным классом в P_k^1.*

Справедливость утверждения теоремы 8.1 будет следовать из справедливости утверждений двух лемм.

Лемма 8.2. *Пусть $k\geqslant 2$, $\rho\in Z(k,1)\cup N(k,1)\cup D(k,1)$. Пусть $n\geqslant 1$, $F(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция из $U(\rho)$. Существует S-функция $F(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$, принадлежащая $S(\rho)$, такая, что $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,x_n)=F(x_1,\ldots,x_n)$.*

Доказательство. 1) Пусть $\rho\in Z(k,1)\cup N(k,1)$. Функцию $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ определим следующим образом. Пусть $\alpha\in E_k$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha)$ — произвольный набор из $E_k(n+1)$. Тогда, если $\alpha=\alpha_n$, то $\widetilde{F}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha)=F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, а если $\alpha\neq\alpha_n$, то $\widetilde{F}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha)=\alpha$. Нетрудно убедиться в том, что $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ является S-функцией, сохраняет отношение ρ и $F(x_1,\ldots,x_n)=\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,x_n)$.

2) Пусть $\rho\in D(k,1)$. Функцию $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ определим следующим образом. Пусть $\alpha\in E_k$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha)$ — произвольный набор из $E_k(n+1)$. Тогда, если $(\alpha,\alpha_n)\in\rho$, то $\widetilde{F}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha)=F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, а если $(\alpha,\alpha_n)\notin\rho$, то $\widetilde{F}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha)=\alpha$. Нетрудно убедиться в том, что $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ является S-функцией, $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ сохраняет отношение ρ и $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,x_n)=F(x_1,\ldots,x_n)$. Лемма доказана.

Лемма 8.3. *Пусть $k=p^m$, p — простое число, $m\geqslant 1$. Пусть $\rho\in L(k,1)$. В $S(U(\rho))$ существует подмножество $\mathfrak{M}_\rho$ такое, что его замыкание совпадает с $U(\rho)$.*

Доказательство. Пусть ρ определяется группой $G=(E_k,+)$. Рассмотрим поле Галуа $K=GF(p^m)$, аддитивная группа которого совпадает с G. Известно, что в поле K существует примитивный элемент e, и все элементы поля K представимы в следующем виде: $0,1,e,e^2,\ldots,e^{k-2}$, где 0 и 1 — ноль и единица поля K соответственно. При этом для любого $\alpha\in E_k$ выполнено $\alpha^k=\alpha$, а если $\alpha\neq 0$, то $\alpha^{k-1}=1$.

В [7, 9, 10, 16] показано, что в поле K всякое выражение вида

$$\alpha + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{i,j} x^{p^j}$$

определяет функцию из $U(\rho)$, причем справедливо и обратное утверждение. Нетрудно видеть, что функция вида $\alpha x+\beta$ при $\alpha\neq 0$, а также функции x_1+x_2 и x_1-x_2 являются S-функциями. Покажем, что и x^{p^j} $(0\leqslant j\leqslant m-1)$ является S-функцией. Предположим противное. Если x^{p^j} не является S-функцией, то при некоторых α и β из E_k $(\alpha\neq\beta)$ должно иметь место равенство $\alpha^{p^j}=\beta^{p^j}$. Очевидно, можно считать, что α и β одновременно не равны 0 и 1. Поэтому при некоторых s и r $(2\leqslant s, r\leqslant k-2)$ выполнено $\alpha=e^s$, $\beta=e^r$, т. е. $e^{sp^j}=e^{rp^j}$. Пусть $s>r$. Тогда $e^{(s-r)p^j}=1$ и, значит, $(s-r)p^j=0 \pmod{(k-1)}$, что невозможно. Таким образом, x^{p^j} — S-функция $(0\leqslant j\leqslant m-1)$. Заметим, что для любой константы $\beta\in E_k$ имеет место равенство $\beta=(\alpha x+\beta)-\alpha x$. Из изложенного выше следует, что в качестве множества $\mathfrak{M}_\rho$ можно рассматривать множество S-функций $\{\alpha x+\beta, x_1+x_2, x_1-x_2\}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 8.1. Из лемм 8.2 и 8.3 следует, что, если $\rho\in Z(k,1)\cup N(k,1)\cup D(k,1)\cup L(k,1)$, то замыкание множества $S(U(\rho))$ совпадает с $U(\rho)$. Но тогда в силу теоремы 1.4 $S(U(\rho))$ — S-предполный класс в P_k^1.

Теорема 8.4. *Пусть $k\geqslant 5$, $h\geqslant 5$, $m\geqslant 1$, $k=h^m$. Для любого $\rho\in I_3(k,1)$ множество $S(U(R))$ является S-предполным классом в P_k^1.*

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы, введем ряд понятий и докажем несколько лемм.

Пусть $h\geqslant 5$, $m\geqslant 1$, $k=h^m$, ρ — (h,m)-элементарное отношение. Пусть ε — произвольная подстановка, определенная на множестве $\{1,\dots,m\}$, а Σ — совокупность подстановок $\widetilde{\sigma}_1,\dots,\widetilde{\sigma}_m$, определенных на E_h. Для заданных h, m, ε и Σ определим функцию $F^h_{(m,\varepsilon,\Sigma)}(x_1,\dots,x_m)$. Пусть $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in E_k(m)$ и $F^h_{(m,\varepsilon,\Sigma)}(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\alpha$. Пусть разложения $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ по степеням числа h имеют вид

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1^1 + \beta_2^1 h + \ldots + \beta_m^1 h^{m-1},\\
\alpha_2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 h + \ldots + \beta_m^2 h^{m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_m &= \beta_1^m + \beta_2^m h + \ldots + \beta_m^m h^{m-1}.
\end{aligned}$$

Тогда α представимо в виде

$$\alpha=\widetilde{\sigma}_1(\beta^1_{\varepsilon(1)})+\widetilde{\sigma}_2(\beta^2_{\varepsilon(2)})h+\ldots+\widetilde{\sigma}_m(\beta^m_{\varepsilon(m)})h^{m-1}.$$

Легко убедиться в том, что для любых подстановок ε и совокупности подстановок Σ функция $F^h_{(m,\varepsilon,\Sigma)}(x_1,\dots,x_m)$ является S-функцией и сохраняет (h,m)-элементарное отношение ρ. Исходя из определения (h,m)-элементарного отношения, заметим, что для любого i $(1\leqslant i\leqslant m)$ переменная x_i является $\lambda_{\varepsilon(i)}$-существенной переменной S-функции $F^h_{(m,\varepsilon,\Sigma)}(x_1,\dots,x_m)$. В дальнейшем, если либо ε — тождественная подстановка, либо тождественна каждая подстановка из Σ, либо тождественны все подстановки $\varepsilon,\widetilde{\sigma}_1,\dots,\widetilde{\sigma}_m$, то вместо обозначения $F^h_{(m,\varepsilon,\Sigma)}$ будем использовать обозначения $F^h_{(m,\Sigma)}$, $F^h_{(m,\varepsilon)}$, F^h_m соответственно.

Лемма 8.5. *Пусть $k\geqslant 5$, $h\geqslant 5$, $m\geqslant 1$, $k=h^m$. Пусть $\rho\in I_3(k,1)$, ρ — (h,m)-элементарное отношение. Пусть $\widetilde{\rho}$ — произвольное отношение из семейства $Z(k,1)$. Тогда $S(U(\rho))\nsubseteq S(U(\widetilde{\rho}))$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\rho}=\varepsilon$, $\varepsilon\subset E_k$. Пусть $\alpha\in\varepsilon$ и $\alpha'\notin\varepsilon$. Пусть

$$\alpha=\beta_1+\beta_2h+\ldots+\beta_mh^{m-1},\qquad \alpha'=\beta'_1+\beta'_2h+\ldots+\beta'_mh^{m-1}.$$

Пусть совокупность Σ подстановок $\widetilde{\sigma}_1,\ldots,\widetilde{\sigma}_m$ такова, что $\sigma(\beta_i)=\beta'_i$ для любого i $(1\leqslant i\leqslant m)$. Нетрудно видеть, что $F^h_{(m,\Sigma)}(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_m)=\alpha'$. Таким образом, $F^h_{(m,\Sigma)}(x_1,\ldots,x_n)\notin S(U(\widetilde{\rho}))$ и $S(U(\rho))\not\subseteq S(U(\widetilde{\rho}))$. Лемма доказана.

Лемма 8.6. *Пусть $k\geqslant 5$, $m\geqslant 1$, $k=h^m$. Пусть $\rho\in I_3(k,1)$, ρ — (h,m)-элементарное отношение. Пусть $\widetilde{\rho}$ — произвольное отношение из семейства $D(k,1)$. Тогда $S(U(\rho))\not\subseteq S(U(\widetilde{\rho}))$.*

Доказательство. Пусть (α_1,α_2) — произвольный набор, не принадлежащий отношению $\widetilde{\rho}$. Пусть

$$\alpha_1=\beta^1_1+\beta^1_2h+\ldots+\beta^1_mh^{m-1},\qquad \alpha_2=\beta^2_1+\beta^2_2h+\ldots+\beta^2_mh^{m-1}.$$

Возможны два случая.

