



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 11 за 2007 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

С.Д. Устюгов, М. В. Попов

Кусочно-параболический
метод на локальном
шаблоне. IV. Многомерная
идеальная МГД.

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Устюгов С.Д., Попов М. В. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. IV. Многомерная идеальная МГД. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 11. 30 с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-11>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.
IV. Многомерная идеальная МГД.

Москва 2007

С.Д. Устюгов, М.В. Попов

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне.

IV. Многомерная идеальная МГД.

Аннотация

В работе предложена численная схема решения системы уравнений идеальной магнитной газодинамики, построенная на основе кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML). Метод использует свойство сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик системы уравнений МГД, что позволяет применять локальный шаблон при построении численного решения. Такой подход улучшает диссипативные свойства численной схемы и удобен при использовании адаптивных разностных сеток. Основные элементы построения схемы проиллюстрированы на примере двухмерного случая. Рассмотрен вопрос о сохранении свойства бездивергентности магнитного поля. Проведено тестирование на примере нескольких характерных задач магнитной газодинамики.

S.D. Ustyugov, M.V. Popov

Piecewise parabolic method on local stencil.

IV. Multidimensional ideal MHD.

Abstract

Technique for solving of ideal MHD equations on the basis of piecewise parabolic method on local stencil (PPML) is suggested. PPML uses the property of Riemann invariants to conserve when moving along the characteristic curves of MHD equations, what allows to use local stencil for constructing numerical solution. This approach improves the dissipative properties of the numerical scheme and must be convenient in adaptive grids. Basic elements of the scheme constructing technique are illustrated for 2D case. A question about maintaining of nondivergence constraint on magnetic field is considered. Testing of the scheme was carried out with the help of some typical 2D test problems.

Содержание

1	Введение	3
2	Уравнения идеальной МГД	3
3	Численная схема	9
3.1	Вычисление состояний на границах разностных ячеек	9
3.2	Выполнение условия $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	12
3.3	Монотонизация решения	15
4	Тестирование	17
4.1	Тест 1: численная диссипация и распад альвеновской волны	17
4.2	Тест 2: распространение циркулярно-поляризованной альвеновской волны	18
4.3	Тест 3: 2.5-мерная ударная волна (the 2.5D shock tube problem)	20
4.4	Тест 4: быстрое вращение цилиндра в покоящейся среде с однородным магнитным полем (rotor problem)	22
4.5	Тест 5: вихрь Орзага-Танга (Orszag-Tang vortex problem)	25
5	Заключение	27

1 Введение

Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (PPML), предложенный авторами, был исследован на примере решения задачи Коши для линейного уравнения переноса и невязкого уравнения Бюргерса в одномерном случае [1], была разработана методика применения PPML для решения задач газодинамики [2] и задач идеальной одномерной МГД [3]. Предложенный метод является модификацией стандартного кусочно-параболического метода (PPM) [4] и основан на использовании свойства сохранения инвариантов Римана при их переносе вдоль характеристической кривой на следующий шаг по времени для нахождения граничных точек кусочной параболы вместо интерполяционной процедуры по четырехточечному шаблону, применяемой в PPM. Исключение интерполяционной процедуры дает возможность точного представления разрывных решений без добавления излишней диссипации, присущей схемам на расширенных шаблонах. Метод PPML удобен также для решения задач на адаптивных разностных сетках.

В данной работе будет представлена численная схема решения задач идеальной магнитной многомерной газодинамики, построенная на основе метода PPML. В отличие от одномерного случая, здесь необходимо учесть дополнительное ограничение на магнитное поле - условие его бездивергентности (отсутствия магнитных зарядов). В одномерной постановке это условие учитывать не имеет смысла, т.к. уравнение эволюции компоненты B_x магнитного поля превращается в тождество [3]. Кроме того, в многомерной постановке при расщеплении системы МГД по пространственным координатам и последовательном решении вдоль каждого направления необходимо учитывать потоки величин в ортогональных направлениях в виде источников, аналогично методике, использованной при решении системы уравнений газодинамики [2]. Основные элементы построения численной схемы будут проиллюстрированы на примере двухмерного случая. Ее тестирование мы проведем на нескольких характерных задачах МГД.

2 Уравнения идеальной МГД

Система уравнений идеальной МГД в общем виде выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B}) + \nabla \bar{p} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} E + \mathbf{v} \bar{p} - \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где ρ - плотность, $\mathbf{v}$ - вектор скорости (его компоненты в дальнейшем будем обозначать как u , v и w), $\mathbf{B}$ - вектор магнитного поля (чтобы не загромождать уравнения (2.1), мы включили множитель $1/\sqrt{4\pi}$ в определение $\mathbf{B}$), E - полная энергия, p - полное давление (гидродинамическое+магнитное):

$$\bar{p} = p + p_{mag},$$

$$p_{mag} = \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{2}.$$

Система (2.1) дополняется уравнением для полной энергии

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho \mathbf{v} \mathbf{v}}{2} + \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{2} \quad (2.2)$$

и уравнением состояния, которое в случае идеального газа имеет вид:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (2.3)$$

где ε - удельная внутренняя энергия, γ - показатель адиабаты.

Необходимо также ввести дополнительное ограничение на магнитное поле (условие отсутствия магнитных зарядов):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

Дивергентная форма системы (2.1), записанная для консервативных переменных, в двухмерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_x, B_y, B_z, E)^T, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + \bar{p} - B_x^2, \rho uv - B_x B_y, \rho uw - B_x B_z, 0, u B_y - v B_x, u B_z - w B_x, u(E + \bar{p}) - B_x(u B_x + v B_y + w B_z))^T, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{G} = (\rho v, \rho uv - B_x B_y, \rho v^2 + \bar{p} - B_y^2, \rho vw - B_y B_z, v B_x - u B_y, \\ 0, v B_z - w B_y, v(E + \bar{p}) - B_y(u B_x + v B_y + w B_z))^T, \quad (2.8)$$

Все величины в (2.6)-(2.8) зависят от координат x, y и времени t .

Введем обозначения:

$$(b_x, b_y, b_z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (B_x, B_y, B_z), \quad b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2.$$

Тогда скорость звука c , альвеновская скорость c_a , быстрая скорость c_f и медленная скорость c_s запишутся в виде:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \\ c_a = |b_x|, \\ c_{f,s} = \left(\frac{1}{2} (c^2 + b^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 + b^2)^2 - 4c^2 b_x^2} \right)^{1/2}.$$

Для проведения характеристического анализа и построения решения методом РРМЛ систему (2.5) необходимо переписать в физических переменных в квазилинейной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = 0, \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{V} = (\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z, p)^T$$

Матрицы A_x и A_y можно вычислить через Якобианы консервативной системы $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ и $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{U}$:

$$A_x = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} M, \quad A_y = M^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} M, \quad (2.10)$$

где M - матрица перехода:

$$M = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \rho v & \rho w & B_x & B_y & B_z & \frac{1}{\gamma - 1} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)u^2}{2} & k u & k v & k w & k B_x & k B_y & k B_z & (\gamma-1) \end{pmatrix},$$

где $k = 1 - \gamma$. Согласно (2.10) матрицы A_x и A_y имеют вид:

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 & B_y/\rho & B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -B_x/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & -B_x/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & -B_y/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & B_x/\rho & 0 & B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 & -B_y/\rho & 0 \\ 0 & -B_y & B_x & 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы матриц A_x и A_y могут иметь сингулярности в точках вырождения собственных значений. Чтобы этого избежать Брио и Ву предложили нормировку вида [5]:

$$(\beta_y, \beta_z) = \begin{cases} \frac{(B_y, B_z)}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} & \text{если } B_y^2 + B_z^2 \neq 0, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$(\alpha_f, \alpha_s) = \begin{cases} \frac{\left(\sqrt{c^2 - c_s^2}, \sqrt{c_f^2 - c^2}\right)}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} & \text{если } B_y^2 + B_z^2 \neq 0 \text{ или } \gamma p \neq B_x^2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.13)$$

Собственные значения Якобиана A_x имеют вид:

$$\lambda_x^{1,8} = u \pm c_f, \quad \lambda_x^{2,7} = u \pm c_a, \quad \lambda_x^{3,6} = u \pm c_s, \quad \lambda_x^{4,5} = u.$$

$\lambda_x^{1,8}$ соответствуют паре быстрых магнито-акустических волн, $\lambda_x^{2,7}$ - паре альвеновских волн, $\lambda_x^{3,6}$ - паре медленных магнито-акустических волн, λ_x^4 - энтропийной волне, λ_x^5 - волна, соответствующая сохранению магнитного потока.

