

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ВЕСА*

А. АПТЕКАРЕВ, Р. ХАБИБУЛЛИН

Рассматривается последовательность многочленов, ортогональных относительно комплексного аналитического веса, зависящего от номера многочлена n . Для таких многочленов получен асимптотический ряд по степеням $1/n$. В качестве примера приводится асимптотический ряд для многочленов Лагерра с зависящим от номера многочлена весовым параметром.

Оглавление

- § 1. Введение
- § 2. Метод матричной задачи Римана—Гильберта для получения сильной асимптотики ортогональных многочленов
- § 3. Вычисление Π_1
- § 4. Примеры

§ 1. Введение

1.1. Постановка и обсуждение задачи. Пусть $Q_j \in H(\Omega)$, $j = 0, 1$, — произвольные голоморфные в области Ω функции, определяющие последовательность весовых функций

$$W_n(z) := e^{-2n(Q_0(z) + \frac{1}{n}Q_1(z))}, \quad (1)$$

рассматриваемых в области Ω , содержащей гладкую жорданову дугу F , и пусть

$$\{P_k(z) = z^k + \dots\}_{k=0}^{\infty} : \int_F P_n(z) z^\nu W_n(z) dz = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

— многочлены, ортогональные на контуре F в комплексной плоскости, относительно переменного веса $W_n(z)$.

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение многочленов P_n при $n \rightarrow \infty$. Целью будет получение полного асимптотического ряда по степеням $1/n$.

Явный вид асимптотики многочленов (2), (1) позволяет решать ряд крупных задач в различных областях математики. В работах [1, 2] с их помощью была определена скорость приближения аналитических функций рациональными. Среди

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00522), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1551.2003.1), Отделения математических наук РАН (программа № 1) и фонда INTAS (грант № 03-516637)

многих других впечатляющих применений отметим теоремы универсальности в теории случайных матриц [3–5], приложения к асимптотической комбинаторике [6, 7] и математической физике [8, 9].

Асимптотическая теория ортогональных многочленов была заложена фундаментальными работами С. Н. Бернштейна [10] и Г. Сегё [11] (случай вещественного веса на отрезке действительной оси). Метод Бернштейна допускает обобщения на комплекснозначные функции [12–15]. Г. Шталь [16] привлек к исследованию асимптотик комплексно ортогональных многочленов экстремальные задачи теории логарифмического потенциала на плоскости. Существенный прогресс в асимптотической теории ортогональных многочленов был достигнут в недавнее время в связи с применением метода матричной задачи Римана—Гильберта. А. Итс, А. Китаев и А. Фокас (см. [8, 17]) предложили переформулировку соотношений ортогональности (2) в виде матричной задачи Римана—Гильберта. Метод перевала для асимптотического решения этой задачи разработан П. Дейфтом и Х. Чжоу [18]. Метод матричной задачи Римана—Гильберта позволил не только получить принципиальные продвижения в асимптотической теории многочленов, ортогональных на действительной оси относительно переменного вещественнозначного веса (см. [3, 4, 19–21]), но и оказался распространяем на случай комплекснозначных переменных весов в комплексной плоскости [2, 6, 9]. Кроме процитированных выше работ, с подробным описанием метода можно ознакомиться в монографии [22], также доступная демонстрация основных идей этого подхода изложена в [23].

Одним из достоинств метода перевала Дейфта—Чжоу является то, что он позволяет получать явное выражение не только для главного члена асимптотики многочленов P_n , но и предоставляет возможность описать весь асимптотический ряд. Это продемонстрировано в работах [3, 20], где описан асимптотический ряд для многочленов (2) при

$$F := \mathbb{R}, \quad Q_1 = 0, \quad Q_0(z) = \sum_{j=0}^{2m} q_j z^j, \quad q_j \in \mathbb{R}, \quad q_{2m} > 0.$$

В работе [24] описание асимптотических рядов работ [3, 20] уточнено, и в частности получены явные формулы для коэффициента ряда при степени $1/n$. Так же отметим работу [25], в которой изучен асимптотический ряд в случае

$$F := [-1, 1], \quad Q_1(z) = W(z)(z-1)^\alpha(z+1)^\alpha, \quad Q_0 = 0,$$

где $W(z)$ — вещественно аналитическая функция на $[-1, 1]$.

В настоящей работе мы описываем асимптотический ряд для многочленов (2) при достаточно общих условиях на комплекснозначные функции Q_0 и Q_1 , обеспечивающих возможность выбора контура F в виде связной дуги в комплексной области. Тем самым мы развиваем результаты работы [2], где, в примерно таких же общих условиях, получен главный член асимптотики для P_n . При этом в наших построениях и доказательствах мы существенно используем идеи и техники, предложенные для исследования асимптотических рядов в цитированных выше работах [3, 24, 25].

1.2. Формулировка результата. Для формулировки основной теоремы нам потребуются следующие понятия:

1) Важную роль будет играть экстремальная мера λ , обеспечивающая равновесие логарифмического потенциала

$$V_\nu(z) := \int_F \ln \frac{1}{|t-z|} d\nu(t)$$

во внешнем поле $f := \Re(Q_0)$:

$$V_\lambda + f \begin{cases} = \gamma_\Delta & \text{на } S(\lambda), \\ \geq \gamma_\Delta & \text{на } F \end{cases} \quad (3)$$

Носитель этой меры $S(\lambda)$ будет предполагаться связной дугой $S(\lambda) =: \Delta =: \overline{[a, b]}$, соединяющей точки a и b . Ориентацию фиксируем от a к b , соответственно предельные значения функций при подходе к Δ слева (справа) отмечаем знаком $+$ ($-$).

Если (существующая и единственная) мера λ обладает дополнительным условием

$$\frac{\partial(V_\lambda + f)}{\partial n_+} = \frac{\partial(V_\lambda + f)}{\partial n_-} \quad \text{на } S(\lambda), \quad (4)$$

то будем говорить, что пара (F, f) обладает S -свойством; данный факт будем обозначать $(F, f) \in S$.

2) Также, в выражении для асимптотики будет присутствовать, так называемая, функция Сегё φ_n для весовой функции W , которую мы определяем как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \varphi_n \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \quad \varphi_n \neq 0 \quad \text{в } \mathbb{C} \setminus \Delta, \quad \exists \varphi_{n\pm} \in L^2(\Delta), \\ \varphi_{n+}\varphi_{n-}W = 1 \quad \text{на } \Delta, \\ \varphi_n(z) = \frac{z^n}{C_n} + \dots, \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение задачи (5) для некоторого C_n , определяемого по W , существует и единственно (с точностью до знака \pm). Свойства решения и явное выражение для него мы обсудим позднее (см. п. 2.2).

Основным результатом данной работы является следующая теорема, в которой дается полное асимптотическое разложение для полиномов P_n вне дуги Δ носителя равновесной меры λ .

Теорема 1. Пусть последовательность аналитических весовых функций $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ задана формулой (1), и пусть гладкая жорданова дуга F удовлетворяет условиям:

- 1) $(F, \Re(Q_0)) \in S$, множество равновесия на F

$$\Delta := \{z : V_\lambda(z) + \Re(Q_0(z)) = \gamma_\Delta\}$$

связно, и $\lambda' > 0$ во внутренних точках дуги Δ .

- 2) Поведение производной равновесной меры λ' (в поле Q_0) в окрестности концевых точек a и b носителя Δ описывается как

$$\lambda'(z) := ((z-a)(z-b))^{1/2} h(z), \quad \text{при } h \in H(O_a \cup O_b), \quad z \in O_a \cup O_b.$$

Тогда

- A) для достаточно больших n существуют ортогональные с весом W_n на F многочлены $P_n(z) = z^n + \dots$, определенные условием (2);

В) для $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ имеем, что выражение $\frac{P_n(z)}{C_n \varphi_n(z)}$, с функцией Сегё φ_n (для весовой функции W_n), определенной в (5), имеет асимптотическое разложение по степеням $1/n$ вида

$$\frac{P_n(z)}{C_n \varphi_n(z)} \sim \frac{1}{2}(\beta(z) + \beta^{-1}(z)) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Pi_k(z)}{n^k} \right] \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где

$$\beta(z) = \left(\frac{z-b}{z-a} \right)^{1/4}. \quad (7)$$

Это разложение равномерно для z на компактах в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$. Функции Π_k аналитичны в $\mathbb{C} \setminus \Delta$ и могут быть явно вычислены.

Описание системы граничных задач, рекуррентно определяющих коэффициенты Π_k , мы приводим ниже (см. пп. 2.9 и 2.10). Здесь мы приведем явное выражение для коэффициента при $1/n$ в разложении (6):

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) = & \frac{i}{48h(b)(z-b)} \left\{ -\frac{5}{(z-b)} + \frac{6}{(b-a)} + \frac{3h'(b)}{h(b)} \right\} + ic_b^2 \frac{(b-a)}{16h(b)} + \\ & + \frac{i}{48h(a)(z-a)} \left\{ \frac{5}{(z-a)} - \frac{6}{(a-b)} - \frac{3h'(a)}{h(a)} \right\} - ic_a^2 \frac{(a-b)}{16h(a)} + \\ & + i \frac{\beta(z) - \beta^{-1}(z)}{\beta(z) + \beta^{-1}(z)} \left[\frac{1}{48h(b)(z-b)} \left\{ -\frac{5}{(z-b)} - \frac{8}{(b-a)} + \frac{3h'(b)}{h(b)} \right\} - c_b^2 \frac{(b-a)}{16h(b)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{48h(a)(z-a)} \left\{ -\frac{5}{(z-a)} - \frac{8}{(a-b)} + \frac{3h'(a)}{h(a)} \right\} - c_a^2 \frac{(a-b)}{16h(a)} \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где коэффициенты c_b, c_a задаются соответственно формулами

$$c_\alpha := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-2Q_1(\zeta)}{((\zeta-a)(\zeta-b))^{1/2} (\zeta-\alpha)} d\zeta, \quad \alpha = a, b, \quad (9)$$

интеграл берется по замкнутому контуру γ , захватывающего носитель равновесной меры λ и ориентированного против часовой стрелки.

Доказательство теоремы 1 изложено в следующем параграфе работы. В § 3 мы получаем явный вид коэффициента $\Pi_1(z)$ (т. е. формулы (8), (9)). Наконец, в части 4 рассмотрен пример асимптотического ряда по n для многочленов Лагерра $L_n^{(-An-A_1)}(x)$. Другой пример применения теоремы 1 для получения асимптотического ряда полиномов Бесселя рассмотрен в работе [26].

§ 2. Метод матричной задачи Римана—Гильберта для получения сильной асимптотики ортогональных многочленов

2.1. Матричная задача Римана—Гильберта для ортогональных полиномов. Наряду с ортогональными многочленами $P_n(z) = z^n + \dots$, мы также будем рассматривать функции второго рода

$$R_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{P_n(t)W_n(t)}{t-z} dt, \quad R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right). \quad (10)$$

Кроме пары P_n, R_n рассмотрим пару $\tilde{P}_{n-1}, \tilde{R}_{n-1}$ такую, что

$$\int_F \tilde{P}_{n-1}(z) z^\nu W_n(z) dz = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-2, \quad \tilde{P}_{n-1}(z) = z^{n-1} + \dots,$$

$$\tilde{R}_{n-1}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{\tilde{P}_{n-1}(t) W_n(t)}{t-z} dt, \quad \tilde{R}_{n-1}(z) = \frac{1}{mz^n} + \dots, \quad z \rightarrow \infty,$$

где m есть некоторая константа зависящая от n .

Следя [8], рассмотрим матричнозначные функции

$$Y := \begin{pmatrix} P_n & R_n \\ m\tilde{P}_{n-1} & m\tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} := \begin{pmatrix} 1 & W_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция $Y \in H_{2 \times 2}(\mathbb{C} \setminus F)$ имеет непрерывные граничные (нетангенциальные) значения Y_+ и Y_- «внутри» F (т. е., за исключением концевых точек F), и эти граничные значения L^2 -интегрируемы на всем F .

Из определения (10) для R_n , а также из определения для \tilde{R}_{n-1} , ввиду соотношений Сохоцкого—Племеля, для функций второго рода верны граничные соотношения

$$P_n W_n = R_{n+} - R_{n-}, \quad \tilde{P}_{n-1} W_n = \tilde{R}_{n-1+} - \tilde{R}_{n-1-}.$$

Таким образом, функция Y является решением следующей матричной краевой задачи Римана—Гильберта:

$$Y \in H_{2 \times 2}(\mathbb{C} \setminus F), \quad \exists Y_{\pm} \in L^2_{2 \times 2}(F),$$

$$Y_+ = Y_- \mathbf{W} \quad \text{«внутри» } F, \quad (11)$$

$$Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Краевая задача (11) является тождественной переформулировкой определения ортогональных многочленов (2), ее решение (при фиксации поведения в концевых точках F) единственно (см. [22]).

Суть метода (см. [22]) заключается в последовательном преобразовании $Y \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow R$ исходной краевой задачи Римана для получения эквивалентной проблемы, нормализованной в бесконечности и с матрицей скачка, равномерно стремящейся при $n \rightarrow \infty$ к единичной. Пользуясь тем, что матрица скачка для R имеет полное асимптотическое представление по степеням $1/n$, мы придем к полному асимптотическому представлению и для самой R . Поэтому, обращая цепочку эквивалентных преобразований $Y \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow R$, мы получим полные асимптотические представления для матрицы Y , а тем самым и для искоемых ортогональных многочленов, вместе со связанными с ними функциями второго рода.

- При помощи первого преобразования $Y \rightarrow T$, используя функцию Сегё для ограничения веса W_n на носителе $\Delta \subseteq F$ равновесной меры (4) в поле $R(Q_0)$, мы перейдем к краевой задаче, решение которой (в отличие от Y) будет функцией, голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, т. е. без особенности в бесконечности, а матрица скачка на Δ допускает удобную для нас факторизацию.
- Второе преобразование $T \rightarrow S$ включает в себя факторизацию матрицы скачка для T с дальнейшей деформацией контура F («раскрытие линзы») и эквивалентным переходом от граничной задачи для T на контуре F , к граничной задаче

для S на деформированном контуре Σ_1 . В результате у S во внутренних точках контура $\Sigma_1 \setminus \Delta$ матрица скачка стремится при $n \rightarrow \infty$ к единичной матрице, а на Δ скачок постоянен.

- Перед тем как реализовывать третье преобразование $S \rightarrow R$, мы рассмотрим две задачи: первая — для матрицы N с постоянным скачком на Δ , вторая — для матрицы U , определенной в окрестностях O_δ концевых точек носителя равновесной меры с матрицей скачка на системе контуров $O_\delta \cup \Sigma_1$ идентичной матрице скачка для S на Σ_1 .
- Наконец, третье преобразование $S \rightarrow R$ есть умножение S на N вне окрестности концевых точек и на U внутри этих окрестностей. Матрица R также будет удовлетворять некой граничной задаче Римана. Благодаря выбору матриц N и U , а также условиям сшивания (“matching conditions”), матрица скачка для R на системе контуров Σ будет равномерно стремиться к единичной при $n \rightarrow \infty$.

