

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

Вас.В.Сазонов, В.В.Сазонов

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ  
АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТА В ЗАДАЧАХ  
ИССЛЕДОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
СПУТНИКОВ *ФОТОН***

Москва - 2007

## Аннотация

Предложена новая математическая модель неуправляемого вращательно-го движения спутников *Фотон*. Модель основана на динамических уравнения Эйлера движения твердого тела и учитывает действие на спутник четырех внешних механических моментов: гравитационного, восстанавливающего аэродинамического, момента с постоянными компонентами в связанной со спутником системе координат и момента, возникающего при взаимодействии магнитного поля Земли с собственным магнитным моментом спутника. Для расчета аэродинамического момента использована специальная геометрическая модель внешней оболочки спутника. Детальный вид формул, задающих перечисленные моменты в уравнениях движения спутника, согласован с видом рассматриваемых движений. Тестирование модели выполнено посредством определения с ее помощью вращательного движения спутника *Фотон М-2* (находился на орбите 31.05 — 16.06.2005) по данным бортовых измерений напряженности магнитного поля Земли. Использование новой модели повысило точность определения движения.

**Vasily V. Sazonov, Victor V. Sazonov. Use of specified model of aerodynamic torque in investigation of spacecraft *Foton* attitude motion.** We develop a new model of attitude motion of spacecraft *Foton*. The model is based on Euler's dynamic equations of a rotational motion of a rigid body. It takes into account four external mechanical torques acting upon the spacecraft: a gravitational torque, an aerodynamic torque, a torque which has constant components in a spacecraft body fixed coordinate system, and a torque from the Earth magnetic field. We use the special geometric model of the spacecraft outer shell. The detailed form of the expressions that define the torques above is adjusted with the spacecraft motion concerned. The model was tested in the problem of reconstruction of the *Foton M-2* attitude motion by processing onboard measurements of the Earth magnetic field strength. This spacecraft was in orbit in the period 31.05 — 16.06.2005. The use of the new model resulted in some increase of the reconstruction accuracy.

**1. Математическая модель вращательного движения спутника**, предназначенная для обработки данных измерений бортовых датчиков спутников *Фотон*, состоит в следующем. Спутник считается твердым телом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс и соотношений, используемых при обработке данных измерений, вводятся четыре правые декартовы системы координат:

1. Жестко связанная со спутником приборная система координат  $O'y_1y_2y_3$ . Точка  $O'$  расположена на пересечении продольной оси спутника с плоскостью одного из шпангоутов приборного отсека (рис. 1). Ось  $O'y_1$  совпадает с продольной осью спутника и направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку. В этой системе интерпретируются данные измерений бортовых датчиков.

2. Система координат  $Ox_1x_2x_3$ , образованная главными центральными осями инерции спутника. Точка  $O$  — центр масс спутника, ось  $Ox_i$  составляет малый угол с осью  $O'y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек указываются в системе  $Ox_1x_2x_3$ .

3. Гринвичская система координат  $CY_1Y_2Y_3$ . Ее начало находится в центре Земли, плоскость  $CY_1Y_2$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $CY_1$  пересекает гринвичский меридиан, ось  $CY_3$  направлена в Северный полюс.

4. Квазиинерциальная система координат  $CZ_1Z_2Z_3$ . Ось  $CZ_2$  параллельна вектору мгновенного кинетического момента орбитального движения спутника, ось  $CZ_3$  лежит в плоскости  $CY_1Y_2$  и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты. Абсолютная величина угловой скорости системы  $CZ_1Z_2Z_3$  не превышает  $5^\circ/\text{сут}$ .

Матрицу перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к гринвичской системе обозначим  $\|g_{ij}\|_{i,j=1}^3$ , где  $g_{ij}$  — косинус угла между осями  $CY_i$  и  $Ox_j$ . Элементы этой матрицы будем выражать в функции углов  $\gamma_g$ ,  $\delta_g$  и  $\beta_g$  (ср. [1]), которые вводятся так, чтобы при совпадении точек  $O$  и  $C$  систему  $CY_1Y_2Y_3$  можно было перевести в систему  $Ox_1x_2x_3$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\delta_g + \pi/2$  вокруг оси  $CY_2$ , 2) на угол  $\beta_g$  вокруг новой оси  $CY_3$ , 3) на угол  $\gamma_g$  вокруг новой оси  $CY_1$ , совпадающей с осью  $Ox_1$ . Элементы матрицы  $\|g_{ij}\|$  выражаются через эти углы с помощью формул

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\sin \delta_g \cos \beta_g, & g_{21} &= \sin \beta_g, \\ g_{12} &= \cos \delta_g \sin \gamma_g + \sin \delta_g \sin \beta_g \cos \gamma_g, & g_{22} &= \cos \beta_g \cos \gamma_g, \\ g_{13} &= \cos \delta_g \cos \gamma_g - \sin \delta_g \sin \beta_g \sin \gamma_g, & g_{23} &= -\cos \beta_g \sin \gamma_g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{31} &= -\cos \delta_g \cos \beta_g, \\ g_{32} &= -\sin \delta_g \sin \gamma_g + \cos \delta_g \sin \beta_g \cos \gamma_g, \\ g_{33} &= -\sin \delta_g \cos \gamma_g - \cos \delta_g \sin \beta_g \sin \gamma_g. \end{aligned}$$

Матрицу перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к приборной системе координат

обозначим  $\| b_{ij} \|_{i,j=1}^3$ , где  $b_{ij}$  — косинус угла между осями  $O'y_i$  и  $Ox_j$ . Элементы этой матрицы выражаются в функции углов  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$  [2], на которые в случае совпадения точек  $O$  и  $O'$  надо повернуть приборную систему последовательно вокруг осей  $O'y_2$ ,  $O'y_3$  и  $O'y_1$ , чтобы перевести ее в систему  $Ox_1x_2x_3$ . Формулы, выражающие элементы  $b_{ij}$  в функции углов  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$ , получаются из предыдущих формул заменой  $g_{ij} \rightarrow b_{ij}$ ,  $\gamma_g \rightarrow \gamma_c$ ,  $\delta_g + \pi/2 \rightarrow \alpha_c$ ,  $\beta_g \rightarrow \beta_c$ . Введенные наборы углов используются в программах обработки данных измерений.

Направление оси  $Ox_1$  в системе  $CZ_1Z_2Z_3$  будем задавать углами  $\psi$  и  $\theta$  (ср. [3]). При совпадении точек  $O$  и  $C$  ось  $CZ_1$  может быть переведена в ось  $Ox_1$  двумя последовательными поворотами системы  $CZ_1Z_2Z_3$ : 1) на угол  $\psi$  вокруг оси  $CZ_3$ , 2) на угол  $\theta$  вокруг новой оси  $CZ_2$ . Орт оси  $Ox_1$  имеет в системе  $CZ_1Z_2Z_3$  компоненты  $(\cos \theta \cos \psi, \cos \theta \sin \psi, -\sin \theta)$ . Угол  $\Lambda$ , который эта ось образует с осью  $CZ_2$ , определяется соотношением  $\Lambda = \arccos(\cos \theta \sin \psi)$ . Углы  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\Lambda$  используются для иллюстрации движения спутника.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая — его движение относительно центра масс. Подсистема уравнений движения центра масс записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004 [4]. Решения этой подсистемы находились из условия наилучшей аппроксимации двухстрочных элементов орбиты *Фотона М-2* на отрезках времени длиной 3 — 4 сут (см. [5], где примененная методика изложена для *Фотона-11*).

Подсистема уравнений вращательного движения образована динамическими уравнениями Эйлера для компонент угловой скорости спутника в системе  $Ox_1x_2x_3$  и кинематическими уравнениями Пуассона для элементов первых двух строк матрицы  $\| g_{ij} \|$ . В уравнениях Эйлера учитываются четыре внешних механических момента: 1) гравитационный момент; 2) восстанавливающий аэродинамический момент; 3) постоянный по модулю момент, неизменно направленный вдоль оси  $Ox_1$ ; 4) момент, возникающий при взаимодействии магнитного поля Земли (МПЗ) с собственным магнитным моментом спутника. Для первого, третьего и четвертого из перечисленных моментов существуют простые аналитические выражения [6], причем при задании четвертого момента предполагается, что собственный дипольный момент спутника направлен вдоль оси  $Ox_1$ .