а) Пусть $m\geqslant 1$ и для любого i $(1\leqslant i\leqslant m)$ в $\widetilde{\rho}$ существует набор (α^i_1,α^i_2) такой, что i-е компоненты $\widetilde{\beta}^1_i$ и $\widetilde{\beta}^2_i$ в разложении α^i_1 и α^i_2 по степеням числа h различны. Пусть Σ — совокупность подстановок $\widetilde{\sigma}_1,\ldots,\widetilde{\sigma}_m$ такая, что для всякого i $(1\leqslant i\leqslant m)$ $\widetilde{\sigma}_i(\widetilde{\beta}^1_i)=\beta^1_i$ и $\widetilde{\sigma}_i(\widetilde{\beta}^2_i)=\beta^2_i$. Очевидно, $F^h_{(m,\Sigma)}(\alpha^1_1,\ldots,\alpha^m_1)=\alpha_1$. Пусть $(\widetilde{\alpha}^1_2,\ldots,\widetilde{\alpha}^m_2)$ — набор из $E_k(m)$ такой, что $\widetilde{\alpha}^i_2=\alpha^i_2$, если $\beta^1_i\neq\beta^2_i$, и $\widetilde{\alpha}^i_2=\alpha^i_1$, если $\beta^1_i=\beta^2_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$. Нетрудно видеть, что $F^h_{(m,\Sigma)}(\widetilde{\alpha}^1_2,\ldots,\widetilde{\alpha}^m_2)=\alpha_2$. Отсюда следует, что S-функция $F^h_{(m,\Sigma)}$ не сохраняет отношение $\widetilde{\rho}$ и $S(U(\rho))\not\subseteq S(U(\widetilde{\rho}))$.

б) Пусть $m\geqslant 2$ и существует i $(1\leqslant i\leqslant m)$ такое, что для любых α_1,α_2 набор (α_1,α_2) не принадлежит $\widetilde{\rho}$, если i-е компоненты в разложении α_1 и α_2 по степеням числа h различны. Очевидно, в этом случае в E_k существуют числа $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2$, у которых i-е компоненты при разложении по степеням числа h совпадают, а j-е различны $(1\leqslant j\leqslant m)$, $j\neq i$; при этом набор $(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2)$ принадлежит $\widetilde{\rho}$. Пусть ε — подстановка, определенная на множестве $\{1,\ldots,m\}$, такова, что $\varepsilon(i)=j$, $\varepsilon(j)=i$ и, если $m\geqslant 3$, то для любого l $(1\leqslant l\leqslant m)$, $l\neq i$, $l\neq j$, $\sigma(l)=l$. Пусть $F^h_{(m,\varepsilon)}(\underbrace{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_1}_m)=\alpha'_1$, $F^h_{(m,\varepsilon)}(\underbrace{\widetilde{\alpha}_2,\ldots,\widetilde{\alpha}_2}_m)=\alpha'_2$. Ясно, что набор (α'_1,α'_2) отношению $\widetilde{\rho}$ не принадлежит. Отсюда следует, что S-функция $F^h_{(m,\varepsilon)}$ не сохраняет отношения $\widetilde{\rho}$, и следовательно, $S(U(\rho))\not\subseteq S(U(\widetilde{\rho}))$. Лемма доказана.

Лемма 8.7. *Пусть $k\geqslant 5$, $h\geqslant 5$, $m\geqslant 1$, $k=h^m$. Пусть $\rho\in I_3(k,1)$, ρ — (h,m)-элементарное отношение. Пусть $\widetilde{\rho}$ — произвольное отношение из семейства $N(k,1)$. Тогда $S(U(\rho))\not\subseteq S(U(\widetilde{\rho}))$.*

Доказательство. Пусть α — произвольный элемент из E_k. В силу определения семейства отношений $N(k,1)$ существует единственный элемент α' из E_k такой, что набор (α,α') принадлежит $\widetilde{\rho}$; при этом $\alpha'\neq\alpha$. Не ограничивая общности, будем считать, что первые компоненты β_1 и β'_1 при разложении α и α' по степеням числа h различны. Рассмотрим совокупность Σ подстановок $\widetilde{\sigma}_1,\ldots,\widetilde{\sigma}_m$ такую, что $\widetilde{\sigma}_1(\beta_1)=\beta_1$, $\widetilde{\sigma}_1(\beta'_1)\neq\beta'_1$ и если $m\geqslant 2$, то для любого i $(2\leqslant i\leqslant m)$ $\widetilde{\sigma}_i$ — тождественная подстановка. Очевидно, что $F^h_{(m,\Sigma)}\underbrace{(\alpha,\ldots,\alpha)}_m=\alpha$, но $F^h_{(m,\Sigma)}\underbrace{(\alpha',\ldots,\alpha')}_m\neq\alpha'$. Отсюда следует, что S-функция $F^h_{(m,\Sigma)}$ не сохраняет отношения $\widetilde{\rho}$. Таким образом, $S(U(\rho))\not\subseteq S(U(\widetilde{\rho}))$. Лемма доказана.

Лемма 8.8. *Пусть $k\geqslant 5$, $p\geqslant 5$, p — простое число, $m\geqslant 1$, $k=p^m$, $\rho\in I_3(k,1)$, ρ — (h,m)-элементарное отношение, $h=p^{m_1}$, $m=m_1m_2$,*

$m_1 \geqslant 1$. *Пусть* $\widetilde{\rho}$ *— произвольное отношение из семейства* $L(k,1)$. *Тогда* $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\widetilde{\rho}))$.

Доказательство. Пусть отношение $\widetilde{\rho}$ определяется с помощью элементарной p-группы $G = \langle E_k \oplus \rangle$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ из E_k таковы, что $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_3 \oplus \alpha_4$, т. е. набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ принадлежит отношению $\widetilde{\rho}$. Пусть для любого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ i-е компоненты при разложении $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ по степеням числа h равны $\beta_i^1, \beta_i^2, \beta_i^3, \beta_i^4$ соответственно. Пусть Σ — совокупность подстановок $\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_m$ таких, что для всякого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ $\widetilde{\sigma}_i(\beta_i^1) = \beta_i^1, \widetilde{\sigma}_i(\beta_i^2) = \beta_i^2, \widetilde{\sigma}_i(\beta_i^3) = \beta_i^3$, но $\widetilde{\sigma}_i(\beta_i^4) \neq \beta_i^4$. Так как $p \geqslant 5$, то совокупность Σ подстановок $\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_m$ с данным свойством существует. Очевидно, $F^p_{(m,\Sigma)}\underbrace{(\alpha_1, \ldots, \alpha_1)}_{m} = \alpha_1, F^p_{(m,\Sigma)}\underbrace{(\alpha_2, \ldots, \alpha_2)}_{m} = \alpha_2, F^p_{(m,\Sigma)}\underbrace{(\alpha_3, \ldots, \alpha_3)}_{m} = \alpha_3$, но $F^p_{(m,\Sigma)}(\underbrace{(\alpha_4, \ldots, \alpha_4)}_{m} \neq \alpha_4$. Отсюда следует, что S-функция $F^p_{(m,\Sigma)}$ не сохраняет отношение $\widetilde{\rho}$ и, таким образом, $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\widetilde{\rho}))$. Лемма доказана.

Лемма 8.9. *Пусть* $k \geqslant 5$, $h \geqslant 5$, $m \geqslant 1$, $k = h^m$. *Пусть* $\rho \in I_3(k,1)$, ρ *—* (h,m)*-элементарное отношение. Пусть* $\widetilde{\rho}$ *— произвольное отношение арности* $\widetilde{h} \geqslant 5$, *также принадлежащее семейству* $I_3(k,1)$, *причем если* $\widetilde{h} = h$, *то* $\rho \neq \widetilde{\rho}$. *Тогда* $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\widetilde{\rho}))$.

Доказательство. Пусть $\rho = \cap_{i=1}^m \rho_i$, $\widetilde{\rho} = \bigcap\limits_{j=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{\rho}_j$, где h-элементарные отношения $\rho_1, \ldots, \rho_m$ и $\widetilde{h}$-элеметарные отношения $\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_{\widetilde{m}}$ определяются с помощью разбиений $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_m$ соответственно. Заметим, что для любых i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, j $(1 \leqslant j \leqslant \widetilde{m})$ мощность каждого подмножества в разбиении λ_i равна h^{m-1}, а в разбиении $\widetilde{\lambda}_j$ — $\widetilde{h}^{\widetilde{m}-1}$. Рассмотрим возникающие случаи.

а) Пусть $\widetilde{h} = h$. Очевидно, в этом случае $\widetilde{m} = m$. Если $m = 1$, то отношения $\widetilde{\rho}$ и ρ совпадают. Поэтому будем считать, что $m \geqslant 2$. Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что x_1 является единственной λ_1-существенной переменной S-функции $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ и т.д. x_m является единственной λ_m-существенной переменной S-функции $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$. Так как отношение $\widetilde{\rho}$ по условию леммы не совпадает с отношением ρ, т. е. не является (h,m)-элементарным, то существует i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ такое, что разбиение $\widetilde{\lambda}_i$ отлично от любого из разбиений $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Покажем, что S-функция $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ не принадлежит $S(U(\widetilde{\rho}))$. Предположим противное. Пусть $F^h_m(x_1, \ldots, x_m) \in S(U(\widetilde{\rho}))$. Это означает, что $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ сохраняет отношение $\widetilde{\rho}$. Но тогда в силу следствия 2 из лемм 7.2, 7.3 у S-функции $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ существует единственная $\widetilde{\lambda}_i$-существенная переменная. Пусть это будет переменная x_1. Пусть $\alpha \in E_k$. Рассмотрим систему наборов

$$\underbrace{(\alpha, 0, \ldots, 0, 0)}_{m}, \underbrace{(\alpha, 0, \ldots, 0, 1)}_{m}, \ldots, \underbrace{(\alpha, k-1, \ldots, k-1)}_{m}.$$

На наборах системы (6) S-функция $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ принимает ровно h^{m-1} попарно различных значений. Таким образом, множество значений, которые S-функция F^h_m принимает на наборах системы (6) образует некоторое подмножество как разбиения λ_1, так и разбиения $\widetilde{\lambda}_i$. Но тогда путем вариации числа α из E_k легко убедиться в том, что разбиения λ_1 и $\widetilde{\lambda}_i$ совпадают, что противоречит исходному предположению. Следовательно, $F^h_m \notin S(U(\widetilde{\rho}))$ и $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\widetilde{\rho}))$.

