



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 22 за 2007 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.Х. Пергамент, Д.А. Улькин

Автомодельные асимптотики
в задаче о распространении
трещины гидроразрыва в
плоско-деформированной
среде

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пергамент А.Х., Улькин Д.А. Автомодельные асимптотики в задаче о распространении трещины гидроразрыва в плоско-деформированной среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 22. 31 с.
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-22>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

А. Х. Пергамент, Д. А. Улькин

**АВТОМОДЕЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ В
ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ
ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В
ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОЙ СРЕДЕ**

Москва 2007

А. Х. Пергамент, Д. А. Улькин, Автомоделные асимптотики в задаче о распространении трещины гидроразрыва в плоско-деформированной среде.

Аннотация. В работе качественно и численными методами исследована самосогласованная модель развития трещины в упругой среде с учетом ненулевого горного давления и изменяющегося во времени потока в скважину. Методом подобия построены различные классы автомоделных решений. Реализованы алгоритмы, позволяющие исследовать режимы выхода на автомоделную асимптотику. Установлено, что при ненулевом горном давлении, асимптотикой решения задачи с начальными условиями является известное решение [Spence D.A., Sharp P.W., 1985]. Установлено, что решение [Khristianovic S., Zheltov Y., 1955], исследованное в работе [Barenblatt G.I., 1956], является предельным автомоделным решением рассмотренной задачи.¹

A. Kh. Pergament, D. A. Ulkin, Self-similar asymptotics in plain-strain hydraulic fracture propagation problem.

Abstract. In this article the self-consistent plain-strain hydraulic fracture propagation problem is analyzed analytically and numerically. The fracture is loaded by the far-field confining stress and is driven by time dependent fluid flow at the inlet. The similarity method is used to obtain different classes of the self-similar solutions. The algorithm is realized to analyze the evolution of the considered problem to the asymptotic solutions. Well known solution [Spence D.A., Sharp P.W., 1985] proofed to be an asymptotic solution for problem with initial conditions in non zero far-field confining stress case. Solution [Khristianovic S., Zheltov Y., 1955], [Barenblatt G.I., 1956] proofed to be a limit self-similar solution for considered problem.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00836).

1 Введение

Одним из методов интенсивной разработки нефтегазовых месторождений является гидроразрыв пласта (ГРП). Существует весьма большое количество работ, посвященных рассмотрению различных моделей развития трещины гидроразрыва в упруго-деформированном теле. Основные модели широко используемые при проектировании работ по ГРП - это модели PKN [Perkins T.K., Kern L.R., 1961] и KGD [Khristianovic S., Zheltov Y., 1955]. Сформулируем основные предположения, в рамках которых происходит рассмотрение:

- вмещающая упругая среда находится в плоско-деформированном состоянии
- высота трещины фиксирована
- течение жидкости гидроразрыва в трещине - течение Пуазейля
- длина трещины определяется из условия материального баланса
- учет напряженного состояния среды производится при помощи простейших форм записи закона Гука

Эти модели на протяжении десятилетий использовались для расчета раскрытия и длины трещины гидроразрыва. Однако, в основе этих работ есть ряд положений, которые в настоящий момент пересматриваются. Во-первых, все перечисленные модели являются квазистатическими и рассмотрение проводится в предположении, что плотность потока жидкости гидроразрыва не меняется вдоль сечения и во времени. Во-вторых, длина трещины гидроразрыва определяется из условия материального баланса, а не из условия разрушения. Обоснованием для этого служит предположение, что со временем энергия, необходимая для разрушения, становится пренебрежимо малой по сравнению с энергией, затраченной на поддержание течения в трещине [Mark. G. Mask]. Далее будет показано, что существуют режимы развития трещин, для которых преобладающим является процесс разрушения.

В настоящей работе рассмотрена связанная задача о медленном движении очень вязкой жидкости в трещине гидроразрыва и вызванных этим движением и горным давлением деформациях. Движение жидкости описывается с помощью приближения смазки [Batchelor G.K., 1967]. Среда предполагается плоскодеформированной. Рассматривается краевая задача теории упругости с асимптотическими условиями на бесконечности и условиями самосогласованности на границе трещины. Движение жидкости в трещине создается закачкой жидкости в трещину через скважину. Постановка

задачи дополнена условиями разрушения Ирвина в клюве трещины. Если в трещине имеется конечный поток жидкости, то давление увеличивается при уменьшении раскрытия трещины и может стать неограниченным при стремлении раскрытия к нулю, т.е. в клюве трещины. Физически бесконечное давление не может быть реализовано, т.е. в клюве трещины должна быть область не заполненная жидкостью разрыва – лаг, т.е. процесс гидро-разрыва напоминает раскалывание дерева клином.