Компоненты гравитационного момента имеют вид

$$M_{g1} = \frac{3\mu_e}{r^5}(I_3 - I_2)x_2x_3, \quad M_{g2} = \frac{3\mu_e}{r^5}(I_1 - I_3)x_3x_1,$$

$$M_{g3} = \frac{3\mu_e}{r^5}(I_2 - I_1)x_1x_2, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Здесь  $\mu_e$  — гравитационный параметр Земли,  $I_i$  — моменты инерции спутника относительно осей  $Ox_i$ ,  $x_i$  — компоненты геоцентрического радиуса-вектора центра масс спутника ( $i = 1, 2, 3$ ).

Компоненты постоянного по модулю момента, неизменно направленного вдоль оси  $Ox_1$ , зададим соотношениями

$$M_{c1} = I_1\varepsilon, \quad M_{c2} = M_{c3} = 0,$$

где  $\varepsilon$  — создаваемое этим моментом постоянное угловое ускорение спутника вокруг оси  $Ox_1$ .

Компоненты момента, возникающего при взаимодействии МПЗ с собственным магнитным моментом спутника, имеют вид

$$M_{m1} = 0, \quad M_{m2} = -I_1mh_3, \quad M_{m3} = I_1mh_2.$$

Здесь  $h_i$  — компоненты вектора напряженности МПЗ в точке  $O$ ,  $I_1m$  — собственный дипольный момент спутника. Как было указано выше, этот момент направлен вдоль оси  $Ox_1$ . Множитель  $I_1$  в выражения для  $M_{c1}$  и  $M_{m2}$ ,  $M_{m3}$  введен для удобства параметризации уравнений вращательного движения спутника.

При вычислении восстанавливающего аэродинамического момента принималось, что молекулы воздуха при столкновении с внешней оболочкой спутника испытывают абсолютно неупругий удар. Учитывалась осевая симметрия внешней оболочки относительно оси  $O'y_1$ . В качестве полюса приведения системы сил аэродинамического сопротивления бралась точка  $O'$  (рис. 1). Пусть спутник совершает поступательное движение со скоростью  $\mathbf{v}$  в неподвижной однородной атмосфере. Тогда при сделанных допущениях для главного вектора и главного момента действующих на спутник сил аэродинамического сопротивления справедливы формулы [6]

$$\mathbf{F}_a = -\rho_a S |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad \mathbf{M}'_a = \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{P}). \quad (1)$$

Здесь  $\rho_a$  — плотность атмосферы;  $S$  и  $\mathbf{P}$  — площадь и первый момент геометрической фигуры, которая является проекцией внешней оболочки спутника на плоскость  $\Pi_v$ , перпендикулярную вектору  $\mathbf{v}$ . Вектор  $\mathbf{P}$  лежит в плоскости  $\Pi_v$  и вычисляется относительно проекции на  $\Pi_v$  точки  $O'$ . Метод вычисления величин  $S$  и  $\mathbf{P}$  основан на использовании достаточно детальной геометрической модели внешней оболочки спутника и описан в [7].

Формулы (1) адаптируются к уравнениям вращательного движения спутника следующим образом. Формулы используются при угловой скорости спутника отличной от нуля, т. е. диссипативный аэродинамический момент

не учитывается. В качестве  $\rho_a$  и  $\mathbf{v}$  принимаются плотность атмосферы в точке  $O$  и скорость этой точки относительно гринвичской системы координат. Последнее предположение относительно  $\mathbf{v}$  означает, в частности, что атмосфера считается неподвижной относительно вращающейся Земли.

Дальнейшая конкретизация формул (1) связана с учетом осевой симметрии внешней оболочки спутника. Вследствие этой симметрии векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{P}$  и орт  $\mathbf{e}$  оси  $O'y_1$  компланарны. Указанная компланарность и соотношение  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{P} = 0$  позволяют представить  $\mathbf{M}'_a$  в виде

$$\mathbf{M}'_a = \rho_a \frac{|\mathbf{v}|^3 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{e}|^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}).$$

Не ограничивая общности, возьмем векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{P}$  лежащими в плоскости  $O'y_1y_2$  и вычислим скалярный множитель в правой части последней формулы в системе координат  $O'y_1y_2y_3$ . Пусть в этой системе  $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ ,  $S = G(\alpha)$ ,  $\mathbf{P} = (P_1(\alpha), P_2(\alpha), 0)$ . Тогда  $G(\alpha)$ ,  $P_1(\alpha)$  и  $P_2(\alpha)$  зависят от  $\alpha$  периодически с периодом  $\pi$ ,  $G(\alpha)$  и  $P_1(\alpha)$  — четные функции,  $P_2(\alpha)$  — нечетная функция. Кроме того,  $P_1(\alpha) \cos \alpha + P_2(\alpha) \sin \alpha = 0$ . В силу последнего соотношения

$$\rho_a \frac{|\mathbf{v}|^3 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{e}|^2} = \rho_a |\mathbf{v}| \frac{P_1(\alpha)}{\sin^2 \alpha} = \rho_a |\mathbf{v}| [P_1(\alpha) - P_2(\alpha) \operatorname{ctg} \alpha],$$

и аэродинамический момент можно представить в виде

$$\mathbf{M}'_a = \rho_a |\mathbf{v}| [P_1(\alpha) - P_2(\alpha) \operatorname{ctg} \alpha] (\mathbf{v} \times \mathbf{e}).$$

Последняя формула и формула  $S = G(\alpha)$  справедливы при произвольном положении  $\mathbf{v}$ , если  $\alpha$  определить соотношением  $\alpha = \arccos [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})|\mathbf{v}|^{-1}]$ .

В уравнения Эйлера подсистемы вращательного движения следует подставлять внешние моменты, вычисленные относительно центра масс спутника, а предыдущие формулы задают аэродинамический момент относительно точки  $O'$ . Приведение этого момента к центру масс осуществляется по известной формуле теоретической механики. А именно, будем считать, что центр масс спутника лежит на оси  $O'y_1$ , причем  $\overrightarrow{O'O} = d\mathbf{e}$ . Тогда аэродинамический момент относительно центра масс задается формулой

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{M}'_a - d\mathbf{e} \times \mathbf{F}_a = \rho_a |\mathbf{v}| [P_1(\alpha) - P_2(\alpha) \operatorname{ctg} \alpha - dG(\alpha)] (\mathbf{v} \times \mathbf{e}).$$

Параметр  $d$  уточняется и, следовательно, меняется при обработке данных измерений, поэтому, чтобы задать  $\mathbf{M}_a$  в уравнениях движения, приходится задавать две функции  $F(\alpha) = P_1(\alpha) - P_2(\alpha) \operatorname{ctg} \alpha$  и  $G(\alpha)$ . Эти функции определены на отрезке  $0 \leq \alpha \leq \pi$  и вследствие осевой симметрии спутника удовлетворяют соотношениям (см. выше)  $F(\alpha) = F(\pi - \alpha)$ ,  $G(\alpha) = G(\pi - \alpha)$ .

Эти функции достаточно задать на отрезке  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ . Они вычисляются в узлах равномерной сетки и интерполируются с помощью дискретных рядов Фурье. В точке  $\alpha = 0$  функция  $F(\alpha)$  имеет устранимую особенность. Поскольку  $P_1(0) = P_2(0) = 0$ , в этой точке принимается  $F(0) = -dP_2(0)/d\alpha$ . Производная здесь вычисляется с помощью дискретного ряда Фурье, интерполирующего функцию  $P_2(\alpha)$ .

Компоненты аэродинамического момента имеют вид

$$\begin{aligned} M_{a1} &= \rho_a v [F(\alpha) - dG(\alpha)] (v_2 b_{13} - v_3 b_{12}), \\ M_{a2} &= \rho_a v [F(\alpha) - dG(\alpha)] (v_3 b_{11} - v_1 b_{13}), \\ M_{a3} &= \rho_a v [F(\alpha) - dG(\alpha)] (v_1 b_{12} - v_2 b_{11}), \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad \alpha = \arccos \frac{|b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + b_{13}v_3|}{v},$$

где  $v_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{v}$ .