б) Пусть $\widetilde{h} > h$. Покажем, что и в этом случае S-функция $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ не принадлежит $S(\widetilde{\rho})$. Как и раньше, будем считать, что x_1 является $\widetilde{\lambda}_i$-существенной переменной S-функции $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$. Однако $\widetilde{h}^{\widetilde{m}-1} < h^{m-1}$. Поэтому существуют два набора из системы наборов (1), на которых S-функция $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ принимает значения из разных подмножеств разбиения $\widetilde{\lambda}_i$. Это означает, как нетрудно видеть, что у S-функции $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ по крайней мере две $\widetilde{\lambda}_i$-существенные переменные. Но тогда в силу следствия 2 из лемм 7.2, 7.3 S-функция $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ не может сохранять отношение $\widetilde{\rho}$. Таким образом, $F^h_m \notin S(U(\widetilde{\rho}))$ и $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\widetilde{\rho}))$.

в) Пусть $\widetilde{h} < h$. Предположим, что $S(U(\rho)) \subseteq S(U(\widetilde{\rho}))$. Это означает, что S-функция $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ сохраняет отношение $\widetilde{\rho}$. Но тогда в силу следствия 2 из лемм 7.2, 7.3 для любого i $(1 \leqslant i \leqslant \widetilde{m})$ у S-функции $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ существует единственная $\widetilde{\lambda}_i$-существенная переменная. Однако $m < \widetilde{m}$. Поэтому у $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ существует переменная, которая для некоторых i_1, i_2 $(1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant \widetilde{m})$, $i_1 \neq i_2$, является и λ_{i_1}-существенной и λ_{i_2}-существенной. Не ограничивая общности, будем считать, что числа $s_1, \ldots, s_m$ $(1 \leqslant s_1, \ldots, s_m \leqslant \widetilde{m})$ таковы, что переменная x_1 S-функции $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ является $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{s_1}$-существенной, переменная x_2 является $\widetilde{\lambda}_{s_1+1}, \ldots, \widetilde{\lambda}_{s_2}$-существенной и т. д., переменная x_m является $\widetilde{\lambda}_{s_m+1}, \ldots, \widetilde{\lambda}_{s_{\widetilde{m}}}$-существенной. Очевидно, $s_1 + \ldots + s_m = \widetilde{m}$. Из определения S-функции $F^h_m(x_1, \ldots, x_m)$ следует, что любые два числа α и α' из E_k принадлежат одному и тому же подмножеству разбиений $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{s_1}$, если первые компоненты при разложении α и α' по степеням числа h совпадают и, таким образом, каждое подмножество разбиений $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{s_1}$ является объединением некоторых подмножеств рабиения λ_1. Пусть $\dfrac{\widetilde{m}}{m} = n$. Ясно, что число n — целое. Пусть для любого i $(1 \leqslant i \leqslant \widetilde{m})$ разбиение $\widetilde{\lambda}_i$ представимо в виде $\widetilde{\lambda}_i$: $E_k = \varepsilon^i_0 \cup \ldots \cup \varepsilon^i_{\widetilde{h}-1}$. Так как $\widetilde{\rho} \in I_3(k, 1)$, то для любых $j_1, \ldots, j_{s_1}$ $(0 \leqslant j_1, \ldots, j_{s_1} \leqslant \widetilde{h} - 1)$ множество $\varepsilon^1_{j_1} \cap \ldots \cap \varepsilon^{s_1}_{j_{s_1}}$ не пусто и если набор $(j'_1, \ldots, j'_{s_1})$ отличен от набора $(j_1, \ldots, j_{s_1})$, то множества $\varepsilon^1_{j_1} \cap \ldots \cap \varepsilon^{s_1}_{j_{j_1}}$ и $\varepsilon^1_{j'_1} \cap \ldots \cap \varepsilon^{s_1}_{j'_{s_1}}$ не пересекаются. Отсюда легко следует, что $s_1 \leqslant n$. Вместе с тем, если $s_1 < n$, то существует i $(2 \leqslant i \leqslant m)$ такое, что $s_i > n$. Повторяя все вышеизложенное, заменив 1 на i, нетрудно видеть, что s_1 не может быть больше n. Таким образом, $s_1 = n$ и у любых α и α' из $\varepsilon^1_{j_1} \cap \ldots \cap \varepsilon^n_{j_n}$ первые компоненты при разложении α и α' по степеням числа h совпадают. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\tilde{h}})$ — набор из $E_k(\widetilde{h})$ такой, что

$$
\begin{aligned}
\{\alpha_1\} &= \varepsilon^1_1 \ \cap \varepsilon^2_0 \ \cap \varepsilon^3_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^n_0 \cap \varepsilon^{n+1}_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^{\widetilde{m}}_0,\\
\{\alpha_2\} &= \varepsilon^1_1 \ \cap \varepsilon^2_1 \ \cap \varepsilon^3_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^n_0 \cap \varepsilon^{n+1}_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^{\widetilde{m}}_0,\\
\{\alpha_3\} &= \varepsilon^1_2 \ \cap \varepsilon^2_1 \ \cap \varepsilon^3_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^n_0 \cap \varepsilon^{n+1}_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^{\widetilde{m}}_0,\\
\{\alpha_4\} &= \varepsilon^1_3 \ \cap \varepsilon^2_3 \ \cap \varepsilon^3_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^n_0 \cap \varepsilon^{n+1}_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^{\widetilde{m}}_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\{\alpha_{\tilde{h}}\} &= \varepsilon^1_{\tilde{h}-1} \cap \varepsilon^2_{\tilde{h}-1} \cap \varepsilon^3_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^n_0 \cap \varepsilon^{n+1}_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^{\widetilde{m}}_0.
\end{aligned}
$$

Ясно, что набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\tilde{h}})$ принадлежит отношению $\widetilde{\rho}$ и, кроме того, первые компоненты при разложении $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\tilde{h}}$ по степеням числа h попарно различны. Пусть эти компоненты равны соответственно $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\tilde{h}}$. Пусть $\{\widetilde{\alpha}\} = \varepsilon^1_0 \cap \varepsilon^2_0 \cap \varepsilon^3_0 \cap \ldots \cap \varepsilon^n_0 \cap \varepsilon^{n+1}_0 \cap \ldots \varepsilon^{\widetilde{m}}_0$. Так как $\widetilde{\alpha} \in \varepsilon^1_0$,

$\alpha_2 \in \varepsilon_1^1$, $\alpha_3 \in \varepsilon_2^1$, ..., $\alpha^1_{\tilde h-1}$, т. е. $\widetilde\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\tilde h}$ принадлежат различным подмножествам разбиения $\widetilde\lambda_1$, то набор $(\widetilde\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\tilde h})$ не принадлежит отношению $\widetilde\rho$. Пусть $\widetilde\beta_1$ — первая компонента при разложении $\widetilde\alpha$ по степеням числа h. Нетрудно видеть, что $\widetilde\beta_1 \neq \beta_1$, ..., $\widetilde\beta_1 \neq \beta_{\tilde h}$. Рассмотрим S-функцию $F^h_{(m,\Sigma)}(x_1, \ldots, x_m)$, где совокупность Σ подстановок $\widetilde\sigma_1, \ldots, \widetilde\sigma_m$ такова, что $\widetilde\sigma_1(\beta_1) = \widetilde\beta_1$, $\widetilde\sigma_1(\beta_2) = \beta_2$, ..., $\widetilde\sigma_1(\beta_{\tilde h}) = \beta_{\tilde h}$ и для любого i $(2 \leqslant i \leqslant m)$ подстановка $\widetilde\sigma_i$ является тождественной. Очевидно, S-функция $F^h_{(m,\Sigma)}(x_1, \ldots, x_m)$ не принадлежит $S(U(\widetilde\rho))$, но в соответствии со своим определением принадлежит множеству $S(U(\rho))$. Следовательно, и $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\widetilde\rho))$. Таким образом, разобраны все возможные случаи. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 8.4. Утверждение теоремы 8.2, очевидно, будет следовать из теоремы 1.4 и из того, что для любого отношения ρ_1, отличного от ρ и принадлежащего S-критериальной системе $W_3(k,1)$, выполнено $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\rho_1))$. Пусть $\widetilde\rho$ — (h,m)-элементарное отношение. Нетрудно видеть, что существует подстановка σ, определенная на E_k, такая, что $\rho = \widetilde\rho^\sigma$, т. е. отношение ρ является σ-двойственным к отношению $\widetilde\rho$. Пусть $\rho_2 = \rho_1^{\sigma^{-1}}$. Очевидно, отношение ρ_2 принадлежит тому же семейству отношений, что и ρ_1 (лемма 6.6). Из лемм 8.6, 8.7, 8.8, 8.9 следует, что $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\widetilde\rho))$. Вместе с тем, в силу леммы 6.6 имеем $S(U^\sigma(\widetilde\rho)) \subseteq S(U^\sigma(\rho_1))$. Однако $S(U^\sigma(\widetilde\rho)) = S(U(\widetilde\rho^\sigma))$ и $S(U^\sigma(\rho_2)) = S(U(\rho_2^\sigma))$ (следствие из леммы 6.7). Таким образом, $S(U(\rho)) \nsubseteq S(U(\rho_1))$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим семейство отношений $I(k,1)$ (§1) и покажем, что имеет место

Теорема 8.10. *Пусть $k \geqslant 5$, $h \geqslant 5$, $m \geqslant 1$, $k = h^m$. Для любого отношения $\rho_1 \in I_3(k,1)$ существует отношение $\widetilde\rho_1 \in I(k,1)$ такое, что $S(U(\widetilde\rho_1)) = S(U(\rho_1))$ и наоборот: для любого отношения ρ_2 из $I(k,1)$ существует отношение $\widetilde\rho_2$ из $I_3(k,1)$ такое, что $S(U(\widetilde\rho)) = S(U(\rho_2))$.*

Доказательство. Пусть ρ — (h,m)-элементарное отношение, $\rho = \bigcap\limits_{i=1}^m \widetilde\rho_i$, где h-элементарные отношения $\widetilde\rho_1, \ldots, \widetilde\rho_m$ определяются с помощью разбиений $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ соответственно. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная S-функция из $S(U(\rho))$ и для некоторых $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2$ из E_k $F(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1) = \alpha_1$, $F(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2) = \alpha_2$. В силу определения (h,m)-элементарных отношений и следствия 2 из лемм 7.2, 7.3 для всякого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ существуют l $(1 \leqslant l \leqslant n)$ и j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ такие, что имеет место следующее: если при разложении по степеням числа h у α_l^1 и α_l^2 различны j-е компоненты, то у α_1 и α_2 различны i-е компоненты. Отсюда легко следует, что S-функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет бинарное отношение $\widetilde\rho$ такое, что: набор $(\widetilde\alpha_1, \widetilde\alpha_2)$ из $E_k(2)$принадлежит $\widetilde\rho$ тогда и только тогда, когда для любого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ i-е компоненты при разложении $\widetilde\alpha_1$ и $\widetilde\alpha_2$ по степеням числа h различны. Так как $F(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная S-функция из $S(U(\rho))$, то $S(U(\rho)) \subseteq S(U(\widetilde\rho))$. Вместе с тем, $S(U(\rho))$ — S-предполный класс (теорема 8.4). Поэтому $S(U(\rho)) = S(U(\widetilde\rho))$.