2.2. Равновесная мера и функция Сегё. В этом пункте подробней остановимся на уже упоминавшихся во введении понятиях теории логарифмического потенциала и краевых задач.

Пусть $M(F)$ — множество единичных положительных борелевских мер ν на F (т. е. $S_\nu := \text{supp } \nu \subseteq F$) таких, что

$$\int_{|t| \geq 1} \log |t| d\nu(t) < +\infty.$$

Для каждой меры $\nu \in M(F)$ определим ее логарифмический потенциал:

$$V_\nu(z) := \int_F \ln \frac{1}{|t-z|} d\nu(t).$$

Рассмотрим также два функционала на пространстве $M(F)$. Через $I(\nu)$ обозначим энергию без внешнего поля:

$$I(\nu) = \int V_\nu d\nu.$$

Для непрерывной функции f , определенной на F , через $I_f(\nu)$ будем обозначать энергию меры ν во внешнем поле f :

$$I_f(\nu) := I(\nu) + 2 \int_F f d\nu.$$

Существует единственная мера $\lambda := \lambda(F, f)$ минимизирующая функционал энергии I_f (т. е. $I_f(\lambda) = \inf_{\nu \in M(F)} I_f(\nu)$). Эта мера (см. [11]) и обладает свойством равновесия (3).

Введем комплексный потенциал как

$$\mathcal{V}_\lambda(z) := V_\lambda(z) + i\tilde{V}_\lambda(z) = \int_F \ln \frac{1}{t-z} d\lambda, \quad (12)$$

здесь \tilde{V}_λ определяется с точностью до мнимой константы с помощью соотношений Коши—Римана.

Пусть $(F, \Re(Q_0)) \in S$ (определение см. (4)). Тогда аналитичность Q и (3) позволяют переписать (4) как

$$\frac{d}{dz}(\mathcal{V}_{\lambda+} + Q_0) = -\frac{d}{dz}(\mathcal{V}_{\lambda-} + Q_0) \quad \text{на } \Delta,$$

что, в свою очередь влечет следующую краевую задачу для комплексного потенциала

$$\mathcal{V}_{\lambda+} + \mathcal{V}_{\lambda-} = -2Q_0 + 2\Gamma, \quad (13)$$

где однозначно определенная действительная часть константы Γ , ввиду соотношений равновесия (3), равна константе равновесия

$$\Re(\Gamma) = \gamma_\Delta.$$

Таким образом, функция

$$\Phi_{Q_0} := \exp\{\Gamma - \mathcal{V}_\lambda\}, \quad (14)$$

удовлетворяет краевому условию

$$\Phi_{Q_0+} \Phi_{Q_0-} e^{-2Q_0} = 1 \quad \text{на } \Delta. \quad (15)$$

Известно (см. [28, с. 485]), что краевая задача

$$\begin{aligned} \tilde{s} \in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta), \quad \tilde{s} \neq 0 \quad \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \\ \tilde{s}_+ \tilde{s}_- \tilde{W} = 1 \quad \text{на } \Delta \end{aligned} \quad (16)$$

имеет единственное (с точностью до знака \pm) решение в классе ограниченных функций, которое задается формулой

$$\tilde{s}(\tilde{W}; z) = \exp \left\{ w_\Delta \int_\Delta \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta+}} \right\}, \quad (17)$$

причем

$$\tilde{s}(\infty) = \exp \left\{ \int_\Delta \frac{\log \tilde{W}(t)}{2\pi i w_{\Delta+}} dt \right\}.$$

Здесь

$$w_\Delta(z) = ((z-a)(z-b))^{1/2}, \quad \frac{w_\Delta(z)}{z} \rightarrow 1, \quad z \rightarrow 1.$$

Выбирая $\tilde{W} := e^{-2Q_1}$, с учетом (14) и (15) получим явный вид для функции Сегё — решения задачи (5) с $W := W_n$:

$$\varphi_n(z) = \Phi_{Q_0}^n(z) \tilde{s}(e^{-2Q_1}; z), \quad (18)$$

при этом нормировочная константа в (5) равна $C_n = \varphi_n^{-1}(\infty)$.

2.3. Первое преобразование $Y \rightarrow T$: нормировка матричной задачи. Напомним, что цель первого преобразования — сделать решение голоморфным в бесконечности. Для этого рассмотрим функцию φ , являющуюся решением краевой задачи (5) с $W := W_n$ (индекс n при функции φ_n , показывающий зависимость от n , опущен для простоты записи).

С помощью диагональных матриц

$$\Phi := \text{diag}\{\varphi^{-1}, \varphi\}; \quad C := \text{diag}\{C_n^{-1}, C_n\}$$

определим матрицу-функцию

$$T := CY\Phi = \begin{pmatrix} \frac{Q_n}{C_n\varphi} & \frac{\varphi}{C_n}R_n \\ \frac{C_n m \tilde{Q}_{n-1}}{\varphi} & C_n m \varphi \tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Эта функция является единственным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} T &\in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus F), \\ T_+ &= T_- J \quad \text{на } F, \\ T(z) &= I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (20)$$

где матрица скачка J ввиду тождества

$$T_+ = CY_+\Phi_+ = CY_-\mathbf{W}\Phi_+ = CY_-\Phi_-\Phi_-^{-1}\mathbf{W}\Phi_+ = T_-\Phi_-^{-1}\mathbf{W}\Phi_+$$

равна

$$J := \Phi_-^{-1}\mathbf{W}\Phi_+ = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_-}{\varphi_+} & \varphi_+\varphi_-\mathbf{W}_n \\ 0 & \frac{\varphi_+}{\varphi_-} \end{pmatrix} \quad \text{на } F. \quad (21)$$

Отметим, что на носителе равновесной меры, ввиду краевых условий для функции φ , матрица скачка J может быть переписана как

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_-}{\varphi_+} & \varphi_+\varphi_-\mathbf{W}_n \\ 0 & \frac{\varphi_+}{\varphi_-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_-}{\varphi_+} & 1 \\ 0 & \frac{\varphi_+}{\varphi_-} \end{pmatrix} \quad \text{на } \Delta. \quad (22)$$

2.4. Второе преобразование $T \rightarrow S$: факторизация матрицы скачка и «раскрытие линзы». Так как для граничных значений комплексного потенциала равновесной меры λ

$$\mathcal{V}_\lambda(z) = - \int_{\Delta} \ln(z-t) d\lambda(t) = V_\lambda(z) - i \int_{\Delta} \arg(z-t) d\lambda(t)$$

на Δ справедливо

$$\mathcal{V}_{\lambda\pm}(z) = V_\lambda(z) - i \int_a^z \arg(z-t) d\lambda(t) + i \int_b^z [\arg(z-t) \pm \pi] d\lambda(t),$$

тогда верно на Δ

$$\frac{\Phi_{Q_0\mp}^n}{\Phi_{Q_0\pm}^n} = \exp\{-n(\mathcal{V}_{\lambda\mp} - \mathcal{V}_{\lambda\pm})\} = \exp\{2\pi i n \ell_\pm^b\}, \quad (23)$$

где

$$\ell_\pm^b := \mp \int_z^b d\lambda(t), \quad z \in \Delta. \quad (24)$$

Ввиду положительности меры λ имеем

$$\operatorname{Im}(\ell_{\pm}^b) = 0 \quad \text{на } \Delta.$$

Голоморфность внешнего поля Q_0 в Ω дает, что равновесная мера абсолютно непрерывная и ее плотность λ' голоморфна во всех внутренних точках дуги Δ , а следовательно она голоморфна в линзообразной области $d : \Delta \subset \bar{d} \subset \Omega$. Таким образом, функция

$$\ell^b(z) = \begin{cases} -\int_x^b \lambda'(t) dt, & z \in d^+, \\ \int_x^b \lambda'(t) dt, & z \in d^-, \end{cases} \quad \overline{d^+ \cup \Delta \cup d^-} = \bar{d}, \quad (25)$$

будучи первообразной от голоморфной функции, осуществляет голоморфное продолжение функций ℓ_+^b и ℓ_-^b с «берегов» дуги Δ в односвязные области d^+ и d^- . Причем, $\operatorname{Im}(\ell) > 0$ в $d^+ \cup d^-$. Действительно, вследствие соотношений Коши—Римана:

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(\ell^b)}{\partial n} \Big|_x = \frac{\partial \Re(\ell^b)}{\partial \tau} \Big|_x = \lambda'(x) > 0, \quad x \in \Delta.$$

Матрица скачка J (см. (22)) допускает удачную факторизацию на Δ

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_+/\varphi_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_-/\varphi_+ & 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Обозначим центральную не зависящую от n матрицу через

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

и, вводя в области $\Omega \setminus F$ матрицу-функцию

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/(W_n \varphi^2) & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

с помощью краевого условия задачи (5) убеждаемся, что факторизация матрицы J на Δ принимает вид

$$J = D_- \mathcal{J} D_+ \quad \text{на } \Delta. \quad (29)$$

Граничные значения на Δ элемента в левом нижнем углу матрицы D представляются в виде

$$\frac{1}{W_n \varphi_{\mp}^2} = \frac{1}{e^{-2n Q_0} \widetilde{W} \widetilde{s}_{\pm}^2 \Phi_{Q_0 \pm}^{2n}} = \left(\frac{\widetilde{s}_{\pm}}{\widetilde{s}_{\mp}} \right) \left(\frac{\Phi_{Q_0 \pm}}{\Phi_{Q_0 \mp}} \right)^n \quad \text{на } \Delta,$$

где первый сомножитель имеет ограниченное аналитическое продолжение в $\Omega \setminus \Delta$, а второй сомножитель преобразуется к виду (23). Причем, как нами уже отмечалось, важным следствием S-свойства дуги Δ является то, что ℓ^b продолжается с обоих «берегов» Δ в линзообразные области d^+ и d^- , так что

$$\operatorname{Im}(\ell^b) > 0 \quad \text{в } d^+ \cup d^-.$$

Таким образом, матрица скачка J на Δ факторизуется как (29), где центральная матрица \mathcal{J} не зависит от n , а аналитическое продолжение крайних матриц D_+ и D_- соответственно в областях d^+ и d^- ввиду следующего тождества

$$\exp\{2\pi i n \ell^b\} = \exp\{2\pi i n (\Re(\ell^b) + i \operatorname{Im}(\ell^b))\} = \exp\{-2\pi n \operatorname{Im}(\ell^b)\} \exp\{2\pi i n \Re(\ell^b)\}$$

обладает свойством

$$D_\alpha \rightrightarrows I \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ на } K \Subset d^\alpha, \quad \alpha = +, -, \quad (30)$$

причем со скоростью геометрической прогрессии.

Пусть Δ^+ есть дуга, лежащая в d^+ и соединяющая концевые точки дуги Δ . Соответственно дуга Δ^- лежит в d^- и соединяет концы Δ . Ориентированы Δ^+ , Δ^- так же, как и Δ , т.е. они направлены от точки a к точке b . Обозначим через \tilde{d}^+ область, ограниченную дугами Δ^+ и Δ , соответственно \tilde{d}^- ограничена Δ^- и Δ :

$$\tilde{d}^\alpha \subset d^\alpha, \quad \Gamma(\tilde{d}^\alpha) = \Delta^\alpha \cup \Delta, \quad \alpha = +, -.$$

Наконец, обозначим через F_a часть дуги F , соединяющую начальную точку дуги F с начальной точкой дуги Δ , и соответственно F_b обозначает часть F , соединяющую конец Δ с концом дуги F :

$$F = F_a \cup \Delta \cup F_b.$$

Перейдем от задачи (20) с краевыми условиями на дуге F к задаче с краевыми условиями на контуре Σ_1 :

$$\Sigma_1 := F \cup \Delta^+ \cup \Delta^- = F_a \cup \Delta \cup \Delta^+ \cup \Delta^- \cup F_b. \quad (31)$$

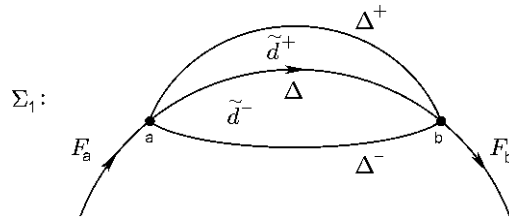


Рис. 1. Контур Σ_1

Для этого определим следующую кусочно-аналитическую матричнозначную функцию S :

$$S := \begin{cases} T & \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (\tilde{d}^+ \cup \tilde{d}^-), \\ TD^{-1} & \text{в } \tilde{d}^+, \\ TD & \text{в } \tilde{d}^-. \end{cases} \quad (32)$$

По определению, для граничных значений S на Δ^+ и Δ^- имеем

$$\text{на } \Delta^+ : S_+ = T = TD^{-1}D = S_-D,$$

$$\text{на } \Delta^- : S_+ = TD = S_-D$$

и с учетом (29)

$$\text{на } \Delta : S_+ = T_+D_+^{-1} = T_-JD_+^{-1} = T_-D_- \mathcal{J} D_+ D_+^{-1} = S_- \mathcal{J}.$$

Таким образом, функция S является единственным решением следующей краевой задачи:

$$S \in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma_1),$$

$$S_+ = S_- \begin{cases} D & \text{на } \Delta^+ \cup \Delta^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta, \\ J & \text{на } F_a \cup F_b, \end{cases} \quad (33)$$

$$S(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где функции скачков определены в (28), (27) и (21).

2.5. Анализ краевой задачи для S. Краевая задача (33) выгодно отличается от эквивалентной ей задачи (20) тем, что

- а) на части Δ граничного контура Σ_1 матрица скачка J не зависит от n ,
- б) во «внутренних» точках дуг Δ^+ , Δ^- , F_a , F_b матрица скачка стремится к единичной матрице.

Условие а) очевидно. Поясним условие б). Зафиксируем окрестности концевых точек дуги Δ :

$$O_a \text{ — окрестность } a, \quad O_b \text{ — окрестность } b.$$

Кроме того, обозначим концы дуг контура Σ_1 , примыкающие к концевым точкам Δ , через

$$\Delta_\alpha^\pm := \Delta^\pm \cap O_\alpha, \quad F_\alpha^\varepsilon := F_\alpha \cap O_\alpha, \quad \alpha = a, b.$$

Тогда ввиду (30)

$$D \rightrightarrows I \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ на } \Delta^\alpha \setminus (\Delta_a^\alpha \cup \Delta_b^\alpha), \quad \alpha = +, -. \quad (34)$$

Далее заметим, что на F вне Δ матрица скачка J (см. (21)) превращается с учетом определения функции φ в

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \varphi^2 W_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{W} \tilde{s}^2(\tilde{W}; z) \exp \{2n(\Gamma - \nu_\lambda - Q_0)\} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

По условию, функция \tilde{W} ограничена в Ω , поэтому

$$\tilde{W}(z) \tilde{s}^2(\tilde{W}; z) \leq C \text{ на } K \Subset \Omega.$$

Ввиду того, что мера $d\lambda$ равновесная, то на F вне Δ имеем

$$\Re(\Gamma - \nu_\lambda - Q_0) = \gamma - V_\lambda - \Re(Q_0) \leq 0.$$

Поэтому

$$J \rightrightarrows I \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ на } F_\lambda \setminus F_\lambda^\varepsilon, \quad \lambda = a, b. \quad (35)$$

Причем равномерное стремление в (34) и в (35) происходит со скоростью геометрической прогрессии.