Подсистема уравнений вращательного движения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2x_3) + \kappa(v_2b_{13} - v_3b_{12}) + \varepsilon, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1x_3) + \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu}[\kappa(v_3b_{11} - v_1b_{13}) - mh_3], \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda[\kappa(v_1b_{12} - v_2b_{11}) + mh_2], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_{11} &= g_{12}\omega_3 - g_{13}\omega_2 + \omega_e g_{21}, & \dot{g}_{21} &= g_{22}\omega_3 - g_{23}\omega_2 - \omega_e g_{11}, \\ \dot{g}_{12} &= g_{13}\omega_1 - g_{11}\omega_3 + \omega_e g_{22}, & \dot{g}_{22} &= g_{23}\omega_1 - g_{21}\omega_3 - \omega_e g_{12}, \\ \dot{g}_{13} &= g_{11}\omega_2 - g_{12}\omega_1 + \omega_e g_{23}, & \dot{g}_{23} &= g_{21}\omega_2 - g_{22}\omega_1 - \omega_e g_{13}, \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \nu = \frac{3\mu_e}{r^5}, \quad \kappa = \frac{E\rho_a v}{I_1} [F(\alpha) - dG(\alpha)].$$

Здесь точка над буквой означает дифференцирование по времени  $t$ ;  $\omega_i$  — компоненты абсолютной угловой скорости спутника;  $\omega_e$  — угловая скорость вращения гринвичской системы координат вокруг оси  $CY_3$ ;  $E = 10^6$  — масштабирующий множитель. Смысл остальных величин пояснен выше. Плотность атмосферы задается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004, как в уравнениях орбитального движения. Компоненты вектора напряженности МПЗ в точке  $O$  рассчитываются по формулам

$$h_i = \sum_{j=1}^3 H_j g_{ji} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где  $H_k$  — компоненты этого вектора в гринвичской системе координат. Эти компоненты определяются моделью IGRF2005. Параметры уравнений (2) считаются неизменными на отрезке интегрирования уравнений движения.

При численном интегрировании уравнений (2) третья строка матрицы  $\|g_{ij}\|$  вычисляется как векторное произведение первых двух ее строк, и используются следующие единицы измерения переменных и параметров:  $[t] = 10^3$  с,  $[x_i] = 10^6$  км,  $[v_i] =$  км/с,  $[\omega_i] = 10^{-3}$  с $^{-1}$ ,  $[d] =$  м,  $[\varepsilon] = 10^{-6}$  с $^{-2}$ ,  $[\rho_a] =$  кг/м $^3$ ,  $[m] = 10^{-5}$  г $^{-1/2}$  см $^{1/2}$  с $^{-1}$ ,  $[h_i] = 0.1$  г $^{1/2}$  см $^{-1/2}$  с $^{-1} = 0.1$  Э. Размеры  $m$  и  $h_i$  указаны в системе физических величин СГСМ.

Переменные  $g_{1i}$  и  $g_{2i}$  не являются независимыми, они связаны условиями ортогональности матрицы  $\|g_{ij}\|$ . По этой причине начальные условия для  $g_{1i}$  и  $g_{2i}$  выражаются через углы  $\gamma_g$ ,  $\delta_g$  и  $\beta_g$ .

Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  в уравнениях (2), а также углы  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$ , можно считать известными, поскольку обычно известен расчетный тензор инерции спутника в приборной системе координат. Например, для *Фотона М-2* расчетные значения этих параметров  $\lambda = \lambda^\circ = 0.27$ ,  $\mu = \mu^\circ = 0.10$ ,  $\gamma_c = \alpha_c = \beta_c = 0$ . Параметры  $\varepsilon$ ,  $d$  и  $m$  определяются из обработки данных измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника, т. е. служат параметрами согласования. Используется также вариант обработки данных измерений, в котором параметрами согласования являются, кроме перечисленных,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ .

**2. Методика определения движения спутника по измерениям бортовых магнитометров.** Описанная выше математическая модель вращательного движения спутника была испытана обработкой с ее помощью данных измерений МПЗ, выполненных на *Фотоне М-2*, и сравнением полученных результатов с результатами [8]. На борту этого спутника находилась аппаратура *Мираж* с несколькими трехкомпонентными магнитометрами. Поскольку движение спутника было неуправляемым, полученные данные и уравнения (2) можно использовать для определения фактического вращательного движения спутника по обычным статистическим методикам.

Методика, использованная в данной работе, состоит в следующем (детали см. в [3, 8]). По измерениям, выполненным на некотором отрезке времени  $t_0 \leq t \leq t_1$ , методом наименьших квадратов строились выражения

$$\hat{\chi}_i(t) = C_{i,M+1} + C_{i,M+2}(t - t_0) + \sum_{m=1}^M C_{i,m} \sin \frac{\pi m(t - t_0)}{t_1 - t_0} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Функции  $\hat{\chi}_i(t)$  рассматривались как аппроксимация на этом отрезке фактических компонент напряженности МПЗ в системе  $O'y_1y_2y_3$ . С другой стороны, эти компоненты можно рассчитать вдоль решений уравнений (2) на том же отрезке с помощью аналитической модели МПЗ. При идеальной точности измерений и моделей для решения, описывающего истинное движение



ние спутника, полученные два набора функций должны совпадать, поэтому аппроксимацией фактического движения считалось решение, доставляющее минимум функционалу

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 [\hat{\chi}_i(t_0 + n\tau) - \chi_i(t_0 + n\tau) - \Delta_i]^2, \quad (4)$$

$$\chi_i(t) = \sum_{k=1}^3 b_{ik} h_k(t), \quad \tau = \frac{t_1 - t_0}{N}.$$

Здесь функции  $h_i(t)$  определены формулами (3),  $\Delta_i$  — постоянные смещения в данных измерений. Минимизация  $\Phi_1$  проводится по начальным условиям решения в точке  $t_0$  и параметрам математической модели:  $\Delta_i$ ,  $\varepsilon$ ,  $d$ ,  $m$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$  и  $\beta_c$ . Последние пять из этих параметров могут быть фиксированы. Те параметры, значения которых определяются в процессе минимизации  $\Phi_1$ , будем называть уточняемыми. Обычно принималось  $t_1 - t_0 = 100 \div 300$  мин и  $\tau \approx 1$  мин. Из-за разного рода сбоев в показаниях магнитометров функции  $\hat{\chi}_i(t)$  не всегда точно представляют местное магнитное поле. Как правило, потеря точности связана с пропусками в данных измерений. По этой причине те значения  $n$ , для которых моменты времени  $t_0 + n\tau$  приходились на такие пропуски, из суммы (4) исключались. Учитывая способ использования величин  $\hat{\chi}_i(t_0 + n\tau)$  при отыскании фактического движения спутника, будем называть их псевдоизмерениями.

Число аргументов функционала (4) можно уменьшить, выполнив аналитически его минимизацию по смещениям  $\Delta_i$ . Остальные аргументы при этом фиксированы. В результате получаем новый функционал

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=0}^N [\hat{\chi}_i(t_0 + n\tau) - \chi_i(t_0 + n\tau)]^2 - (N + 1) \tilde{\Delta}_i^2 \right\}, \quad (5)$$

$$\tilde{\Delta}_i = \frac{1}{N + 1} \sum_{n=0}^N [\hat{\chi}_i(t_0 + n\tau) - \chi_i(t_0 + n\tau)].$$

Теперь отыскание решения системы (2), аппроксимирующего фактическое вращательное движение спутника, состоит в минимизации функционала (5) по начальным условиям этого решения  $\gamma_g(t_0)$ ,  $\delta_g(t_0)$ ,  $\beta_g(t_0)$ ,  $\omega_i(t_0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и уточняемым параметрам математической модели.

Минимизация функционала (5) выполнялась методом Левенберга – Марквардта, являющимся одной из модификаций метода Гаусса-Ньютона. Реализация этого метода в задачах определения вращательного движения спутников по данным измерений бортовых датчиков описана в [1, 2]. Использовались два варианта минимизации  $\Phi$ . Они отличались числом уточняемых

параметров и применялись поэтапно. На первом этапе минимизация выполнялась по начальным условиям и параметрам  $d$ ,  $m$ ,  $\varepsilon$  при фиксированных номинальных значениях параметров тензора инерции (см. п. 1). На втором этапе минимизация выполнялась по всем параметрам. Ниже ограничимся описанием второго этапа. Для простоты письма все уточняемые величины объединим в один вектор  $z$ ,  $\dim z = 14$ . В принятых обозначениях  $\Phi = \Phi(z)$ ,  $z_* = \operatorname{argmin} \Phi(z)$  — искомая оценка вектора  $z$ .