Пусть ρ_1 — произвольное отношение из $I_3(k,1)$. Очевидно, существует подстановка σ, определенная на E_k, такая, что $\rho = \rho_1^\sigma$, т. е. отношение ρ является σ-двойственным к отношению ρ_1. Пусть $\widetilde\rho_1 = \widetilde\rho^{\sigma^{-1}}$. Ясно, что произвольный набор (α_1, α_2) из $E_k(2)$ принадлежит отношению $\widetilde\rho_1$, если набор $(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2))$ принадлежит отношению $\widetilde\rho$, и не принадлежит $\widetilde\rho_1$ в противном случае. Поэтому $\widetilde\rho_1 \in I(k,1)$. По доказанному выше $S(U(\rho)) = S(U(\widetilde\rho))$. В силу следствия из леммы 6.7 $S(U^{\sigma^{-1}}(\rho)) = S(U^{\sigma^{-1}}(\widetilde\rho))$. Однако $S(U^{\sigma^{-1}}(\rho)) = S(U(\rho^{\sigma^{-1}})) = S(U(\rho_1)), S(U^{\sigma^{-1}}(\widetilde\rho)) = S(U(\widetilde\rho^{\sigma^{-1}})) = S(U(\widetilde\rho_1))$. Таким образом, $S(U(\rho_1))=S(U(\widetilde{\rho}_1))$.

Пусть ρ_2 — произвольное отношение из семейства $I(k,1)$. В силу определения этого семейства существует подстановка $\widetilde{\sigma}$ такая, что $\rho_2^{\widetilde{\sigma}}=\widetilde{\rho}$. Пусть $\widetilde{\rho}_2=\rho^{\widetilde{\sigma}^{-1}}$. Нетрудно видеть, что $S(U(\widetilde{\rho}_2))=S(U(\rho_2))$. Теорема доказана.

Пусть $W(k,1)=Z(k,1)\cup N(k,1)\cup D(k,1)\cup L(k,1)\cup I(k,1)$. Из результатов этого и предыдущего параграфов следует, что имеют место

Теорема 8.11. *Пусть $k\geqslant 2$. Произвольное S-множество $\mathfrak{M}\subseteq P_k^1$ является полным в P_k^1 тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения из множества $W(k,1)$.*

Теорема 8.12. *Пусть $k\geqslant 2$. Произвольное S-множество $\mathfrak{N}\subseteq P_k^1$ является S-предполным классом в P_k^1 тогда и только тогда, когда существует $\rho\in W(k,1)$ такое, что $\mathfrak{N}=S(U(\rho))$.*

Теорема 8.13. *Пусть $k\geqslant 2$. Пусть отношения ρ и ρ' принадлежат $W(k,1)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) *Пусть ρ и ρ' принадлежат различным семействам из множества $\{Z(k,1),N(k,1),D(k,1),L(k,1),I(k,1)\}$. Тогда $S(U(\rho))\neq S(U(\rho'))$.*

б) *Пусть ρ и ρ' принадлежат объединению семейств $Z(k,1),D(k,1)$, $L(k,1),I(k,1)$. Тогда если $\rho\neq\rho'$, то $S(U(\rho))\neq S(U(\rho'))$.*

в) *Пусть ρ и ρ' принадлежат семейству $N(k,1)$. Тогда равенство $S(U(\rho))=S(U(\rho'))$ равносильно тому, что одна из подстановок σ_ρ и $\sigma_{\rho'}$, графики которых образуют отношения ρ и ρ' соответственно, являются степенью другой.*

§ 9. Семейства отношений $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$, $V(k,\tau)$. Доказательство теорем 1.4—1.7

Пусть $k\geqslant 2$ и $\tau\geqslant 2$. Пусть $R\in G_2(k,\tau)\cup N_1(k,\tau)\cup L_1(k,\tau)$. Очевидно, что тогда для некоторых h ($h\geqslant 1$) и t ($2\leqslant t\leqslant\tau$) выполнено $R\subset B_k(t,h)$.

Определение. Пусть $t\geqslant 2$, $h\geqslant 1$, $R\subseteq B_k(t,h)$, $a\in E_k^{t-1}$. Через $\rho_R(a)$ обозначим отношение — подмножество множества $E_k(h)$, которое определим следующим образом: набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$ элементов из E_k принадлежит $\rho_R(a)$ тогда и только тогда, когда в R существует набор $(a_1,\ldots,a_h)$ такой, что для любого i $(1\leqslant i\leqslant h)$ $\pi(a,a_i)=0$ и $a_i(t)=\alpha_i$.

Очевидно, для того, чтобы полностью определить отношение $R\subseteq\subseteq B_k(t,h)$ достаточно для любого $a\in E_k^{t-1}$ определить отношение $\rho_R(a)$.

Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 2$, $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная д.функция из P_k^τ, $t\in\{2,\ldots,\tau\}$, $\mathfrak{A}=((a_1),\ldots,(a_n))$, $a_i\in E_k^{t-1}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Через $F_{[f,\mathfrak{A}]}(x_1,\ldots,x_n)$ обозначим функцию k-значной логики, реализуемую в состоянии, в которое переходит вычисляющий д.функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ автомат под действием набора слов $(a_1,\ldots,a_n)$.

Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 2$, $t\in\{2,\ldots,\tau\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное подмножество множества P_k^τ, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ. Пусть $n\geqslant 1$, $\mathfrak{A}=((a_1),\ldots,(a_n))$, $a_i\in E_k^{t-1}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $a\in E_k^{t-1}$, $((a))^n=(\underbrace{(a),\ldots,(a)}_{n})$, $b\in E_k^{t-1}$. Будем считать тогда, что
$$M[\mathfrak{M},\mathfrak{A}/a]=\bigcup\{F_{[f,\mathfrak{A}]}(x_1,\ldots,x_n)\},$$
где объединение берется по всем д.функциям $f(x_1,\ldots,x_n)$ из $\mathfrak{M}$ таким, что $f(a_1,\ldots,a_n)=a$,
$$M[\mathfrak{M},a/b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}M[\mathfrak{M},((a))^n/b].$$

Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{M}$ — замкнутое множество, для любого

$a \in E_k^{t-1}$ множество $M[\mathfrak{M}, a/a]$ также замкнуто в P_k.

Определение. Пусть $k \geqslant 2, \tau \geqslant 2, t \in \{2, \ldots, \tau\}$, $\mathfrak{M}$ — произвольное подмножество множества P_k^τ, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ. Пусть $b \in E_k^{t-1}, h \geqslant 1, \rho \subseteq E_k(h)$. Отношение $R \subseteq B_k(t, h)$ назовем $(\mathfrak{M}, b, \rho)$- отношением, если имеет место следующее: для любого $a \in E_k^{t-1}$ набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ принадлежит $\rho_R(a)$ тогда и только тогда, когда существует функция k-значной логики $F(x_1, \ldots, x_n)$ из $M[\mathfrak{M}, b/a]$ и наборы $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_h^1), \ldots, (\alpha_1^n, \ldots, \alpha_h^n)$ принадлежащие ρ, такие, что $\alpha_1 = F(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^n), \ldots, \alpha_h = F(\alpha_h^1, \ldots, \alpha_h^n)$.

Лемма 9.1. *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 2$, $t \in \{2, \ldots, \tau\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное подмножество множества P_k^τ, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ. Пусть $b \in E_k^{t-1}$, $h \geqslant 1$, $\rho \subseteq E_k(h)$ и R — $(\mathfrak{M}, b, \rho)$-отношение. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq U(R)$; при этом, если $\mathfrak{M}$ содержит д.функцию $e(x) \equiv x$, $M[\mathfrak{M}, b/b] \subseteq U(\rho)$, $U(\rho) \neq P_k$, то $\rho_R(b) = \rho$, а множество $U(R)$ не является эквивалентным P_k^τ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = ((a_1), \ldots, (a_m))$ — произвольный набор элементов из $E_k^{t-1}, a \in E_k^{t-1}$. Заметим, что для любой д.функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{M}$ такой, что $f(a_1, \ldots, a_n) = a$, функция $F_{[f,\mathfrak{A}]}(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит множеству $M[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}/a]$. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция k-значной логики из $M[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}/a]$. Очевидно, для доказательства леммы достаточно показать, что для любых наборов $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_h^1), \ldots, (\alpha_1^n, \ldots, \alpha_h^n)$, принадлежащих отношениям $\rho_R(a_1), \ldots, \rho_R(a_n)$ соответственно, набор $(F(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^n), \ldots, F(\alpha_h^1, \ldots, \alpha_h^n))$ принадлежит отношению $\rho_R(a)$. В силу определения $(\mathfrak{M}, b, \rho)$-отношения для любого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ существует функция $F_i(x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i) \in M[\mathfrak{M}, b/a_i]$ и совокупность наборов $(\beta_{1i}^1, \ldots, \beta_{hi}^1), \ldots, (\beta_{1i}^{mi}, \ldots, \beta_{hi}^{mi})$ из ρ такие, что $F_i(\beta_{1i}^1, \ldots, \beta_{1i}^{mi}) = \alpha_1^i, \ldots, F_i(\beta_{1i}^1, \ldots, \beta_{hi}^{mi}) = \alpha_h^i$. Рассмотрим функцию $\widetilde{F}(x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_{m_n}^n) = F(F_1(x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1), \ldots, F_n(x_1^n, \ldots, x_{m_n}^n))$. Очевидно, эта функция принадлежит множеству $M[\mathfrak{M}, b/a]$, причем

$$F(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^n) = \widetilde{F}(\beta_{11}^1, \ldots, \beta_{11}^{m_1}, \beta_{12}^1, \ldots, \beta_{12}^{m_2}, \ldots, \beta_{1n}^1, \ldots, \beta_{1n}^{m_n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(\alpha_h^1, \ldots, \alpha_h^n) = \widetilde{F}(\beta_{h1}^1, \ldots, \beta_{h1}^{m_1}, \beta_{h2}^1, \ldots, \beta_{h2}^{m_2}, \ldots, \beta_{hn}^1, \ldots, \beta_{hn}^{m_n}).$$