Таким образом, в $\overline{\mathbb{C}} \setminus O_\alpha$, $\alpha = a, b$, можно ожидать, что $S(z) \rightarrow N(z)$, где $N(z)$ — решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} N &\in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta), \\ N_+ &= N_- J \text{ на } \Delta. \\ N(z) &= I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (36)$$

Решение этой задачи, в связи с тем, что матрица скачка не зависит от n и удобно диагонализировать, находится в явном виде (см. [22]):

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\beta + \beta^{-1}}{2} & \frac{\beta - \beta^{-1}}{2i} \\ -\frac{\beta - \beta^{-1}}{2i} & \frac{\beta + \beta^{-1}}{2} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где $\beta = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{1/4}$.

Но для строгого доказательства того, что на самом деле $S \rightarrow N$ при $n \rightarrow \infty$, возникают некоторые проблемы. Это можно увидеть, рассмотрев «ошибку»

$$M := S(N)^{-1}.$$

Обозначим совокупную матрицу скачка для S через ν_s . Функция-матрица M удовлетворяет тогда следующей задаче Римана—Гильберта

$$M_+ = M_- (N_- \nu_s \mathcal{J}^{-1} (N_-)^{-1}) \quad \text{на системе контуров } \Sigma_1. \quad (38)$$

$$M(z) = I + O(l1/|z|) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы показать, что решение M задачи (38) стремится к единичной, а тем самым, что $S \approx N$, необходимо установить, что матрица скачка для M стремится к единичной как в L_2 норме, так и в L_∞ норме (см. [3, 20]). Однако, из-за сингулярности N в точках a и b , матрица скачка для M является неограниченной. Чтобы обойти эту трудность, необходимо построить точное решение задачи (33) в «малой» окрестности точек a, b , совпадающее с N на границе этих окрестностей с точностью до порядка $O(1/n^k)$, где $k > 0$ — порядок выбранного отрезка асимптотического ряда.

2.6. Постановка вспомогательной краевой задачи в окрестности концевых точек носителя Δ . В окрестностях концевых точек носителя равновесной меры матрицы скачков не стремятся к единичным матрицам при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} U_a &\in H_{2 \times 2}^2(O_0 \setminus (\Delta_a \cup \Delta_a^+ \cup \Delta_a^- \cup F_a^\varepsilon)), \\ U_{a+} &= U_{a-} \begin{cases} D & \text{на } \Delta_a^+ \cup \Delta_a^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta_a, \\ J & \text{на } F_a^\varepsilon, \end{cases} \quad (39) \\ U_a(z) &= (I(z) + o(1))N, \quad \text{при } z \in O_a \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Точно такая же задача (с заменой a на b в нижнем индексе) ставится в окрестности O_b другой концевой точки b для определения функции U_b .

Нахождение решения задачи (39) является основным техническим моментом подхода, которому мы здесь следуем (см. [18, 22]). Анализ этой краевой задачи зависит от двух обстоятельств. Во-первых, совпадает ли концевая точка Δ с концевой точкой дуги F (носителя меры ортогональности), или точка b является внутренней точкой F . То есть является ли дуга F_b^ε пустым множеством или нет:

$$(A) := \{F_b^\varepsilon \neq \emptyset\}, \quad (B) := \{F_b^\varepsilon = \emptyset\}. \quad (40)$$

Во-вторых, анализ задачи (39) зависит от поведения производной λ' равновесной меры в окрестности концевой точки Δ .

В данной работе мы будем рассматривать следующие регулярные случаи:

$$\{F_b^\varepsilon \neq \emptyset\}, \quad \lambda'(z) = (z - b)^{1/2} h(z), \quad h \in H(O_b), \quad h(b) \neq 0. \quad (41)$$

$$\{F_a^\varepsilon \neq \emptyset\}, \quad \lambda'(z) = (z - a)^{1/2} h(z), \quad h \in H(O_a), \quad h(a) \neq 0. \quad (42)$$

2.7. Решение краевой задачи в окрестности концевой точки с помощью функций Айри. Покажем подробно как построить решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}
 & U_b \in H_{2 \times 2}^2(O_b \setminus \Sigma_b), \\
 & U_{b+} = U_{b-} \begin{cases} D & \text{на } \Delta_b^+ \cup \Delta_b^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta_b, \\ J & \text{на } F_b^\varepsilon \neq \emptyset, \end{cases} \quad (43) \\
 & U_b(z) = (I + o(1))N \quad \text{на } \partial O_b \quad \text{при } n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

где (см. рис. 2)

$$\Sigma_b := \Delta_b \cup \Delta_b^- \cup \Delta_b^+ \cup F_b^\varepsilon,$$

матрицы скачков в (43) равны

$$\begin{aligned}
 D &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/(W_n \varphi^2) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в } \Omega \setminus F, \\
 \mathcal{J} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{на } \Delta, \\
 J &:= \begin{pmatrix} 1 & W_n \varphi^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{на } F_b^\varepsilon,
 \end{aligned} \quad (44)$$

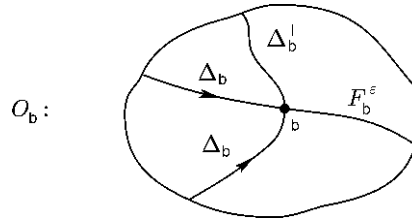


Рис. 2. Контур Σ_b

а не зависящая от n матрица N задана в (37).

2.7.1. Преобразование задачи (43) к задаче с независимым от n скачком. Обозначим через A диагональную матрицу

$$A := \begin{pmatrix} \varphi W_n^{1/2} & 0 \\ 0 & (\varphi W_n^{1/2})^{-1} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Заметим, что матрицы скачков (44) допускают декомпозицию

$$\begin{aligned}
 D &:= A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} \quad \text{в } \Omega \setminus F, \\
 \mathcal{J} &:= A_- \begin{pmatrix} 0 & (\varphi_+ \varphi_- W_n \omega)^{-1} \\ \varphi_+ \varphi_- W_n \omega & 0 \end{pmatrix} A_+^{-1} = \\
 &= A_- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A_+^{-1} \quad \text{на } \Delta, \\
 J &:= A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} \quad \text{на } F_b^\varepsilon,
 \end{aligned} \quad (46)$$

здесь $\omega := \frac{1}{i} w_\Delta = \frac{1}{i} \sqrt{(z-a)(z-b)}$.

Определим матрицу-функцию

$$V_b = U_b A. \quad (47)$$

Тогда с помощью (46) краевая задача (43) преобразуется в следующую краевую задачу для V_b :

$$V_b \in H_{2 \times 2}^2(O_b \setminus \Sigma_b),$$

$$V_{b+} = V_{b-} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \Delta_b^+ \cup \Delta_b^-, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \Delta_b, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } F_b^\varepsilon \neq \emptyset, \end{cases} \quad (48)$$

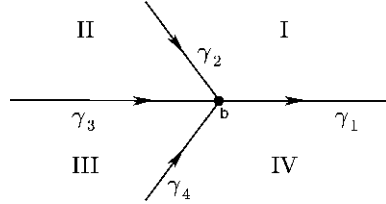
$$V_b(z) = (I + o(1))NA, \quad \text{на } \partial O_b \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

2.7.2. Вспомогательная краевая задача для функций Айри. Введем вспомогательный контур

$$\gamma_0 := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4,$$

как показано на рис. 3, который делит комплексную плоскость на четыре области I, II, III, IV. Полагаем, что угол между γ_2 и γ_3 принадлежит $(\pi/3, \pi)$.

Обозначим



$$A^u(\zeta) := \begin{pmatrix} \text{Ai}(\zeta) & \text{Ai}(\varepsilon_3^2 \zeta) \\ \text{Ai}'(\zeta) & \varepsilon_3^2 \text{Ai}'(\varepsilon_3^2 \zeta) \end{pmatrix},$$

$$A^l := \begin{pmatrix} \text{Ai}(\zeta) & -\varepsilon_3^2 \text{Ai}(\varepsilon_3 \zeta) \\ \text{Ai}'(\zeta) & -\text{Ai}'(\varepsilon_3 \zeta) \end{pmatrix},$$

Рис. 3. Дополнительный контур γ_0

где Ai — функция Айри, а $\varepsilon_3 = e^{2\pi i/3}$ — корень из единицы. Напомним, что функции Айри являются решением дифференциального уравнения (см. [29])

$$\text{Ai}''(\zeta) = \zeta \text{Ai}(\zeta), \quad \text{Ai} \in H(\mathbb{C}).$$

Теперь определим кусочно-аналитическую функцию

$$\Psi := \begin{cases} A^u e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3} & \text{в I,} \\ A^u e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{в II,} \\ A^l e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{в III,} \\ A^l e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3} & \text{в IV,} \end{cases} \quad (49)$$

здесь σ_3 — матрица Паули

$$\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение для матрицы

$$\tilde{\sigma} = e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3}.$$

Известно (см. [22]), что функция Ψ решает следующую краевую задачу:

$$\Psi \in H(\mathbb{C} \setminus \gamma_0), \quad \exists \Psi_{\pm} \in \mathbb{C}(\gamma_0),$$

$$\Psi_+ := \Psi_- \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_2 \cup \gamma_4, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_1. \end{cases} \quad (50)$$

2.7.3. Выбор дуг Δ_b^+ , Δ_b^- , F_b^ε и границы ∂O_b . Предположим теперь, что имеется конформное отображение $f : O_b \rightarrow f(O_b) \in \mathbb{C}$ с условием $f(b) = 0$ такое, что контур $\Sigma_b \cap O_b$ переходит в $\gamma_0 \cap f(O_b)$. Тогда очевидно, что функция $\Psi(f(z))$ будет удовлетворять первым двум условиям задачи (48). Отметим, что на самом деле в контуре Σ_b лишь дуга Δ_b (часть дуги носителя равновесной меры) фиксирована, в то же время выбор расположения дуг Δ_b^+ , Δ_b^- , а также границы ∂O_b в нашем распоряжении. Равно как и положение дуги F_b^ε может варьироваться ввиду того, что из-за аналитичности весовой функции контур интегрирования может быть деформирован. Наконец, заметим, что соотношение скачка для $\Psi(f(z))$ не изменится при умножении этой функции слева на любую аналитическую функцию-матрицу. Это нам даст дополнительную степень свободы для удовлетворения третьего условия задачи (48).

Резюмируя, отметим, что для любого конформного отображения $f : O_b \rightarrow f(O_b)$, удовлетворяющего $f(\Sigma_b \cap O_b) = \gamma_0 \cap f(O_b)$ (сохраняющего ориентацию), и для любой аналитической матрицы-функции $E : O_b \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ матрица-функция

$$E(z)\Psi(f(z))$$

удовлетворяет первым двум условиям задачи (48).

Напомним определение функции ℓ^b (24):

$$\ell_{\pm}^b := \mp \int_z^b d\lambda(t), \quad z \in \Delta.$$

Как было установлено ранее, она голоморфно продолжается в область $O_b \setminus \Delta_b$.

Далее, будет удобнее рассматривать функцию ℓ^b умноженную на $i\pi$

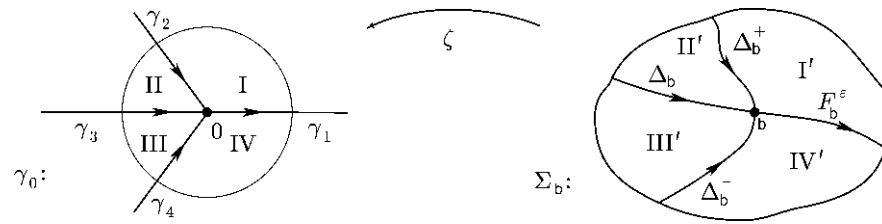
$$\tilde{\ell}^b := i\pi \ell^b, \quad \tilde{\ell}_{\pm}^b = \mp i\pi \int_x^b d\lambda = \mp i\pi \int_x^b (z-b)^{1/2} h(z) dz \quad \text{на } \Delta_b.$$

Производя интегрирование, имеем

$$\tilde{\ell}^b(z) = \frac{2}{3}(z-b)^{3/2} M(z), \quad \text{где } M(z) \in H(O_b), \quad M(b) \neq 0.$$

Таким образом, функция

$$\zeta(z) := \left(\frac{3}{2} \tilde{\ell}^b(z) \right)^{2/3} = (z-b) M^{2/3}(z) \quad (51)$$

Рис. 4. Действие функции ζ

Проверить
правильность
расположе-
ния по тексту
рис.4

осуществляет конформное отображение области O_b в некоторую окрестность точки 0. Из этого следует, что $\zeta(z)$ принимает чисто комплексные значения при $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$.

Кроме того, данное отображение переводит дугу Δ_b в γ_3 . Проверим это (следующий [22]). Рассмотрим вначале контур Σ'_b , конформно идентичный контуру Σ_b , такой что интервалу Δ_b соответствует $\Delta_b \in \mathbb{R}$, Δ_b^+ соответствует Δ_b^+ , Δ_b^- соответствует Δ_b^- и F_b^ε соответствует $F_b^\varepsilon \in \mathbb{R}$. Далее, пусть имеется отображение, представимое в окрестности b' в виде

$$\zeta_0(w) = (w - b')M_0^{2/3}(w), \quad M_0(b') \neq 0, \quad M_0(w) \in H(O_{b'}).$$

В предыдущей строчке ветвь корня выбрана так, что: $M_0^{2/3}(b') > 0$. Тогда, очевидно, что ζ_0 аналитична в окрестности b' , $\zeta_0'(a) \neq 0$. Поэтому ζ_0 однозначно отображает окрестность b' в некую окрестность нуля. Также, очевидно, что ζ_0 переводит действительные точки в действительные, а мнимые в мнимые. Из связности и непрерывности заключаем, что $\zeta_0(\mathbb{C}_+ \cap O_{b'})$ лежит целиком либо в верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ , либо в \mathbb{C}_- (аналогично и для $\zeta_0(\mathbb{C}_- \cap O_{b'})$). Так как для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется:

$$\begin{aligned} \zeta_0(b' + i\varepsilon) &= i\varepsilon(M_0(a) + i\varepsilon M_0'(a) + \dots)^{2/3} = i\varepsilon(M_0(a))^{2/3}(1 + O(\varepsilon)) = \\ &= i\varepsilon M_0(a)^{2/3} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

то $\text{Im}(\zeta_0(b' + i\varepsilon)) > 0$ для малых и положительных ε . Следовательно, $\zeta_0(\mathbb{C}_+ \cap O_{b'}) \in \mathbb{C}_+$ и $\zeta_0(\mathbb{C}_- \cap O_{b'}) \in \mathbb{C}_-$.

Пусть μ — конформное отображение, переводящее контур Σ'_b в Σ_b . Тогда композиция $\mu \circ \zeta$ будет удовлетворять всем условиям функции ζ_0 и поэтому отображение ζ переводит контур Σ_b в тот же самый контур, что получается из Σ_b при отображении ζ_0 .