Точность аппроксимации псевдоизмерений  $\hat{\chi}_i(t_0 + n\tau)$  и оценки  $z_*$  будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в псевдоизмерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок, относящихся к одной и той же компоненте напряженности МПЗ, равны. Такой подход выбран из соображений удобства и вида функционала (4). Теоретико-вероятностные условия его адекватности требуют дополнительного обсуждения. При сделанных допущениях  $z_*$  — случайный вектор, который имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением, равным истинному значению  $z$ . Ковариационная матрица этого вектора и оценка дисперсии ошибок в псевдоизмерениях находятся по формулам

$$K_z = \sigma^2 C^{-1} = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^{14}, \quad \sigma^2 = \frac{\Phi(z_*)}{3N - 14}.$$

Здесь  $C$  — вычисленная в точке  $z_*$  матрица системы нормальных уравнений, возникающей при минимизации  $\Phi(z)$  методом Гаусса-Ньютона,  $2C \approx \partial^2 \Phi(z_*) / \partial z^2$ . Точность аппроксимации псевдоизмерений будем характеризовать стандартным отклонением  $\sigma$ , точность оценки  $z_*$  — стандартными отклонениями  $\sqrt{K_{ii}}$  ( $i = 1, 2, \dots, 14$ ). Стандартные отклонения величин  $d$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma_c$  и т. п. обозначим  $\sigma_d$ ,  $\sigma_\lambda$ ,  $\sigma_{\gamma_c}$ .

Чтобы минимизирующие функционал (5) значения параметров  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\gamma_c$  лежали в приемлемых с физической точки зрения пределах, в этот функционал вводилось дополнительное слагаемое

$$\epsilon_1 [(\lambda - \lambda^\circ)^2 + (\mu - \mu^\circ)^2] + \epsilon_2 \gamma_c^2.$$

Здесь  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — положительные числа,  $\lambda^\circ$ ,  $\mu^\circ$  — указанные выше номинальные значения параметров  $\lambda$  и  $\mu$ . Такая замена функционала учитывает априорную информацию об уточняемых параметрах спутника и регуляризует задачу минимизации  $\Phi$ . За новым функционалом сохраним прежнее обозначение. Описываемые ниже результаты получены при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.01$ . При вычислении стандартных отклонений использовались новое выражение для  $\Phi$  и соответствующая матрица нормальных уравнений.

**3. Результаты определения вращательного движения.** Движение *Фотона М-2* по описанной методике было определено на 6 интервалах времени. Каждый интервал имеет длину 270 мин. Некоторые полученные результаты представлены в табл. 1, 2 и на рис. 2 — 7. Таблицы содержат основные характеристики интервалов и найденных решений системы (2), рисунки иллюстрируют качество аппроксимации псевдоизмерений и движение спутника относительно квазиинерциальной системы координат  $CZ_1Z_2Z_3$ . Качество аппроксимации характеризуется оценками стандартного отклонения  $\sigma$ , приведенными в табл. 1 и в подписях к рисункам. В таблице рядом с этими оценками в скобках указаны значения  $\sigma$ , полученные для тех же интервалов в [8]. Как видим, новая модель вращательного движения оказалась более точной.

Перейдем к анализу рисунков. Каждый рисунок показывает движение только на трех орбитальных витках, но взятые вместе они позволяют получить исчерпывающее представление о движении, установившемся через несколько суток неуправляемого полета (более подробные результаты приведены в [8]).

Таблица 1. Интервалы обработки измерений напряженности МПЗ

№ инт.	Дата 06.2005	$t_0$ ДМВ	$\sigma$ $\gamma$	$\langle \omega_1 \rangle$ °/с	$\delta\omega_1$ °/с	$\langle w \rangle$ °/с	$\delta w$ °/с
1	4	16:15:06	1087 (1153)	0.8493	0.0076	0.1363	0.0130
2	5	13:36:15	1309 (1364)	0.9316	0.0019	0.1438	0.0112
3	6	14:17:34	1025 (1090)	1.0085	0.0073	0.1421	0.0109
4	7	12:18:45	986 (1163)	1.0680	0.0013	0.1244	0.0093
5	8	12:20:02	1159 (1243)	1.1119	0.0006	0.1122	0.0097
6	9	12:21:20	1088 (1180)	1.1504	0.0006	0.1076	0.0098

Каждый из рис. 2 — 7 естественным образом разбивается на три части — левую, среднюю и правую. Правые части иллюстрируют качество аппроксимации псевдоизмерений  $\hat{\chi}_i(t_0 + n\tau)$  функциями  $\chi_i(t)$ , заданными соотношениями (4). Здесь в каждой системе координат сплошной линией изображен график одной из этих функций на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ , маркерами указаны точки  $(t_0 + n\tau, \hat{\chi}_i(t_0 + n\tau) - \tilde{\Delta}_i)$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ).

В средней части рисунков помещены графики компонент угловой скорости  $\omega_i(t)$  в найденных решениях уравнений (2). Из графиков видно, что компонента  $\omega_1$  постепенно возрастала. В рамках принятой модели этот эффект объясняется действием на спутник постоянного механического момента, направленного вдоль оси  $Ox_1$ . В [8] возрастание  $\omega_1$  прослежено с самого начала неуправляемого полета, причем в этой работе рассматривался момент, имеющий постоянные ненулевые компоненты по всем трем осям системы  $Ox_1x_2x_3$

(такой момент мог возникнуть из-за травления газа). Эти компоненты служили уточняемыми параметрами. В силу малого значения  $\lambda$  больше всего на движение спутника влияла компонента вдоль оси  $Ox_1$ , которая и привела к увеличению  $\omega_1$ . Через сутки после начала неуправляемого полета значения  $\omega_1$  увеличились настолько, что компоненты постоянного момента вдоль осей  $Ox_2$  и  $Ox_3$  практически перестали влиять на движение спутника. Их действие усреднялось по собственному вращению спутника, и результат усреднения был исчезающе мал. При обработке данных измерений значения этих компонент определяются с очень большой ошибкой, и в такой ситуации их целесообразно принять равными нулю. В [8] показано, что указанное упрощение правомерно начиная с 02.06.2005. Оно сделано в [8] и в данной работе. По аналогичной причине в формулах момента, действующего на спутник со стороны МПЗ, компоненты собственного дипольного момента спутника вдоль осей  $Ox_2$  и  $Ox_3$  также приняты равными нулю.

При достаточно больших значениях  $\omega_1$  вращательное движение спутника близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела. Приведем количественные характеристики этой близости. Точная регулярная прецессия Эйлера может иметь место лишь в случае, когда главный момент приложенных к спутнику внешних сил равен нулю и спутник осесимметричен, т. е.  $\mu = 0$ . В этом случае величины  $\omega_1$  и  $\omega_\perp = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$  остаются неизменными во время движения. Если же главный момент внешних сил равен нулю, но  $\mu \neq 0$ , то неизменными будут величины

$$\Omega = \left[ \omega_1^2 + \frac{\mu \omega_3^2}{1 - \lambda + \lambda \mu} \right]^{1/2}, \quad w = \left[ \omega_2^2 + \frac{(1 - \lambda) \omega_3^2}{(1 + \lambda \mu)(1 - \lambda + \lambda \mu)} \right]^{1/2}.$$

Движение спутника уже не будет регулярной прецессией, но если

$$\frac{\mu(1 + \lambda \mu)w^2}{\lambda(1 - \lambda)\Omega^2} \ll 1,$$

то оно будет близко к ней. *Фотон М-2* имел  $\mu \ll 1$ , а условие  $w^2/\Omega^2 \ll 1$  выполнялось, начиная со вторых суток полета [8]. Следовательно, уже на вторые сутки вращательное движение этого спутника было близко к регулярной прецессии Эйлера. При выполнении двух последних условий с высокой точностью  $\Omega \approx \omega_1$ ,  $\omega_\perp \approx w$ , поэтому движение *Фотона М-2* на интервалах табл. 1 имеет смысл характеризовать величинами

$$\langle \omega_1 \rangle = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \omega_1 dt, \quad \delta \omega_1 = \left[ \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (\omega_1 - \langle \omega_1 \rangle)^2 dt \right]^{1/2}$$

и определяемыми аналогичными формулами величинами  $\langle w \rangle$ ,  $\delta w$ . Средние квадратические отклонения  $\delta \omega_1$  и  $\delta w$  характеризуют близость движения

спутника к регулярной прецессии с параметрами  $\langle \omega_1 \rangle$  и  $\langle w \rangle$ . По существу эти отклонения характеризуют приложенные к спутнику механические моменты, играющие в данном случае роль малых возмущений. Значения величин  $\langle \omega_1 \rangle$ ,  $\delta \omega_1$ ,  $\langle w \rangle$  и  $\delta w$  для обработанных интервалов времени указаны в подписях к рисункам и в табл. 1. Как видно из таблицы, движение спутника действительно было близко регулярной прецессии Эйлера.