В работе рассмотрены свойства инвариантности сформулированной задачи. Преобразования подобия и сдвига по времени позволили исследовать характер асимптотики решений в случае, когда давление в клюве трещины стремится к нулю или бесконечности, а также в случае постоянной или растущей скорости закачки жидкости разрыва в скважину. Инвариантность задачи относительно указанных групп преобразований позволяет также определить переменные, в которых решение принимает автомодельный вид.

Если жидкость разрыва закачивается в трещину с постоянной скоростью, то решение задачи определяется параметрами x , t , η , E' , K_{Ic} , Q_0 и T_0 . Здесь x – пространственная координата, t – время, η – вязкость жидкости гидроразрыва, $E' = E/(1-\sigma^2)$ – модуль Юнга для плоскодеформированной среды, K_{Ic} – критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, Q_0 – поток жидкости гидроразрыва, T_0 – горное давление. Согласно теории размерности, решение задачи зависит от четырех безразмерных определяющих параметров $\xi = x/L^*$, $\tau = t/t^*$, $K = K_{Ic}/K_{Ic}^*$ и $T = T_0/T_0^*$, где $L^* = (Q_0\eta/E')^{1/2}$, $t^* = \eta/E'$, $K_{Ic}^* = E'(Q_0\eta/E')^{1/4}$ и $T_0^* = E'$. Параметры ξ и τ – безразмерная пространственная и временная переменные, а K и T – безразмерные постоянные.

В случае $T = 0$ в решении присутствует лаг, величина которого определяется только параметром K , причем при уменьшении K до нуля отношение длины заполненной жидкостью части ко всей длине трещины стремиться к нулю, а с увеличением K лаг стремиться к нулю. Наличие автомодельного решения в данном случае указано в работе [Garagash D.I., 2005], однако, в работе Гарагаша отсутствует как групповое исследование поставленной задачи, так и установление того факта, что в такой постановке имеется единственный параметр задачи, от которого зависит решение².

В случае $T = \infty$ лаг в системе отсутствует, такая постановка соответствует известной работе [Spence D.A., Sharp P.W., 1985], однако, в работе Спенса и Шарпа изначально опущено условие разрушения. Оно рассматривается только для пространственной части асимптотики, что приводит к необоснованному расширению класса автомодельных решений. Постановка, использованная в данной работе, также допускает автомодельные решения

²На то, что существует единственный параметр, от которого зависит характер решения, наше внимание обратил Каракин А.В.

в данном случае, однако классы автомодельных решений в указанных двух постановках совпадают только в случае $K = 0$.

Если жидкость разрыва подается в трещину с возрастающей скоростью, то к определяющим параметрам задачи необходимо добавить безразмерный параметр α , характеризующий рост скорости закачки. При этом, если скорость закачки растет экспоненциально и $K = 0$, то существует еще одна ветвь автомодельных решений с лагом, величина которого определяется параметрами T и α . Такое решение впервые получено в работе [Khristianovic S., Zheltov Y., 1955]. Если же $K = 0$ и $T = \infty$, то система допускает автомодельные решения как в случае полиномиально растущей скорости закачки, так и в случае экспоненциального роста. Лаг в решении при этом отсутствует, а вид решений полностью совпадает с решениями Спенса и Шарпа [Spence D.A., Sharp P.W., 1985].

В работе численно решена задача о формировании трещины гидроразрыва с учетом начальных условий и исследован вопрос о выходе на асимптотический режим. Показано, что решение с любыми начальными условиями имеет автомодельную асимптотику. В практически наиболее важном случае, когда горное давление конечно и не равно нулю, а жидкость разрыва закачивается в трещину с постоянной скоростью, существует решение типа бегущей волны, при этом жидкость разрыва занимает все большую часть трещины. Когда лаг в трещине исчезает полностью, решение принимает вид описанный в работе [Spence D.A., Sharp P.W., 1985].

