



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**А. Д. Брюно, В.Ф. Еднерал**

## Вычисление нормальных форм уравнений Эйлера- Пуассона

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А. Д., Еднерал В.Ф. Вычисление нормальных форм уравнений Эйлера-Пуассона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 1. 17 с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-1>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно и В.Ф. Еднерал

**ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ  
УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА**

Москва, 2007 г.

УДК 517.925+531.38+681.3.062(075.8)

А.Д. Брюно и В.Ф. Еднерал. Вычисление нормальных форм уравнений Эйлера–Пуассона. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Рассматривается специальный случай  $A = B$ ,  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 = z_0 = 0$  системы уравнений Эйлера–Пуассона, описывающей движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Вблизи одного двухпараметрического семейства ее неподвижных решений изучаются ее нормальные формы. На этом семействе выделяются однопараметрические семейства с фиксированными резонансами 1:2 и 1:3. Для них изучается структура нормальной формы и первых интегралов. Вычислениями нормальной формы устанавливается, что условия, необходимые для существования дополнительного локального первого интеграла, не выполняются во всех случаях, кроме классических случаев глобальной интегрируемости.

A.D. Bruno and V.F. Edneral. Computation of normal forms of the Euler–Poisson equations. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

We consider the special case  $A = B$ ,  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 = z_0 = 0$  of the Euler–Poisson system of equations, describing the motion of a rigid body with a fixed point. Near a two-parameter family of its stationary solutions we study its normal forms. In the family we select one-parameter families with fixed resonances 1:2 and 1:3. For them, we study the structure of the normal form and of the first integrals. By a computation of the normal form, we found that conditions, which are necessary for the existence of an additional local first integral, are violated in all cases, except classical cases of global integrability.

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00050), Программы Президиума РАН "Фундаментальные методы нелинейной динамики" и гранта Президента РФ по поддержке научных школ 4476.06.02.

E-mails: bruno@keldysh.ru; edneral@theory.sinp.msu.ru

Настоящий препринт является продолжением препринта [1] и содержит описание вычислений по проверке условий теоремы 7.1 [1] для резонансов 1:2 и 1:3. Все выкладки были проделаны с помощью системы Mathematica. Для вычисления нормальной формы и нормализующего преобразования был использован пакет [4].

## § 1. Резонанс 1:2

На рис.3 препринта [1] этому резонансу соответствуют две ветви кривой с  $\varepsilon = 17/4$ : верхняя  $\mathcal{F}_1$  с  $\delta = 1$  и нижняя  $\mathcal{F}_2$  с  $\delta = -1$  (формула (5.7) [1]). При этом кривая  $\mathcal{F}_2$  проходит через исключительную точку (3.10) [1] (см. лемму 5.1).

**1.1. Вычисление известных интегралов.** Вдоль кривых  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  сначала были аналитически вычислены нормальные формы системы (2.10) [1] до членов первого порядка (т.е. до членов квадратичных по переменным системы). При этом были вычислены и три первых интеграла (2.3) [1] в координатах нормальной формы. В частности, для каждого из этих трех интегралов были получены коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  в (7.10) [1] как функции от  $\delta = \pm 1$  и  $c \in (0, 2]$ .

Обозначим через  $\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \alpha_3^{(j)}, \alpha_4^{(j)})$  - вектор из коэффициентов интеграла  $F_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  в (2.3) [1]. Согласно тексту перед формулировкой теоремы 7.1 [1] образуем из векторов  $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$  их внешнее произведение  $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ . Оказалось, что вектор  $V$  на кривых  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  можно вычислить аналитически следующим образом. Сначала делаем униформизацию

$$c = \frac{18h}{80 + 34h - h^2}, \quad (1.1)$$

т.е. заменяем параметр  $c$  на параметр  $h$ . При этом  $c \in \mathbb{R}$  соответствует интервал

$$-2.20937 \approx 17 - 3\sqrt{41} < h < 17 + 3\sqrt{41} \approx 36.2094, \quad (1.2)$$

концы которого суть корни знаменателя в (1.1). Согласно формулам (5.7)-(5.9) [1] при  $\delta = 1$  получается

$$p_0 = \frac{1}{6} \sqrt{-4 + \frac{640}{h} - \frac{h}{2}}. \quad (1.3)$$

Компоненты  $v_i$  внешнего произведения  $V$  суть

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{(-320+(-40+h)h)^2(80+h^2)}{1296h^3}, \\
v_2 &= \frac{-(-320+(-40+h)h)^2}{7776h^4\sqrt{2(32-h)(40+h)/h}} \times \\
&\quad \times (-102400+h(-41600+h(-5040+(-40+h)h))), \\
v_3 &= \frac{-(-320+(-40+h)h)^2}{18h(40+h)}, \\
v_4 &= \frac{-(-320+(-40+h)h)^2}{9(-32+h)h^2}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Уравнение  $V = 0$ , т.е. система четырех уравнений

$$v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1.5}$$

имеет только два решения

$$\begin{aligned}
h_1 &= 4(5 - 3\sqrt{5}) \approx -6.83282, \\
h_2 &= 4(5 + 3\sqrt{5}) \approx 46.83282.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Оба этих решения лежат вне интервала (1.2). Следовательно, при  $\delta = 1$  внешнее произведение  $V \neq 0$ .