Вернемся к рисункам. В левой части рис. 2 — 7 находятся графики зависимости от времени углов  $\Lambda$ ,  $\theta$  и  $\psi$ , задающих положение оси  $Ox_1$  в системе координат  $CZ_1Z_2Z_3$ . Выше первые два угла были определены формально, поэтому здесь поясним их геометрический смысл. При  $\theta = 0$ ,  $\psi = \pi/2$  ось  $Ox_1$  параллельна оси  $CZ_2$ , в окрестности этого положения углы  $\psi - \pi/2$  и  $\theta$  задают смещения оси  $Ox_1$  в направлениях, противоположных осям  $CZ_1$  и  $CZ_3$ . Как видно из рисунков, на интервалах табл. 1 ось  $Ox_1$  составляла достаточно большой угол с плоскостью орбиты.

Таблица 2. Оценки параметров уравнений движения

№ инт.	$d$	$\sigma_d$	$m$	$\sigma_m$	$\varepsilon$	$\sigma_\varepsilon$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	-0.644	0.0032	0.043	0.011	0.0255	0.00045	0.283	0.0033
2	-0.635	0.0059	0.058	0.012	0.0006	0.00037	0.270	0.0051
3	-0.629	0.0038	0.086	0.0085	0.0266	0.00028	0.270	0.0040
4	-0.671	0.0040	0.109	0.0082	0.0038	0.00024	0.268	0.0047
5	-0.646	0.0052	0.084	0.010	0.0022	0.00025	0.264	0.0033
6	-0.633	0.0047	0.078	0.0090	-0.0004	0.00025	0.267	0.0056

№ инт.	$\mu$	$\sigma_\mu$	$\gamma_c$	$\sigma_{\gamma_c}$	$\alpha_c$	$\sigma_{\alpha_c}$	$\beta_c$	$\sigma_{\beta_c}$
1	0.487	0.10	-0.293	0.11	-0.0054	0.0024	0.0183	0.0023
2	0.171	0.15	0.027	0.24	-0.0042	0.0029	0.0165	0.0029
3	0.248	0.12	-0.045	0.17	-0.0054	0.0024	0.0178	0.0023
4	0.193	0.14	0.029	0.18	-0.0026	0.0023	0.0162	0.0023
5	0.057	0.097	0.001	0.10	-0.0049	0.0026	0.0177	0.0027
6	0.188	0.17	-0.021	0.21	-0.0069	0.0024	0.0166	0.0024

В табл. 2 приведены найденные оценки параметров  $d$ ,  $m$ ,  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\gamma_c$ ,  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$  и их стандартные отклонения. Здесь углы выражены в радианах, остальные величины — в единицах, использованных при численном интегрировании уравнений (2). Как видно из таблицы, оценки параметра  $d$  выглядят физически осмысленными, имеют малый разброс. Большой разброс в оценках параметра  $m$  можно объяснить различными вариациями тока в бортовой сети спутника, что, в свою очередь, обусловлено разнообразием программы космических экспериментов. Оценки параметра  $\varepsilon$  имеют тенденцию к уменьшению с ростом  $\langle \omega_1 \rangle$ . По-видимому, возрастает неучитываемый в уравнениях (2) момент сопротивления  $\sim \omega_1$ . Такой момент возникает из-за вихревых

токов, наведенных в оболочке спутника магнитным полем Земли, и сопротивления атмосферы [6]. Оценки  $\varepsilon$  нестабильны, причем, как правило  $\sigma_\varepsilon \ll |\varepsilon|$ . Это означает, что параметр  $\varepsilon$  испытывает значительные вариации.

Исследование точности оценивания начальных условий движения спутника в рамках рассматриваемой модели его вращательного движения приводит практически к тем же результатам, которые были получены в [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00451).

## Литература

- [1] Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Кузьмин С.П., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение движения орбитальных станций *Салют-6* и *Салют-7* относительно центра масс в режиме медленной закрутки по данным измерений. *Космические исследования*, 1988, т. 26, № 3, с. 390-405.
- [2] Сарычев В.А., Сазонов В.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И. Повышение точности определения вращательного движения орбитальных станций *Салют-6* и *Салют-7* по данным измерений. *Космические исследования*, 1991, т. 29, № 3, с. 375-389.
- [3] Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Неуправляемое вращательное движение орбитальной станции *Мир*. *Космические исследования*, 2001, т. 39, № 1, с. 27-42.
- [4] ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли.
- [5] Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ *Фотон-11*. *Космические исследования*, 2004, т. 42, № 2, с. 185-200.
- [6] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1965.
- [7] Сазонов Вас. В. Алгоритм отыскания освещенных участков многогранных поверхностей в плоскопараллельном световом потоке. Математическое моделирование, 2007, т. 19, № 6, с. 16-30.

- [8] Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным бортовых измерений магнитного поля Земли. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005, № 96.

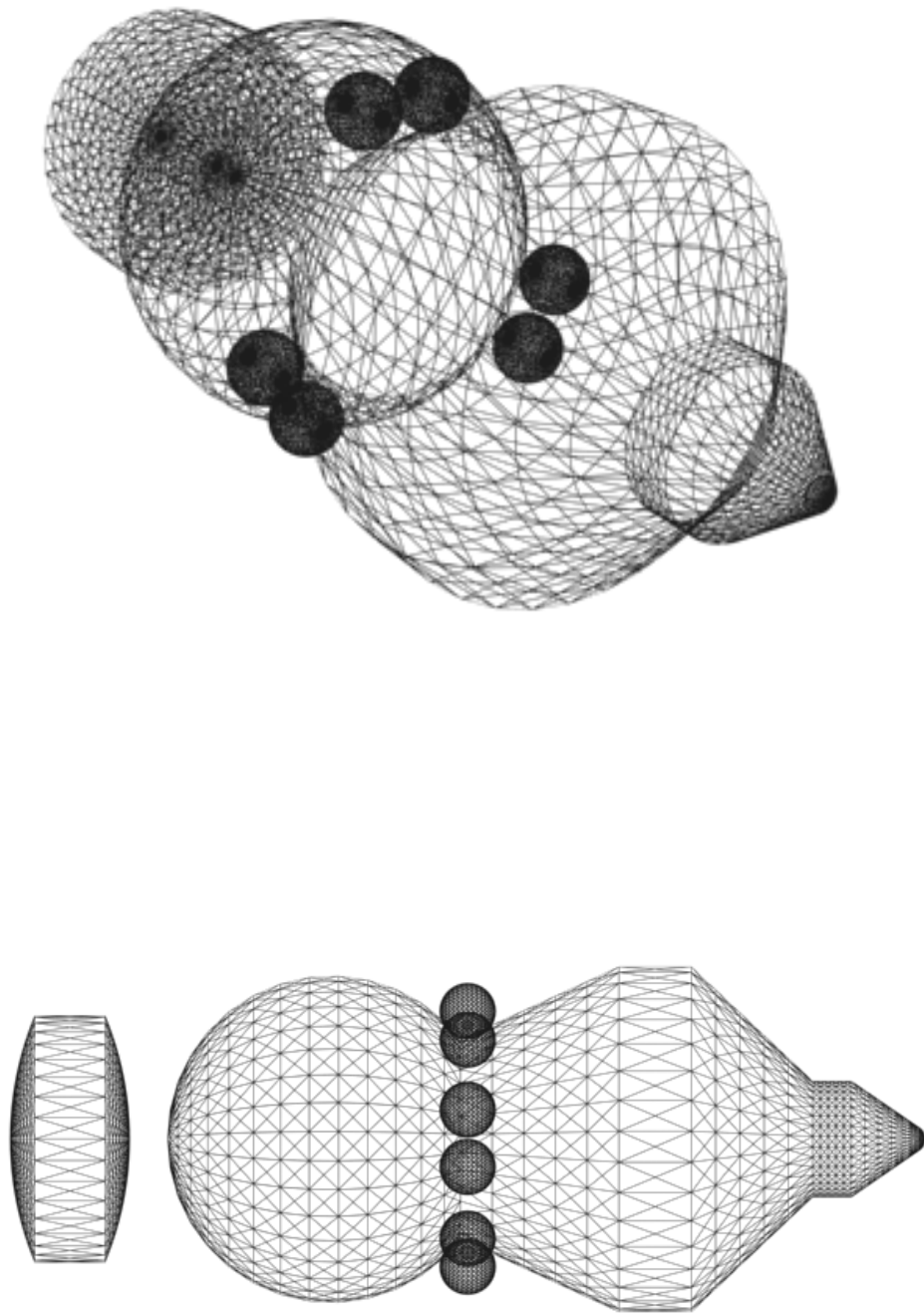


Рис. 1. Геометрическая модель спутника *Фотон М-2*.