2.7.4. «Сшивание» граничных условий на ∂O_b . Напомним, что мы ищем решение (48) в виде

$$V_b(z) = E(z)\Psi(\tilde{c}_n \zeta(z)).$$

Для того чтобы удовлетворить граничные условия на границе ∂O_b при $n \rightarrow \infty$, нам потребуется асимптотика $\Psi(\tilde{c}_n \zeta(z))$ при $\tilde{c}_n \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим сначала случай когда $\zeta \in I$.

Известно, что в бесконечности функция Айри допускает следующее разложение (см. [29])

$$\text{Ai}(\zeta) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \zeta^{-1/4} e^{-2/3\zeta^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s_k \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right)^{-k} \quad \text{для } |\arg \zeta| < \pi, \quad (52)$$

$$\text{Ai}'(\zeta) \sim -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\zeta^{1/4}e^{-2/3\zeta^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t_k \left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right)^{-k} \quad \text{для } |\arg \zeta| < \pi, \quad (53)$$

где

$$s_0 = t_0 = 1, \quad s_k = \frac{\Gamma(3k+1/2)}{54^k k! \Gamma(k+1/2)}, \quad t_k = -\frac{6k+1}{6k-1} s_k \quad \text{для } k \geq 1, \quad (54)$$

и Γ обозначает гамма-функцию.

Полагая

$$\tilde{c}_n := n^{2/3},$$

для $\zeta \in \partial O_b$ получаем

$$|n^{2/3}\zeta| = |\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta| = n^{2/3}\varepsilon \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\varepsilon > 0$ — радиус O_b

Подставляя в (49) асимптотические разложения (53), (54) (следуя [3]), получаем [(52), (53)]?

$$\begin{aligned} \Psi(n^{2/3}\zeta) &= \begin{pmatrix} \text{Ai}(n^{2/3}\zeta) & \text{Ai}(\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta) \\ \text{Ai}'(n^{2/3}\zeta) & \varepsilon_3^2 \text{Ai}'(\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta) \end{pmatrix} \tilde{\sigma} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (n^{2/3}\zeta)^{-1/4} e^{-2/3(n^{2/3}\zeta)^{3/2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s_k \left(\frac{2}{3}n\zeta^{3/2}\right)^{-k} \right) \\ -(n^{2/3}\zeta)^{1/4} e^{-2/3(n^{2/3}\zeta)^{3/2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t_k \left(\frac{2}{3}n\zeta^{3/2}\right)^{-k} \right) \\ (\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta)^{-1/4} e^{-2/3(\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta)^{3/2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s_k \left(\frac{2}{3}(\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta)^{3/2}\right)^{-k} \right) \\ -\varepsilon_3^2 (\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta)^{1/4} e^{-2/3(\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta)^{3/2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t_k \left(\frac{2}{3}(\varepsilon_3^2 n^{2/3}\zeta)^{3/2}\right)^{-k} \right) \end{pmatrix} \tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Далее, по определению ε_3 и ζ имеем:

$$(\varepsilon_3^2 \zeta)^{3/2} = |\zeta|^{3/2} \exp \left\{ i \left(\arg \zeta - \frac{2\pi}{3} \right) \frac{3}{2} \right\} = -(\zeta)^{3/2} = -\frac{3}{2} \tilde{\ell}^{\tilde{b}}.$$

Подставляя последнюю формулу в выражение для $\Psi(n^{2/3}\zeta)$, можно ее записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi(n^{2/3}\zeta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (n^{2/3}\zeta)^{-1/4} & 0 \\ 0 & (n^{2/3}\zeta)^{1/4} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-n\tilde{\ell}^{\tilde{b}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s_k \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}^{\tilde{b}} n)^k}\right) & (\varepsilon_3^2)^{-1/4} e^{n\tilde{\ell}^{\tilde{b}}} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}^{\tilde{b}} n)^k}\right) \\ -e^{-n\tilde{\ell}^{\tilde{b}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t_k \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}^{\tilde{b}} n)^k}\right) & -\varepsilon_3^2 (\varepsilon_3^2)^{1/4} e^{n\tilde{\ell}^{\tilde{b}}} \sum_{k=0}^{\infty} t_k \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}^{\tilde{b}} n)^k}\right) \end{pmatrix} \tilde{\sigma} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (n^{2/3}\zeta)^{-1/4} & 0 \\ 0 & (n^{2/3}\zeta)^{1/4} \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (-1)^k s_k & (\varepsilon_3^2)^{-1/4} s_k \\ -(-1)^k t_k & -\varepsilon_3^2 (\varepsilon_3^2)^{1/4} t_k \end{pmatrix} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-n\tilde{\ell}b} & 0 \\ 0 & e^{n\tilde{\ell}b} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}b n)^k} \right) = \\
& = \frac{e^{\pi i/12}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (n^{2/3}\zeta)^{-1/4} & 0 \\ 0 & (n^{2/3}\zeta)^{1/4} \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (-1)^k s_k & s_k \\ -(-1)^k t_k & t_k \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-n\tilde{\ell}b} & 0 \\ 0 & e^{n\tilde{\ell}b} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}b n)^k} \right) = \quad (55) \\
& = \frac{(n^{2/3}\zeta)^{-\sigma_3/4}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-n\tilde{\ell}b} & 0 \\ 0 & e^{n\tilde{\ell}b} \end{pmatrix} \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (56)
\end{aligned}$$

Асимптотические формулы (55) и (56) выведены при $\zeta \in I' \cap \partial O_b$ (см. рис. 4). Повторение тех же рассуждений для других участков ∂O_b приводит к тем же формулам. Итак, (55) и (56) справедливы равномерно на ∂O_b .

Граничное условие на ∂O_b в (48), которое мы должны удовлетворить, имеет вид

$$E(z)\Psi(n^{2/3}\zeta(z)) = \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) N A \quad \text{равномерно по } z \in \partial O_b \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

или

$$E(z)\Psi(n^{2/3}\zeta(z))A^{-1} = N + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{равномерно по } z \in \partial O_b \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где

$$A := \text{diag} \{ \varphi W_n^{1/2}, (\varphi W_n^{1/2})^{-1} \} = \text{diag} \{ e^{-n\tilde{\ell}b}, e^{n\tilde{\ell}b} \} \text{diag} \{ s, s^{-1} \},$$

здесь мы использовали обозначение:

$$s := \tilde{s}(\tilde{W}; z) \tilde{W}^{1/2}. \quad (57)$$

Обозначим $S_0 = \text{diag} \{ s, s^{-1} \}$.

Определим матрицу-функцию E условием

$$\begin{aligned}
E(z) \frac{(n^{2/3}\zeta)^{-\sigma_3/4}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix} S_0^{-1} &= N = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \left(\frac{z-b}{z-a} \right)^{\sigma_3/4} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Верно следующее разложение:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{4i\pi/3} \\ e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \end{pmatrix} = e^{-i\pi/6} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$E(z) = 2\sqrt{\pi} N S_0 \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}^{-1} (n^{2/3}\zeta(z))^{\sigma_3/4}, \quad (58)$$

или в более развернутой форме

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \left(\frac{z-b}{z-a} \right)^{\sigma_3/4} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{i\pi/6} 2\sqrt{\pi} (n^{2/3}\zeta)^{\sigma_3/4} = \\ &= e^{i\pi/6} \frac{\sqrt{\pi}}{2s} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \left(\frac{z-b}{z-a} \right)^{\sigma_3/4} \begin{pmatrix} s^2-1 & -(s^2+1) \\ s^2+1 & s^2-1 \end{pmatrix} (n^{2/3}\zeta)^{\sigma_3/4}. \end{aligned}$$

Отметим, что при $S_0 = I$, т. е., например, при $\tilde{W} = 1$, имеем

$$E(z) = e^{i\pi/6} \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{z-a}{z-b} n^{2/3}\zeta \right)^{\sigma_3/4}. \quad (59)$$

Осталось проверить, что $E(z)$ голоморфна в O_b .

Утверждение 1. $E(z)$ голоморфна в O_b .

Доказательство. Во-первых, докажем, что на ΔE не претерпевает скачок.

В окрестности точки b поведение функций β , β^{-1} и ζ эквивалентно:

$$\beta(z) \simeq (z-b)^{1/4}, \quad \beta^{-1}(z) \simeq 1/(z-b)^{1/4}, \quad \zeta(z) \simeq (z-b).$$

Далее, перемножим матрицы в правой части (58) и получим:

$$\begin{aligned} E(z) &= \text{const} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\beta}(s+s^{-1}) + \beta(s-s^{-1}) \right) \zeta^{1/4} & \left(\frac{1}{\beta}(-s+s^{-1}) - \beta(s+s^{-1}) \right) \zeta^{-1/4} \\ \left(\frac{1}{\beta}(-s-s^{-1}) + \beta(s-s^{-1}) \right) i\zeta^{1/4} & - \left(\frac{1}{\beta}(-s+s^{-1}) + \beta(s+s^{-1}) \right) i\zeta^{-1/4} \end{pmatrix} \times \\ &\times (n^{2/3})^{\sigma_3/4}. \end{aligned} \quad (60)$$

Достаточно проверить, что центральная матрица не меняется при пересечении Δ . Проверим это, например, для элемента в правом верхнем углу этой матрицы (учитывая, что $s_+ = 1/s_-$):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\beta_+}(s_+ + s_+^{-1}) + \beta_+(s_+ - s_+^{-1}) \right) \zeta_+^{1/4} \rightarrow \left(\frac{1}{\beta_-}(s_- + s_-^{-1}) + \beta_-(s_- - s_-^{-1}) \right) \zeta_-^{1/4} = \\ &= \left(\frac{1}{i\beta_+}(s_+^{-1} + s_+) + i\beta_+(s_+^{-1} - s_+) \right) i\zeta_+^{1/4} = \left(\frac{1}{\beta_+}(s_+ + s_+^{-1}) + \beta_+(s_+ - s_+^{-1}) \right) \zeta_+^{1/4}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется и для других элементов матрицы.

И, наконец, покажем, что точка b является устранимой особой точкой для E . Из граничных условий на Δ следует, что

$$s \simeq \frac{1}{s} \simeq (z-b)^{-1/2} \quad \text{в } O_b,$$

поэтому элементы в матрице (60) не могут иметь в точке b сингулярность выше порядка $O(1/(z-b)^{1/2})$, но так как мы знаем, что в проколотой окрестности функция E аналитична, то изолированная особая точка b -устраима. Поэтому E аналитична и в O_b . ■

Таким образом, определив E формулой (58), мы «сшили» условие на границе ∂O_b :

$$E(z)\Psi(n^{2/3}\zeta(z))A^{-1} = N + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ равномерно по } z \in \partial O_b \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

2.7.5. Локальная краевая задача в окрестности другой концевой точки носителя — a .
Решим краевую задачу и в окрестности другой концевой точки носителя:

$$U_a \in H_{2 \times 2}^2(O_a \setminus (\Delta_a \cup \Delta_a^+ \cup \Delta_a^- \cup F_a^\varepsilon)),$$

$$U_{a+} = U_{a-} \begin{cases} D & \text{на } \Delta_a^+ \cup \Delta_a^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta_a, \\ J & \text{на } F_a^\varepsilon, \end{cases}$$

$$U_a(z) = (I(z) + o(1))N, \text{ при } z \in O_a \text{ } n \rightarrow \infty.$$

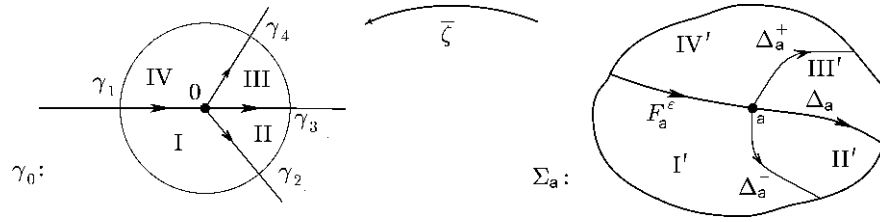


Рис. 5. Действие функции $\bar{\zeta}$

Определим функции:

$$\ell_{\pm}^a(z) = \pm \int_a^z d\lambda = \pm \int_a^z (t-a)^{1/2} h(t) dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta, \quad \tilde{\ell}^a(z) = \pi i \ell^a(z).$$

Очевидно выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \tilde{\ell}_+^b + \pi i = \tilde{\ell}_+^a, \\ \tilde{\ell}_-^b - \pi i = \tilde{\ell}_-^a. \end{cases}$$

Матрицу A можно теперь записать в виде:

$$A := \text{diag} \{ \varphi W_n^{1/2}, (\varphi W_n^{1/2})^{-1} \} = \text{diag} \{ e^{-n\tilde{\ell}^a}, e^{n\tilde{\ell}^a} \} \text{diag} \{ s, s^{-1} \}.$$

Далее, рассмотрим функцию

$$\tilde{\zeta}(z) := - \left(\frac{3}{2} \tilde{\ell}^a(z) \right)^{2/3} = (z-a) M_1^{2/3}(z). \quad (61)$$

Рассуждая так же как и для функции (51), можно убедиться что функция (61) осуществляет конформное отображение области O_a в некую окрестность 0, причем контуры отображаются как показано на рис.5.