Аналогично, при  $\delta = -1$  имеем

$$p_0 = \frac{1}{3}\sqrt{-1 + \frac{10}{h} - 2h}, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{-(-20+(-10+h)h)^2(80+h^2)}{81h^3}, \\
v_2 &= \frac{\sqrt{-1+(10/h)-2h}(-20+(-10+h)h)^2}{243h^3(h-2)(2h+5)} \times \\
&\quad \times (-800+h(-400+h(630+h(-65+2h)))), \\
v_3 &= \frac{16(-20+(-10+h)h)^2}{9h^2(h-2)}, \\
v_4 &= \frac{(-20+(-10+h)h)^2}{9h(2h+5)}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Система уравнений (1.5) имеет при этом только два решения

$$\begin{aligned}
h_3 &= 5 - 3\sqrt{5} \approx -1.7082, \\
h_4 &= 5 + 3\sqrt{5} \approx 11.7082.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Оба они лежат в интервале (1.2), им соответствуют по (1.1) значения  $c$

$$\begin{aligned}
c(h_3) &= -(\sqrt{5} + 1)/2 \approx -1.618034, \\
c(h_4) &= (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618034.
\end{aligned}$$

Только последнее значение  $c$  лежит в полуинтервале  $(0, 2]$  и ему соответствует на кривой  $\mathcal{F}_2$  исключительная точка (3.10) [1]. Следовательно, на кривой  $\mathcal{F}_2$  вне этой исключительной точки внешнее произведение  $V \neq 0$ .

Таким образом, при резонансе 1:2 внешнее произведение  $V$  нигде в механической области не обращается в ноль, т.е. в теореме (7.1) [1] первая серия условий не выполняется. Ниже рассмотрим вторую серию условий существования дополнительного формального интеграла.

**1.2. Случай  $\Xi = 0$ .** Согласно (7.10) и (8.5) [1] по коэффициентам нормальной формы можно вычислить величины  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \stackrel{\text{def}}{=} \Xi$  как функции  $\delta = \pm 1$  и  $c \in (0, 2]$ . В работах [2,3] были вычислены нормальные формы до членов 4-го порядка и по ним – величины  $\xi_3 = -a$ ,  $\xi_4 = b$ . Эти вычисления использовали униформизацию (1.1), позволяющую избавиться от двойных радикалов при вычислении диагонализующего линейную часть системы преобразования (1.2) [1] и производились по некоторой сетке рациональных значений  $h$ . Провести вычисления до 4-го порядка полностью в аналитическом виде не удалось ввиду чрезвычайной громоздкости результата, содержащего сложные выражения с квадратичными корнями от полиномов по параметру  $h$ , не поддающимся дальнейшей униформизации. Счет, однако, проводился полностью в рациональной арифметике с удержанием всех корней от рациональных чисел, т.е. без каких-либо округлений.

Оказалось, что величины  $\xi_3$  и  $\xi_4$  обращаются в ноль только одновременно и только при

$$\begin{aligned} c_1 = 1, \quad c_2 = 1/2, \quad c_3 \approx 0.2527783, \quad \text{для } \delta = 1; \\ c_1 = 1, \quad c_2 = 1/2, \quad c_4 \approx 0.0452287, \quad c_5 \approx 0.1893723, \\ c_6 \approx 0.51292, \quad \text{для } \delta = -1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Приближенные значения для точек  $c_3, c_4, c_5$  и  $c_6$  здесь означают, что нам известны интервалы, в которых происходит смена знака  $\xi_3$  и  $\xi_4$  и мы приводим значения центров этих интервалов. Ниже, в п. 1.3, указаны границы интервалов.

Дополнительные вычисления, проведенные после публикации работ [2,3], показали, что в этих же точках (1.10) обращаются в ноль также величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , определенные согласно (8.5),(7.10) [1]. Поэтому в них  $\Xi = 0$  и для проверки теоремы 7.1 [1] надо в точках (1.10) вычислить ранг матрицы  $M$ , определенной в (7.8),(7.10) и (8.5) [1].

**1.3. Вычисление ранга матрицы  $M$  в особых точках (1.10).** Для вычисления элементов матрицы  $M$  коэффициенты нормальной формы вычислялись до 7-го порядка. Поскольку рациональные точки  $c_1 = 1$  и  $c_2 = 1/2$  известны точно, то в них получены точные значения коэффициентов нормальной формы, т.е. точные выражения для матрицы  $M$ . При  $c = 1$  для  $\delta = \pm 1$  оказалось, что  $\text{rank } M = 0$ , т.е. все элементы этой матрицы нулевые. При  $c = 1/2$  матрица  $M$  имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-111i}{16\sqrt{2}} & \frac{117i}{28} & \frac{-7i}{32} & \frac{-i}{2} \\ 0 & \frac{111i}{16} & \frac{-117i}{64\sqrt{2}} & \frac{7i}{16\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{111i}{2\sqrt{2}} & \frac{-117i}{16} & \frac{7i}{4} & 4i \\ 0 & \frac{-333i}{32\sqrt{2}} & \frac{351i}{256} & \frac{-21i}{64} & \frac{-3i}{4} \end{pmatrix} \quad \text{для } \delta=1,$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-24}{\sqrt{7}} & \frac{-85i}{4} & 0 & \frac{-7i}{2} \\ 0 & \frac{-96i}{7} & \frac{85}{\sqrt{7}} & 0 & 2\sqrt{7} \\ 0 & \frac{576}{49\sqrt{7}} & \frac{510i}{49} & 0 & \frac{12i}{7} \\ 0 & \frac{219}{7\sqrt{7}} & \frac{6205i}{224} & 0 & \frac{73i}{16} \end{pmatrix} \quad \text{для } \delta=-1.$$