Левые и правые собственные векторы Якобиана A_x с учетом нормировки (2.12)-(2.13) имеют вид:

$$\mathbf{l}_x^{1,8} = \left(0, \pm \frac{\alpha_f c_f}{2c^2}, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} c} \beta_y, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} c} \beta_z, \frac{\alpha_f}{2\rho c^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_x^{1,8} = \left(\rho \alpha_f, \pm \alpha_f c_f, \mp \alpha_s c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_y, \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_f \gamma p \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^{2,7} = \left(0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, 0, \pm \frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}}, \mp \frac{\beta_y}{\sqrt{2\rho}}, 0 \right), \\ \mathbf{r}_x^{2,7} = \left(0, 0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, \frac{\beta_y}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_x, 0, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_z, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_y, 0 \right)^T,$$

$$\mathbf{l}_x^{3,6} = \left(0, \pm \frac{\alpha_s c_s}{2c^2}, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} c} \beta_y, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} c} \beta_z, \frac{\alpha_s}{2\rho c^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_x^{3,6} = \left(\rho \alpha_s, \pm \alpha_s c_s, \pm \alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \right. \\ \left. 0, -\alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_y, -\alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_s \gamma p \right)^T,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_x^4 &= \left(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{c^2}\right), \\ \mathbf{r}_x^4 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{l}_x^5 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{r}_x^5 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Записанные таким образом собственные векторы ортонормированны. Собственные значения и собственные векторы Якобиана A_y записываются аналогично:

$$\begin{aligned} \lambda_y^{1,8} &= v \pm c_f, \quad \lambda_y^{2,7} = v \pm c_a, \quad \lambda_y^{3,6} = v \pm c_s, \quad \lambda_y^{4,5} = v, \\ \mathbf{l}_y^{1,8} &= \left(0, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\alpha_f c_f}{2c^2}, \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} c} \beta_x, 0, \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho} c} \beta_z, \frac{\alpha_f}{2\rho c^2}\right), \\ \mathbf{r}_y^{1,8} &= \left(\rho \alpha_f, \mp \alpha_s c_s \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \alpha_f c_f, \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ &\quad \left. \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_x, 0, \alpha_s \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_f \gamma p\right)^T, \\ \mathbf{l}_y^{2,7} &= \left(0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, 0, \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\beta_z}{\sqrt{2\rho}}, 0, \mp \frac{\beta_x}{\sqrt{2\rho}}, 0\right), \\ \mathbf{r}_y^{2,7} &= \left(0, -\frac{\beta_z}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, 0, \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} B_y, \pm \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_z, 0, \mp \sqrt{\frac{\rho}{2}} \beta_x, 0\right)^T, \\ \mathbf{l}_y^{3,6} &= \left(0, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \frac{\alpha_s c_s}{2c^2}, \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ &\quad \left. -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} c} \beta_x, 0, -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho} c} \beta_z, \frac{\alpha_s}{2\rho c^2}\right), \\ \mathbf{r}_y^{3,6} &= \left(\rho \alpha_s, \pm \alpha_f c_f \beta_x \operatorname{sgn} B_y, \pm \alpha_s c_s, \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_y, \right. \\ &\quad \left. -\alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_x, 0, -\alpha_f \sqrt{\rho} c \beta_z, \alpha_s \gamma p\right)^T, \\ \mathbf{l}_y^4 &= \left(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{c^2}\right), \\ \mathbf{r}_y^4 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{l}_y^5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \\ \mathbf{r}_y^5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

3 Численная схема

При построении численной схемы для решения системы уравнений многомерной МГД на основе метода PRML применяется тот же подход, что и для одномерного случая [3]. В каждой разностной ячейке необходимо линеаризовать уравнения МГД, фиксируя базис собственных векторов, и вычислить состояния на границах и в центрах ячеек, необходимые для реконструкции решения с помощью кусочных парабол. Далее следует применить ряд процедур монотонизации решения. Изменения, связанные с многомерностью задачи, будут касаться учета дополнительных потоков величин при вычислении состояний на границах ячеек и выполнения условия бездивергентности магнитного поля (2.4) при определении его компонент. Также необходимо будет модифицировать формулу для лимитеров в одной из процедур монотонизации решения.

3.1 Вычисление состояний на границах разностных ячеек

Будем расщеплять систему МГД по пространственным координатам и решать ее последовательно вдоль каждого координатного направления. Рассмотрим, например, направление x . Вектор-функция состояния $\mathbf{V}(x, t)$ в каждой ячейке раскладывается по фиксированному локальному базису правых собственных векторов $\mathbf{r}_x^p$:

$$\mathbf{V}(x, t) = \sum_p \alpha^p(x, t) \mathbf{r}_x^p. \quad (3.1)$$

Коэффициенты $\alpha^p(x, t)$ в разложении (3.1) (амплитуды волн) являются инвариантами Римана, сохраняющимися вдоль характеристик системы (2.9). Поэтому значения $\alpha^p(x, t)$, например, на правой границе ячейки с номером (i, j) при $x = x_{i+1/2}$ в момент времени $t + \tau$ можно вычислить, зная значения амплитуд волн, распространяющихся в ячейке (i, j) , в момент времени t . Однако при этом необходимо учесть вклад в амплитуды за счет потока в ортогональном направлении y .

Разложим матрицу A_x по собственным векторам:

$$A_x = R_x \Lambda_x L_x, \quad (3.2)$$

где R_x - матрица, столбцы которой есть правые собственные векторы $\mathbf{r}_x^p$, L_x - обратная ей матрица, строки которой есть левые собственные векторы $\mathbf{l}_x^p$, Λ_x - диагональная матрица собственных значений: $(\Lambda_x)_{ij} = 0$ для $i \neq j$, $(\Lambda_x)_{ij} = \lambda_x^p$ для $i = j = p$. Подставим (3.2) в (2.9) и домножим на матрицу

L_x слева, тогда

$$L_x \partial_t \mathbf{V} + \Lambda_x L_x \partial_x \mathbf{V} + L_x A_y \partial_y \mathbf{V} = 0. \quad (3.3)$$

Подставив (3.1) в (3.3) и рассмотрев слагаемое, отвечающее за направление y , как источник, получим уравнение относительно $\alpha^p(x, t)$:

$$\partial_t \alpha^p + \lambda^p \partial_x \alpha^p = D^p, \quad p = 1, \dots, 8, \quad (3.4)$$

$$D^p = -\mathbf{l}_x^p A_y^p \partial_y V^p, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{l}_x^p$ - левый вектор Якобиана A_x , A_y^p - столбец Якобиана A_y , V^p - компонента вектора физических переменных. Решение уравнения (3.4) для амплитуд волн, распространяющихся к правой границе ячейки с номером (i, j) , записывается в виде:

$$\alpha^p(x_{i+1/2}, t + \tau) = \alpha^p(x_{i+1/2} - \lambda_x^p \tau, t) + D^p \tau \quad \text{для } \lambda_x^p > 0. \quad (3.6)$$

(На состояние на правой границе влияют только те волны внутри ячейки с номером (i, j) , которые распространяются вдоль характеристик, отвечающих положительным λ_x^p .)

Значения компонент $\mathbf{l}_x^p$ и A_y^p в (3.5) мы предлагаем вычислять по тому же состоянию, по которому фиксируется базис собственных векторов в каждой ячейке. Частные производные $\partial_y V^p$ можно вычислить, заменив их разностными:

$$\partial_y V^p = \frac{V_{i,j+1}^p - V_{i,j}^p}{\Delta y}.$$

Амплитуды волн в момент времени $t + \tau$ на правой границе ячейки с номером (i, j) вычисляются по формуле (3.6) через значения амплитуд в момент времени t . В свою очередь, значения амплитуд в момент времени t вычисляются в соответствии с (3.1) путем домножения состояния $\mathbf{V}(x, t)$ в точке $x^p = x_{i+1/2} - \lambda_x^p \tau$ на соответствующие левые собственные векторы:

$$\alpha^p(x^p, t) = \mathbf{l}_x^p \cdot \mathbf{V}(x^p, t) \quad \text{для } \lambda_x^p > 0.$$

Состояние на правой границе ячейки (i, j) будет являться левым относительно интерфейса между ячейками (i, j) и $(i + 1, j)$. Обозначим его как $\mathbf{V}^L$. После определения амплитуд (3.6) оно вычисляется по формуле (3.1) путем суммирования по собственным векторам, фиксированным в ячейке (i, j) , отвечающим положительным собственным значениям.

Аналогичным образом определяется состояние $\mathbf{V}^R$ справа от интерфейса, при этом в ячейке с номером $(i + 1, j)$ рассматриваются характеристики, отвечающие $\lambda_x^p < 0$. После этого методом Роу [6] решается задача Римана

о распаде разрыва между состояниями $\mathbf{U}^L$ и $\mathbf{U}^R$, соответствующим состояниям в простых переменных $\mathbf{V}^L$ и $\mathbf{V}^R$, и вычисляется состояние $\mathbf{U}_{i+1/2,j}$ на интерфейсе:

$$\mathbf{U}_{i+1/2,j} = \frac{\mathbf{U}^L + \mathbf{U}^R}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p (\lambda_x^* > 0)} \alpha^{*p} \mathbf{r}_{\mathbf{U}^p}^p(\mathbf{V}^*) - \frac{1}{2} \sum_{p (\lambda_x^* < 0)} \alpha^{*p} \mathbf{r}_{\mathbf{U}^p}^p(\mathbf{V}^*), \quad (3.7)$$

где $\mathbf{r}_{\mathbf{U}^p}^p = M \mathbf{r}_x^p$ - правые собственные векторы для консервативной системы МГД (M - матрица перехода (2.11)). Значения их компонент вычисляются по состоянию $\mathbf{V}^*$, определяемом с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \rho^* &= \sqrt{\rho^L \rho^R}, \\ \xi^* &= \frac{\sqrt{\rho^L} \xi^L + \sqrt{\rho^R} \xi^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \text{ для } \xi = u, v, w, h, \\ B_x^* &= \frac{B_x^L + B_x^R}{2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$B_{y,z}^* = \frac{B_{y,z}^L / \sqrt{\rho^L} + B_{y,z}^R / \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \sqrt{\rho^L \rho^R}, \quad (3.9)$$

$$p^* = \left(\rho^* h^* - W^* - B^* \right) \frac{\gamma - 1}{\gamma},$$

где

$$W^* = \rho^* \frac{(u^*)^2 + (v^*)^2 + (w^*)^2}{2},$$

$$B^* = (B_x^*)^2 + (B_y^*)^2 + (B_z^*)^2.$$

Величина $h = (E + \bar{p})/\rho$ есть удельная энтальпия. Значения амплитуд α^{*p} в (3.7) вычисляются по состоянию $\mathbf{V}^*$ в соответствии с (3.1):

$$\mathbf{V}^* = \sum_p \alpha^{*p} \mathbf{r}_x^p(\mathbf{V}^*).$$

К сожалению, в работах [2, 3] формула (3.7) была ошибочно записана для состояний в простых переменных.