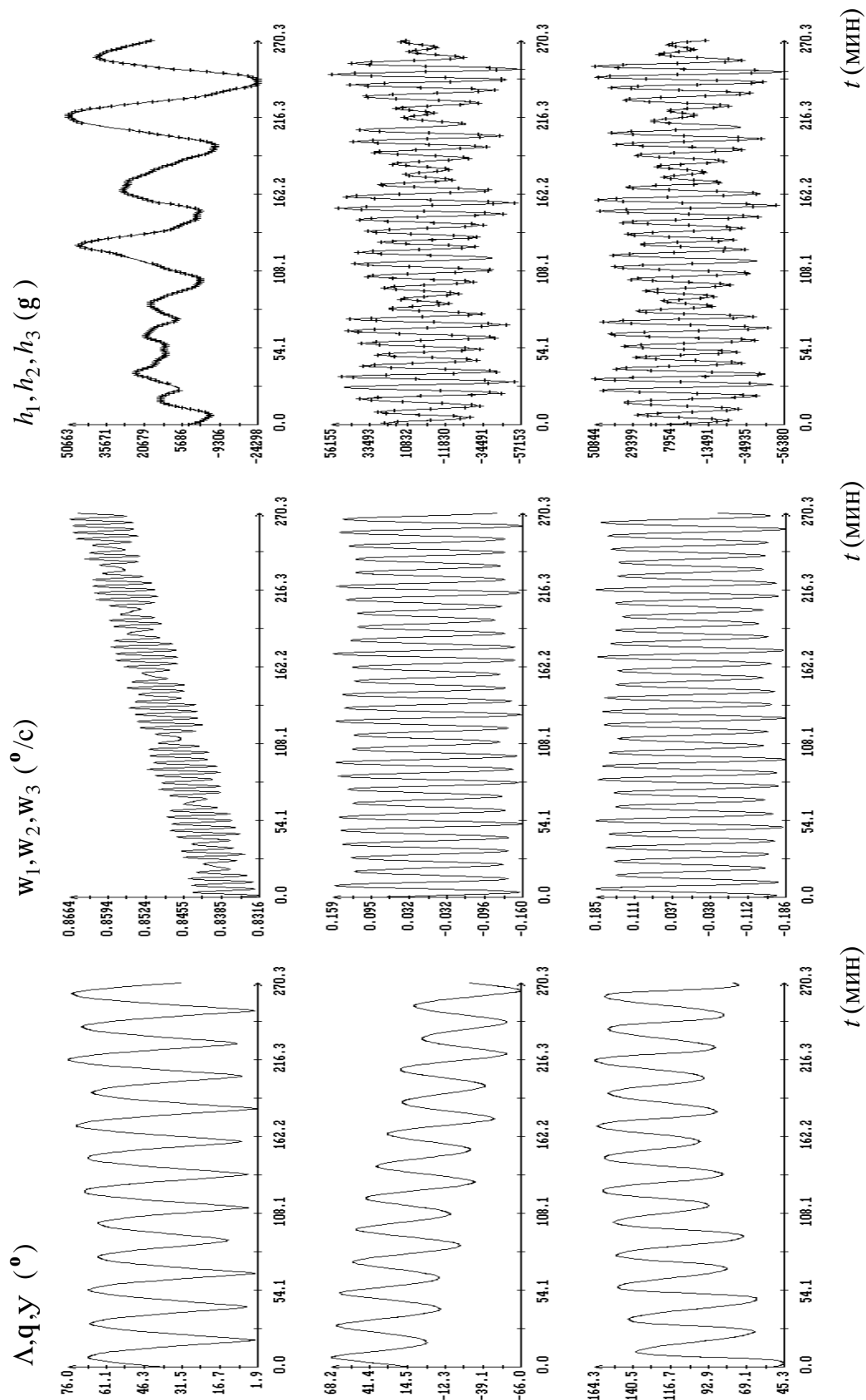


Рис. 2. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 16:15:06 ДМВ 04.06.2005,  $s = 1087g$ ,  $\langle w_1 \rangle = 0.8493^\circ/c$ ,  $dw_1 = 0.0076^\circ/c$ ,  $\langle w_2 \rangle = 0.1363^\circ/c$ ,  $dw_2 = 0.0130^\circ/c$ .

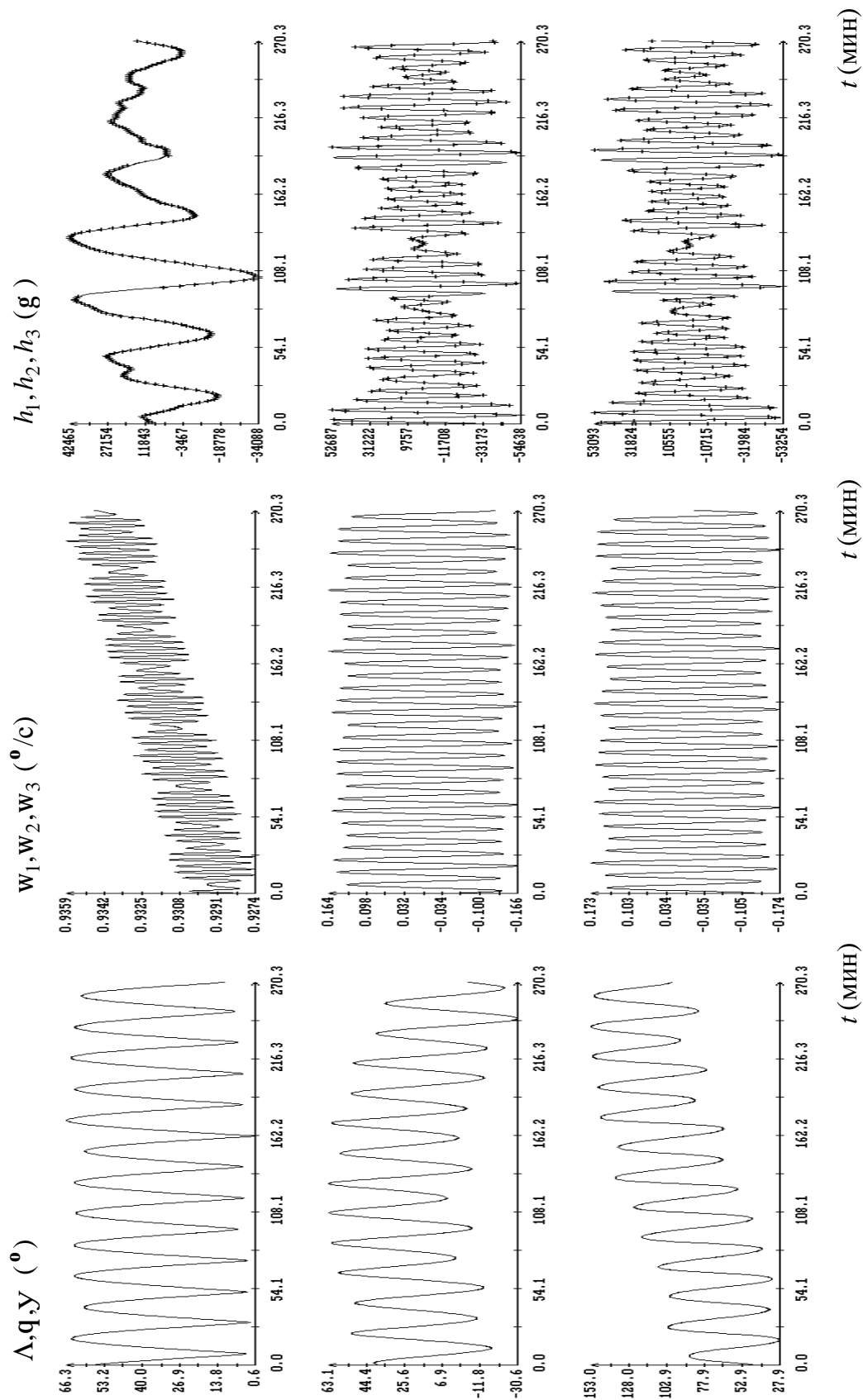


Рис. 3. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 13:36:15 ДМВ 05.06.2005,  $s = 1309g$ ,  $\langle w_1 \rangle = 0.9316^\circ/c$ ,  $dw_1 = 0.0019^\circ/c$ ,  $\langle w \rangle = 0.1438^\circ/c$ ,  $dw = 0.0112^\circ/c$ .