В обоих случаях  $\text{rank } M = 1$ . Это соответствует теории §7 [1].

В остальных точках (1.10) в которых  $\Xi = 0$ , значения  $c$  определены лишь приближенно, с точностью до интервала, что затрудняет вычисление там ранга матрицы  $M$ . Чтобы преодолеть эту трудность, для каждой точки  $c_i$  ( $i = 3, 4, 5, 6$ ) выбиралась тройка чисел  $c_i^{(1)} < c_i^{(2)} < c_i^{(3)}$  таких, чтобы  $c_i^{(1)}$  и  $c_i^{(3)}$  лежали у границ соответствующего интервала. В этих тройках точек вычислялись миноры третьего и второго порядка матрицы  $M$  и из них образовывались матрицы  $ResM3$  и  $ResM2$  соответственно. Эти матрицы строились так: а) для каждого из миноров производилась проверка, что он или чисто действителен или чисто мнимый. Мнимая единица отбрасывалась; б) для трех указанных выше значений  $c_i$  параметра  $c$  проверялась монотонность последовательности значений минора. Если эти три значения вели себя монотонно, то: если знаки первого и последнего значений минора были противоположными, элемент матрицы  $ResM3$  или  $ResM2$  полагался нулем, в противном случае элемент заменялся на строку из этих трех значений минора, что позволяет проанализировать,

возможно ли обнуление минора внутри интервала  $(c_i^{(1)}, c_i^{(3)})$ . Третье значение во внутренней точке интервала позволяет исследовать возможность параболического обнуления минора.

Все миноры вычислялись в точной арифметике, а представленные ниже результаты есть округленные величины, полученные из вычислений соответствующих аналитических (символьных) значений миноров в арифметике с плавающей запятой с внутренней точностью 24 знака.

При этом использовалась отличная от (1.1) униформизация

$$c = \frac{18h}{h^2 + 34h - 80} \quad (1.11)$$

с

$$0 < h < \infty, \quad (1.12)$$

что соответствует  $c \in (0, 2]$ .

Опишем результаты для точек  $c_3, c_4, c_5, c_6$  по-отдельности.

Точка  $c_3$ . Для нее  $c_3^{(1)}$  есть

$$c = 2759625/10917334 \approx 0.2527746, \\ h = 4906/125 \approx 39.248, \quad p_0 = \sqrt{23684086/12265}/15,$$

в ней

$$\Xi = (-0.0030096i, -0.0173395i, 0.000254485i, -0.000350348i).$$

$c_3^{(2)}$  есть

$$c = 78494000/310525001 \approx 0.2527784, \\ h = 39247/1000 \approx 39.247, \quad p_0 = (3/10)\sqrt{18712389/196235},$$

в ней

$$\Xi = (-0.0013087i, -0.00753993i, 0.000110666i, -0.00015235i).$$

$c_3^{(3)}$  есть

$$c = 176607000/698653129 \approx 0.252782, \\ h = 19623/500 \approx 39.246, \quad p_0 = \sqrt{378906379/196230}/15,$$

в ней

$$\Xi = (0.000391896i, 0.00225786i, -0.0000331409i, 0.0000456228i).$$

Видно, что смена знака элементов вектора  $\Xi$  происходит в интервале  $(c_3^{(2)}, c_3^{(3)})$ .



Оказалось, что матрица  $ResM3$  состоит только из нулей. У матрицы  $ResM2$  первая строка состоит из нулей, но все остальные состоят из элементов – строк вида  $(a(c_3^{(1)}), a(c_3^{(2)}), a(c_3^{(3)}))$ , причем это близкие между собой числа одного знака и некоторые из них имеют порядок  $10^4$ . Следовательно, в точке  $c_3$  имеем

$$\text{rank}M = 2. \quad (1.13)$$

Точка  $c_4$ . Для нее  $c_4^{(1)}$  есть

$$c = 182099000/4026192089 \approx 0.0452286, \\ h = 182099/500 \approx 364.198, \quad p_0 = (3/20)\sqrt{396440121/1820990},$$

в ней

$$\Xi = (0.000339567i, 0.000831985i, 0.0000753677i, -3.38669 \times 10^{-7}i).$$

$c_4^{(2)}$  есть

$$c = 409720500/9058836901 \approx 0.0452288, \\ h = 91049/250 \approx 364.196, \quad p_0 = \sqrt{8027822401/455245}/60,$$

в ней

$$\Xi = (-0.00403305i, -0.00988149i, -0.000895151i, 4.02243 \times 10^{-6}i).$$

$c_4^{(3)}$  есть

$$c = 29135600/644180569 \approx 0.0452289, \\ h = 72839/200 \approx 364.195, \quad p_0 = \sqrt{570864169/431}/520,$$

в ней

$$\Xi = (-0.00621932i, -0.0152381i, -0.00138041i, 6.20298 \times 10^{-6}i).$$

Видно, что смена знака элементов вектора  $\Xi$  происходит в интервале  $(c_4^{(1)}, c_4^{(2)})$ .