Отсюда следует, что набор $(F(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^n), \ldots, F(\alpha_h^1, \ldots, \alpha_h^n))$ принадлежит отношению $\rho_R(a)$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq U(R)$. Пусть множество $\mathfrak{M}$ содержит д.функцию $e(x) \equiv x$, $M[\mathfrak{M}, b/b] \subseteq U(\rho)$, $U(\rho) \neq P_k$. Очевидно, что тогда $\rho_R(b) = \rho$, $U(R) \neq P_k^\tau$. Лемма доказана.

Лемма 9.2. *Пусть $k \geqslant 2, \tau \geqslant 2, t \in \{2, \ldots, \tau - 1\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное S-множество, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ. Пусть существует $b \in E_k^{t-1}$, такое, что для любого $\rho \in Z(k,1) \cup D(k,1) \cup N(k,1) \cup I(k,1) \cup L(k,1)$ $M[\mathfrak{M}, b/b] \nsubseteq U(\rho)$. Тогда для любого $a \in E_k^{t-1}$ замыкание множества $M[\mathfrak{M}, a/a]$ совпадает с P_k.*

Доказательство. Из условий леммы и теоремы 8.3. следует, что для любой функции k-значной логики $F(x_1, \ldots, x_n)$ в замыкании множества $\mathfrak{M}$ содержится д.функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что функция $F_{[f,((b))^n/b]}(x_1, \ldots, x_n)$ совпадает с $F(x_1, \ldots, x_n)$. Нетрудно видеть тогда, используя утверждение теоремы 5.2., что для любого $a \in E_k^{t-1}$ замыкание множества $M[\mathfrak{M}, a/a]$ совпадает с P_k. Лемма доказана.

Лемма 9.3. *Пусть $k \geqslant 2, \tau \geqslant 2$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное S-множество $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ. Пусть $M[\mathfrak{M}, b/b] \subseteq U(\rho)$ для некоторых $b \in E_k^{t-1}$ и $\rho \in Z(k,1)$. Тогда существует отношение $\widetilde{R} \in Z(k, \tau)$ такое, что $\mathfrak{M} \subseteq U(\widetilde{R})$.*

Доказательство. Рассмотрим $(\mathfrak{M}, b, \rho)$-отношение R. В силу леммы 9.1 $\mathfrak{M} \subseteq U(R), U(R) \neq P_k^\tau$. Так как $\mathfrak{M}$ S-множество, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ, то как нетрудно видеть, для любого $a \in E_k^{t-1}$ $\rho_R(a) \subset E_k$. Пусть $\widetilde{R} = R$. Очевидно, $\mathfrak{M} \subseteq U(\widetilde{R})$.

Лемма 9.4. *Пусть $k \geqslant 3$, $\tau \geqslant 2$, $t \in \{2, \ldots, \tau\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное S-множество, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ и содержащее д.функцию $e(x) \equiv x$. Пусть $\mathfrak{M} \nsubseteq U(R')$ для любого R' из $Z(k, \tau)$. Пусть существуют $b \in E_k^{t-1}$ и $\rho \in D(k, 1)$ такие, что $M[\mathfrak{M}, b/b] \subseteq U(\rho)$. Тогда существует отношение $\widetilde{R}$ из $D(k, \tau)$ такое, что $\mathfrak{M} \subseteq U(\widetilde{R})$.*

Доказательство. Пусть $\rho \subset E_k(2)$, ρ — рефлексивное и симметричное отношение. Для любого $A \in E_k(2)$, $A = (\alpha_1, \alpha_2)$, определим множество $C(A) \subseteq E_k$. Элемент α из E_k принадлежит $C(A)$ лишь в том случае, когда наборы $(\alpha, \alpha_1), (\alpha, \alpha_2)$ принадлежат отношению ρ. Ясно, что $C(A) \neq \varnothing$, если $A \in \rho$. Пусть $C(A) = \varnothing$ для любого $A \notin \rho$. Пусть $(\alpha, \alpha_1') \in \rho$ и $(\alpha, \alpha_2') \in \rho$. Тогда, очевидно, $(\alpha_1', \alpha_2') \in \rho$. Отсюда следует, что в данном случае отношение ρ транзитивно, т. е. является определенным на E_k отношением эквивалентности.

Пусть $R \in G_2(k, \tau), R \subset E_k^t(2), \rho_R(b) = \rho$. Пусть существуют $a \in E_k^{t-1}, A \notin \rho_R(a)$ такие, что $C_R^a(A) \neq \varnothing$. Рассмотрим отношение R', которое зададим следующим образом. Пусть $a \in E_k^{t-1}, (a_1, a_2)$ — произвольный набор из $E_k^t(2)$ такой, что $\pi(a, a_1) = \pi(a, a_2) = 0$. Набор (a_1, a_2) принадлежит отношению R' тогда и только тогда, когда либо $(a_1(t), a_2(t)) \in \rho_R(a)$, либо $(a_1(t), a_2(t)) \notin \rho_R(a)$, но $C_R^a((a_1(t), a_2(t)) \neq \varnothing$. Заметим, что любой набор (b_1, b_2) такой, что $\pi(b, b_1) = \pi(b, b_2) = 0$, не принадлежащий отношению R, не принадлежит и отношению R'. Нетрудно убедиться в том, что $U(R) \subseteq U(R'), R \subset R', A \in \rho_{R'}(a), \rho_{R'}(b) = \rho, U(R') \neq P_k^\tau$.

Пусть R_1 — $(\mathfrak{M}, b, \rho)$-отношение. В силу леммы 9.1, $\mathfrak{M} \subseteq U(R_1)$, $U(R_1) \neq P_k^\tau$, $\rho_{R_1}(b) = \rho$. Если существуют $a \in E_k^{t-1}$, $A \notin \rho_{R_1}(a)$ такие, что $C_{R_1}^a(A) \neq \varnothing$, то из вышеизложенного следует, что существует отношение R_2 такое, что $U(R_1) \subseteq U(R_2)$, $R_1 \subset R_2$, $\rho_{R_2}(b) = \rho$, $U(R_2) \neq P_k^\tau$. Продолжая этот процесс и учитывая конечность множества $E_k^t(2)$, получим некоторую последовательность отношений $R_1, R_2, \ldots, R_n$ такую, что $U(R_1) \subseteq U(R_2) \subseteq \ldots \subseteq U(R_n)$, $R_1 \subset R_2 \subset R_n$, $\rho_{R_1}(b) = \rho_{R_2}(b) = \ldots = \rho_{R_n}(b) = \rho$, $U(R_n) \neq P_k^\tau$; при этом $C_{R_n}^a(A) = \varnothing$ для любых $a \in E_k^{t-1}$, $A \notin \rho_{R_n}(a)$. Таким образом, для всякого $a \in E_k^{t-1}$ отношение $\rho_{R_n}(a)$ является определенным на E_k отношением эквивалентности, причем $\rho_R(b) = \rho$, т. е. $\rho_{R_n}(b) \in D(k, 1)$. Так как $U(R_n)$ содержит S-множество, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ, то для любого $a \in E_k^{t-1}$ выполнено $\rho_{R_n}(a) \neq E_k(2)$. Поэтому $R_n \in D(k, \tau)$ и в качестве отношения $\widetilde{R}$ можно взять отношение R_n. Лемма доказана.

Лемма 9.5. *Пусть $k \geqslant 2, \tau \geqslant 2, t \in \{2, \ldots, \tau\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное S-множество, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ и содержащее д.функцию $e(x) \equiv x$. Пусть для любого $R' \in Z(k, \tau) \cup D(k, \tau)$ $\mathfrak{M} \nsubseteq U(R)$. Пусть существуют $b \in E_k^{t-1}$ и $\rho \in N(k, 1)$ такие, что $M[\mathfrak{M}, b/b] \subseteq U(\rho)$. Тогда существует отношение $\widetilde{R} \in N(k, \tau)$ такое, что $\mathfrak{M} \subseteq U(\widetilde{R})$.*

Доказательство. Пусть R — $(\mathfrak{M}, b, \rho)$-отношение. Пусть $a \in E_k^{t-1}$, $a \neq b$. Рассмотрим отношение $\rho_R(a)$.