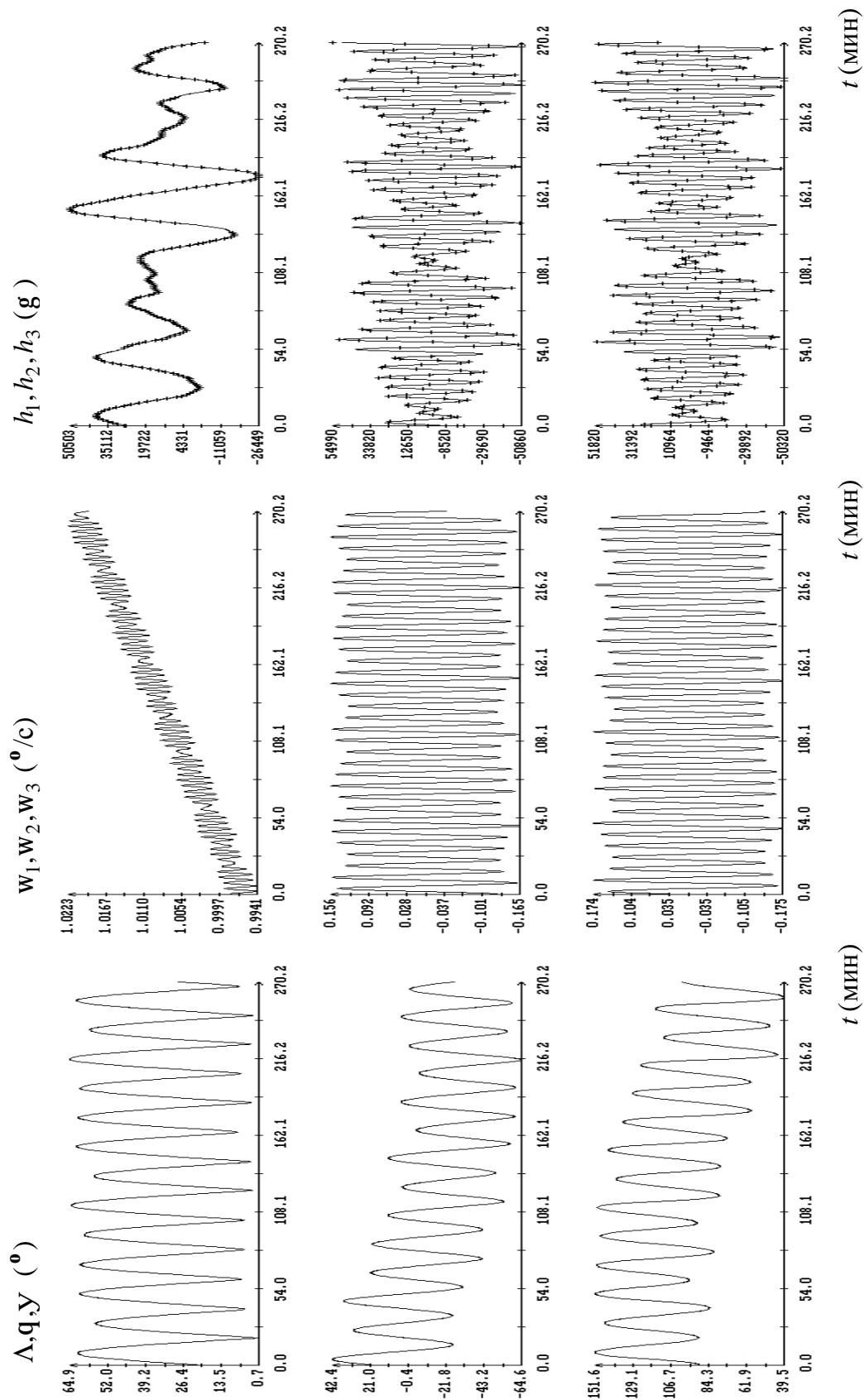


Рис. 4. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 14:17:34 ДМВ 06.06.2005,  $s = 1025g$ ,  $\langle w_1 \rangle = 1.0085$  /c,  $dw_1 = 0.0073$  /c,  $\langle w \rangle = 0.1421$  /c,  $dw = 0.0109$  /c.

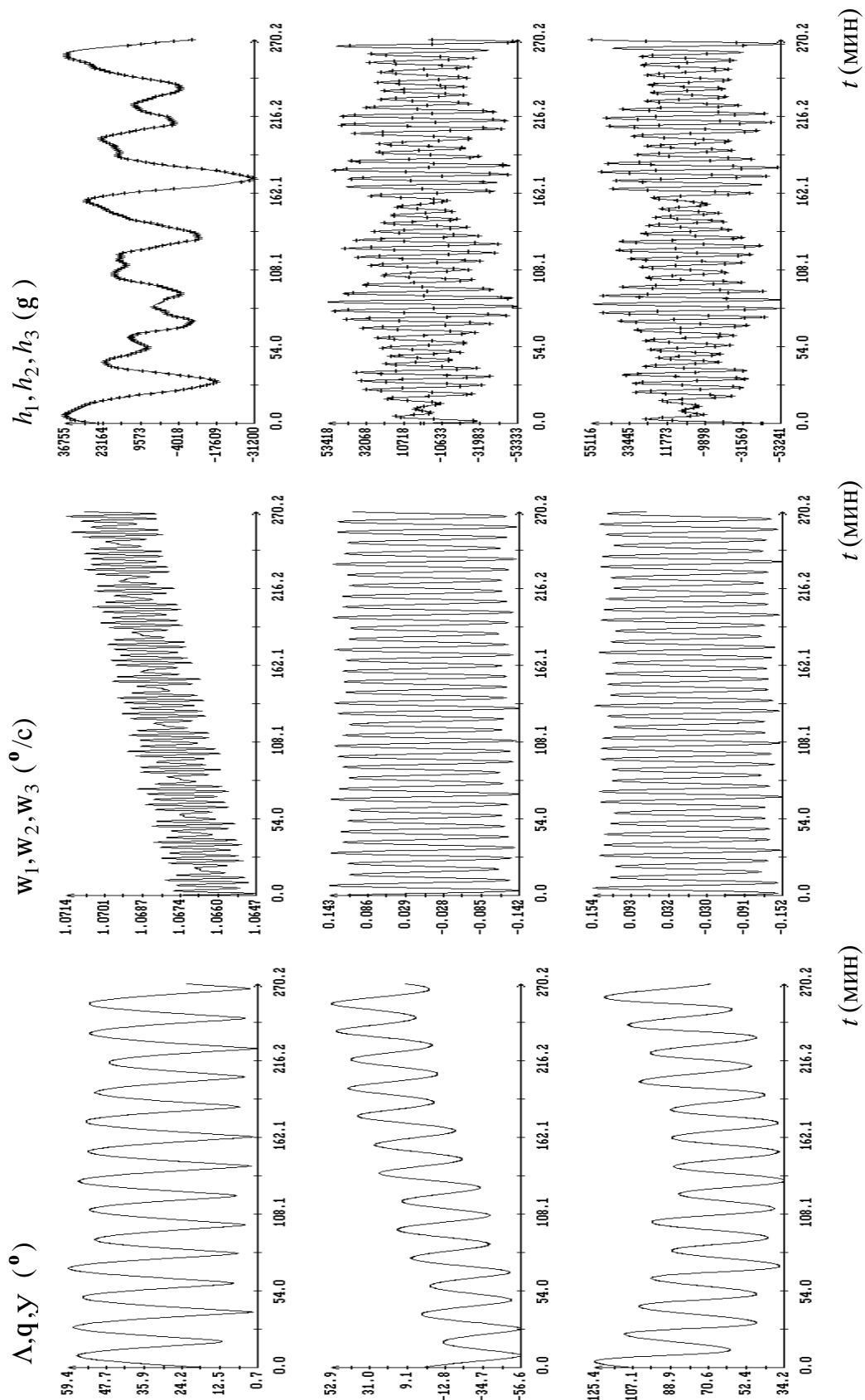


Рис. 5. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:18:45 ДМВ 07.06.2005,  $s = 986g$ ,  $\langle w_1 \rangle = 1.0680^\circ/c$ ,  $dw_1 = 0.0013^\circ/c$ ,  $\langle w \rangle = 0.1244^\circ/c$ ,  $dw = 0.0093^\circ/c$ .