Таким образом, состояния на границах разностных ячеек вдоль направления x определены. Направление y рассматривается аналогичным образом. При этом формулы усреднения (3.8) и (3.9) заменяются на

$$\begin{aligned} B_y^* &= \frac{B_y^L + B_y^R}{2}, \\ B_{x,z}^* &= \frac{B_{x,z}^L / \sqrt{\rho^L} + B_{x,z}^R / \sqrt{\rho^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \sqrt{\rho^L \rho^R}, \end{aligned}$$

а в источнике D^p будет учитываться вклад потока величин в направлении x . При решении системы МГД в трехмерной постановке таких источников будет два.

Методика вычисления потоков на границах ячеек полностью повторяет изложенную для одномерного случая [3]. Консервативная разностная схема для вычисления состояний в центрах ячеек на временном шаге $n + 1$ имеет вид:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\tau}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right) - \frac{\tau}{\Delta y} \left(\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (3.10)$$

Полуцелые пространственные индексы у потоков показывают, к каким границам разностной ячейки они относятся. Полуцелый номер шага по времени $n + 1/2$ означает, что берутся усредненные значения потоков по временному шагу τ , что дает второй порядок аппроксимации по времени.

3.2 Выполнение условия $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

При численном решении системы МГД (2.1) условие бездивергентности магнитного поля (2.4) может не выполняться. В этом случае возможен нефизический перенос вещества в направлении, ортогональном полю $\mathbf{B}$ (появляются фиктивные силы), также возможно нарушение законов сохранения энергии и момента. В настоящее время существует несколько подходов к решению данной проблемы. Подробное их обсуждение можно найти в работе [7].

Один из способов заключается в использовании восьмиволнового представления уравнений МГД, которое, как оказалось, ведет себя более стабильно при их разностной аппроксимации [8]. В систему МГД вводится дополнительное уравнение, отвечающее за перенос $\operatorname{div} \mathbf{B}$, и, таким образом, если в процессе численного счета где-то возникает ненулевая дивергенция магнитного поля, она сносится за границу расчетной области. Этот подход не является универсальным, т.к. существуют задачи, в которых $\operatorname{div} \mathbf{B}$ может накапливаться в некоторых областях. Кроме того, появляющаяся восьмая характеристика может привести к нефизическим решениям (отрицательным температуре и плотности).

Другой способ - использование так называемых проекционных схем (projection scheme) [9]. Идея основана на том, что любое векторное поле можно представить в виде суммы ротора и градиента:

$$\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi. \quad (3.11)$$

Если поле $\mathbf{B}$ бездивергентно, то оно определяется только ротором векторного потенциала:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.12)$$

Если в результате численного решения получено поле $\mathbf{B}^*$ с ненулевой дивергенцией, то согласно (3.11)-(3.12) его можно скорректировать:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}^* - \nabla \phi. \quad (3.13)$$

При этом, согласно (3.11), потенциал ϕ вычисляется из уравнения Пуассона

$$\Delta \phi = \text{div } \mathbf{B}^*. \quad (3.14)$$

Недостатком метода является трудоемкость численного решения (3.14), обеспечивающего выполнение (3.13).

Наконец, можно удовлетворить условию бездивергентности магнитного поля, воспользовавшись теоремой Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3.15)$$

что впервые было предложено в работе [10] (схема с ограничением переноса - constrained transport или СТ). В этом случае компоненты магнитного поля определяются в центрах граней разностных ячеек, электрического поля - в узлах сетки, остальные величины - в центрах ячеек. В работе [11] была предложена методика, объединяющая идею использования теоремы Стокса при таком расположении величин на сетке со схемами гоуновского типа (схема Flux-СТ). Этой методикой мы и предлагаем воспользоваться при построении численной схемы на основе метода PRML.

Очевидно, используя (3.15) для определения магнитного поля на каждом шаге по времени, мы обеспечим его бездивергентность. Как известно,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Следовательно, из (2.7)-(2.8) видно, что вычисляя потоки в каждый момент времени мы получаем компоненты электрического поля, относящиеся, как и сами потоки, к границам ячеек. Так, шестая компонента потока F_6 есть z -компонента электрического поля с обратным знаком, относящаяся к левой и правой границе ячейки, а пятая компонента потока G_5 есть z -компонента электрического поля, относящаяся к верхней и нижней границе ячейки. Поэтому, усредняя соответствующие компоненты потоков, можно получить z -компоненту электрического поля в узлах сетки.

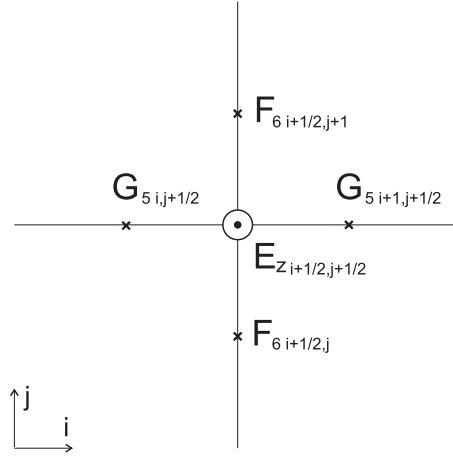


Рис. 1. Компоненты потоков, используемые для вычисления E_z .

На рис. 1 показаны компоненты потоков, которые нужно усреднить, чтобы получить E_z в узле с номером $(i + 1/2, j + 1/2)$:

$$E_{z \ i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{4} \left(-F_{6 \ i+1/2, j} - F_{6 \ i+1/2, j+1} + G_{5 \ i, j+1/2} + G_{5 \ i+1, j+1/2} \right). \quad (3.16)$$

Вычислив E_z во всех узлах сетки и зная компоненты поля на предыдущем шаге по времени, мы можем воспользоваться (3.15) для определения новых компонент магнитного поля на границах ячеек в момент времени $n + 1$. Теорема Стокса на разностной сетке аппроксимируется следующим образом:

$$B_{x \ i+1/2, j}^{n+1} = B_{x \ i+1/2, j}^n - \frac{\tau}{\Delta y} \left(E_{z \ i+1/2, j+1/2} - E_{z \ i+1/2, j-1/2} \right), \quad (3.17)$$

$$B_{y \ i, j+1/2}^{n+1} = B_{y \ i, j+1/2}^n - \frac{\tau}{\Delta x} \left(E_{z \ i+1/2, j+1/2} - E_{z \ i-1/2, j+1/2} \right). \quad (3.18)$$

На рис. 2 показаны компоненты E_z в узлах ячейки с номером (i, j) и компоненты B_x и B_y , вычисляемые по формулам (3.17)-(3.18) и относящиеся к граням ячейки.

Компоненты поля в центре ячейки (i, j) получаются усреднением:

$$B_{x \ i, j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(B_{x \ i-1/2, j}^{n+1} + B_{x \ i+1/2, j}^{n+1} \right), \quad (3.19)$$

$$B_{y \ i, j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(B_{y \ i, j-1/2}^{n+1} + B_{y \ i, j+1/2}^{n+1} \right). \quad (3.20)$$

После подстановки (3.17)-(3.18) в (3.19)-(3.20) компоненты поля $B_{x \ i+1/2, j}^n$ и $B_{y \ i, j+1/2}^n$ на границах ячеек на временном шаге n усредняются аналогично (3.19)-(3.20) и дают известные с предыдущего шага по времени компоненты $B_{x \ i, j}^n$ и $B_{y \ i, j}^n$ в центрах ячеек.

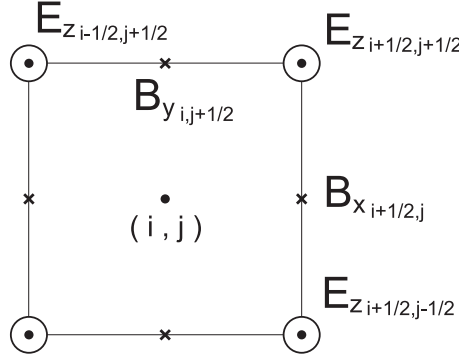


Рис. 2. Компоненты E_z , B_x и B_y в ячейке с номером (i, j) .

Полученное таким образом магнитное поле удовлетворяет условию бездивергентности в каждом узле разностной сетки, в чем можно убедиться, аппроксимировав $\operatorname{div} \mathbf{B}$ по формуле:

$$(\operatorname{div} \mathbf{B})_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{2 \Delta x} \left(B_{x\ i+1, j} + B_{x\ i+1, j+1} - B_{x\ i, j} - B_{x\ i, j+1} \right) + \frac{1}{2 \Delta y} \left(B_{y\ i, j+1} + B_{y\ i+1, j+1} - B_{y\ i, j} - B_{y\ i+1, j} \right).$$

Вычисленные с помощью разностной схемы (3.10) компоненты B_x и B_y магнитного поля в центрах ячеек на временном шаге $n+1$ необходимо заменить на компоненты, полученные по формулам (3.19)-(3.20). Заметим, что при решении системы МГД в трехмерной постановке необходимо переопределять все три компоненты магнитного поля.

3.3 Монотонизация решения

Зная состояния на границах ячеек, вычисленные согласно (3.7), и состояния в их центрах, вычисленные согласно (3.10), мы можем построить вектор-функции $\mathbf{V}(x)$ и $\mathbf{V}(y)$ - решение системы (2.1) на следующем шаге по времени $t + \tau$, аппроксимированное с помощью кусочных парабол вдоль каждой координатной оси.