Оказалось, что матрица  $ResM3$  состоит только из нулей. У матрицы  $ResM2$  первая строка состоит из нулей, но все остальные состоят из элементов – строк вида  $(a(c_4^{(1)}), a(c_4^{(2)}), a(c_4^{(3)}))$ , причем это близкие между собой числа одного знака и некоторые из них имеют порядок  $10^8$ . Следовательно, в точке  $c_4$  выполняется свойство (1.13).

Точка  $c_5$ . Для нее  $c_5^{(1)}$  есть

$$c = 4986800/26333521 \approx 0.1893708, \\ h = 12467/200 \approx 62.335, \quad p_0 = \sqrt{9364321/12467}/40,$$

в ней

$$\Xi = (-0.000288642i, -0.000182106i, -0.000911707i, 6.92574 \times 10^{-6}i).$$

$c_5^{(2)}$  есть

$$c = 4488084000/23699851561 \approx 0.1893718, \\ h = 124669/2000 \approx 62.3345, \quad p_0 = \sqrt{8427655561/1246690}/120,$$

в ней

$$\Xi = (-0.0000799131i, -0.0000504167i, -0.00025242i, 1.91748 \times 10^{-6}i).$$

$c_5^{(3)}$  есть

$$c = 280503000/1481220889 \approx 0.1893728, \\ h = 31167/500 \approx 62.334, \quad p_0 = \sqrt{526713889/34630}/180,$$

в ней

$$\Xi = (0.000128813i, 0.0000812654i, 0.000406886i, -3.09084 \times 10^{-6}i).$$

Видно, что смена знака элементов вектора  $\Xi$  происходит в интервале  $(c_5^{(2)}, c_5^{(3)})$ .

Оказалось, что матрица  $ResM3$  состоит только из нулей. У матрицы  $ResM2$  первая строка состоит из нулей, но все остальные состоят из элементов – строк вида  $(a(c_5^{(1)}), a(c_5^{(2)}), a(c_5^{(3)}))$ , причем это близкие между собой числа одного знака и некоторые из них имеют порядок  $10^5$ . Следовательно, в точке  $c_5$  выполняется свойство (1.13).

Точка  $c_6$ . Для нее  $c_6^{(1)}$  есть

$$c = 6850800/13361809 \approx 0.51272, \\ h = 1903/200 \approx 9.515, \quad p_0 = (19i/120)\sqrt{140231/1903},$$

в ней

$$\Xi = (-0.0092055i, 0.00696932, 0.0115424i, 0.00178156i).$$

$c_6^{(2)}$  есть

$$c = 1711800/3337801 \approx 0.51285, \\ h = 951/100 \approx 9.51, \quad p_0 = (i/160)\sqrt{12656399/1902},$$

в ней

$$\Xi = (-0.0023456i, 0.00177428, 0.00293913i, 0.000454018i).$$

$c_6^{(3)}$  есть

$$c = 760400/1482289 \approx 0.51299,$$

$$h = 1901/200 \approx 9.505, \quad p_0 = (i/40)\sqrt{5625311/1901},$$

в ней

$$\Xi = (0.00473497i, -0.00357856, -0.0059292i, -0.000916647i).$$

Видно, что смена знака элементов вектора  $\Xi$  происходит в интервале  $(c_6^{(2)}, c_6^{(3)})$ .

Оказалось, что матрица  $ResM3$  состоит только из нулей. У матрицы  $ResM2$  первая строка состоит из нулей, но все остальные строки состоят из элементов-строк вида  $(a(c_6^{(1)}), a(c_6^{(2)}), a(c_6^{(3)}))$ , причем это близкие между собой числа одного знака и некоторые из них имеют порядок  $10^2$ . Следовательно, в точке  $c_6$  выполняется свойство (1.13).

Итак, в точках  $c_3, c_4, c_5, c_6$  выполнено равенство (1.13), т.е. не выполняется второе из условий второй серии теоремы 7.1 [1]. Согласно этой теореме в этих точках система (2.10) [1] не имеет дополнительного формального интеграла, т.е. является неинтегрируемой.

## § 2. Резонанс 1:3

На рис.3 препринта [1] этому резонансу соответствуют две ветви кривой  $\mathcal{F}_\delta$  с  $\varkappa = 82/9$ : верхняя  $\mathcal{F}_1$  с  $\delta = 1$  и нижняя  $\mathcal{F}_2$  с  $\delta = -1$  (формула (5.7) [1]). При этом кривая  $\mathcal{F}_2$  пересекает ось  $x$  в точке

$$c = 1/9 \tag{2.1}$$

и проходит через исключительную точку (3.10) [1] (см. там лемму 5.1).