Таким образом, в работе впервые проведен групповой анализ постановки задачи о развитии трещины гидроразрыва, построены автомодельные решения и численными методами исследована задача о выходе на автомодельный режим. Следует отметить, что характер асимптотики существенно отличается от ранее широко известных моделей PKN и KGD.

2 Постановка задачи

2.1 Описание задачи

Рассмотрим модель симметричной двумерной трещины ГРП с лагом. Трещина длины $2 \cdot L(t)$ развивается в бесконечной линейно-упругой изотропной среде. Среда задается модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и жесткостью K_{Ic} (рис. 2.1). Через скважину, расположенную в начале координат, в трещину закачивается несжимаемая, Ньютоновская жидкость с вязкостью μ . Утечки жидкости разрыва в окружающую среду считаются незначительными. На упругую среду действуют давление жидкости разрыва $P_f(x, t)$, заданное на границе трещины, и сжимающее давление $T_0 \leq 0$, заданное на бесконечности. Жидкость заполняет только часть трещины

$[-a(t), a(t)]$, рядом с носиком трещины расположена свободная от жидкости область *лаг*.

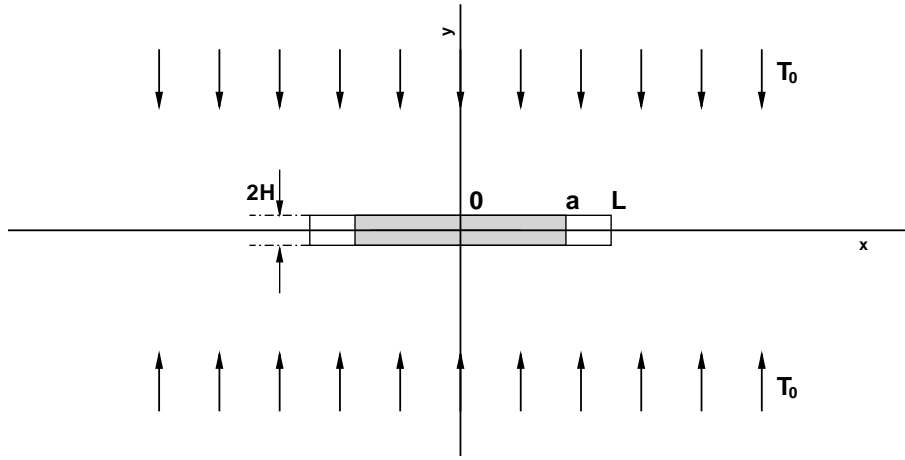


Рис. 2.1: Схема трещины гидроразрыва

Вмещающая среда линейно упругая, поэтому данную задачу можно рассматривать как суперпозицию двух задач: первая – задача об однородном напряженно-деформированном состоянии вмещающей среды без трещины под действием асимптотических напряжений T_0 , вторая – задача гидроразрыва с нулевыми напряжениями на бесконечности, в которой на границу трещины дополнительно действует сжимающее горное давление T_0 . В дальнейшем мы будем всюду рассматривать постановку второй задачи.

В силу симметрии задачи относительно оси y , решение задачи о развитии трещины ГРП в такой постановке заключается в нахождении полудлины трещины $L(t)$, полудлины области заполненной жидкостью $a(t)$, раскрытия трещины $H(x, t)$ и давления на границе трещины $P(x, t) = P_f(x, t) + T_0$ в зависимости от координаты x , времени t и физических параметров задачи: жесткости среды K_{Ic} , упругих модулей E и ν , вязкости жидкости μ , величины горного давления и величины потока жидкости на входе в трещину Q_0 . Отметим, что упругие модули входят в задачу только в комбинации $E' = E/(1 - \nu^2)$, что соответствует тому, что среда считается плоско-деформированной. Поток жидкости из скважины в трещину может быть задан при помощи одного или нескольких параметров, например, когда поток постоянен и равен Q_0 , или, когда он экспоненциально растет $Q_0 \cdot \exp(\alpha t)$.

2.2 Основные уравнения задачи

Скважина считается точечным источником, расположенным в начале координат. Трещина растет вдоль оси x и симметрична относительно оси y .

Симметрия задачи позволяет записать определяющие соотношения и граничные условия для половины трещины $[0, L(t)]$.