В стандартном методе РРМ имеется процедура монотонизации полученного решения путем модификации граничных состояний. Она изложена в [3] и остается без изменений и для многомерного случая. Однако, в отличие от задач газодинамики [2], ее оказалось недостаточно для получения гладкого решения в задачах МГД и нами были предложены дополнительные процедуры для подавления возникающих осцилляций [3]. Одна из таких процедур связана с использованием лимитеров, ограничивающих аппроксимирующую параболу. При решении задач в многомерной постановке формулу

для вычисления лимитеров необходимо модифицировать.

Аппроксимирующая парабола, построенная вдоль направления x , для каждой компоненты $V(x)$ состояния $\mathbf{V}(x, t)$ в некоторый момент времени записывается в виде:

$$V(x) = V_{i,j} + \phi(V) \left[s_{i,j} (x - x_i) + \frac{\sigma_{i,j}}{2} \left((x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right) \right], \quad (3.21)$$

где

$$s_{i,j} = \frac{V_{i+1/2,j} - V_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \quad \sigma_{i,j} = 6 \frac{V_{i+1/2,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1/2,j}}{\Delta x^2}.$$

В качестве лимитера $\phi(V)$ используется функция следующего вида [12]:

$$\phi(V) = \min \left(1, \frac{|V_{i,j} - \max(V_{l,m})|}{|V_{i,j} - \max(V_{i-1/2,j}, V_{i+1/2,j}, V_{i,j-1/2}, V_{i,j+1/2})|}, \frac{|V_{i,j} - \min(V_{l,m})|}{|V_{i,j} - \min(V_{i-1/2,j}, V_{i+1/2,j}, V_{i,j-1/2}, V_{i,j+1/2})|} \right),$$

где $l = i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2$, $m = j - 2, j - 1, j, j + 1, j + 2$ кроме случая $(l, m) = (i, j)$. Таким образом, в двухмерной задаче при вычислении лимитеров учитывается все окружение ячейки (i, j) .

С помощью ограниченной аппроксимирующей параболы (3.21) для каждой ячейки с номером (i, j) вычисляются новые граничные значения компонент $V_{i-1/2,j}^R$ и $V_{i+1/2,j}^L$ (индексы $i - 1/2$ и $i + 1/2$ обозначают левую и правую границы ячейки, а индексы R и L означают, что вычисленные величины являются компонентами правого и левого состояния относительно этих границ). После данной процедуры кусочные параболы оказываются не сшитыми на границах ячеек: $V_{i+1/2,j}^L \neq V_{i+1/2,j}^R \neq V_{i+1/2,j}$.

Процедура монотонизации, связанная с определением пределов допустимого изменения амплитуд волн, по которым вычисляются граничные состояния, останется без изменений (см. [3]).

В проведенных тестовых двухмерных расчетах, последовательность методик монотонизации решения осуществлялась следующим образом: сначала была применена процедура определения пределов допустимого изменения амплитуд волн, по которым вычисляются граничные состояния, далее использовалась многомерная реконструкция с помощью лимитеров, и, наконец, для устранения ложных экстремумов применялась стандартная процедура монотонизации RRM.

4 Тестирование

Численный метод был протестирован на примере нескольких характерных двухмерных задач МГД. Во всех расчетах уравнение состояния и уравнение энергии брались для случая идеального газа (2.2)-(2.3).

4.1 Тест 1: численная диссипация и распад альвеновской волны

Как показали численные эксперименты, распространение волн в задачах МГД происходит с минимальной диссипацией величин, если волны распространяются под углом 45° к осям разностной сетки. Однако при моделировании реальных физических процессов, в частности при исследовании турбулентности, способность численной схемы обеспечивать малую диссипацию при распространении волн под малыми углами к сетке оказывается необходимой для получения правильного физического решения. Для исследования вопроса, как ведет себя численная схема на основе метода RPML в этом случае, мы воспользовались тестовой задачей из статьи [13], в которой происходит распад альвеновской волны.

Альвеновская волна задавалась с помощью параметрических флуктуаций скорости и магнитного поля в области размером $[-r/2, r/2] \times [-r/2, r/2]$, где $r = 6$. Она распространялась вдоль вектора

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} \mathbf{e}_x + \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} \mathbf{e}_y.$$

Угол между $\mathbf{n}$ и осью y при $r = 6$ составляет 9.462° . Скорость волны определялась с помощью параметра ξ по формуле

$$\mathbf{v} = (v_0 n_x - \xi n_y \cos \phi) \mathbf{e}_x + (v_0 n_y + \xi n_x \cos \phi) \mathbf{e}_y + \xi \sin \phi \mathbf{e}_z,$$

где ϕ - фаза волны:

$$\phi = \frac{2\pi}{n_y} \left(n_x x + n_y y - \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} t \right).$$

Магнитное поле задавалось в виде:

$$\mathbf{B} = \left(B_0 n_x + \xi n_y \sqrt{4\pi\rho_0} \cos \phi \right) \mathbf{e}_x + \left(B_0 n_y - \xi n_x \sqrt{4\pi\rho_0} \cos \phi \right) \mathbf{e}_y - \xi \sqrt{4\pi\rho_0} \sin \phi \mathbf{e}_z.$$

При $t = 0$ задавались невозмущенные значения $\rho_0 = 1$ и $p_0 = 1$. Использовались следующие значения параметров: $v_0 = 0$, $B_0 = 1$, $\xi = 0.2$,

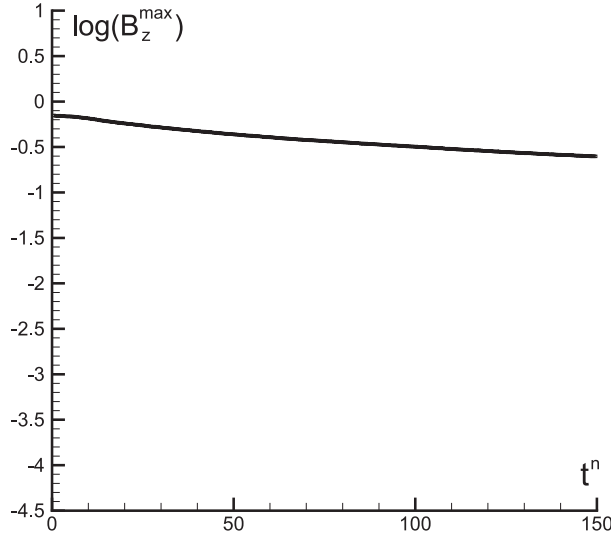


Рис. 3. Эволюция максимального значения компоненты B_z .

показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Расчетная область разбивалась на 120×120 разностных ячеек, вычисления проводились с числом Куранта $\sigma = 0.4$, использовались периодические граничные условия.

На рис. 3 показан десятичный логарифм максимального по расчетной области значения компоненты B_z магнитного поля в зависимости от временного шага, который демонстрирует величину диссипации в схеме. В работе [13] представлены результаты данного теста для нескольких численных схем второго порядка из которых видно, что диссипация численной схемы на основе метода PPML сравнима с диссипацией лучших взвешенных безосцилляторных схем (weighted essentially non-oscillatory scheme или WENO [14]), в которых используется процедура интерполяции на расширенных шаблонах, и значительно меньше диссипации TVD схем годуновского типа.

4.2 Тест 2: распространение циркулярно-поляризованной альвеновской волны

Данная тестовая задача была предложена в статье [7] для сравнения точности численных схем на гладких решениях. Задача описывает распространение циркулярно-поляризованной альвеновской волны под углом $\alpha = 30^\circ$ к оси x в области $[0, 1/\cos \alpha] \times [0, 1/\sin \alpha]$. Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho &= 1, \quad v_{\parallel} = 0, \quad v_{\perp} = 0.1 \sin(2\pi\xi), \quad w = 0.1 \cos(2\pi\xi) \\ B_{\parallel} &= 1, \quad B_{\perp} = 0.1 \sin(2\pi\xi), \quad B_z = 0.1 \cos(2\pi\xi), \quad p = 0.1, \end{aligned}$$

где $\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha$. Здесь для удобства вместо компонент u , v , B_x и B_y используются компоненты скорости и магнитного поля, параллельные и ортогональные направлению движения альвеновской волны (например, $B_{\parallel} = B_x \cos \alpha + B_y \sin \alpha$, $B_{\perp} = B_y \cos \alpha - B_x \sin \alpha$). Волна распространяется в направлении точки $(x, y) = (0, 0)$ со скоростью $B_{\parallel}/\sqrt{\rho} = 1$. Заметим, что при $v_{\parallel} = 1$ волна превращается в стоячую.

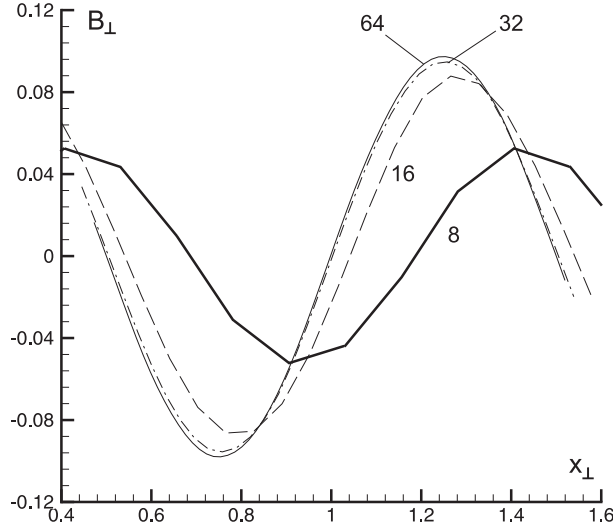


Рис. 4. Ортогональная компонента $B_{\perp}$ магнитного поля в перемещающейся альвеновской волне при расчетах на различных сетках. Числами показаны значения N .