Пусть существуют $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ из E_k такие, что $\alpha_1 \neq \alpha_2, (\alpha, \alpha_1) \in \rho_R(a), (\alpha, \alpha_2) \in \rho_R(a)$. Покажем, что тогда должно существовать отношение $\widetilde{\rho} \in D(k, 1)$ такое, что $M[\mathfrak{M}, a/a] \subseteq U(\widetilde{\rho})$. В силу леммы 9.1 $\rho_R(b) = \rho$, а по условию леммы $\rho \in N(k, 1)$. Поэтому, как нетрудно видеть, $F(\underbrace{\alpha_1,\ldots,\alpha_1}_{n}) = F(\underbrace{\alpha_2,\ldots,\alpha_2}_{n})$ для любой функции $F(x_1,\ldots,x_n)$ из $M[U(R),a/b]$. Однако для любого $R'\in Z(k,\tau)$ $\mathfrak{M}\nsubseteq U(R')$, а множество $\mathfrak{M}$ $(t-1)$-эквивалентно P_k^τ. Поэтому для любого $\widetilde{\alpha}\in E_k$ в $M[U(R),a/a]$ существует функция $F'(x)$ такая, что $F'(\alpha_1)=F'(\alpha_2)=\widetilde{\alpha}$. Заметим, что $M[\mathfrak{M},a/a]\subseteq M[U(R),a/a]$. Отношение $\widetilde{\rho}$ определим следующим образом: набор (α_1',α_2') принадлежит $\widetilde{\rho}$ тогда и только тогда, когда для любой функции $F''(x)$ из $M[U(R),a/b]$ выполнено $F''(\alpha_1')=F''(\alpha_2')$. Из вышеизложенного следует, что $\widetilde{\rho}\neq\varnothing$. Очевидно, отношение $\widetilde{\rho}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Пусть $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция из $M[U(R),a/a]$ и $(\alpha_1^1,\alpha_2^1),\ldots,(\alpha_1^n,\alpha_2^n)$ — произвольное множество элементов, принадлежащих отношению $\widetilde{\rho}$. Рассмотрим последовательность наборов

$$(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^n),(\alpha_2^1,\alpha_1^2,\ldots,\alpha_1^n),\ldots,(\alpha_2^1,\ldots,\alpha_2^i,\alpha_1^{i+1},\ldots,\alpha_1^n),\ldots,(\alpha_2^1,\ldots,\alpha_2^n).$$

Пусть

$$\widetilde{F}(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\ldots,\alpha_1^n)=\beta_0,\quad \widetilde{F}(\alpha_2^1,\alpha_1^2,\ldots,\alpha_1^n)=\beta_1,\quad\ldots$$
$$\ldots,\quad \widetilde{F}(\alpha_2^1,\ldots,\alpha_2^i,\alpha_1^{i+1},\ldots,\alpha_1^n)=\beta_i,\quad\ldots,\quad \widetilde{F}(\alpha_2^1,\alpha_2^2,\ldots,\alpha_2^n)=\beta_n.$$

Пусть $i\in\{1,\ldots,n\}$. Пусть $F_1(x),\ldots,F_{i-1}(x),F_{i+1}(x),\ldots,F_n(x)$ — функции из $M[U(R),a/a]$ такие, что $F_1(\alpha_1^i)=F_1(\alpha_2^i)=\alpha_2^1,\ldots,F_{i-1}(\alpha_1^i)=F_{i-1}(\alpha_2^i)=\alpha_2^{i-1}),F_{i+1}(\alpha_1^i)=F_{i+1}(\alpha_2^i)=\alpha_1^{i+1}),\ldots,F_n(\alpha_1^i)=F_n(\alpha_2^i)=\alpha_1^n)$. Рассмотрим функцию $H(x)=\widetilde{F}(F_1(x),\ldots,F_{i-1}(x),F_{i+1}(x),\ldots,F_n(x))$. Очевидно, $H(x)\in M[U(R),a/a]$. Легко видеть, что $H(\alpha_1^i)=\beta_{i-1}$, $H(\alpha_2^i)=\beta_i$. Предположим, что $(\beta_{i-1},\beta_i)\notin\widetilde{\rho}$. Тогда по определению отношения $\widetilde{\rho}$ в $M[U(R),a/b]$ должна существовать функция $H'(x)$ такая, что $H'(\beta_{i-1})\neq H'(\beta_i)$. Рассмотрим функцию $H''(x)=H'(H(x))$. Ясно, что $H''(x)\in M[U(R),a/b]$ и $H''(\alpha_1^i)\neq H''(\alpha_2^i)$. Однако это противоречит тому, что $(\alpha_1^i,\alpha_2^i)\in\widetilde{\rho}$. Поэтому для любого i $(1\leqslant i\leqslant n)$ $(\beta_{i-1},\beta_i)\in\widetilde{\rho}$. Но тогда из транзитивности отношения $\widetilde{\rho}$ следует, что $(\beta_0,\beta_n)\in\widetilde{\rho}$. В силу произвольности выбора функции $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n)$ из $M[U(R),a/a]$ и множества $(\alpha_1^1,\alpha_2^1),\ldots,(\alpha_1^n,\alpha_2^n)$ элементов из $\widetilde{\rho}$ это означает, что $M[\mathfrak{M},a/a]\subseteq U(\widetilde{\rho})$. Отсюда следует, что для некоторого отношения $R'\in D(k,\tau)$ (лемма 9.4) $\mathfrak{M}\subseteq U(R')$, что противоречит условию доказываемой леммы.

Таким образом, для любого $a\in E_k^{t-1}$ отношение $\rho_R(a)$ удовлетворяет следующему свойству: для всякого $\alpha\in E_k$ существует единственное $\alpha'\in E_k$ такое, что набор (α,α') принадлежит отношению $\widetilde{\rho}$. Это означает, что $\rho_R(a)$ является графиком некоторой подстановки (перестановки), определенной на множестве E_k.

Пусть $a_1\in E_k^{t-1}$, $a_2\in E_k^{t-1}$, $(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_{p_1}^1)$ — произвольный цикл подстановки, график которой совпадает с $\rho_R(a_1)$, и $(\alpha_1^2,\ldots,\alpha_{p_2}^2)$ — произвольный цикл подстановки, график которой совпадает с $\rho_R(a_2)$. Заметим, что a_1 может совпадать с a_2. Пусть $F_1(x)\in M[U(R),a_1/a_2]$, $F_2(x)\in M[U(R),a_2/a_1]$, причем $F_1(\alpha_1^1)=\alpha_1^2$, $F_2(\alpha_1^2)=\alpha_1^1$. Очевидно, что тогда $F_1(\alpha_2^1)=\alpha_2^2$ и т. д., $F_2(\alpha_2^2)=\alpha_2^1$ и т. д. Отсюда легко следует, что существует число $\widetilde{p}\geqslant 2$ такое, что для всякого $a\in E_k^{t-1}$ подстановка, определяемая графиком $\rho_R(a)$, разлагается в произведенеие циклов, каждый из которых имеет длину $\widetilde{p}$. По условию леммы $\rho_R(b)=\rho$, $\rho\in N(k,1)$ и для некоторого простого числа p подстановка, графиком которой является $\rho_R(b)$, разлагается в произведение циклов длины p. Таким образом, $\widetilde{p}=p$ и $R\in N(k,\tau)$. Лемма доказана.

Лемма 9.6. *Пусть $k\geqslant 5, \tau\geqslant 2, t\in\{2,\ldots,\tau\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное S-множество, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ и содержащее д.функцию $e(x)\equiv x$. Пусть для любого $R'\in Z(k,\tau)\cup D(k,\tau)\cup N(k,\tau)$ $\mathfrak{M}\nsubseteq U(R')$. Пусть существуют $b\in E_k^{t-1}$ и $\rho\in I(k,1)$ такие, что $M[\mathfrak{M},b/b]\subseteq U(\rho)$. Тогда существует отношение $\widetilde{R}$ из $I(k,\tau)$ такое, что $\mathfrak{M}\subseteq U(\widetilde{R})$.*

Доказательство. Отношение ρ принадлежит семейству $I(k,1)$. Из теоремы 8.3 следует, что существуют $h\geqslant 5$, $m\geqslant 1$, отношение $\widetilde{\rho}\in I_3(k,1)$ такие, что $h^m=k$, $S(U(\widetilde{\rho}))=S(U(\rho))$. Будем считать, что отношение $\widetilde{\rho}$ является пересечением h-элементарных отношений $\rho_1(b),\ldots,\rho_m(b)$, которые определяются соответственно с помощью разбиений $\lambda_1(b),\ldots,\lambda_m(b)$ множества E_k (§§6—8). Рассмотрим $(\mathfrak{M},b,\widetilde{\rho})$-отношение R. Ясно, что $\rho_{\bar{R}}(b)=\widetilde{\rho}$. Пусть $a\in E_k^{t-1}$, $a\neq b$, $F(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная S-функция из $M[\mathfrak{M},a/b]$. Очевидно, эта функция является $\lambda_1(b)$-существенной и т. д., $\lambda_m(b)$-существенной. В силу следствия 1 из леммы 7.2 и следствия 2 из лемм 7.2, 7.8 для всякого i $(1\leqslant i\leqslant m)$ существует единственная $\lambda_i(b)$-существенная переменная функции $F(x_1,\ldots,x_n)$ и разбиение $\lambda_i(a)$ множества E_k на h подмножеств такие, что любой набор $(\alpha_1',\ldots,\alpha_h')$ из $E_k(h)$ не принадлежит отношению $\rho_{\bar{R}}(a)$, если $\alpha_1',\ldots,\alpha_h'$ принадлежат попарно различным подмножествам разбиения $\lambda_i(a)$. Пусть $\rho_1(a),\ldots,\rho_n(a)$ — h-элементарные отношения, соответствующие разбиениям $\lambda_1(a),\ldots,\lambda_m(a)$ (§§6—8). Пусть $\widetilde{\rho}_a=\cap_{i=1}^m\rho_i(a)$. Очевидно, $\widetilde{\rho}(a)\in I_3(k,1), \rho_{\bar{R}}(a)\subseteq\widetilde{\rho}(a)$. Покажем, что $\rho_{\bar{R}}(a)=\widetilde{\rho}(a)$. Пусть $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_l)$ — произвольная S-функция из $M[\mathfrak{M},b/a]$. Очевидно, для любого i $(1\leqslant i\leqslant m)$ существует единственная $\lambda_i(a)$-существенная переменная l_i $(1\leqslant l_i\leqslant l)$ функции $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_l)$ (лемма 7.2). Кроме того, в силу лемм 7.2, 7.3 существуют разбиения $\widetilde{\lambda}_1(b),\ldots,\widetilde{\lambda}_m(b)$ множества E_k на h подмножеств такие, что имеет место следующее.