**2.1. Вычисление известных интегралов.** Вдоль кривых  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  сначала были аналитически вычислены нормальные формы системы (2.10) [1] до членов первого порядка (т.е. до членов квадратичных по переменным системы). При этом были вычислены и три первых интеграла (2.3) [1] в координатах нормальной формы. Для каждого из этих трех интегралов были получены коэффициенты  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha$  в (7.10) [1] как функции от  $\delta = \pm 1$  и  $c \in (0, 2]$ .

Вектор  $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  внешнего произведения трех векторов  $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ , соответствующих интегралам  $F_1, F_2, F_3$  в (2.3) [1], был вычислен аналитически с помощью униформизации

$$c = \frac{64h}{495 + 82h - h^2}, \tag{2.2}$$

где  $c \in \mathbb{R}$  соответствует интервал

$$-5.65 \approx 41 - 8\sqrt{34} < h < 41 + 8\sqrt{34} \approx 87.65, \quad (2.3)$$

концы которого суть корни знаменателя в (2.2). Согласно формулам (5.7)-(5.9) [1] при  $\delta = 1$  получается

$$p_0 = \frac{1}{24} \sqrt{\frac{(81-h)(495+h)}{h}}.$$

Компоненты  $v_i$  внешнего произведения  $V$  суть

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(-4455 + (-90+h)h)^2(495+h^2)}{41472h^3}, \\ v_2 &= \frac{-(-4455 + (-90+h)h)^2}{995328h^4 \sqrt{(81-h)(495+h)/h}} \times \\ &\quad \times (-19847025 + h(-1648350 + h(-65520 + (-450+h)h))), \\ v_3 &= \frac{-(-4455 + (-90+h)h)^2}{72h(495+h)}, \\ v_3 &= \frac{(-4455 + (-90+h)h)^2}{72h^2(81-h)}. \end{aligned}$$

Система (1.5) имеет в этом случае только два решения

$$\begin{aligned} h_1 &= 9(5 - 4\sqrt{5}) \approx -35.4984, \\ h_2 &= 9(5 + 4\sqrt{5}) \approx 125.498. \end{aligned}$$

Оба этих решения лежат вне интервала (2.3). Следовательно, при  $\delta = 1$  внешнее произведение  $V \neq 0$ .

Аналогично, при  $\delta = -1$  имеем

$$p_0 = \frac{1}{8} \sqrt{-46 + \frac{55}{h} - 9h}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-(-55 + (-10+h)h)^2(495+h^2)}{512h^3}, \\ v_2 &= \frac{\sqrt{-46 + (55/h) - 9h}(-55 + (-10+h)h)^2}{4096h^3(h-1)(9h+55)} \times \\ &\quad \times (-27225 + h(-24750 + h(7280 + h(-370 + 9h))), \\ v_3 &= \frac{9(-55 + (-10+h)h)^2}{8h^2(h-1)}, \\ v_4 &= \frac{(-55 + (-10+h)h)^2}{8h(9h+55)}. \end{aligned}$$

Система уравнений (1.5) имеет при этом также только два решения

$$\begin{aligned} h_3 &= 5 - 4\sqrt{5} \approx -3.94427, \\ h_4 &= 5 + 4\sqrt{5} \approx 13.9443. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Они оба лежат в интервале (2.3), им соответствуют по (2.2) значения  $c$

$$\begin{aligned} c(h_3) &= -(\sqrt{5} + 1)/2 \approx -1.618034, \\ c(h_4) &= (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618034. \end{aligned}$$

Только последнее значение  $c$  лежит в полуинтервале  $(0, 2]$  и ему соответствует на кривой  $\mathcal{F}_2$  исключительная точка (3.10) [1]. Следовательно, на кривой  $\mathcal{F}_2$  вне этой исключительной точки внешнее произведение  $V \neq 0$ .

Таким образом, при резонансе 1:3 внешнее произведение  $V$  нигде в механической области не обращается в ноль, т.е. в теореме (7.1) [1] первая серия условий не выполняется. Ниже рассмотрим вторую серию условий существования дополнительного формального интеграла.

**2.2. Случай  $\Xi = 0$ .** По аналогии с работами [2,3] был проведен поиск нулей величин  $\xi_3$  и  $\xi_4$  как функций  $\delta = \pm 1$  и  $c \in (0, 2]$  для резонанса 1:3. Коэффициенты вектора  $\Xi$  в этом случае определялись согласно (8.4), (9.3) [1]. Результаты вычислений представлены на рис.1-3, аналогичных рис.1-3 работы [3]. Как и в упомянутой работе, символами  $a$  и  $b$  на рисунках обозначены  $a = -xi_3$  и  $b = \xi_4$ . Результаты вычислений сводятся к следующему. Оказалось, что величины  $\xi_3$  и  $\xi_4$  обращаются в ноль только одновременно и только при

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1/2, \quad \text{для } \delta = 1, \quad (2.5)$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1/2, \quad c_7 = 1/9, \quad \text{для } \delta = -1. \quad (2.6)$$

Причем значение  $c_7$  является особым, ибо в нем предельные значения  $\xi_3$  и  $\xi_4$  при  $c \rightarrow 1/9$  отличны от нуля. Это связано с тем, что в этой точке величина  $h$  согласно (2.2) обращается в единицу и подкоренное выражение в формуле (2.4) для  $p_0$  меняет знак.