2.2.1 Уравнения приближения смазки

Давление и раскрытие трещины в области заполненной жидкостью связаны основным уравнением приближения смазки [Batchelor G.K., 1967]

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0, \quad \text{при } 0 \leq x \leq a. \quad (2.1)$$

Данное уравнение рассматривается в области между скважиной, расположенной вначале координат, и подвижной границей жидкости и лага, положение которой в любой момент времени можно вычислить из уравнения сохранения массы закачанной жидкости. В локальном виде уравнение сохранения массы означает, что поток жидкости на свободной границе как раз и определяет перемещение границы

$$Q(a-0, t) = H(a-0, t) \frac{da}{dt}. \quad (2.2)$$

Учитывая выражение для потока жидкости, описываемой законом Пуазейля, через раскрытие и перепад давления

$$Q(x, t) = -\frac{H^3(x, t)}{3\eta} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}, \quad (2.3)$$

выражение (2.2) может быть записано в виде

$$\frac{da}{dt} = -\frac{H^2(a-0, t)}{3\eta} \frac{\partial P(a-0, t)}{\partial x}. \quad (2.4)$$

В области лага жидкость отсутствует, поэтому на трещину действует только сжимающее горное давление, одинаковое во всех точках лага

$$P = T_0, \quad \text{при } a \leq x \leq L. \quad (2.5)$$

В силу непрерывности давления, действующего на границу трещины вдоль всей ее длины, условие постоянства давления в лаге также определяет граничное условие для уравнения смазки на подвижной границе с лагом.

Задание потока жидкости, закачиваемого в скважину, определяет граничное условие на другой границе

$$Q(0, t) = -\frac{H^3(x, t)}{3\eta} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q_0(t). \quad (2.6)$$

2.2.2 Раскрытие трещины

Решение плоской задачи о напряженно-деформированном состоянии однородной изотропной упругой среды ослабленной трещиной может быть получено аналитически, в виде интегрального соотношения, позволяющего определить давление на границе трещины по раскрытию трещины [Мусхелишвили Н.И., 1954]

$$P(x, t) = -\frac{E}{\pi(1 - \sigma^2)} \int_0^L \frac{\partial H(x', t)}{\partial x'} \frac{x' dx'}{x'^2 - x^2}, \quad \text{при } 0 \leq x \leq L. \quad (2.7)$$

Или в виде обратного соотношения,

$$H(x, t) = \frac{2(1 - \sigma^2)}{\pi E} \left[\int_0^a F\left(\frac{x}{L}, \frac{x'}{L}\right) P(x', t) dx' + \right. \\ \left. + T_0 \int_a^L F\left(\frac{x}{L}, \frac{x'}{L}\right) dx' \right], \quad \text{при } 0 \leq x \leq L, \quad (2.8)$$

где

$$F(\xi, \xi') = \ln \left| \frac{\sqrt{1 - \xi^2} + \sqrt{1 - \xi'^2}}{\sqrt{1 - \xi^2} - \sqrt{1 - \xi'^2}} \right|. \quad (2.9)$$

2.2.3 Рост трещины

Задача о развитии трещины в среде рассматривается как квазистатическая, это соответствует ситуации, когда характерные времена протекания динамических процессов в упругом массиве значительно меньше аналогичных значений для течения жидкости в трещине. Таким образом в каждый момент времени трещина находится в состоянии равновесия и ее длина может быть вычислена из условия равенства коэффициента интенсивности напряжений критическому значению, т.е. жесткости среды,

$$K_I = K_{Ic}. \quad (2.10)$$

Условие равновесия трещины может быть представлено в виде асимптотического условия для раскрытия трещины возле носика [Irvin G.R., 1957]

$$H(x) = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{K_{Ic}}{E'} (L - x)^{1/2}, \quad \text{при } (L - x) \ll L. \quad (2.11)$$

Или, записав выражение для коэффициента интенсивности напряжений в упругом плоско-деформированном массиве,

$$K_{Ic} = 2\sqrt{\frac{L}{\pi}} \left[\int_0^a \frac{P(x, t) dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} + T_0 \int_a^L \frac{dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} \right]. \quad (2.12)$$

2.3 Начальные условия

Для постановки полной задачи с начальными данными необходимо задать длину трещины $L(t_0)$ и указать положение свободной границы жидкости разрыва $a(t_0)$ в момент t_0 , соответствующий началу наблюдения. Кроме того, в начальный момент необходимо в каждом сечении трещины, перпендикулярном оси x , указать значение давления или раскрытия.