Задача решалась на сетке $N \times 2N$ при $N = 8, 16, 32$ и 64 , при этом оценивалась относительная численная ошибка каждой величины по формуле

$$\delta_N(U) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2N} |U_{i,j}^N - U_{i,j}^E|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2N} |U_{i,j}^E|}, \quad \text{для } U = v_{\perp}, w, B_{\perp}, B_z,$$

где $U_{i,j}^E$ - точное решение (за точное принималось решение, вычисленное при $N = 128$). Скорость сходимости схемы оценивалась как

$$R_N = \log_2 (\delta_{N/2}/\delta_N), \quad (4.1)$$

где в качестве δ_N бралось среднее

$$\delta_N = \frac{1}{4} (\delta_N(v_{\perp}) + \delta_N(w) + \delta_N(B_{\perp}) + \delta_N(B_z)). \quad (4.2)$$

Расчет проводился до момента времени $t = 5$ с числом Куранта $\sigma = 0.4$, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, использовались периодические граничные условия. На рис. 4 представлена ортогональная компонента $B_{\perp}$ магнитного

поля при расчетах на различных сетках. Числами показаны значения N . Видно, что при увеличении N решение приближается к точному.

В таблице 1 представлена усредненная относительная ошибка (4.2) и скорость сходимости (4.1). Для сравнения даны результаты данного теста для схемы с центральной разностью для потоков с ограничением переноса (Flux Central Difference/Constrained Transport или Flux-CD/CT), взятые из [7]. Данная схема является TVD-разностной схемой годуновского типа, и в ней используется тот же принцип сохранения бездивергентности поля. Видно, что результаты, полученные по предложенной нами схеме на основе метода PPML, превосходят полученные с помощью схемы Flux-CD/CT по точности, однако скорость сходимости метода несколько меньше.

Таблица 1: усредненная относительная ошибка и скорость сходимости для схем на основе PPML и Flux-CD/CT при расчетах на разных сетках.

N	PPML		Flux-CD/CT	
	δ_N	R_N	δ_N	R_N
8	6.1129×10^{-1}	—	9.71×10^{-1}	—
16	2.2419×10^{-1}	1.4471	3.93×10^{-1}	1.3049
32	6.9068×10^{-2}	1.6986	1.05×10^{-1}	1.9041
64	2.5900×10^{-2}	1.4151	2.9×10^{-2}	1.8563

4.3 Тест 3: 2.5-мерная ударная волна (the 2.5D shock tube problem)

Это одна из популярных тестовых задач, которая представляет собой задачу Римана о распаде разрыва и демонстрирует вращение компонент магнитного поля [7, 15]. Она была выполнена нами также для случая одномерной идеальной МГД [3]. Т.к. все три компоненты скорости и магнитного поля ненулевые, а зависят только от координат x и y , задача считается 2.5-мерной. Решение задачи Римана состоит из двух быстрых ударных волн, двух вращательных разрывов, двух медленных ударных волн и контактного разрыва, который находится между медленными ударными волнами.

В начальный момент времени линия разрыва величин задается под углом $\alpha = 45^\circ$ к разностной сетке. Состояния справа и слева имеют вид:

$$(\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z, p) = (1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 2, 3.6, 2, 0.95), \quad \text{для } \xi < 0,$$

$$(\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z, p) = (1, 0, 0, 0, 2, 4, 2, 1), \quad \text{для } \xi > 0,$$

где $\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha$. Т.к. распределение величин вдоль направления x одинаково при любом y с точностью до смещения, то вдоль направления y нет необходимости брать большую расчетную область. Задача решалась в

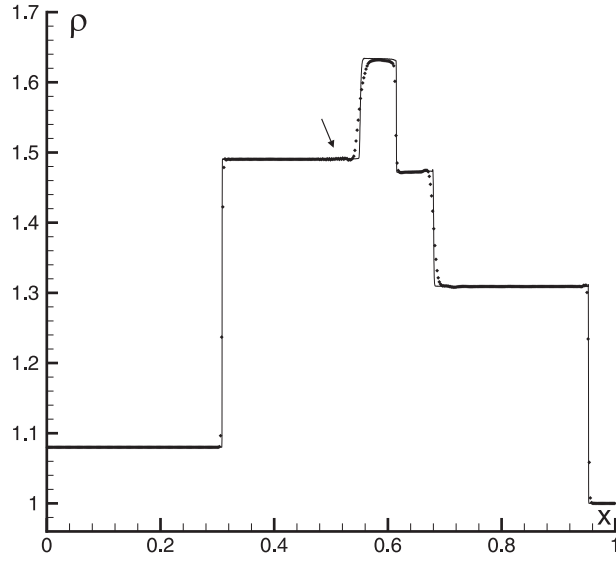


Рис. 5. 2.5-мерная ударная волна. Распределение плотности.

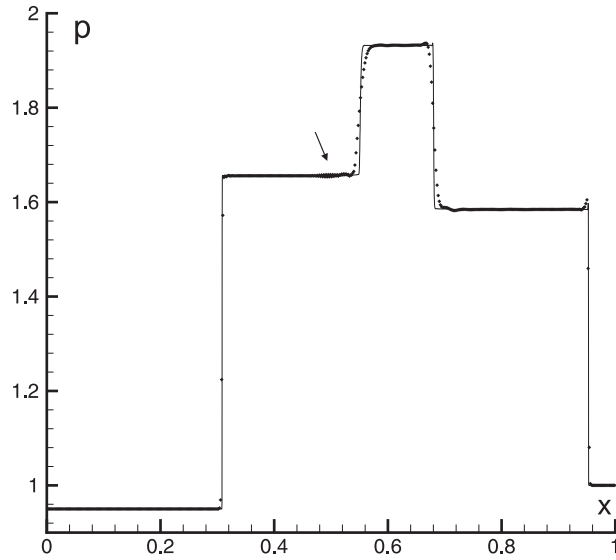


Рис. 6. 2.5-мерная ударная волна. Распределение полного давления.

области $[0, 1] \times [0, 6/512]$ на сетке из 512×6 ячеек. При этом использовались периодические граничные условия вдоль направления y и интерполяция нулевого порядка вдоль направления x . Расчет проводился до момента времени $t = 0.2/\sqrt{2}$ с числом Куранта $\sigma = 0.4$.

На рис. 5-7 представлено распределение плотности, полного давления и магнитного давления $p_{mag} = \mathbf{B}\mathbf{B}/2$ вдоль направления x . Сплошной линией показано точное решение, оно было получено на сетке из 5120×6 ячеек. Видно, что численная схема хорошо воспроизводит разрывные решения, однако имеются незначительные осцилляции в областях, отмеченных на рисунках стрелками. Этот эффект возникает из-за усреднения компо-

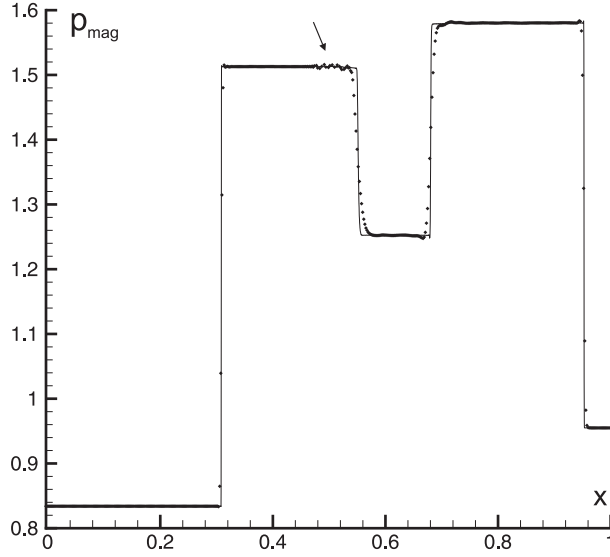


Рис. 7. 2.5-мерная ударная волна. Распределение магнитного давления.

нент потоков по формуле (3.16) на границе раздела, когда одна из четырех усредняемых компонент относится к одному состоянию, а три остальные - к другому. Таким образом, эта немонотонность связана с видом начальных условий в данной задаче.

4.4 Тест 4: быстрое вращение цилиндра в покоящейся среде с однородным магнитным полем (rotor problem)

Задача была предложена в [11] и использовалась при исследовании численных схем в работах [7, 15]. Для многих схем она оказалась трудной, т.к. в процессе счета возникали отрицательные значения давления [7].