Дополнительные вычисления показали, что в точках (2.5), (2.6) одновременно с  $\xi_3$  и  $\xi_4$  обращаются в ноль и величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , т.е. там обнуляется весь вектор  $\Xi$ . Согласно теореме 7.1 [1], для проверки локальной интегрируемости системы (2.10) [1] в точках (2.5), (2.6) надо только вычислить в них ранг матрицы  $M$ , определенной в (7.5), (7.8), (9.3) [1].

**2.3. Вычисление ранга матрицы  $M$  в особых точках (2.5), (2.6).**

Поскольку все эти точки точны, то в них получены точные значения ко-

эффициентов нормальной формы, т.е. точные выражения для матрицы  $M$ . При  $c = 1$  для  $\delta = \pm 1$  оказалось, что  $\text{rank } M = 0$ , т.е. все элементы этой матрицы нулевые. При  $c = 1/2$  матрица  $M$  имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-7i\sqrt{7}}{2} & \frac{7i}{12} & \frac{-49i}{72} & \frac{-7i}{6} \\ 0 & 7i & \frac{-i\sqrt{7}}{6} & \frac{7i\sqrt{7}}{36} & \frac{i\sqrt{7}}{3} \\ 0 & 53i\sqrt{7} & \frac{-53i}{6} & \frac{371i}{36} & \frac{53i}{3} \\ 0 & \frac{-8i}{\sqrt{7}} & \frac{4i}{21} & \frac{-2i}{9} & \frac{-8i}{21} \end{pmatrix} \quad \text{для } \delta=1,$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{81}{2\sqrt{17}} & \frac{255i}{8} & 0 & \frac{-17i}{2} \\ 0 & \frac{243i}{17} & \frac{-45\sqrt{17}}{4} & 0 & 3\sqrt{17} \\ 0 & \frac{-5832}{289\sqrt{17}} & \frac{-270i}{17} & 0 & \frac{72i}{17} \\ 0 & \frac{-783}{17\sqrt{17}} & \frac{-145i}{4} & 0 & \frac{29i}{3} \end{pmatrix} \quad \text{для } \delta=-1.$$

Ее ранг равен 1. Это соответствует теории §7 [1].

В точке  $c = 1/9$ ,  $\delta = -1$  вычисление матрицы  $M$  дает

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-7}{16} & \frac{7}{16} & 0 \\ 0 & \frac{35}{144} & 0 & 0 & \frac{-5i}{12} \\ 0 & \frac{-35}{144} & 0 & 0 & \frac{5i}{12} \end{pmatrix}.$$

Здесь ранг  $M$  равен двум, т.е. в точке  $c = 1/9$ ,  $\delta = -1$  не выполнено второе условие второй серии условий теоремы 7.1 [1]. Согласно указанной теореме в этой точке система (2.10)[7] не имеет дополнительного формального интеграла.

Итак, во всех точках кривых  $\mathcal{F}_\delta$ , кроме исключительной точки (3.10) [1] и точек  $c = 1$ ,  $c = 1/2$ , система (2.10) [1] локально неинтегрируема. Следовательно, эта система глобально неинтегрируема при всех  $c \in (0, 2]$ , кроме  $c = 1$  и  $c = 1/2$ , соответствующих классическим случаям интегрируемости Лагранжа-Пуассона и С. Ковалевской.

## Литература

1. Брюно А.Д. Теория нормальных форм уравнений Эйлера-Пуассона // Препринт N 100. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2005. 27 с.
2. Bruno A.D. and Edneral V.F. Normal forms and integrability of ODE systems // Proceedings of CASC 2005. (V.G. Ganzha, E.W. Mayr, and E.V. Vorozhtsov Eds.), LNCS 3718, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005, p. 65–74.
3. Брюно А.Д., Еднерал В.Ф. Нормальная форма и интегрируемость систем ОДУ // Программирование, 2006, т. 32, No 3, с. 22–29.
4. Edneral V.F. and Khanin R. Application of the resonant normal form to high order nonlinear ODEs using MATHEMATICA // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A. 2003. vol. 502, No 2–3, p. 643–645.