Пусть $(\beta_1^1,\ldots,\beta_l^1)$ и $(\beta_1^2,\ldots,\beta_l^2)$ — произвольные наборы из $E_k(l)$; пусть $\widetilde{F}(\beta_1^1,\ldots,\beta_l^1)=\alpha_1$ и $\widetilde{F}(\beta_1^2,\ldots,\beta_l^2)=\alpha_2$. Тогда для любого i $(1\leqslant i\leqslant m)$ α_1 и α_2 принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения $\lambda_i(a)$ тогда и только тогда, когда $\beta_{l_i}^1$ и $\beta_{l_i}^2$ принадлежат одному и тому же подмножеству разбиения $\widetilde{\lambda}_i(b)$.

Так как $h^m=k$, то отсюда следует, что функция $\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_l)$ существенно зависит лишь от переменных $x_{l_1},\ldots,x_{l_m}$, среди которых, вообще говоря, могут быть совпадающие. Вместе с тем, в силу леммы 7.3 множество разбиений $\{\widetilde{\lambda}_1(b),\ldots,\widetilde{\lambda}_m(b)\}$ совпадает с множеством разбиений $\{\lambda_1(b),\ldots,\lambda_m(b)\}$. Пусть $(\beta_1^3,\ldots,\beta_l^3),\ldots,(\beta_1^h,\ldots,\beta_l^h)$ — произвольные наборы из $E_k(l)$, $\widetilde{F}(\beta_1^3,\ldots,\beta_l^3)=\alpha_3$, $\ldots$, $\widetilde{F}(\beta_1^h,\ldots,\beta_l^h)=\alpha_h$. Рассмотрим набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$. Очевидно, если набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$ не принадлежит отношению $\rho_{\bar{R}}(a)$, то существует i $(1\leqslant i\leqslant m)$ такое, что набор $(\beta_{l_i}^1,\ldots,\beta_{l_i}^h)$ не принадлежит отношению $\widetilde{\rho}$. Следовательно, набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_h)$ также не принадлежит отношению $\widetilde{\rho}_a$. Поэтому $\rho_{\bar{R}}(a)=\widetilde{\rho}_a$.

Пусть $a_1\in E_k^{t-1}, a_2\in E_k^{t-1}$. Нетрудно видеть, что существует подстановка (перестановка) σ, определенная на множестве E_k и зависящая от a_1 и a_2, такая, что произвольный набор $(\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_h)$ из $E_k(h)$ принадлежит отношению $\rho_{\bar{R}}(a_2)$ тогда и только тогда, когда набор $(\sigma(\widetilde{\alpha}_1),\ldots,\sigma(\widetilde{\alpha}_h))$ принадлежит отношению $\rho_{\bar{R}}(a_1)$.

В силу леммы 8.3 для любого отношения ρ_1 из семейства $I_3(k,1)$ существует отношение ρ_2 из семейства $I(k,1)$ такое, что $S(U(\rho_2))=S(U(\rho_1))$.

Отсюда следует, что в семействе $I(k,\tau)$ существует отношение $\widetilde{R}$ такое, что $S(U(\widetilde{R}))=S(U(R))$. Таким образом, $\mathfrak{M}\subseteq U(R)$, $\mathfrak{M}\subseteq U(\widetilde{R})$. Лемма доказана.

Л е м м а 9.7. *Пусть $k\geqslant 2$ и существуют простое число $p\geqslant 2$, $m\geqslant 1$ такие, что $p^m=k$. Пусть $\tau\geqslant 2$, $t\in\{2,\dots,\tau\}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное S-множество, $(t-1)$-эквивалентное P_k^τ. Пусть для любых $a\in E_k^{t-1}$, $\rho'\in Z(k,1)\cup D(k,1)\cup N(k,1)\cup I(k,1)$ имеет место $M[\mathfrak{M},a/a]\nsubseteq U(\rho')$. Пусть существуют $b\in E_k^{t-1}$ и $\rho\in L(k,1)$ такие, что $M[\mathfrak{M},b/b]\subseteq U(\rho)$. Тогда существует отношение $\widetilde{R}$ из $L(k,\tau)$ такое, что $\mathfrak{M}\subseteq U(\widetilde{R})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть R — $(\mathfrak{M},b,\rho)$-отношение. Пусть $a\in E_k^{t-1}$. Пусть $\alpha_1\in E_k,\alpha_2\in E_k$. Если $F_1(\alpha_1)=F_1(\alpha_2)$ для любой функции $F(x)$ из $M[U(R),b/a]$, то так же, как и при доказательстве леммы 9.5, можно показать, что $M[U(R),b/b]$ принадлежит классу сохранения некоторого отношения из семейства $D(k,1)$. Однако это противоречит условию леммы. Поэтому будем считать, что функция $F_1(x)$ из $M[U(R),b/a]$ такова, что $F_1(\alpha_1)\neq F_2(\alpha_2)$. Пусть $F_1(\alpha_1)=\beta_1$, $F_1(\alpha_2)=\beta_2$. Нетрудно видеть, что и в $M[U(R),a/b]$ существует функция $F_2(x)$ такая, что $F_2(\beta_1)\neq F_2(\beta_2)$. Пусть $F(x)=F_2(F_1(x))$. Ясно, что $F(x)\in M[U(R),b/b]$; при этом функция $F(x)$ отлична от тождественной константы. Заметим, что $F(x)\in U(\rho)$, где $\rho\in L(k,1)$. Поэтому (лемма 8.3) функция $F(x)$ не выпускает ни одного значения из множества E_k. Отсюда следует, что и функция $F_1(x)$ не выпускает ни одного значения, т. е. совпадает с некоторой подстановкой σ, определенной на множестве E_k. Пусть $\rho_a=\rho^\sigma$ — отношение σ-двойственное к отношению ρ (§6). Очевидно, $\rho_a\in L(k,1)$, $\rho_a\subseteq\rho_R(a)$. Предположим, что $\rho_a\subset\rho_R(a)$, т. е. в $\rho_R(a)$ существует набор $(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3,\widetilde{\alpha}_4)$, не принадлежащий ρ_a. Однако в ρ_a для некоторого $\widetilde{\alpha}'_4\in E_k$ существует набор $(\widetilde{\alpha}_1,\ \widetilde{\alpha}_2,\ \widetilde{\alpha}_3,\ \widetilde{\alpha}'_4)$. Ясно, что в этом случае для любой функции $F'_2(x)$ из $M[U(R),a/b]$ должно выполняться равенство $F'_2(\widetilde{\alpha}_4)=F'_2(\widetilde{\alpha}'_4)$. Как замечено выше, этого не может быть. Поэтому $\rho_R(a)=\rho_a$ и, таким образом, существует отношение $\widetilde{R}$ из $L(k,\tau)$ такое, что $\mathfrak{M}\subseteq U(\widetilde{R})$. Лемма доказана.

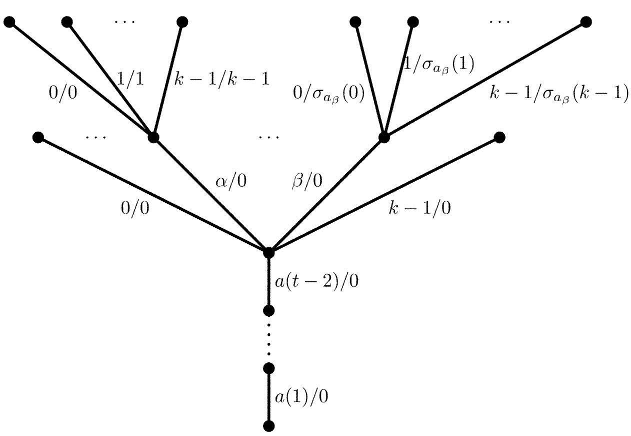

Рис. 6

Л е м м а 9.8. *Пусть $k\geqslant 2$, $\tau\geqslant 2$, $t\in\{2,\dots,\tau\}$. Пусть $R\in V_1(k,\tau)$, $R\in\widetilde{\Delta}_t$ (§4). Пусть $U(R)\nsubseteq U(R')$ для любого $R'\in G_1(k,\tau)\cup N_1(k,\tau)\cup L_1(k,\tau)$. Тогда отношение R принадлежит семейству $V(k,\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения семейства отношений $V_1(k,\tau)$ легко следует, что множество $U(R)$ $(t-1)$-эквивалентно P_k^τ. Пусть $a\in E_k^t$, $\alpha\in E_k$, a_α — элемент из E_k^t такой, что $\pi(a,a_\alpha)\leqslant 2$, $a_\alpha(t-1)=\alpha$. Пусть $T_\alpha=(\underbrace{t-1,\dots,t-1}_{\alpha}\underbrace{t,\dots,t}_{k}\underbrace{t-1,\dots,t-1}_{k-\alpha-1})$. Пусть $A_\alpha\in E_k^T$, $A_\alpha=(a'_0,\dots$ $\dots,a'_{\alpha-1},\widetilde{a}_0,\dots,\widetilde{a}_{k-1},a'_{\alpha+1},\dots,a'_{k-1})$, где для любых β,γ $(0\leqslant\beta,\gamma\leqslant k-1)$, $\beta\neq\alpha$, $\pi(a'_\beta,a_\alpha)=1$, $a'_\beta(t-1)=\beta$, $\pi(\widetilde{a}_\gamma,a_\alpha)\leqslant 1$, $\widetilde{a}_\gamma(t)=\gamma$ (рис. 6). Пусть набор слов B_α из E_k^T таков, что $B_\alpha = (\underbrace{b, \ldots, b}_{\alpha}\underbrace{b_0, \ldots, b_{k-1}}_{k}\underbrace{b, \ldots, b}_{k-\alpha-1})$, где для любого t' $(1 \leqslant t' \leqslant t-1)$ $b(t') = 0$, $b_0(t') = \ldots = b_{k-1}(t') = 0$, $b_0(t) = 0$, $\ldots$, $b_{k-1}(t) = k-1$. Заметим, что $B_\alpha \prec A_\alpha$. Покажем, что в $U(R)$ существует д.функция $f_{a_\alpha}(x)$ такая, что $f_{a_\alpha}(A_\alpha) = B_\alpha$. Действительно, пусть $f(A_\alpha) \neq B_\alpha$ для любой д.функции $f(x)$ из $U(R)$. Очевидно, в $U(R)$ содержатся все константные д.функции. Кроме того, в силу $(t-1)$-эквивалентности $U(R)$ и P_k^τ в $U(R)$ содержится д.функция $\widetilde{f}(x) = y$ такая, что для всякого t' $(1 \leqslant t' \leqslant t-1)$ $y(t') = 0$. Поэтому, если $f_{a_\alpha}(x) \notin U(R)$, то должно существовать отношение $R' \in G(k,\tau) \cup N(k,\tau) \cup L(k,\tau)$ такое, что $U(R) \subseteq U(R')$ (теорема 4.1, утверждения 1—14). Однако это противоречит условиям леммы. Таким образом, можно считать, что $f_{(a)\alpha}(x) \in U(R)$ для любых $a \in E_k^t$, $\alpha \in E_k$. Но тогда в силу произвольности выбора элемента a из E_k^t и определения семейства отношений $V_1(k,\tau)$ (§4) имеет место