Пользуясь соотношениями $\bar{\gamma}_1 = -\gamma_1$, $\bar{\gamma}_2 = -\gamma_2$, $\bar{\gamma}_3 = -\gamma_3$, $\bar{\gamma}_4 = -\gamma_4$ нетрудно показать, что функция $\bar{\Psi}(z) = \sigma_3 \Psi(-z) \sigma_3$ (сопряжение с матрицей Паули учитывает

изменение направления лучей) решает задачу

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &\in H(\mathbb{C} \setminus \bar{\gamma}_0), \quad \exists \Psi_{\pm} \in \mathbb{C}(\bar{\gamma}_0), \\ \bar{\Psi}_+ := \bar{\Psi}_- &\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_4, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \bar{\gamma}_3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \bar{\gamma}_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (62)$$

Теми же рассуждениями, что и для $\Psi(n^{2/3}\zeta)$ можно убедиться, что асимптотический ряд для $\bar{\Psi}(n^{2/3}\bar{\zeta})$ примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(n^{2/3}\bar{\zeta}) &= \sigma_3 \Psi(-n^{2/3}\bar{\zeta}) \sigma_3 = \sigma_3 \begin{pmatrix} \text{Ai}(-n^{2/3}\bar{\zeta}) & \text{Ai}(-\varepsilon_3^2 n^{2/3}\bar{\zeta}) \\ \text{Ai}'(-n^{2/3}\bar{\zeta}) & \varepsilon_3^2 \text{Ai}'(-\varepsilon_3^2 n^{2/3}\bar{\zeta}) \end{pmatrix} \bar{\sigma} \sigma_3 = \\ &= \sigma_3 \frac{e^{\pi i/12}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (-n^{2/3}\bar{\zeta})^{-1/4} & 0 \\ 0 & (-n^{2/3}\bar{\zeta})^{1/4} \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (-1)^k s_k & s_k \\ -(-1)^k t_k & t_k \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-n\bar{\ell}^a} & 0 \\ 0 & e^{n\bar{\ell}^a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (\bar{\ell}^a n)^k \end{pmatrix} \sigma_3 = \\ &= \sigma_3 \frac{(-n^{2/3}\bar{\zeta})^{-\sigma_3/4}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-n\bar{\ell}^a} & 0 \\ 0 & e^{n\bar{\ell}^a} \end{pmatrix} \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sigma_3. \end{aligned}$$

Определив функцию \bar{E} как:

$$\begin{aligned} \bar{E}(z) \sigma_3 \frac{(-n^{2/3}\bar{\zeta}(z))^{-\sigma_3/4}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix} S_0^{-1} \sigma_3 &= N = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-b \\ z-a \end{pmatrix}^{\sigma_3/4} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

получим

$$\bar{E}(z) = 2\sqrt{\pi} N S_0 \sigma_3^{-1} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}^{-1} \sigma_3^{-1} (-n^{2/3}\bar{\zeta}(z))^{\sigma_3/4}.$$

При $S_0 = I$

$$\bar{E}(z) = e^{i\pi/6} \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-b \\ z-a \end{pmatrix}^{\sigma_3/4} (-n^{2/3}\bar{\zeta}(z))^{\sigma_3/4}. \quad (63)$$

2.8. Заключительное преобразование $S \rightarrow R$. Наконец, мы готовы проделать последнее преобразование. Введем матрицу-функцию

$$S_{\text{par}} = \begin{cases} U_a & \text{на } O_a, \\ U_b & \text{на } O_b, \\ N & \text{иначе.} \end{cases} \quad (64)$$

С помощью формул выведенных в предыдущем пункте выпишем явно выражения для U_a, U_b :

$$\begin{aligned} U_b &:= V_b A^{-1} = E(z) \Psi(\tilde{c}_n \zeta(z)) A^{-1} = \\ &= e^{\pi i/12} N S_0 \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (-1)^k s_k & s_k \\ -(-1)^k t_k & t_k \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} S_0^{-1} \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}^b n)^k} \right), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} U_a &:= V_a A^{-1} = \bar{E}(z) \bar{\Psi}(\tilde{c}_n \tilde{\zeta}(z)) A^{-1} = \\ &= e^{\pi i/12} N S_0 \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (-1)^k s_k & s_k \\ -(-1)^k t_k & t_k \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} S_0^{-1} \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}^a n)^k} \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Суммируя проделанные преобразования получаем (аналогично [3])

Утверждение 2. Пусть

$$R(z) \equiv S(z) S_{\text{par}}^{-1}(z) \quad \text{для } z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_R, \quad (67)$$

где контур Σ_R получается из контура Σ_1 для S прибавлением границ областей O_a и O_b , т. е. $\Sigma_R = \Sigma_1 \cup \partial O_a \cup \partial O_b$. Тогда S является решением задачи (33) тогда и только тогда, когда R решает следующую задачу Римана—Гильберта

$$\begin{aligned} R &\in H_{2 \times 2}^2(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Sigma_R), \\ R_+ = R_- \nu_R = R_- &\begin{cases} N D N^{-1} & \text{на } \Delta^+ \cup \Delta^- \setminus \{\Delta_a^+ \cup \Delta_b^+ \cup \Delta_a^- \cup \Delta_b^-\}, \\ U_\alpha N^{-1} & \text{на } \partial O_\alpha, \quad \alpha = a, b, \\ N J N^{-1} & \text{на } F_a \cup F_b \setminus \{F_a^\varepsilon \cap F_b^\varepsilon\}, \end{cases} \quad (68) \\ R(z) &= I + O(1/z), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Матрицы скачков ν_R стремятся к единичной матрице. Более того, если рассмотреть матрицу

$$\Delta_R := \nu_R - I,$$

то существуют положительные константы c_1, C_1 такие, что на контуре Σ_R для матриц Δ_R верны следующие оценки:

$$\|\Delta_R\|_{L^1(\partial O_a \cup \partial O_b)} + \|\Delta_R\|_{L^2(\partial O_a \cup \partial O_b)} + \|\Delta_R\|_{L^\infty(\partial O_a \cup \partial O_b)} \leq \frac{c_1}{n}, \quad (69)$$

$$\|\Delta_R\|_{L^1(\Sigma_R \setminus \{\partial O_a \cup \partial O_b\})} + \|\Delta_R\|_{L^2(\Sigma_R \setminus \{\partial O_a \cup \partial O_b\})} + \|\Delta_R\|_{L^\infty(\Sigma_R \setminus \{\partial O_a \cup \partial O_b\})} \leq C_1 e^{-nc_1}. \quad (70)$$

Действительно, соотношение (69) проверяется, используя (66) и (65). Соотношение (70) следует из того факта, что N и N^{-1} равномерно ограничены вне окрестностей O_a и O_b , а матрицы D и J стремятся к единичной с геометрической скоростью вне тех же окрестностей (см. п. 2.5).

Замечание 1. Ввиду локальных условий на плотность равновесной меры функции-матрицы D , J допускают аналитическое продолжение с берегов Δ в линзообразные области d^+ и d^- (см. п. 2.4). Поэтому оценка (70) выполняется в некоторой окрестности соответствующих контуров, с константами, зависящими от расстояния до контуров.

Оценки (69), (70) с учетом замечания позволяют заключить, что

$$R(z) \rightarrow I \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{в } \overline{\mathbb{C}}. \quad (71)$$

Действительно, рассмотрим тривиальную факторизацию $\nu_R = (b_R)_-^{-1}(b_R)_+$, где $(b_R)_- = I$, а $(b_R)_+ = \nu_R$. Обозначим $(w_R)_- := (b_R)_- - I = 0$ и $(w_R)_+ := (b_R)_+ - I = \Delta_R$. Пусть C — оператор Коши на контуре Σ :

$$(Cf)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(s)}{s-z} ds.$$

Тогда для $f \in L^2(\Sigma)$ верно

1. Cf аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.
2. $Cf(\cdot \pm i\varepsilon)$ сходится в $L^2(\Sigma)$ к $(Cf)_{\pm}$ при $\varepsilon \searrow 0$.
3. Оператор $C_{\pm}f := (Cf)_{\pm}$ — ограниченный оператор из $L^2(\Sigma)$ в $L^2(\Sigma)$, причем $C_+ - C_- = \mathbf{1}$.

Доказательства этих фактов следуют из стандартного анализа для преобразования Коши, отметим, что граничное условие в 3 есть формула Сохоцкого—Племеля.

Обозначим

$$C_{\Delta_R}(f) := C_-(f\Delta_R) = C_-(f(w_R)_+) + C_+(f(w_R)_-). \quad (72)$$

Известно (см. [22]), что при $w_{\pm} \in L^{\infty}(\Sigma, |dz|)$ оператор $C_{\Delta_R}(f)$ есть (ввиду (69), (70)) ограниченный линейный оператор из $L^2(\Sigma_R, \mathbb{C}^{2 \times 2})$ на себя, с нормой равной $\|C_{\Delta_R}\| = O(1/n)$. Поэтому оператор $I - C_{\Delta_R}$ обратим и следовательно следующее выражение имеет смысл

$$\mu_R := (I - C_{\Delta_R})^{-1}(C_- \Delta_R) \in L^2(\Sigma_R). \quad (73)$$

Таким образом, решение R задачи (68) может быть записано в интегральной форме

$$R(z) = I + \int_{\Sigma_R} \frac{\Delta_R(s) + \mu_R(s)\Delta_R(s)}{s-z} \frac{ds}{2\pi i}. \quad (74)$$

Откуда следует (71), что в итоге позволяет, обращая цепочку преобразований $R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow Y$, получить главный член асимптотики.

2.9. Асимптотическое разложение для R . Теперь перейдем к получению основного результата этой части, а именно, покажем, как с помощью формулы (74), а также из асимптотического представления по степеням $1/n$ матрицы Δ_R

$$\Delta_R(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta_R^k(z)}{n^k} \quad \text{при } n \rightarrow 0, \quad z \in \Sigma_R, \quad (75)$$

можно явно вычислять асимптотическое разложение для R .

Напомним точные выражения для $\Delta_R^k(z)$. На контурах $\Sigma_R \setminus \{\partial O_a \cup \partial O_b\}$, в связи с геометрическим убыванием, $\Delta_R^k(z) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Из определения

$$\Delta_R = \begin{cases} U_a N^{-1} - I & \text{на } \partial O_a, \\ U_b N^{-1} - I & \text{на } \partial O_b. \end{cases}$$

Подставляя выражения для U_a и U_b получим для каждого $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \Delta_R^k &= U_b N^{-1} - I := V_b A^{-1} N^{-1} - I = E(z) \Psi(\tilde{c}_n \zeta) A^{-1} N^{-1} - I = \\ &= e^{\pi i/12} N S_0 \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^k s_k & s_k \\ -(-1)^k t_k & t_k \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} S_0^{-1} N^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ (\tilde{\ell}^b)^k \end{pmatrix}, \quad z \in \partial O_b, \end{aligned} \quad (76)$$

и для границы другой области:

$$\begin{aligned} \Delta_R^k &= U_a N^{-1} - I := V_a A^{-1} N^{-1} - I = \bar{E}(z) \bar{\Psi}(\tilde{c}_n \tilde{\zeta}) A^{-1} N^{-1} - I = \\ &= e^{\pi i/12} N S_0 \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^k s_k & s_k \\ -(-1)^k t_k & t_k \end{pmatrix} \sigma_3 \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} S_0^{-1} N^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ (\tilde{\ell}^a)^k \end{pmatrix}, \quad z \in \partial O_a. \end{aligned} \quad (77)$$

В дальнейшем нам потребуется следующий результат:

Лемма 1. (а) Для любого k $\Delta_R^k(z)$ допускает мероморфное продолжение с границы ∂O_b в O_b . Это продолжение аналитическое, за исключением точки b , в которой функция $\Delta_R^k(z)$ имеет полюс порядка не больше $[(3k+1)/2]$.

(б) Аналогичное утверждение справедливо для $\Delta_R^k(z)$ в O_a .

Доказательство. (а) Как и в доказательстве Утверждения 1, вначале мы покажем, что $\forall k$ Δ_R^k не претерпевает скачок на Δ , а потом подсчитаем порядок особенности в точке b .

Итак, при $k = 2j$, $j = 1, 2, \dots$, перемножая все матрицы в формуле (76), получим:

$$\Delta_R^{2j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_{2j} a_{11} + t_{2j} b_{11} & i s_{2j} a_{12} - i t_{2j} b_{12} \\ -i s_{2j} a_{21} + i t_{2j} b_{21} & s_{2j} a_{22} + t_{2j} b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (\tilde{\ell}^b)^{2j} \end{pmatrix}, \quad (78)$$

где

$$a_{11}(s, \beta) = 1 + \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{1}{4}\beta^2 s^2,$$

$$b_{11}(s, \beta) = 1 - \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{1}{4}\beta^2 s^2,$$

$$a_{22}(s, \beta) = 1 - \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{1}{4}\beta^2 s^2,$$

$$b_{22}(s, \beta) = 1 + \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{1}{4}\beta^2 s^2,$$

$$\begin{aligned} a_{21}(s, \beta) &= \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{1}{2}s^2 - \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{1}{4}\beta^2 s^2, \\ b_{21}(s, \beta) &= \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{1}{2}s^2 - \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{1}{4}\beta^2 s^2, \\ a_{12}(s, \beta) &= \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{1}{2}s^2 + \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{1}{4}\beta^2 s^2, \\ b_{12}(s, \beta) &= \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{1}{2}s^2 - \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{1}{4}\beta^2 s^2, \end{aligned}$$

напомним, что s определено в (57), (17), а β — в (7).

Пользуясь граничными условиями на Δ для s и β : $s_+ = 1/s_-$, $\beta_+ = i\beta_-$, легко проверить, что ни одно из $a_{l,m}$, $b_{l,m}$, $l, m \in \{1, 2\}$, не меняется при прохождении Δ . Так как $(\widetilde{\ell}_+^b)^{2j} = (\widetilde{\ell}_-^b)^{2j}$, то имеем, что и Δ_R^{2j} не изменяются при проходе Δ .

Проверим, что и при нечетных $k = 2j - 1$, $j = 1, 2, \dots$, Δ_R^{2j-1} не меняется при проходе Δ .

$$\Delta_R^{2j-1}(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -s_{2j-1}\widetilde{a}_{11} - t_{2j-1}\widetilde{b}_{11} & is_{2j-1}\widetilde{a}_{12} + it_{2j-1}\widetilde{b}_{12} \\ is_{2j-1}\widetilde{a}_{21} + it_{2j-1}\widetilde{b}_{21} & s_{2j-1}\widetilde{a}_{22} + t_{2j-1}\widetilde{b}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (\widetilde{\ell}^b)^{2j-1} \end{pmatrix}, \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{11} &= \frac{1}{2\beta^2} + \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{1}{4}\beta^2 s^2, \\ \widetilde{b}_{11} &= \frac{1}{2\beta^2} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{1}{4}\beta^2 s^2, \\ \widetilde{a}_{22} &= \frac{1}{2\beta^2} + \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{1}{4}\beta^2 s^2, \\ \widetilde{b}_{22} &= \frac{1}{2\beta^2} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{1}{4}\beta^2 s^2, \\ \widetilde{a}_{21} &= \frac{1}{2\beta^2} - \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{\beta^2 s^2}{4}, \\ \widetilde{b}_{21} &= \frac{1}{2\beta^2} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{\beta^2 s^2}{4}, \\ \widetilde{a}_{12} &= \frac{1}{2\beta^2} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{\beta^2 s^2}{4}, \\ \widetilde{b}_{12} &= \frac{1}{2\beta^2} - \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{\beta^2 s^2}{4}. \end{aligned}$$

Пользуясь граничными условиями на Δ для s и β : $s_+ = 1/s_-$, $\beta_+ = i\beta_-$, легко проверить, что при прохождении Δ $(\widetilde{a}_{l,m})_+ = -(\widetilde{a}_{l,m})_-$, $(\widetilde{b}_{l,m})_+ = (\widetilde{b}_{l,m})_-$, $l, m \in \{1, 2\}$.

Так как $(\widetilde{\ell}_+^b)^{2j-1} = -(\widetilde{\ell}_-^b)^{2j-1}$, то имеем, что и Δ_R^{2j-1} не изменяются при проходе Δ .

Осталось определить характер особенности точки b . У каждой из функций $a_{l,m}$, $b_{l,m}$, $\widetilde{a}_{l,m}$, $\widetilde{b}_{l,m}$, $l, m \in \{1, 2\}$, в точке b полюс порядка $3/2$, действительно,

в окрестности b имеем: $s^2 \simeq 1/s^2 \simeq 1 + O((z-b)^{1/2})$, $\beta^2 \simeq (z-b)^{1/2}$, поэтому максимальный порядок достигается на члене вида $s^2/\beta^2 \simeq z^{-1/2}$. Мы знаем, что функция $\tilde{\ell}^b \simeq (z-b)^{3/2}$ в окрестности точки b . Перемножая, получим, что Δ_R^k имеет полюс порядка $(3k+1)/2$.