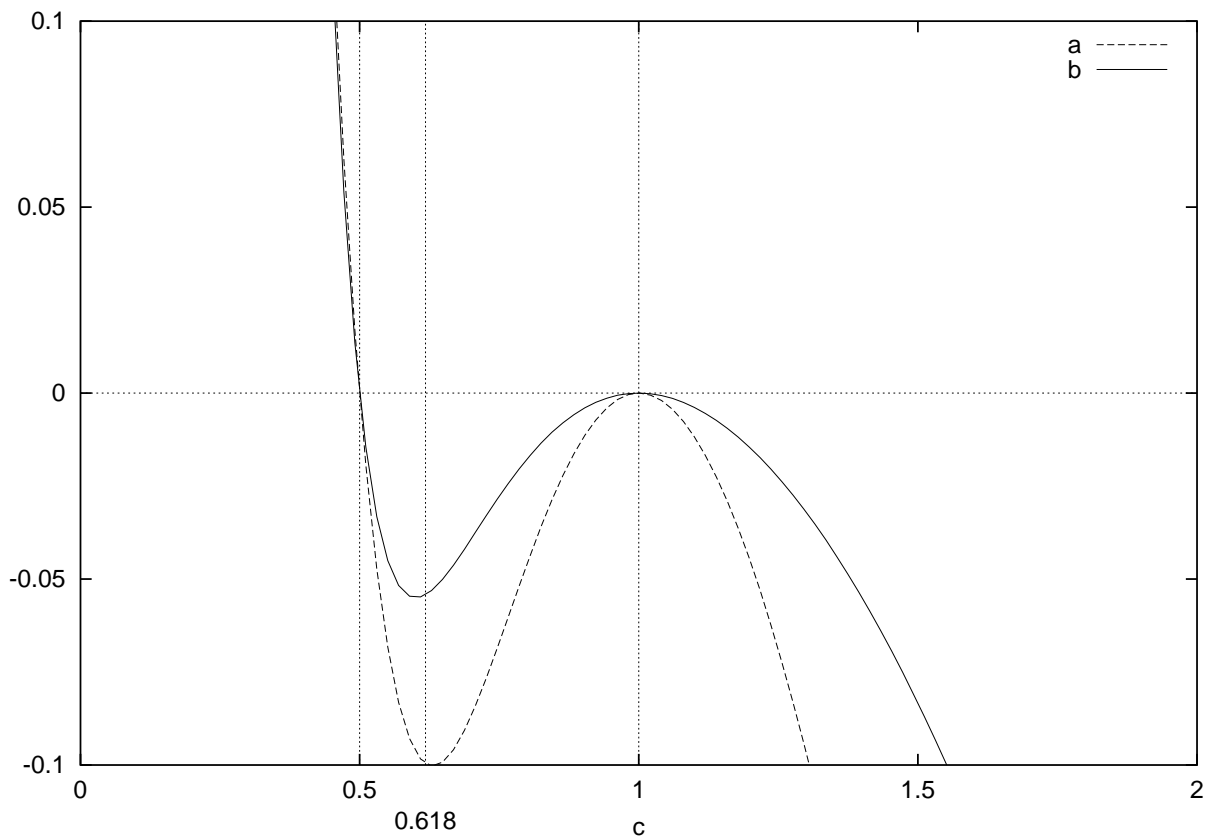


Рис. 1: Коэффициенты  $\text{Im } a(c)$ ,  $\text{Im } b(c)$  при  $\delta_2 = 1$ .