Расчетная область - квадрат размером $[0, 1] \times [0, 1]$ с однородным давлением и магнитным полем. В начальный момент времени имеется единственная ненулевая компонента поля $B_x \neq 0$. В центре квадрата задается вращающийся плотный диск (сечение цилиндра) радиуса $r_0 = 0.1$. При $r < r_0$ задается $\rho = 10$, $u = -v_0(y - 0.5)/r_0$, $v = v_0(x - 0.5)/r_0$, где $r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$. При $r > r_1$ среда неподвижна ($u = v = 0$) и имеет плотность $\rho = 1$. В переходной зоне $r_0 < r < r_1$ используется линейная интерполяция величин: $\rho = 1 + 9f$, $u = -fv_0(y - 0.5)/r$, $v = fv_0(x - 0.5)/r$, где $f = (r_1 - r)/(r_1 - r_0)$. Компонента скорости $w = 0$ во всей расчетной области. Заданная таким образом система среда + вращающийся диск не является равновесной конфигурацией, т.к. не сбалансированы центробежные силы. Вращающееся вещество будет постепенно перераспределяться по расчетной области, захватывая неподвижную его

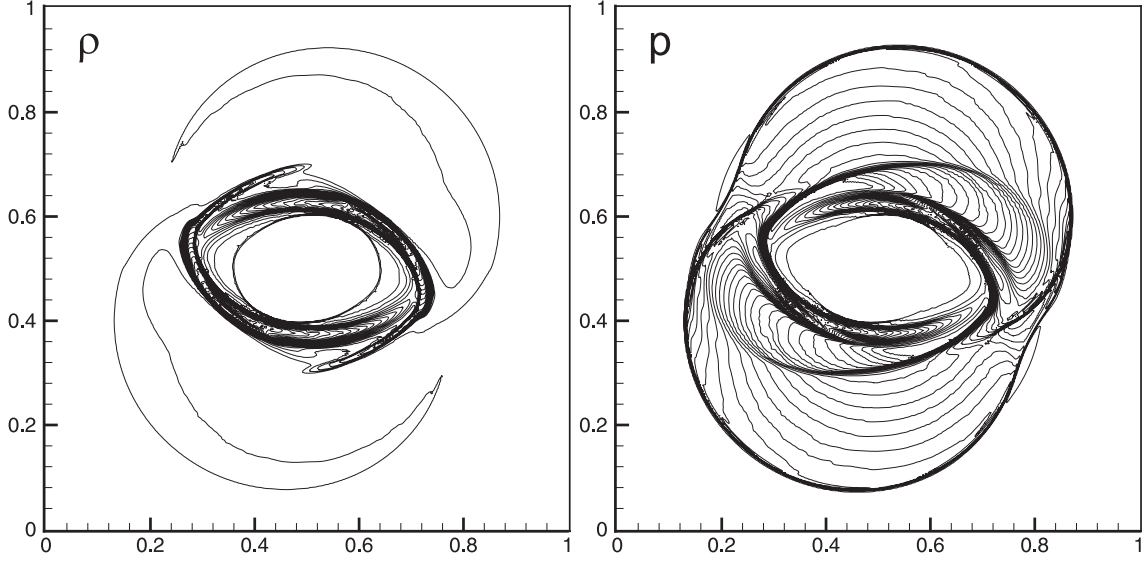


Рис. 8. Вращение цилиндра (вариант 1). Линиями показаны 30 уровней плотности в диапазоне от 1.3 до 13.5 и давления - от 0.12 до 2.1.

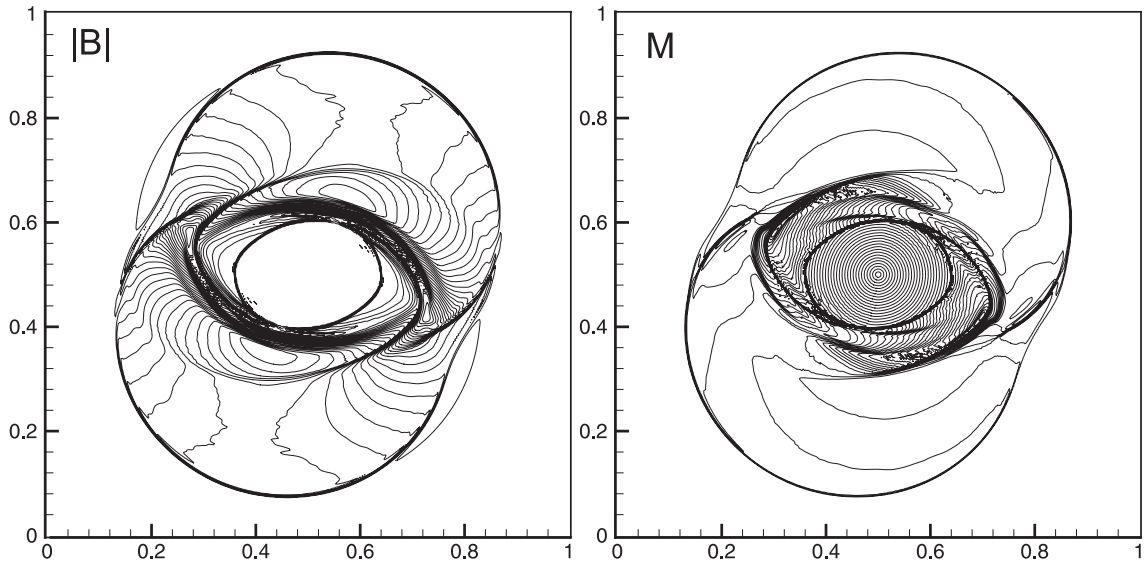


Рис. 9. Вращение цилиндра (вариант 1). Линиями показаны 30 уровней модуля магнитного поля $|\mathbf{B}|$ в диапазоне от 0.32 до 2.288 и числа Маха - от 0.144 до 4.27.

часть, при этом магнитное поле будет удерживать вращающееся вещество в сплюснутой форме.

Следуя работам [7, 15], мы провели расчеты с двумя вариантами начальных данных:

1. $v_0 = 2$, $p = 1$, $B_x = 5/\sqrt{4\pi}$, $\gamma = 1.4$, время счета $t = 0.15$;
2. $v_0 = 1$, $p = 0.5$, $B_x = 2.5/\sqrt{4\pi}$, $\gamma = 5/3$, время счета $t = 0.295$.

Расчеты проводились на сетке $N \times N = 400 \times 400$ с числом Куранта

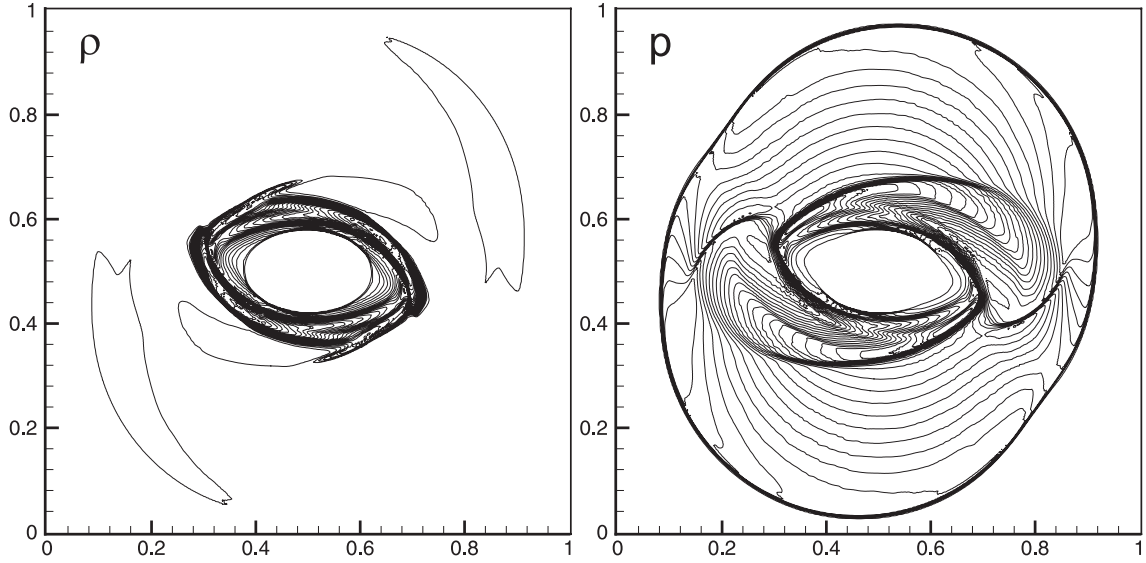


Рис. 10. Вращение цилиндра (вариант 2). Линиями показаны 30 уровней плотности в диапазоне от 0.9 до 10.1 и давления - от 0.036 до 0.75.

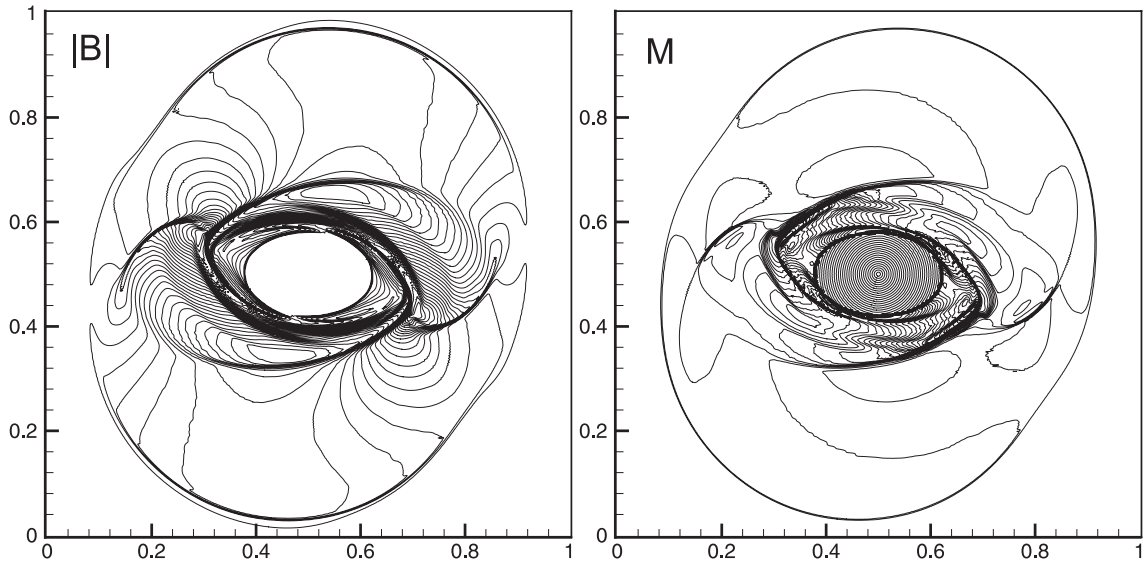


Рис. 11. Вращение цилиндра (вариант 2). Линиями показаны 30 уровней модуля магнитного поля $|B|$ в диапазоне от 0.152 до 1.155 и числа Маха - от 0.096 до 2.86.