Отметим, что во многих работах, в т.ч. [Spence D.A., Sharp P.W., 1985], [Garagash D.I., 2005], задача рассматривается без начальных данных, т.е. начальные данные должны совпадать с видом полученного решения в заданный момент времени, однако, начальные данные могут иметь и отличный от автомодельного вид.

Пример начальных данных представлен на рис. 2.2, во всей трещине задано распределение давления $P(x, t_0)$. В лаге давление постоянно и равно T_0 , а в остальной части трещины для начального распределения давления выбрана простая форма параболы.

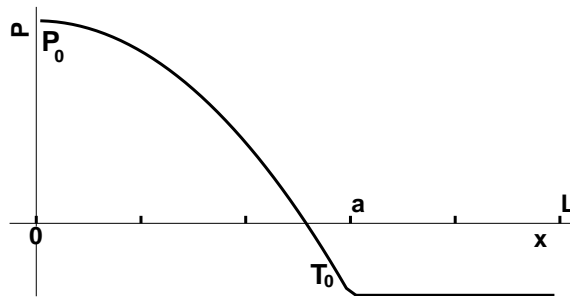


Рис. 2.2: Начальные данные

$$P(x, t_0) = \begin{cases} P_0 - (P_0 - T_0) \frac{x^2}{a(t_0)^2}, & 0 \leq x \leq a(t_0) \\ T_0, & a(t_0) \leq x \leq L(t_0) \end{cases} \quad (2.13)$$

3 Исследование задачи

3.1 Применение теории размерности

Рассмотрим задачу о росте трещины гидроразрыва с идеализированными начальными данными

$$a(0) = 0, \quad L(0) = 0, \quad H(x, 0) = 0, \quad (3.1)$$

т.е. в начальный момент $t = 0$ трещина имеет нулевую длину и раскрытие. Решение задачи, с такими начальными данными, является функцией семи определяющих параметров:

$$x, t, \eta, E', K_{Ic}, Q_0, T_0. \quad (3.2)$$

Согласно теории размерности, общее количество параметров задачи может быть сокращено на число параметров с независимыми размерностями. В качестве параметров с независимой размерностью удобно выбрать

$$\eta, E', Q_0. \quad (3.3)$$

В результате количество определяющих параметров задачи сокращается до четырех

$$\xi = \frac{x}{L^*}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad K = \frac{K_{Ic}}{K_{Ic}^*}, \quad T = \frac{T_0}{T_0^*}, \quad (3.4)$$

где размерные множители $L^*, t^*, K_{Ic}^*, T_0^*$ являются комбинациями независимых размерных параметров

$$L^* = \left(\frac{Q_0 \eta}{E'} \right)^{1/2}, \quad t^* = \frac{\eta}{E'}, \quad K_{Ic}^* = E' \left(\frac{Q_0 \eta}{E'} \right)^{1/4}, \quad T_0^* = E'. \quad (3.5)$$

Функции, определяющие решение задачи в безразмерных и размерных переменных, согласно теории размерности, отличаются на размерный множитель

$$\begin{aligned} H &= H^* \bar{H}(\xi, \tau, K, T), \\ P &= P^* \bar{P}(\xi, \tau, K, T), \\ a &= a^* \bar{a}(\tau, K, T), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$L = L^* \bar{L}(\tau, K, T),$$

причем размерные множители также единственным образом могут быть составлены из выбранных параметров с независимыми размерностями

$$H^* = L^* = a^* = \left(\frac{Q_0 \eta}{E'} \right)^{1/2}, \quad P^* = E'. \quad (3.7)$$