(b) Доказывается аналогично пункту (a), выпишем лишь выражения для Δ_R^{2j} и Δ_R^{2j-1} в окрестности точки a .

Итак, при $k = 2j$, $j = 1, 2, \dots$, перемножая все матрицы в формуле (77) получим:

$$\Delta_R^{2j}(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_{2j}b_{11} + t_{2j}a_{11} & -is_{2j}a_{12} + it_{2j}b_{12} \\ is_{2j}a_{21} - it_{2j}b_{21} & s_{2j}b_{22} + t_{2j}a_{22} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}^a)^{2j}} \right). \quad (80)$$

При нечетных $k = 2j-1$, $j = 1, 2, \dots$ для Δ_R^{2j-1} имеем:

$$\Delta_R^{2j-1}(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -s_{2j-1}\tilde{b}_{11} - t_{2j-1}\tilde{a}_{11} & is_{2j-1}\tilde{b}_{12} + it_{2j-1}\tilde{a}_{12} \\ is_{2j-1}\tilde{b}_{21} + it_{2j-1}\tilde{a}_{21} & s_{2j-1}\tilde{b}_{22} + t_{2j-1}\tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{(\tilde{\ell}^a)^{2j-1}} \right). \quad (81)$$

■

Замечание 2. Заметим, что при $s = 1$ мы имеем:

$$a_{11} = 1, \quad b_{11} = 1, \quad a_{22} = 1, \quad b_{22} = 1, \quad a_{21} = 1, \quad b_{21} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad b_{12} = 1$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= \frac{1}{\beta^2}, & \tilde{b}_{11} &= \beta^2, & \tilde{a}_{22} &= \frac{1}{\beta^2}, & \tilde{b}_{22} &= \beta^2, & \tilde{a}_{21} &= \frac{1}{\beta^2}, & \tilde{b}_{21} &= -\beta^2, \\ & & & & \tilde{a}_{12} &= \frac{1}{\beta^2}, & \tilde{b}_{12} &= -\beta^2. \end{aligned}$$

Формулы (78)–(81) при подстановке в них $s = 1$ превращаются в формулы из [20].

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 7.10 из [20], из леммы 1 получим

Утверждение 3. (ср. с теоремой 7.10 из [20]) *Единственное решение задачи (68) имеет равномерное по z асимптотическое разложение по степеням $1/n$ в виде*

$$R(z) \sim I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(z)}{n^k}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (82)$$

Здесь, $r_k(z)$ аналитические в $\mathbb{C} \setminus \{\partial O_a \cup \partial O_b\}$ и могут быть явно вычислены.

2.10. Рекуррентные соотношения для r_k . Для получения явных выражений для коэффициентов r_k получим для них рекуррентные граничные задачи. Мы следуем работе [24].

Итак, условие на скачок для R на контуре Σ_R имеет вид:

$$R_+ = R_-(I + \Delta_R). \quad (83)$$

Подставляя в это равенство асимптотические выражения (75) и (82) для Δ_R и R соответственно, далее группируя члены при степенях $1/n$, для $k = 1, 2, \dots$ получим

$$r_{k,+}(s) - r_{k,-}(s) = \sum_{j=1}^k r_{k-j,-}(s) \Delta_R^j(s) \quad \text{для } s \in \partial O_a \cup \partial O_b, \quad (84)$$

где $r_{0,-} = I$. В частности, учитывая, что $r_k(z) = O(1/z)$, при $z \rightarrow \infty$, а также то, что $\Delta_R^k(s) = 0$ для $s \in \Sigma_R$ из этой формулы, используя формулу Сохоцкого—Племеля, можно получить следующую интегральную формулу

$$r_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_R} \sum_{j=1}^k r_{k-j,-}(s) \Delta_R^j(s) \frac{ds}{s-z} \quad \text{для } z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_R. \quad (85)$$

Также из уравнения (84) можно получать аддитивные краевые задачи Римана—Гильберта. Например, выпишем их для r_1 и r_2 .

$$\begin{aligned} r_1 &\in H_{2 \times 2}^2(\mathbb{C} \setminus (\partial O_a \cup \partial O_b)), \\ r_{1,+}(s) - r_{1,-}(s) &= \Delta_R^1(s) \quad \text{на } s \in \partial O_a \cup \partial O_b, \\ r_1(z) &= O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (86)$$

Зная r_k , можно поставить аналогичную задачу на r_{k+1} :

$$\begin{aligned} r_2 &\in H_{2 \times 2}^2(\mathbb{C} \setminus (\partial O_a \cup \partial O_b)), \\ r_{2,+}(s) - r_{2,-}(s) &= r_{1,-}(s) \Delta_R^1(s) + \Delta_R^2(s) \quad \text{на } s \in \partial O_a \cup \partial O_b, \\ r_2(z) &= O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (87)$$

и т. д.

2.11. Асимптотика ортогональных полиномов относительно веса W_n (окончание доказательства теоремы 1). В данном пункте мы вернемся к рассмотрению ортогональных полиномов. «Раскручивая» цепь преобразований

$$Y \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow R$$

в обратную сторону и используя полученное в предыдущем пункте, асимптотическое разложение для R , получим асимптотическое разложение для Y .

Пусть K — замкнутое множество из $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$. Тогда возможно и дуги Δ^\pm , и окружности ∂O_a , ∂O_b выбрать так, чтобы они не пересекались с K , а также, чтобы K лежало с их + стороны.

По определению матриц-функций T, S, R в K имеем:

$$S(z) = R(z)N(z), \quad T(z) = S(z), \quad Y(z) = C^{-1}(z)T(z)\Phi^{-1}(z).$$

Таким образом,

$$Y(z) = C^{-1}R(z)N(z)\Phi^{-1}(z), \quad z \in K. \quad (88)$$

После подстановки выражений для матриц C и Φ , которые были определены в п. 2.3, получим для $z \in K$:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \text{diag} \{C_n, C_n^{-1}\} \begin{pmatrix} R_{11}(z) & R_{12}(z) \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{\beta + \beta^{-1}}{2} & \frac{\beta - \beta^{-1}}{2i} \\ -\frac{\beta - \beta^{-1}}{2i} & \frac{\beta + \beta^{-1}}{2} \end{pmatrix} \text{diag} \{\varphi(z), \varphi^{-1}(z)\}, \end{aligned}$$

функция φ и константа C_n определены в (18), а β задана в (7).

Таким образом,

$$\begin{aligned} Y_{11}(z) &:= P_n(z) = \\ &= \frac{c_n \varphi(z)}{2} [R_{11}(z)(\beta(z) + \beta^{-1}(z)) + iR_{12}(z)(\beta(z) - \beta^{-1}(z))], \end{aligned} \quad (89)$$

а для функций второго рода

$$\begin{aligned} Y_{12}(z) &:= R_n(z) = \\ &= \frac{c_n}{2\varphi(z)} [iR_{11}(z)(-\beta(z) + \beta^{-1}(z)) + R_{12}(z)(\beta(z) + \beta^{-1}(z))]. \end{aligned} \quad (90)$$

Подставим вместо R_{11} , R_{12} их асимптотические разложения (82):

$$\begin{aligned} \frac{2P_n(z)}{c_n \varphi(z)} &\sim (\beta(z) + \beta^{-1}(z)) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k^{11}(z)}{n^k} + i \frac{\beta(z) - \beta^{-1}(z)}{\beta(z) + \beta^{-1}(z)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k^{12}(z)}{n^k} \right] = \\ &= (\beta(z) + \beta^{-1}(z)) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(r_k^{11}(z) + i \frac{\beta(z) - \beta^{-1}(z)}{\beta(z) + \beta^{-1}(z)} r_k^{12}(z) \right) \frac{1}{n^k} \right], \end{aligned}$$

где

$$r_k(z) = \begin{pmatrix} r_k^{11}(z) & r_k^{12}(z) \\ r_k^{21}(z) & r_k^{22}(z) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили теорему 1 с

$$\Pi_k(z) = r_k^{11}(z) + i \frac{\beta(z) - \beta^{-1}(z)}{\beta(z) + \beta^{-1}(z)} r_k^{12}(z), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (91)$$

где r_k определяется с помощью (84)–(87).

§ 3. Вычисление Π_1

Из леммы 1 мы знаем, что Δ_R^1 аналитична в окрестности точек a, b , за исключением полюсов в них порядка 2. Поэтому

$$\Delta_R^1(z) = \frac{\tilde{A}^{(2)}}{(z-b)^2} + \frac{\tilde{A}^{(1)}}{(z-b)} + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow b,$$

$$\Delta_R^1(z) = \frac{\tilde{B}^{(2)}}{(z-a)^2} + \frac{\tilde{B}^{(1)}}{(z-a)} + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow a$$

для некоторых матриц $\tilde{A}^{(1)}$, $\tilde{A}^{(2)}$ и $\tilde{B}^{(1)}$, $\tilde{B}^{(2)}$. Поэтому очевидно, что функция

$$r_1(z) = \begin{cases} \frac{\tilde{A}^{(2)}}{(z-b)^2} + \frac{\tilde{A}^{(1)}}{(z-b)} \frac{\tilde{B}^{(2)}}{(z-a)^2} + \frac{\tilde{B}^{(1)}}{(z-b)} & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus (\overline{O_b} \cup \overline{O_a}), \\ \frac{\tilde{A}^{(2)}}{(z-b)^2} + \frac{\tilde{A}^{(1)}}{(z-b)} \frac{\tilde{B}^{(2)}}{(z-a)^2} + \frac{\tilde{B}^{(1)}}{(z-b)} - \Delta_R^1 & \text{при } z \in O_b \cup O_a, \end{cases}$$

решает задачу (86).

Из леммы 1 следует, что в окрестности точки b

$$\Delta_R^1(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -s_1 \tilde{a}_{11}(s, \beta) - t_1 \tilde{b}_{11}(s, \beta) & i s_1 \tilde{a}_{12}(s, \beta) + i t_1 \tilde{b}_{12}(s, \beta) \\ i s_1 \tilde{a}_{21}(s, \beta) + i t_1 \tilde{b}_{21}(s, \beta) & s_1 \tilde{a}_{22}(s, \beta) + t_1 \tilde{b}_{22}(s, \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (\tilde{\ell}^b) \end{pmatrix}, \quad (92)$$

а в окрестности точки a

$$\Delta_R^1(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -s_1 \tilde{b}_{11}(s, \beta) - t_1 \tilde{a}_{11}(s, \beta) & i s_1 \tilde{b}_{12}(s, \beta) + i t_1 \tilde{a}_{12}(s, \beta) \\ i s_1 \tilde{b}_{21}(s, \beta) + i t_1 \tilde{a}_{21}(s, \beta) & s_1 \tilde{b}_{22}(s, \beta) + t_1 \tilde{a}_{22}(s, \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (\tilde{\ell}^a) \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Напомним выражения для β^2 и $\tilde{\ell}^b$:

$$\beta^2(z) = \frac{(z-b)^{1/2}}{(z-a)^{1/2}},$$

$$\tilde{\ell}^b(z) = i\pi \int_z^b d\lambda(x).$$

Для производной равновесной меры λ во внешнем поле мы предположили в условии теоремы:

$$\lambda'(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(z-a)(z-b)} h(z).$$

Подставляя выражение для производной равновесной меры в интеграл для $\tilde{\ell}^b(z)$ получим

$$\tilde{\ell}^b(z) = \frac{i}{2} \int_z^b \sqrt{(x-a)(x-b)} h(x) dx. \quad (94)$$

Получим разложение в окрестности точки b . Для этого выпишем ряды по степеням $(x-b)$ для подынтегральных функций в окрестности точки b :

$$\sqrt{(x-a)} = \sqrt{(b-a)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b-a}} (x-b) - \frac{1}{8} \frac{1}{(b-a)^{3/2}} (x-b)^2 + \dots,$$

$$h(x) = h(b) + h'(b)(x-b) + \frac{1}{2} h^{(2)}(b)(x-b)^2 \dots,$$

поэтому

$$\tilde{\ell}^b(z) = \frac{i}{2} \int_z^b \sqrt{(x-b)\sqrt{b-a}} h(b) dx +$$

$$+ \frac{i}{2} \int_z^b \sqrt{(x-b)} (x-b) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b-a}} h(b) + \sqrt{b-a} h'(b) \right) dx + \dots$$

Производя интегрирование получим:

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}^b(z) &= \frac{i}{2} \left(-\frac{2}{3} \sqrt{b-a} h(b) (z-b)^{3/2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b-a}} h(b) + \sqrt{b-a} h'(b) \right) (z-b)^{5/2} - \dots \right) = \\ &= -\frac{i}{2} (z-b)^{3/2} \left(\frac{2}{3} \sqrt{b-a} h(b) + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b-a}} h(b) + \sqrt{b-a} h'(b) \right) (z-b) + \dots \right).\end{aligned}$$

Следовательно, разложение по степеням $(z-b)$ для $1/\tilde{\ell}^b$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{\ell}^b(z)} &= \frac{2i}{(z-b)^{3/2}} \times \\ &\quad \times \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{b-a} h(b)} - \frac{9}{10} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b-a}} h(b) + \sqrt{b-a} h'(b)}{(b-a)h^2(b)} (z-b) + O((z-b)^2) \right).\end{aligned}$$

Теперь перейдем в окрестность другой концевой точки носителя — точки a . Имеем,

$$\tilde{\ell}^a(z) = i\pi \int_a^z d\lambda(x) = \frac{i}{2} \int_a^z \sqrt{(x-a)(x-b)h(x)} dx.$$

Выпишем степенные ряды для подынтегральных функций:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-b)} &= \sqrt{(a-b)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a-b}} (x-a) - \frac{1}{8} \frac{1}{(a-b)^{3/2}} (x-a)^2 + \dots, \\ h(x) &= h(a) + h'(a)(x-a) + \frac{1}{2} h^{(2)}(a)(x-a)^2 \dots,\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}^a(z) &= \frac{i}{2} \int_a^z \sqrt{(x-a)} \sqrt{(a-b)h(a)} dx + \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_a^z \sqrt{(x-a)(x-a)} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(a-b)}} h(a) + \sqrt{(a-b)h'(a)} \right) dx + \dots.\end{aligned}$$

Производя интегрирование получим:

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}^a(z) &= \frac{i}{2} \left(\frac{2}{3} \sqrt{a-b} h(a) (z-a)^{3/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a-b}} h(a) + \sqrt{a-b} h'(a) \right) (z-a)^{5/2} - \dots \right) = \\ &= \frac{i}{2} (z-a)^{3/2} \left(\frac{2}{3} \sqrt{a-b} h(a) + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a-b}} h(a) + \sqrt{a-b} h'(a) \right) (z-a) + \dots \right).\end{aligned}$$

Следовательно, разложение по степеням $(z - a)$ для $\frac{1}{\ell^a}$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{\tilde{\ell}^a(z)} = -\frac{2i}{(z-a)^{3/2}} \times \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{(a-b)h(a)}} - \frac{9}{10} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(a-b)}} h(a) + \sqrt{(a-b)} h'(a)}{(a-b)h^2(a)} (z-a) + \dots \right).$$

Осталось получить ряды для $\tilde{a}_{11}, \tilde{b}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{b}_{12}, \tilde{a}_{21}, \tilde{b}_{21}, \tilde{a}_{22}, \tilde{b}_{22}$.