$\sigma = 0.4$. Граничные условия - интерполяция нулевого порядка. На рис. 8-9 представлены результаты на конечный момент времени для варианта 1, на рис. 10-11 - для варианта 2, на рис. 12-13 показаны сечения некоторых величин вдоль диагонали $x = y$. Из рисунков видно, что решение, полученное по численной схеме на основе метода PPML, имеет хорошее разрешение и сравнимо по точности с решением, полученным по схеме Flux-CT [7], а также с решением на адаптивной сетке [15].

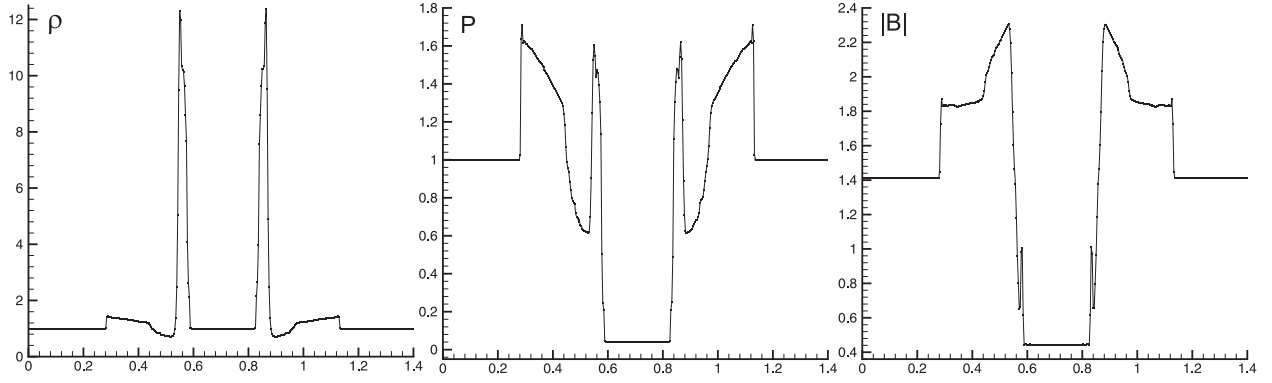


Рис. 12. Вращение цилиндра (вариант 1). Сечение вдоль диагонали $x = y$ для плотности, давления и модуля магнитного поля $|\mathbf{B}|$.

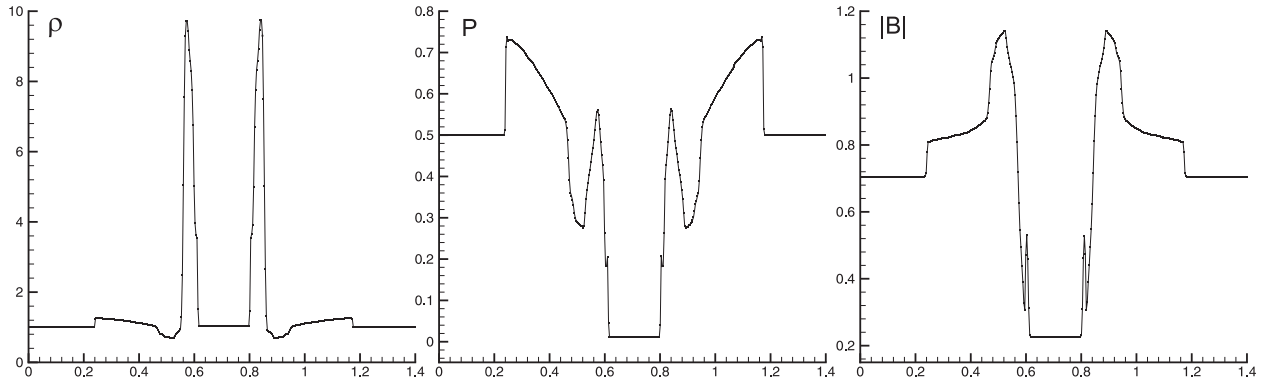


Рис. 13. То же, что на рис. 12 для варианта 2.

4.5 Тест 5: вихрь Орзага-Танга (Orszag-Tang vortex problem)

Задача была впервые предложена в статье [16] и часто используется для тестирования численных методов в двухмерной МГД (см., например, [7, 14]). В частности, она демонстрирует процесс формирования ударных волн и их взаимодействие, переход к сверхзвуковой турбулентности.

В расчетной области размером $[0, 1] \times [0, 1]$ в начальный момент времени задаются следующие параметры среды: $\rho = 25/(36\pi)$, $p = 5/(12\pi)$, $\gamma = 5/3$ (в этом случае скорость звука $c = \sqrt{\gamma p / \rho} = 1$). Скорости и компоненты магнитного поля задаются периодическим образом: $u = -\sin 2\pi y$, $v = \sin 2\pi x$, $w = 0$, $B_x = -B_0 \sin 2\pi y$, $B_y = B_0 \sin 4\pi x$, $B_z = 0$, где $B_0 = 1/\sqrt{4\pi}$. Несмотря на гладкие начальные условия, картина движения вещества становится очень сложной.

Мы провели расчеты на сетке $N \times N$ при различных N с числом Куранта $\sigma = 0.3$. Использовались периодические граничные условия. На рис. 14 линиями уровней показано распределение давления по расчетной области в момент времени $t = 0.5$ для варианта с $N = 256$, на рис. 15 показаны

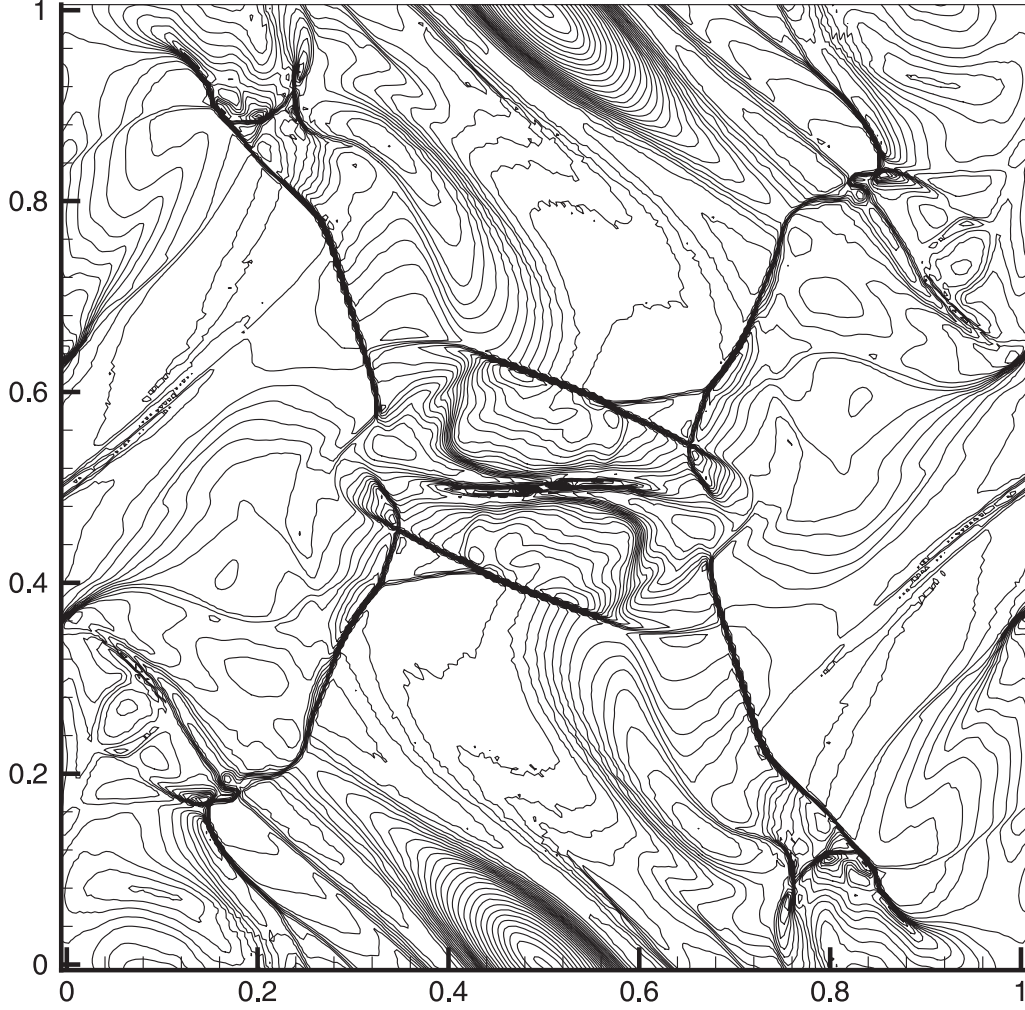


Рис. 14. Вихрь Орзага-Танга. Линиями показаны 30 уровней давления в диапазоне от 0.02 до 0.5 на момент $t = 0.5$.

срезы давления вдоль линий $y = 0.3125$ ($j = 83$) и $y = 0.4277$ ($j = 112$) соответственно, по которым можно оценить точность передачи разрывов.