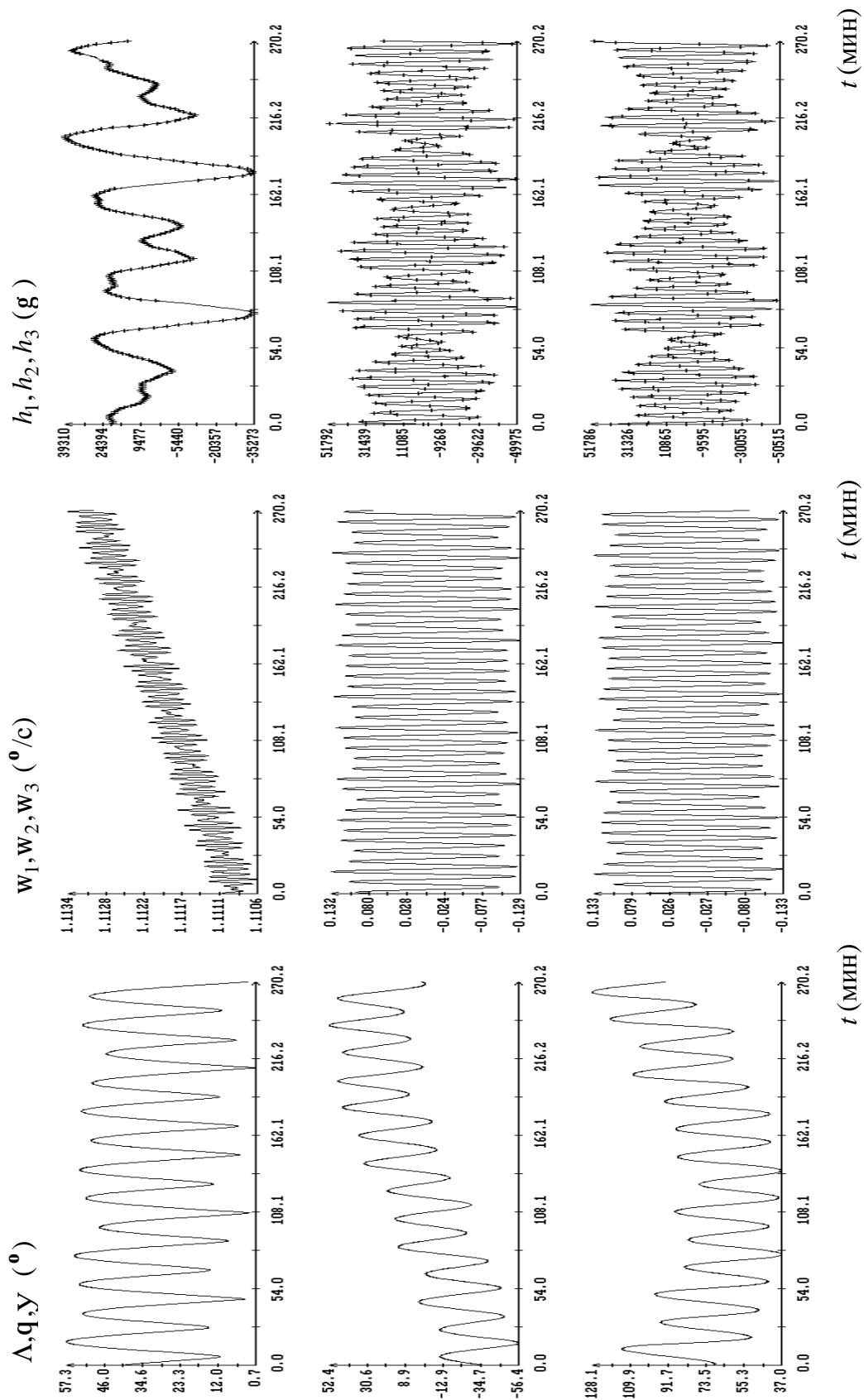


Рис. 6. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:20:02 ДМВ 08.06.2005,  $s = 1159\text{ g}$ ,  $\langle w_1 \rangle = 1.1119\text{ }^\circ/\text{c}$ ,  $dw_1 = 0.0006\text{ }^\circ/\text{c}$ ,  $\langle w \rangle = 0.1122\text{ }^\circ/\text{c}$ ,  $dw = 0.0097\text{ }^\circ/\text{c}$ .

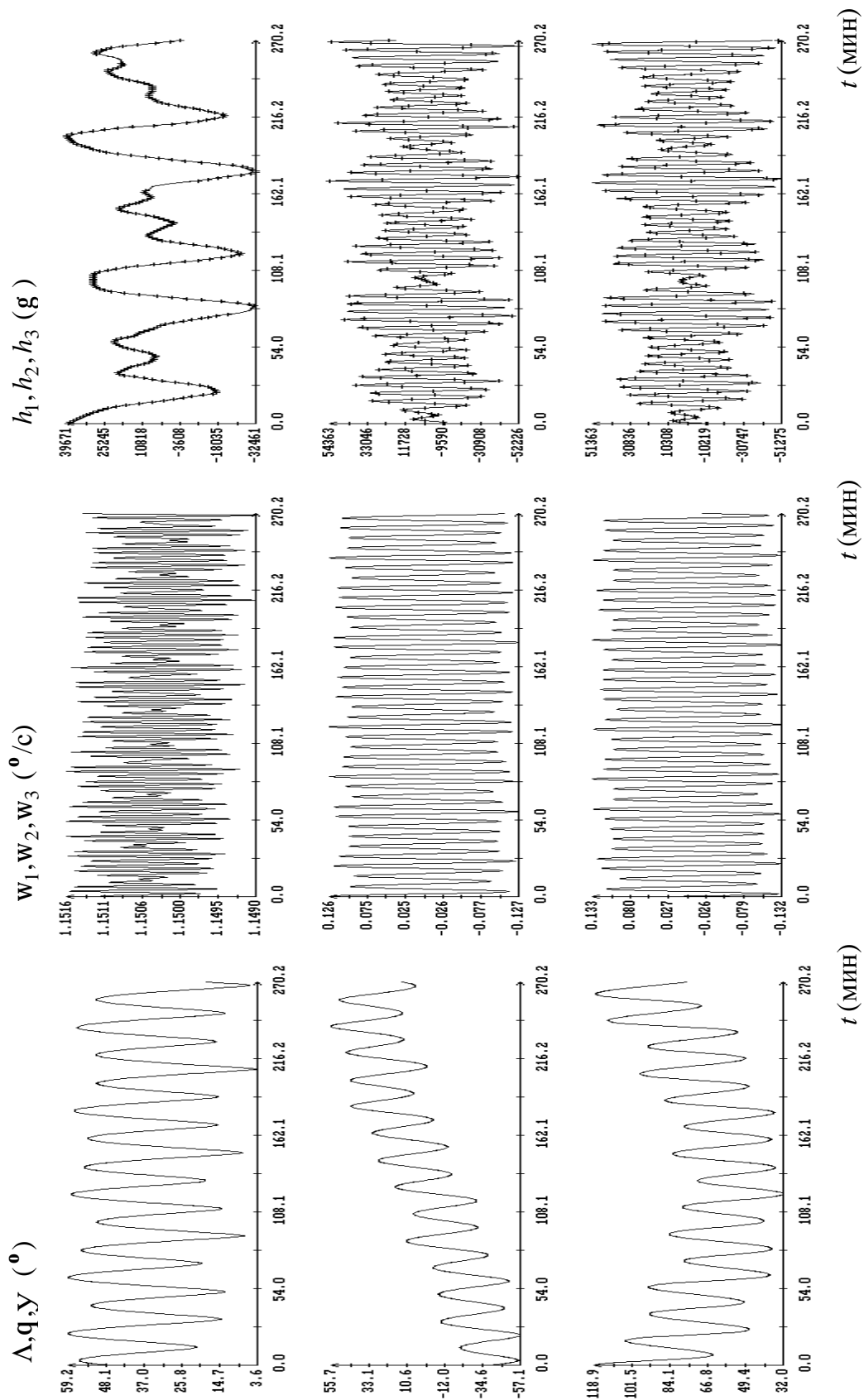


Рис. 7. Момент  $t = 0$  на графиках соответствует 12:21:20 ДМВ 09.06.2005,  $s = 1088\text{g}$ ,  $\langle w_1 \rangle = 1.1504^\circ/\text{c}$ ,  $\text{d}w_1 = 0.0006^\circ/\text{c}$ ,  $\langle w \rangle = 0.1076^\circ/\text{c}$ ,  $\text{d}w = 0.0098^\circ/\text{c}$ .