Свойство А отношения R: если $(a_1, a_2) \in R$ и набор (a_1', a_2') из $\widetilde{\Delta}_t$ таков, что либо $\pi(a_1', a_1) = 0$, но $\pi(a_2', a_2) = 1$, либо $\pi(a_2', a_2) = 0$, но $\pi(a_1', a_2) = 1$, то набор (a_1', a_2') не принадлежит R.

Пусть $\beta \in E_k$, a_β — элемент из E_k^t такой, что $\pi(a, a_\beta) \leqslant 2$, $a_\beta(t-1) = \beta$. Пусть $\widetilde{a} \in E_k^{t-1}$, $\pi(\widetilde{a}, a_\beta) = 0$. Исходя из свойства А отношения R_1, легко показать, что функция k-значной логики $F_{[f_{a_\alpha}, ((\widetilde{a}))]}(x)$ не выпускает ни одного значения, т. е. совпадает с некоторой подстановкой $\sigma_{a_\beta}(x)$, определенной на множестве E_k; при этом $\sigma_{a_\alpha}(x)$ — тождественная подстановка. Нетрудно убедиться в том, что произвольный набор (a_1, a_2) из $\widetilde{\Delta}_t$ такой, что $\pi(a_1, a) \leqslant 2$, $\pi(a_2, a) \leqslant 2$ принадлежит отношению R тогда и только тогда, когда $\sigma_{a_1}(a_1(t)) = \sigma_{a_2}(a_2(t))$. Отсюда следует, что $R \in V(k,\tau)$. Лемма доказана.

Доказательство теорем 1.4— 1.7.

Пусть $k \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Если $\tau = 1$, то справедливость утверждений теорем 1.4—1.7 прямо следует из теорем 8.1 и 8.5.

Пусть $\tau \geqslant 2$, $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$ — набор положительных целых чисел такой, что $\max\{t_1, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$. Пусть $R \subset E_k^T$. Пусть замыкание множества $S(U(R))$ не совпадает с P_k^τ. Учитывая S-критериальность множества классов сохранения S-тупиковых отношений и утверждение теоремы 5.1, не ограничивая общности, будем считать, что R — S-тупиковое отношение, $R \in G_2(k,\tau) \cup N_1(k,\tau) \cup L_1(k,\tau) \cup V_1(k,\tau)$, причем $R \in B_k(t, h')$ для некоторых $t \in \{2, \ldots, \tau\}$ и $h' \geqslant 1$ (если $t = 1$, то подмножество P_k^τ, состоящее из всех S-функций, сохраняющих отношение $\rho \in W(k, 1)$, образует S-предполный класс в P_k^τ (§8)).

Пусть $b \in E_k^{t-1}$. Рассмотрим возникающие случаи.

а) Пусть существует $\rho \in W(k,1)$ (§§1, 4) такое, что $M[S(U(R)), b/b] \subseteq \subseteq U(\rho)$. Тогда в силу лемм 9.3—9.7 существует отношение $\widetilde{R}$, принадлежащее объединению семейств $Z(k,\tau), D(k,\tau), N(k,\tau), I(k,\tau), L(k,\tau)$ такое, что $U(R) \subseteq U(\widetilde{R})$.

б) Пусть $M[S(U(R)), b/b] \nsubseteq U(\rho)$ для любого $\rho \in W(k,1)$. Тогда (лемма 9.2) для любого $a \in E_k^{t-1}$ замыкание множества $M[S(U(R)), a/a]$ совпадает с P_k. Пусть $S(U(R)) \nsubseteq U(R')$ для любого $R' \in V_1(k,\tau)$. Из теоремы 5.1 следует, что тогда множество $S(U(R))$ образует полную систему в P_k^τ, что противоречит S-тупиковости отношения R. Поэтому с учетом утверждения леммы 9.8 в случае б) существует отношение $\widetilde{R}$ из $V(k,\tau)$ такое, что $U(R) \subseteq U(\widetilde{R})$.

Таким образом, множество классов сохранения отношений, принадлежащих $W(k,\tau)$, образует S-критериальную систему в P_k^τ.

Пусть $R\in W(k,\tau)$, R — отношение арности h $(1\leqslant h\leqslant 4)$, $R\subset B_k(t,h)$. Пусть $a\in E_k^{t-1}$, $S(U(\rho(a)))\subseteq U(\rho)$, где $\rho\in W(k,\tau)$. Пусть $F(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция k-значной логики, не выпускающая ни одного значения и принадлежащая множеству $S(U(\rho))$. Рассмотрим д.функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, которая определяется следующим образом. Пусть $\mathfrak{A}=(a_1,\ldots,a_n)$ — произвольный набор из $E_k^{t-1}(n)$. Пусть $\mathfrak{A}$ совпадает с $(\underbrace{a,\ldots,a}_{n})$. Тогда $f(\underbrace{a,\ldots,a}_{n})=a$ и $F_{[f,a/a]}(x_1,\ldots,x_n)$ совпадает с $F(x_1,\ldots,x_n)$. Пусть набор $(a_1,\ldots,a_n)$ отличен от набора $(\underbrace{a,\ldots,a}_{n})$ и для некоторого i $(1\leqslant i\leqslant n)$ $a_i\neq a$ и если $i>1$, то $a_1=\ldots=a_{i-1}=a$. Тогда $f(a_1,\ldots,a_n)=a_i$ и $F_{[f,a/a_i]}$ совпадает с x_i. Нетрудно видеть, что в $U(R)$ существуют S-функции с данными свойствами; при этом $M[S(U(R)),a/a]=S(U(\rho))$. Отсюда с учетом утверждений теоремы 8.13 и теоремы 1.3 следует, что для любых отношений R_1 и R_2 таких, что $R_1\in Z(k,\tau)\cup D(k,\tau)\cup N(k,\tau)\cup I(k,\tau)\cup L(k,\tau)$, $R_2\in W(k,\tau)$, $S(U(R_1))\neq S(U(R_2))$, если $R_1\neq R_2$. Если же $R_1\in V(k,\tau)$, $R_2\in V(k,\tau)$, то неравенство $S(U(R_1))\neq S(U(R_2))$ в случае, когда $R_1\neq R_2$ легко усматривается из определения семейства отношений $V(k,\tau)$. Таким образом, для любого $R\in W(k,\tau)$ множество $S(U(R))$ образует S-предполный класс в P_k^τ, причем для различных отношений из $W(k,\tau)$ эти предполные классы различны. Из вышесказанного следует справедливость утверждений теорем 1.4–1.7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б у е в и ч В. А. О τ-полноте в классе автоматных отображений // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 252, №5. — С. 221–224.
2. Б у е в и ч В. А. Условия А-полноты для конечных автоматов. Ч. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
3. Б у е в и ч В. А. Условия А-полноты для конечных автоматов. Ч. 2. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
4. Б у е в и ч В. А. О τ-полноте в классе детерминированных функций // Докл. РАН. — 1992. — Т. 326, №3. — С. 399–403.
5. Б у е в и ч В. А. Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики // Дискретная математика. — 1996 — Т. 8, вып. 4. — С. 11–36.
6. Б у е в и ч В. А. О τ-полноте систем, содержащих все одноместные детерминированные функции // Математические вопросы кибернетики. — Вып. 8. — М.: Наука. — 1999 — С. 231–254.
7. В а н д е р В а р д е н Б. Л. Современная алгебра. Ч. 1. — М.: Гостехиздат, 1947.
8. З а х а р о в а Е. Ю., К у д р я в ц е в В. Б., Я б л о н с к и й С. В. О предполных классах в k-значных логиках // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 136, №3. — С. 509–512.
9. К у д р я в ц е в В. Б. О свойствах S-систем функций k-значной логики // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. — 1973. — V. 9, №1/2. — P. 8–105.
10. К у д р я в ц е в В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
11. К у д р я в ц е в В. Б., А л ё ш и н С. В., П о д к о л з и н А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
12. Я б л о н с к и й С. В. Функциональные построения в k-значных логиках // Тр. МИАН СССР — 1958 — Т. 51. — С. 5–142.
13. Я б л о н с к и й С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
14. Я б л о н с к и й С. В., Г а в р и л о в Г. П., Н а б е б и н А. А. Предполные классы в многозначных логиках. — М.: Изд-во МЭИ, 1997.
15. R o s e n b e r g Y. La structure des fonctions de plusieure variables sur un ensemble fini // Compes Rendus Acad. Sci. Paris. — 1965. — P. 3817–3819.
16. R o s e n b e r g Y. Über die functionale Vollstandigkeit in den mehrwertigen Logiken // Praha, Rozpravi Češkoslovenska Academie Ved. — 1970. — V. 80, №4. — P. 3–93.

Поступило в редакцию 25 VIII 2006