Так же как и в задаче о распространении циркулярно-поляризованной альвеновской волны (тест 2) мы вычислили усредненную относительную ошибку δ_N и скорость сходимости решения к точному R_N при расчетах на сетках с $N = 50, 100$ и 200 по формулам (4.2) и (4.1) соответственно (в (4.2) усреднялись все имеющиеся ненулевые компоненты решения). За точное принималось решение на сетке с $N = 400$. Результаты представлены в таблицах 2 и 3 на моменты времени $t = 0.159$ и $t = 0.5$. Для сравнения мы приводим результаты для схемы с центральной разностью для потоков (Flux-CT) и для схемы с ограничением переноса (Flux-CT), взятые из [7]. (В статье [7] размер расчетной области был другой, выбранные нами моменты времени отличаются от представленных в [7] в 2π раз.) Из таблиц видно, что результаты, полученные по предложенной нами схеме на основе метода

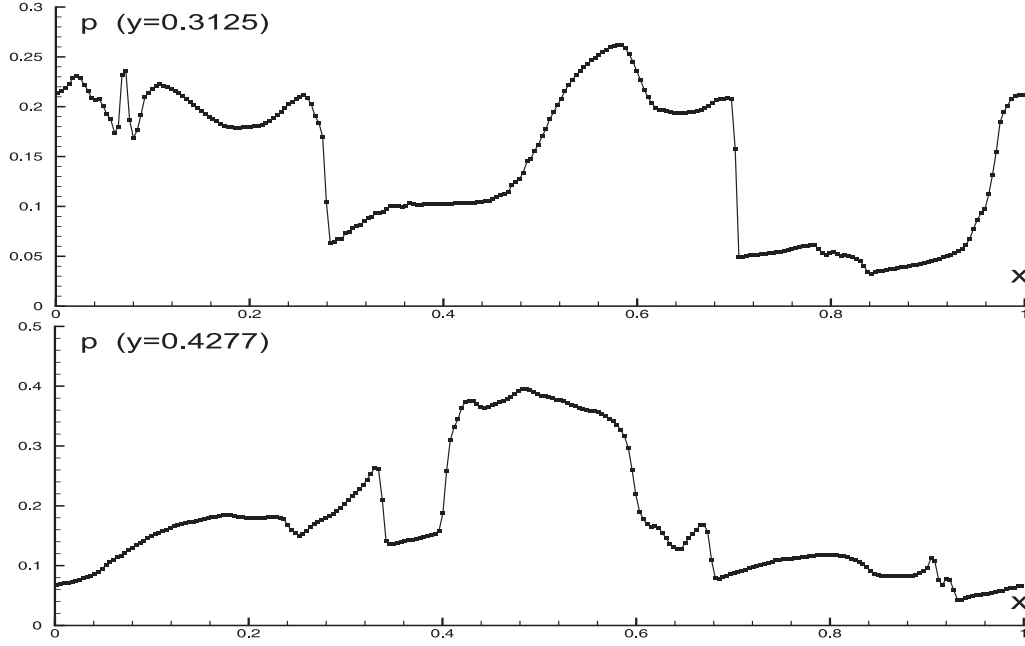


Рис. 15. Вихрь Орзага-Танга. Давление вдоль линий $y = 0.3125$ и $y = 0.4277$ на момент $t = 0.5$.

PPML, как и в тесте 2, превосходят полученные с помощью схем Flux-CT и Flux-CD по точности, однако скорость сходимости метода несколько меньше. При увеличении времени счета скорость сходимости метода уменьшается, приближаясь, тем не менее, к скорости сходимости Flux-CT и Flux-CD.

Таблица 2: усредненная относительная ошибка и скорость сходимости для схем PPML, Flux-CT и Flux-CD при расчетах на разных сетках при $t = 0.159$.

N	PPML		Flux-CT		Flux-CD	
	δ_N	R_N	δ_N	R_N	δ_N	R_N
50	2.7262×10^{-2}	—	3.21×10^{-2}	—	3.47×10^{-2}	—
100	1.0412×10^{-2}	1.3887	1.14×10^{-2}	1.4935	1.22×10^{-2}	1.5081
200	4.1575×10^{-3}	1.3244	3.5×10^{-3}	1.7036	3.7×10^{-3}	1.7213

Таблица 3: то же что и в таблице 2 для $t = 0.5$.

N	PPML		Flux-CT		Flux-CD	
	δ_N	R_N	δ_N	R_N	δ_N	R_N
50	1.2246×10^{-1}	—	1.352×10^{-1}	—	1.380×10^{-1}	—
100	6.9122×10^{-2}	0.8251	7.37×10^{-2}	0.8754	7.75×10^{-2}	0.8324
200	3.0589×10^{-2}	1.1761	3.58×10^{-2}	1.0417	3.73×10^{-2}	1.0550

5 Заключение

В работе представлена численная схема для решения задач многомерной идеальной МГД, основанная на методе PPML. При переходе от одномерно-

го случая к многомерному методика построения численной схемы не изменяется.

Мы фиксируем базис собственных векторов в каждой разностной ячейке и, таким образом, линеаризуем систему МГД. После этого используем свойство сохранения инвариантов Римана при движении вдоль характеристик гиперболической системы уравнений для определения состояний на границах разностных ячеек. В этом случае для каждой ячейки получаются свои граничные состояния, их значения на общем интерфейсе для левой и правой ячейки не совпадают. Для "сшивки" состояний необходимо решить задачу Римана о распаде разрыва между ними, перейдя при этом от простых переменных к консервативным. При вычислении амплитуд волн, которые используются для определения граничных состояний по формуле (3.1), следует учесть дополнительные потоки величин в ортогональных направлениях в виде источников.

Состояния в центре ячеек вычисляются с помощью консервативной разностной схемы гоудоновского типа (3.10). Методика вычисления потоков на границах полностью повторяет изложенную для одномерного случая [3]. Для получения второго порядка аппроксимации потоков по времени необходимо усреднить амплитуды волн по своей области влияния [2], аналогично методике РРМ.

Для сохранения монотонности при реконструкции решения кусочными параболами необходимо модифицировать граничные состояния, применяя методику определения пределов допустимого изменения амплитуд волн. Однако использование одномерного метода монотонизации не гарантирует в общем случае монотонного решения в многомерном пространстве. Поэтому мы применяем многомерную реконструкцию с помощью лимитеров. Далее, для устранения ложных экстремумов мы применяем стандартную процедуру монотонизации метода РРМ.

При решении задач МГД в многомерной постановке необходимо обеспечить выполнение условия бездивергентности магнитного поля. Для этого существует несколько подходов (см. раздел 3.2). Мы предлагаем воспользоваться теоремой Стокса (3.15), как наиболее простым. Новые компоненты магнитного поля, гарантирующие его бездивергентность, получаются при решении уравнения (3.15) на разностной сетке. Необходимые для этого компоненты электрического поля берутся из потоков (2.7)-(2.8) и усредняются по всем граням вокруг каждого узла сетки.

Тестирование численной схемы проведено на примере нескольких известных двумерных задач. Результаты расчетов показали, что метод РРМЛ дает хорошее представление как для гладких, так и для разрывных ре-

шений за счет низкой диссипации (см. рис. 3). Полученные двухмерные картины течения имеют хорошее разрешение. Для задачи о распространении циркулярно-поляризованной альвеновской волны (тест 2) и задачи о вихре Орзага-Танга (тест 5) была вычислена усредненная относительная ошибка и скорость сходимости решения к точному на различных сетках (см. таблицы 1-3). Оказалось, что результаты, полученные по предложенной нами схеме на основе метода PPML, превосходят полученные с помощью схем Flux-CT и Flux-CD по точности, однако скорость сходимости метода несколько меньше. При увеличении времени счета скорость сходимости метода уменьшается, приближаясь, тем не менее, к скорости сходимости Flux-CT и Flux-CD.

Список литературы

- [1] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 65, 21 с.
- [2] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. II. Уравнения газодинамики. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 71, 22 с.
- [3] *С.Д. Устюгов, М.В. Попов* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. III. Одномерная идеальная МГД. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, № 78, 27 с.
- [4] *P. Collela, P. Woodward* The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations. J. Comp. Phys. **54**, 1984, p. 174.
- [5] *M. Brio, C.C. Wu* An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. J. Comp. Phys. **75**, 1988, p. 400.
- [6] *P.L. Roe* Characteristic-based schemes for the Euler equations. Ann. Rev. Fluid Mech. **18**, 1986, p. 337.
- [7] *G. Tóth* The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. J. Comp. Phys. **161**, 2000, p. 605.
- [8] *T.I. Gombosi, K.G. Powell, D.L. De Zeeuw* Axisymmetric modeling of cometary mass loading on an adaptively refined grid: MHD results. J. Geophys. Res. **99**, 21, 1994, p. 525.

- [9] *J.U. Brackbill, D.C. Barnes* The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations. *J. Comp. Phys.* **35**, 1980, p. 426.
- [10] *C.R. Evans, J.F. Hawley* Simulation of magnetohydrodynamic flows: A constrained transport method. *Astrophys. J.* **332**, 1988, p. 659.
- [11] *D.S. Balsara, D.S. Spicer* A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations. *J. Comp. Phys.* **149**, 1999, p. 270.
- [12] *T.J. Barth* On unstructured grids and solvers, in *Computational Fluid Dynamics* (Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1990), Lecture Series 1990-04.
- [13] *D.S. Balsara* Second-order-accurate schemes for magnetohydrodynamics with divergence-free reconstruction. *ApJS* **151**, 2004, p. 149.
- [14] *G.-S. Jiang, C.C. Wu* A high-order WENO finite difference scheme for the equation of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **150**, 1999, p. 561.
- [15] *J. Han, H. Tang* An adaptive moving mesh method for two-dimensional ideal magnetohydrodynamics. *J. Comp. Phys.* **220**, 2007, p. 791.
- [16] *A. Orszag, C.M. Tang* Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *J. Fluid Mech.* **90**, 1979, p. 129.