Вначале покажем, как получить степенной ряд для функции Сегё $\tilde{s}(\tilde{W}; z)$, где $\tilde{W} = \exp \{-2Q_1\}$.

Мы знаем, что в классе ограниченных функций $\tilde{s}(\tilde{W}; z)$ задается формулой (17).

Исследуем поведение этой функции в окрестности точки b : введем замкнутый контур γ , захватывающий носитель равновесной меры λ , содержащий точку $z \in O_b$ и ориентированный против часовой стрелки. Тогда имеет место

Лемма 2. В окрестности точки b имеем:

$$\tilde{s}(\tilde{W}; z) = \frac{1}{\tilde{W}^{1/2}(z)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((z-a)(z-b))^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-b)^k \right\}, \quad (95)$$

где коэффициенты c_k задаются формулой

$$c_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\log \tilde{W}(\zeta)}{((\zeta-a)(\zeta-b))^{1/2} (\zeta-b)^{k+1}} d\zeta. \quad (96)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}}.$$

Подынтегральная функция внутри контура γ имеет три особенности — точки a, b и точку z . Окружим эти особенности контурами γ_0 и γ_1 . Тогда, по теореме Коши имеем:

$$\int_{\gamma} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}} + \int_{\gamma_0} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}} + \int_{\gamma_1} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}} = 0.$$

Последний интеграл есть не что иное как вычет в точке z . Так как у подынтегральной функции в точке z простой полюс, то вычет равен

$$\int_{\gamma_1} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}_1} \frac{\log \tilde{W}(t)}{w_{\Delta}} \frac{dt}{t-z} = \frac{\log \tilde{W}(z)}{((z-a)(z-b))^{1/2}},$$

где контур $\bar{\gamma}_1$ равен контуру γ_1 с противоположной ориентацией.

Нетрудно убедиться в том, что:

$$\int_{\gamma_0} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}} = 2 \int_{\Delta} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}},$$

поэтому

$$\int_{\Delta} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta+}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\log \tilde{W}(z)}{((z-a)(z-b))^{1/2}} + \int_{\gamma} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}} \right). \quad (97)$$

Таким образом, подставляя тождество (97) в выражение для функции Сегё, получим:

$$\tilde{s}(\tilde{W}; z) = \frac{1}{\tilde{W}^{1/2}(z)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((z-a)(z-b))^{1/2} \int_{\gamma} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}} \right\}.$$

Далее, интеграл в предыдущей формуле есть интеграл типа Коши и есть аналитическая функция во всякой односвязной области, не содержащей точек контура γ , поэтому для $z \in O_b$ допускает разложение

$$\int_{\gamma} \frac{\log \tilde{W}(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i w_{\Delta}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-b)^k,$$

коэффициенты c_k задаются формулой (96). ■

Аналогично доказывается следующая

Лемма 3. *В окрестности точки a имеем:*

$$\tilde{s}(\tilde{W}; z) = \frac{1}{\tilde{W}^{1/2}(z)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((z-a)(z-b))^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k \right\}, \quad (98)$$

где коэффициенты d_k задаются формулой

$$d_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\log \tilde{W}(\zeta)}{((\zeta-a)(\zeta-b))^{1/2} (\zeta-a)^{k+1}} d\zeta. \quad (99)$$

С помощью этих лемм легко получить асимптотическое разложение для $s^2(z)$, где $s(z) := \tilde{s}(\tilde{W}; z) \tilde{W}^{1/2}(z)$. При $z \rightarrow b$ имеем

$$\begin{aligned} s^2(z) &= \exp \left\{ -((z-a)(z-b))^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-b)^k \right\} = \\ &= 1 - c_0 \sqrt{(b-a)(z-b)^{1/2}} + \frac{1}{2} c_0^2 (b-a)(z-b) - \\ &\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{3(2c_1(b-a) + c_0) + c_0^2 (b-a)^2}{\sqrt{(b-a)}} \right) (z-b)^{3/2} - \dots \end{aligned}$$

А ряд для $1/s^2$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(z)} &= 1 + c_0 \sqrt{(b-a)(z-b)^{1/2}} + \frac{1}{2} c_0^2 (b-a)(z-b) + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{3(2c_1(b-a) + c_0) + c_0^2 (b-a)^2}{\sqrt{(b-a)}} \right) (z-b)^{3/2} + \dots \end{aligned}$$

В дальнейшем удобно будет рассматривать сгруппированные ряды для $s^2 + \frac{1}{s^2}$ и $s^2 - \frac{1}{s^2}$:

$$s^2 + \frac{1}{s^2} = 2 + c_0^2(b-a)(z-b) + \dots,$$

$$s^2 - \frac{1}{s^2} = -2c_0\sqrt{(b-a)}(z-b)^{1/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{3(2c_1(b-a) + c_0) + c_0^2(b-a)^2}{\sqrt{(b-a)}}\right)(z-b)^{3/2}.$$

Теперь мы готовы выписать ряды для \tilde{a}_{11} , \tilde{b}_{11} , \tilde{a}_{12} , \tilde{b}_{12} , \tilde{a}_{21} , \tilde{b}_{21} , \tilde{a}_{22} , \tilde{b}_{22} :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= \frac{1}{2\beta^2} + \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{1}{4}\beta^2 s^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^2} + \beta^2\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\beta^2} - \beta^2\right)\left(\frac{1}{s^2} + s^2\right), \\ \tilde{b}_{11} &= \frac{1}{2\beta^2} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{1}{4}\beta^2 s^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^2} + \beta^2\right) + \frac{1}{4}\left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} + s^2\right), \\ \tilde{a}_{21} &= \frac{1}{2\beta^2} - \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{\beta^2 s^2}{4} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^2} - \beta^2\right) - \frac{1}{2}\left(s^2 - \frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} + s^2\right), \\ \tilde{b}_{21} &= \frac{1}{2\beta^2} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{\beta^2 s^2}{4} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^2} - \beta^2\right) + \frac{1}{2}\left(s^2 - \frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} + s^2\right), \\ \tilde{a}_{12} &= \frac{1}{2\beta^2} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4\beta^2 s^2} + \frac{\beta^2}{4s^2} + \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{4\beta^2} + \frac{\beta^2 s^2}{4} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^2} - \beta^2\right) + \frac{1}{2}\left(s^2 - \frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} + s^2\right), \\ \tilde{b}_{12} &= \frac{1}{2\beta^2} - \frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4\beta^2 s^2} - \frac{\beta^2}{4s^2} - \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{4\beta^2} - \frac{\beta^2 s^2}{4} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^2} - \beta^2\right) - \frac{1}{2}\left(s^2 - \frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} + s^2\right).\end{aligned}$$

А члены $\tilde{a}_{22} = \tilde{a}_{11}$, $\tilde{b}_{22} = \tilde{b}_{11}$.

Кроме того, будем использовать выражения для

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\beta^2} + \beta^2 = \\ &= \frac{1}{(z-b)^{1/2}}\left(\sqrt{(b-a)} + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{(b-a)}}(z-b) - \frac{5}{8}\frac{1}{(b-a)^{3/2}}(z-b)^2 + O((z-b)^3)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta^2} - \beta^2 = \\ & = \frac{1}{(z-b)^{1/2}} \left(\sqrt{(b-a)} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(b-a)}} (z-b) + \frac{3}{8} \frac{1}{(b-a)^{3/2}} (z-b)^2 + O((z-b)^3) \right) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (s_1 \tilde{a}_{11} + t_1 \tilde{b}_{11}) &= \\ &= (s_1 \tilde{a}_{22} + t_1 \tilde{b}_{22}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} + \beta^2 \right) (s_1 + t_1) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\beta^2} - \beta^2 \right) \left(\frac{1}{s^2} + s^2 \right) (s_1 - t_1) = \\ &= \frac{1}{(z-b)^{1/2}} \left(\frac{5\sqrt{(b-a)}}{72} + \frac{1}{24} \left(c_0^2 (b-a)^{3/2} - \frac{3}{2\sqrt{(b-a)}} \right) (z-b) + O((z-b)^2) \right), \end{aligned}$$

аналогично

$$\begin{aligned} (s_1 \tilde{a}_{12} + t_1 \tilde{b}_{12}) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} - \beta^2 \right) (s_1 + t_1) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2} - s^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) \left(\frac{1}{s^2} + s^2 \right) \right) (s_1 - t_1) = \\ &= \frac{1}{(z-b)^{1/2}} \left(\frac{5}{72} \sqrt{(b-a)} + \left[\frac{19}{144} \frac{1}{\sqrt{(b-a)}} + \frac{c_0^2}{24} (b-a)^{3/2} - \frac{1}{6} c_0 \sqrt{(b-a)} \right] (z-b) \right), \end{aligned}$$

и наконец, последний член:

$$\begin{aligned} (s_1 \tilde{a}_{21} + t_1 \tilde{b}_{21}) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} - \beta^2 \right) (s_1 + t_1) + \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2} - s^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) \left(\frac{1}{s^2} + s^2 \right) \right) (s_1 - t_1) = \\ &= \frac{1}{(z-b)^{1/2}} \left(\frac{5}{72} \sqrt{(b-a)} + \left[\frac{19}{144} \frac{1}{\sqrt{(b-a)}} + \frac{c_0^2}{24} (b-a)^{3/2} + \frac{1}{6} c_0 \sqrt{(b-a)} \right] (z-b) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, в окрестности точки b имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_R^1(z) &= \frac{i}{(z-b)^2} \times \\ &\times \left(\begin{aligned} & - \left(\frac{5\sqrt{(b-a)}}{72} + \frac{1}{24} \left(c_0^2 (b-a)^{3/2} - \frac{3}{2\sqrt{(b-a)}} \right) (z-b) \right) \\ & i \left(\frac{5}{72} \sqrt{(b-a)} + \left\{ \frac{19}{144} \frac{1}{\sqrt{(b-a)}} + \frac{c_0^2}{24} (b-a)^{3/2} + \frac{1}{6} c_0 \sqrt{(b-a)} \right\} (z-b) \right) \\ & i \left(\frac{5}{72} \sqrt{(b-a)} + \left\{ \frac{19}{144} \frac{1}{\sqrt{(b-a)}} + \frac{c_0^2}{24} (b-a)^{3/2} - \frac{1}{6} c_0 \sqrt{(b-a)} \right\} (z-b) \right) \\ & \left(\frac{5\sqrt{(b-a)}}{72} + \frac{1}{24} \left(c_0^2 (b-a)^{3/2} - \frac{3}{2\sqrt{(b-a)}} \right) (z-b) \right) \end{aligned} \right) \times \\ &\times \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{b-a} h(b)} - \frac{9}{10} \frac{\frac{1}{2\sqrt{b-a}} h(b) + \sqrt{b-a} h'(b)}{(b-a)h^2(b)} (z-b) + \dots \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{(z-b)^2} \begin{pmatrix} -\frac{5}{48} \frac{1}{h(b)} & i \frac{5}{48h(b)} \\ i \frac{5}{48h(b)} & \frac{5}{48} \frac{1}{h(b)} \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i}{(z-b)} \left(\frac{1}{16} \frac{\frac{1}{2}h(b) + (b-a)h'(b)}{(b-a)h^2(b)} - \frac{1}{16} \frac{1}{\sqrt{b-a}h(b)} \left(c_0^2(b-a)^{3/2} - \frac{3}{2\sqrt{(b-a)}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{16} \frac{\frac{1}{2}h(b) + (b-a)h'(b)}{(b-a)h^2(b)} + i \frac{3}{2h(b)} \left\{ \frac{19}{144} \frac{1}{(b-a)} + \frac{c_0^2}{24} (b-a) + \frac{1}{6} c_0 \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{16} \frac{\frac{1}{2}h(b) + (b-a)h'(b)}{(b-a)h^2(b)} + i \frac{3}{2h(b)} \left\{ \frac{19}{144} \frac{1}{(b-a)} + \frac{c_0^2}{24} (b-a) - \frac{1}{6} c_0 \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{16} \frac{\frac{1}{2}h(b) + (b-a)h'(b)}{(b-a)h^2(b)} + \frac{1}{16} \frac{1}{\sqrt{b-a}h(b)} \left(c_0^2(b-a)^{3/2} - \frac{3}{2\sqrt{(b-a)}} \right) \right) + O(1), \\
&z \rightarrow b.
\end{aligned}$$

После небольших упрощений получим явный вид для матриц $\tilde{A}^{(2)}$ и $\tilde{A}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{(2)}(z) &= i \frac{5}{48} \frac{1}{h(b)} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \\
\tilde{A}^{(1)}(z) &= -\frac{i}{16} \frac{\frac{1}{2}h(b) + (b-a)h'(b)}{(b-a)h^2(b)} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i}{16} \frac{1}{(b-a)h(b)} \begin{pmatrix} -\left(c_0^2(b-a)^2 - \frac{3}{2} \right) & i \left\{ \frac{19}{6} + c_0^2(b-a)^2 - 4c_0(b-a) \right\} \\ i \left\{ \frac{19}{6} + c_0^2(b-a)^2 + 4c_0(b-a) \right\} & \left(c_0^2(b-a)^2 - \frac{3}{2} \right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Заметим, что при $c_0 = 0$ выражение для $\tilde{A}^{(1)}(z)$ примет вид:

$$\tilde{A}^{(1)}(z) = -\frac{i}{16} \frac{\frac{1}{2}h(b) + (b-a)h'(b)}{(b-a)h^2(b)} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{16} \frac{1}{(b-a)h(b)} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & i \frac{19}{6} \\ i \frac{19}{6} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, в окрестности точки a .

$$\begin{aligned}
\tilde{B}^{(2)}(z) &= -i \frac{5}{48} \frac{1}{h(b)} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \\
\tilde{B}^{(1)}(z) &= -\frac{i}{16} \frac{\frac{1}{2}h(a) + (a-b)h'(a)}{(a-b)h^2(a)} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i}{16} \frac{1}{(a-b)h(a)} \begin{pmatrix} \left(d_0^2(a-b)^2 - \frac{3}{2} \right) & i \left\{ \frac{19}{6} + d_0^2(a-b)^2 - 4d_0(a-b) \right\} \\ \left\{ \frac{19}{6} + d_0^2(a-b)^2 + 4d_0(a-b) \right\} & -\left(d_0^2(a-b)^2 - \frac{3}{2} \right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Заметим, что при $c_0 = 0$, выражение для $\tilde{B}^{(1)}(z)$ примет вид:

$$\tilde{B}^{(1)}(z) = -\frac{i \frac{1}{2}h(a) + (a-b)h'(a)}{16(a-b)h^2(a)} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} + \frac{i}{16(a-b)h(a)} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & i\frac{19}{6} \\ i\frac{19}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $r_1(z)$ вне окрестностей концевых точек носителя может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} r_1(z) &= \frac{\tilde{A}^{(2)}}{(z-b)^2} + \frac{\tilde{A}^{(1)}}{(z-b)} \frac{\tilde{B}^{(2)}}{(z-a)^2} + \frac{\tilde{B}^{(1)}}{(z-b)} = \frac{1}{(z-b)^2} \frac{5i}{48h(b)} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{(z-b)} \left\{ \frac{i \frac{1}{2}h(b) + (b-a)h'(b)}{16(b-a)h^2(b)} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{16(b-a)h(b)} \times \right. \\ &\times \left. \begin{pmatrix} -\left(c_0^2(b-a)^2 - \frac{3}{2}\right) & i\left\{\frac{19}{6} + c_0^2(b-a)^2 - 4c_0(b-a)\right\} \\ i\left\{\frac{19}{6} + c_0^2(b-a)^2 + 4c_0(b-a)\right\} & \left(c_0^2(b-a)^2 - \frac{3}{2}\right) \end{pmatrix} \right\} - \\ &- \frac{1}{(z-a)^2} \frac{5i}{48h(b)} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{(z-b)} \left\{ \frac{i \frac{1}{2}h(a) + (a-b)h'(a)}{16(a-b)h^2(a)} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} - \right. \\ &- \left. \frac{i}{16(a-b)h(a)} \times \begin{pmatrix} \left(d_0^2(a-b)^2 - \frac{3}{2}\right) & i\left\{\frac{19}{6} + d_0^2(a-b)^2 - 4d_0(a-b)\right\} \\ \left\{\frac{19}{6} + d_0^2(a-b)^2 + 4d_0(a-b)\right\} & -\left(d_0^2(a-b)^2 - \frac{3}{2}\right) \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

откуда следует приведенная во введении формула (8).