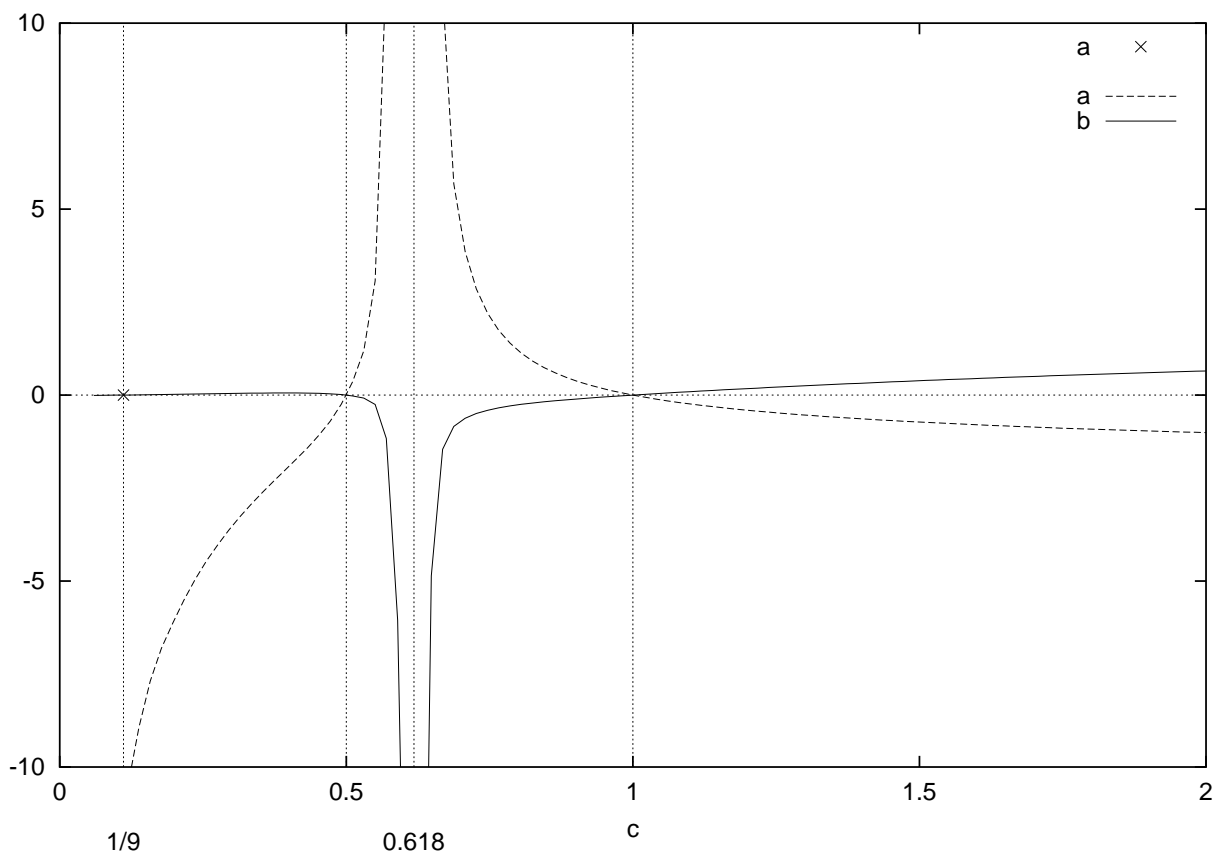


Рис. 2: Коэффициенты  $\text{Im } a(c)$ ,  $\text{Im } b(c)$  и  $a(c)$ ,  $b(c)$  при  $\delta_2 = -1$ .

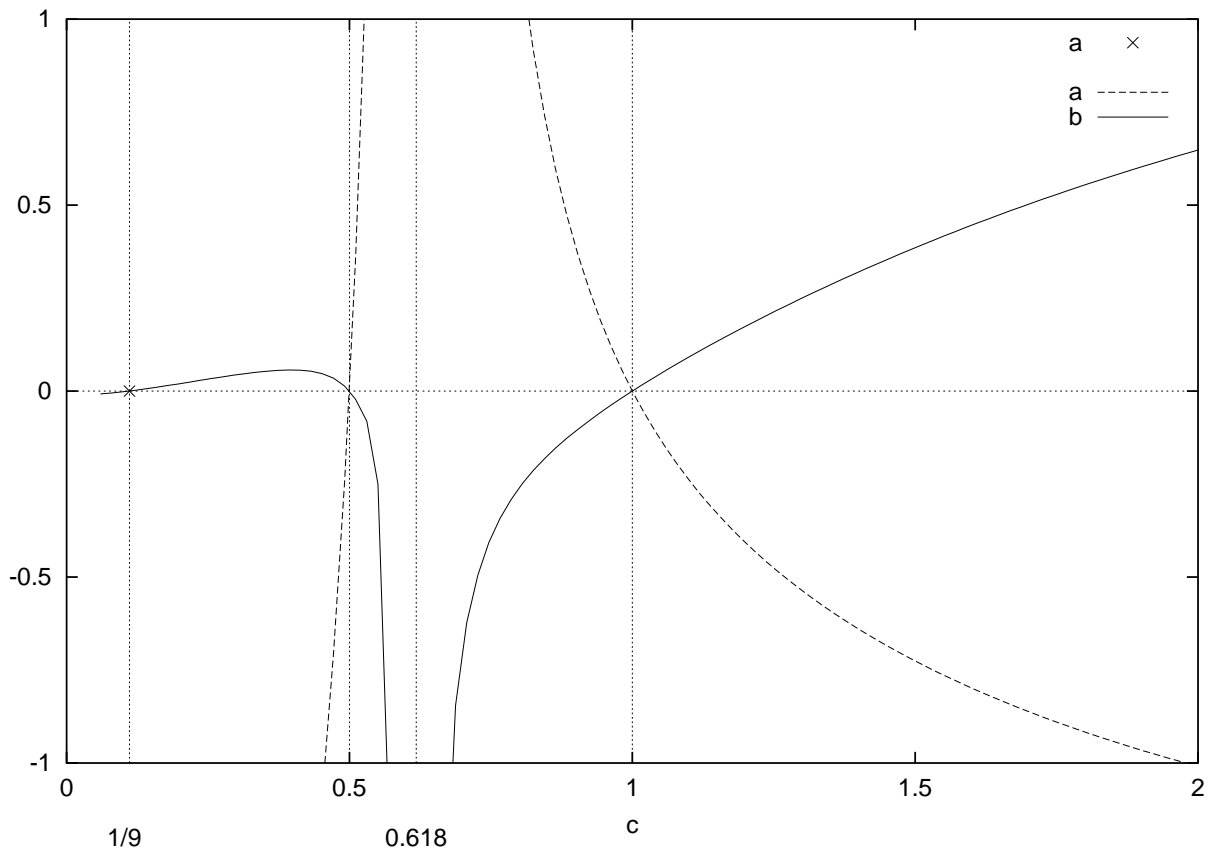


Рис. 3: Коэффициенты  $\text{Im } a(c)$ ,  $\text{Im } b(c)$  при  $\delta_2 = -1$  в укрупненном масштабе.