§ 4. Примеры

В данном параграфе применим теорему 1 для получения асимптотического ряда для обобщенных многочленов Лагерра.

Обобщенные многочлены Лагерра определим точной формулой, которая имеет смысл для любых значений $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$L_n^\alpha(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (100)$$

Можно так же задать эти многочлены формулой Родрига:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n [x^{\alpha+n} e^{-x}]. \quad (101)$$

Хорошо известно, что при действительных $\alpha > -1$ многочлены L_n^α ортогональны на $[0, \infty)$ относительно веса $x^\alpha e^{-x}$:

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx = 0 \quad \text{при } n \neq m. \quad (102)$$

В последнее время вызывает интерес изучение асимптотики $\{L_n^\alpha\}$ при зависящем от номера полинома показателе $\alpha := \alpha_n$. В работе [27] получен главный член асимптотического ряда для многочленов Лагерра при $\alpha = -An$, $A > 1$. Мы рассмотрим несколько более общую ситуацию $\alpha = -An - A_1$, $A_1 \in \mathbb{R}$ и, применяя теорему 1, получим более точные асимптотические формулы.

Перейдем к сжатым многочленам со старшим коэффициентом равным 1:

$$P_n^\alpha(z) = \frac{(-1)^n n!}{n^n} L_n^\alpha(nz), \quad n = 0, 1, \dots \quad (103)$$

Соотношения ортогональности (102) трансформируются в

$$\int_\Sigma P_n^\alpha(z) z^k z^\alpha e^{-nz} dz \begin{cases} = 0 & \text{при } k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \neq 0 & \text{при } k = n \text{ и при } \alpha + n + 1 \notin \mathbb{N}, \end{cases} \quad (104)$$

где Σ — жорданова дуга в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, симметричная относительно действительной оси и такая, что:

$$\exists M > 0 \forall x \geq M \exists y(x) > 0 \Sigma \cap \{z : \Re(z) = x\} = \{x \pm iy(x)\},$$

причем

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = L < \infty.$$

Из формулы (104) имеем, что

$$Q_0 = \frac{1}{2}(z + A \ln z), \quad Q_1 = \frac{1}{2}A_1 \ln z.$$

Для применения теоремы 1 контур Σ должен удовлетворять условию симметрии (4) (S-свойство). В работе [27] получено, что $\Sigma = \Gamma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где Γ — дуга, соединяющая точку $b = 2 - A + 2i\sqrt{A-1}$ с $a = \bar{b}$ и такая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{b}}^z \frac{\sqrt{(s-b)(s-\bar{b})}}{s} ds$$

принимает действительные значения для всех $z \in \Gamma$, а дуги Σ_1, Σ_2 такие, что локально в окрестности точек b, \bar{b} значения

$$\int_{\bar{b}}^z \frac{\sqrt{(s-b)(s-\bar{b})}}{s} ds, \quad \int_b^z \frac{\sqrt{(s-b)(s-\bar{b})}}{s} ds$$

действительны и положительны соответственно. На рис. 6 приведены примеры Σ для двух значений A .

Может быть, можно увеличить надписи на рис. 6

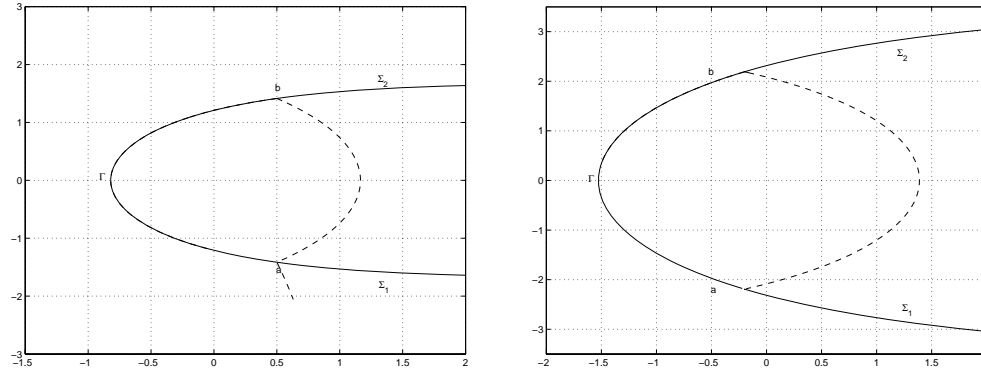


Рис. 6. Контур Σ при $A = 1,5$ (левый рисунок) и при $A = 2,2$ (правый рисунок)

В работе [27] показано, что носителем равновесной меры в поле

$$f(x) := \frac{1}{2}(z + A \ln z)$$

будет дуга Γ с концами в точках b и \bar{b} , а производная равновесной меры имеет вид

$$\lambda'(z) = \frac{\sqrt{(z-b)(z-\bar{b})}}{2\pi iz}. \quad (105)$$

Для этого, во-первых, надо убедиться, что комплексная мера

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{s} ds$$

— вероятностная мера на Γ , а во-вторых, что для $z \in \mathbb{C} \setminus \{\Gamma \cup \Sigma_1 \cup [0, \infty)\}$ верно представление для комплексного потенциала:

$$\mathcal{V}_\lambda(z) := \mathcal{V}_\lambda(b) + \frac{1}{2}(A \ln(b) + b) - \frac{1}{2}(A \log z + z) + \frac{1}{2} \int_b^z \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{s} ds. \quad (106)$$

Откуда, в частности, следует условие равновесия для комплексного потенциала:

$$\mathcal{V}_{\lambda^+}(z) + \mathcal{V}_{\lambda^-}(z) = -(A \ln(z) + z) + 2(\mathcal{V}_\lambda(b) + \frac{1}{2}(A \ln(b) + b)). \quad (107)$$

Из формул (106), (107), а также (18) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) = \exp \left\{ \frac{n}{2}(A \log z + z) - \frac{n}{2} \int_b^z \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{s} ds \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{((z-a)(z-b))^{1/2}}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{-A_1 \ln(t)}{z-t} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \right\}. \quad (108) \end{aligned}$$

Для краткости записи, ограничимся случаем $A = 2$, тогда формула (108) трансформируется в

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \exp \left\{ \frac{n}{2} (2 \log z + z) - \frac{n}{2} \int_{2i}^z \frac{\sqrt{s^2 + 4}}{s} ds \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{(z^2 + 4)^{1/2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{-A_1 \ln(t)}{z-t} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} \right\} = \\ &= e^{\pi i n/2} \exp \left\{ \frac{n}{2} (z - \sqrt{z^2 + 4}) \right\} (2 + \sqrt{z^2 + 4})^n \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{(z^2 + 4)^{1/2}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{-A_1 \ln(t)}{z-t} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} \right\}. \end{aligned} \quad (109)$$

При $z \rightarrow \infty$

$$\varphi_n(z) \sim e^{\pi i n/2} \exp \left\{ \int_{\Gamma} \frac{-A_1 \ln(t)}{\sqrt{t^2 + 4}} dt \right\} z^n \sim e^{\pi i n/2} z^n,$$

поэтому

$$C_n = e^{-\pi i n/2}. \quad (110)$$

Так как при $A = 2$

$$a = -2i, \quad b = 2i, \quad h(x) = \frac{1}{2\pi i x},$$

то подставляя эти значения в формулу (8) получим:

$$\Pi_1(z) = \frac{5\pi i(z^2 - 4)}{6(z^2 + 4)^2} + \pi c_0^2 - \pi d_0^2 + \pi \frac{z - \sqrt{z^2 + 4}}{z} \left(c_0^2 + d_0^2 - 2i \frac{3z^2 + 2}{3(z^2 + 4)^2} \right), \quad (111)$$

для c_0, d_0 имеем:

$$c_0 := \frac{2}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{-A_1 \ln \zeta}{((\zeta - a)(\zeta - b))^{1/2}} \frac{d\zeta}{(\zeta - b)}, \quad (112)$$

и

$$d_0 := \frac{2}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{-A_1 \ln \zeta}{((\zeta - a)(\zeta - b))^{1/2}} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)}. \quad (113)$$

Наконец, подставляя (109), (110), (111) в формулу (6) получим, что для сжатых многочленов Лагерра P_n^α , $\alpha = -2n - A_1 < -1$, $A > 1$ (см. (103)) равномерно на компактах из $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ верна асимптотическая формула при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} P_n^\alpha(z) &= \exp \left\{ \frac{n}{2} (z - \sqrt{z^2 + 4}) \right\} (2 + \sqrt{z^2 + 4})^n \times \\ &\quad \times \exp \left\{ (z^2 + 4)^{1/2} \int_{\Gamma} \frac{-A_1 \ln(t)}{z-t} \frac{dt}{2\pi i \sqrt{t^2 + 4}} \right\} \left(\frac{\sqrt{z - 2i} + \sqrt{z + 2i}}{2(z^2 + 4)^{1/4}} \right) \times \\ &\quad \times \left[1 + \left(\frac{5i(z^2 - 4)}{6(z^2 + 4)^2} + c_0^2 - d_0^2 + \frac{z - \sqrt{z^2 + 4}}{z} \left(c_0^2 + d_0^2 - 2i \frac{3z^2 + 2}{3(z^2 + 4)^2} \right) \right) \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Дать во всех
статьях
литературу
по алфавиту?

Литература

1. Гончар А. А., Рахманов Е. А. Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. 1987. **134**. № 3. 306–352.
2. Аптекарев А. И. Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций // Матем. сб. 2002. **193**. № 1. 3–72.
3. Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., and Zhou X. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality question in random matrix theory // Comm. Pure Appl. Math. 1999. **52**. (11). 1335–1425.
4. Bleher P., Its A. Semiclassical asymptotics of orthogonal polynomials, Riemann—Hilbert problem, and universality in the matrix model // Ann. Math. 1999. 2. **150**. 185–266.
5. Pastur L., Shcherbina M. Universality of the local eigenvalue statistics for a class of unitary invariant matrix ensembles // J. Stat. Phys. 1997. Vol. 6. 109–147.
6. Baik J., McLaughlin K. T.-R., Miller P., and Zhou X. Optimal tail estimates for directed last passage site percolation with geometric random variables // Adv. Theor. Math. Phys. 2001. 5. 1207–1250.
7. Baik J., Deift P., Johansson K. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations // J. Amer. Math. Soc. 1999. 12. 1119–1178.
8. Fokas A., Its A., Kitaev A. The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity // Commun. Math. Phys. 1992. **147**. 395–430.
9. Kamvissis S., McLauhglin K., Miller P. Semiclassical solution ensembles for the focusing nonlinear Schroedinger equation. Princeton; Oxford: Princeton univ. press, 2003. XII. 265 p.
10. Bernstein S. N. Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini. I // J. Math. Pures Appl. (9). 1930. Vol. 9. P. 127–177; II // J. Math. Pures Appl. (9). 1931. Vol. 10. P. 219–286.
11. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
12. Nutall J. and Singh S. R. Orthogonal polynomials and Pade approximants associated with a system of arcs // J. Approx. Theory. 1977. 21. 1–42.
13. Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite—Pade polynomials // J. Approx. Theory. 1984. 42. № 4. 299–386.
14. Nuttall J. Pade polynomial asymptotics from a singular integral equation // Constr. Approx. 1990. 6. 157–166.
15. Суетин С. П. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Падэ для гиперэллиптических функций // Матем. сб. 2000. 191. № 9. 81–114.
16. Stahl H. Orthogonal polynomials with complex valued function. I, II // Constr. Approx. 1986. 2. 225–240, 241–251.
17. Итс А. Р., Китаев А. В., Фокас А. С. Изомонодромный подход в теории двумерной квантовой гравитации // УМН. 1990. **45**. № 6. С. 135–136.
18. Deift P., Zhou X. A steepest descent method for oscillatory Riemann—Hilbert problems: asymptotics for the MKdV equation // Ann. of Math. 1993. **137**. 295–368.
19. Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., and Zhou X. Asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights // Int. Math. Res. Notes. 1997. **16**. 759–782.
20. Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., and Zhou X. Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights // Comm. Pure Appl. Math. 1999. Vol. LII. 1491–1552.
21. Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., Zhou X. Uniform asymptotics for orthogonal polynomials // Doc. Math. J. DMV, Extra Vol. ICM. Berlin, 1998. **3**. 491–501.
22. Deift P. Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann—Hilbert approach. Reprint of the 1998 original. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
23. Aptekarev A. I., Assche W. van. Scalar and matrix Riemann—Hilbert approach to the strong asymptotics of Pade approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight // Journal of Approx. Theory. 2004. 129 (2). 129–166.

-
-
24. *Ercolani N. M. and McLaughlin K. T-R.* Asymptotics of the partition function for random matrices via Riemann—Hilbert techniques, and applications to graphical enumeration // *Int. Math. Res. Not.* 2003. № 14. 755–820.
 25. *Kuijlaars A. B. J., McLaughlin K. T-R., Van Assche W., and Vanlessen M.* The Riemann—Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on $[-1, 1]$ // *Adv. in Math.* 2004. Vol. 188. P. 337–398.
 26. *Хабибуллин Р. Ф.* Асимптотический ряд для многочленов Бесселя // *Математические заметки.* 2005. Т. 77. Вып. 6. 948–950.
 27. *Kuijlaars A. B. J. and McLaughlin K. T-R.* Riemann—Hilbert analysis for Laguerre polynomials with large negative parameter // *Comput. Meth. Funct. Theory.* 1. 2001. P. 205–233.
 28. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: ГИФМЛ, 1963.
 29. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.