Подставляя выражения из (3.6), в исходные уравнения задачи (2.1), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.12), получим постановку задачи в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \bar{H}(\xi, \tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{H}^3(\xi, \tau) \frac{\partial \bar{P}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq \bar{a}, \quad (3.8)$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = - \frac{\bar{H}^2(\bar{a} - 0, \tau)}{3} \frac{\partial P(\bar{a} - 0, \tau)}{\partial \xi}, \quad (3.9)$$

$$\bar{P}(\xi, \tau) = T, \quad \text{при } \bar{a} \leq \xi \leq \bar{L}, \quad (3.10)$$

$$f(\tau) = - \frac{\bar{H}^3(\xi, \tau)}{3} \frac{\partial \bar{P}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad (3.11)$$

$$\bar{P}(\xi, \tau) = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{L}} \frac{\partial \bar{H}(\xi', \tau)}{\partial \xi'} \frac{\xi' d\xi'}{\xi'^2 - \xi^2}, \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq \bar{L}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} K = \sqrt{\bar{L}} \left[\int_0^{\bar{a}} \frac{\bar{P}(\xi, \tau) d\xi}{\sqrt{\bar{L}^2 - \xi^2}} + T \int_{\bar{a}}^{\bar{L}} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{L}^2 - \xi^2}} \right]. \quad (3.13)$$

Постановка задачи, полученная в результате такой процедуры обезразмеривания, не изменила своей структуры, параметр ξ изменяется по длине трещины от нуля до \bar{L} и представляет собой обезразмеренную пространственную переменную, жидкость разрыва занимает область $0 \leq \xi \leq \bar{a}$. Параметр τ – обезразмеренное время задачи. Характер решения зависит от двух безразмерных констант K и T .

3.2 Автономные решения

Наличие автономных решений в различных постановках задачи о росте трещины ГРП было отмечено в работах [Spence D.A., Sharp P.W., 1985], [Garagash D.I., 2005]. В этом разделе будет проведено полное исследование поставленной задачи на наличие автономных решений при помощи методов подобия, также будут указаны аналогии с решениями, построенными в вышеупомянутых работах.

Хорошо известно, что П–теорема имеет простую групповую интерпретацию. Изменение размерности множества определяющих параметров с независимыми размерностями образует группу преобразований подобия, при этом, соотношения, имеющие физический смысл, не должны зависеть от выбора размерности, входящих в них, определяющих и определяемых величин, т.е. данные соотношения должны быть инвариантны относительно

указанной группы преобразований, а значит могут быть выражены через инварианты группы, число которых меньше числа определяющих и определяемых параметров на число параметров группы.

Применение анализа размерностей в данной задаче не позволяет сразу получить ощутимым упрощений, однако, групповые соображения все еще могут быть полезны. При некоторых дополнительных ограничениях на значения определяющих параметров, задача обладает свойством инвариантности относительно преобразования подобия или преобразования сдвига по времени, использование данной инвариантности позволяет, в частности, сразу определить автомодельные переменные и свести решение исходной задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как будет видно из анализа методом подобия, в наиболее общем виде задача не имеет автомодельных решений, однако, в различных случаях вырождения безразмерных параметров K и T появляются сразу несколько ветвей автомодельных решений.

3.2.1 Применение анализа подобия

Рассмотрим преобразования подобия всех определяемых и определяющих параметров задачи в самом общем виде и выберем из них те, при которых задача остается неизменной

$$\xi' = A\xi, \tau' = B\tau, H' = DH, P' = EP, L' = F_1L, a' = F_2a, f' = Gf.$$

Общий вид преобразования сразу можно ограничить, приняв $F_1 = F_2 = A$, в самом деле ясно, что задача не может быть инвариантна относительно преобразования меняющего отношение длины лага и всей трещины, т.е. $F_1/F_2 = 1$, кроме того параметр ξ принимает значения из промежутка $[0, L]$, поэтому преобразования параметров ξ и L должны оставлять неизменным их отношение, т.е. $A/F_2 = 1$.

Отметим, что при задании произвольной функции f , входящей в граничные условия на скважине, задаче не может оставаться инвариантной относительно какого-либо преобразования, поскольку нет никакой информации о зависимости последующих значений функции от предыдущих. Поэтому условие $f' = Gf$ можно рассматривать в качестве ограничения на выбор функции f . Данное условие является функциональным уравнением $f(B\tau) = Gf(\tau)$, с параметром $B > 0$. Решение этого уравнение – функция t^α , где α произвольное вещественное число, и значение $G = B^\alpha$.

Теперь можно произвести замену

$$\xi' = A\xi, \tau' = B\tau, H' = DH, P' = EP, L' = AL, a' = Aa, f' = B^\alpha f$$

в уравнениях (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) и, из условия инвариантности задачи относительно указанного преобразования, в случае невырожденных значений параметров K и T , получить условия на параметры подобия.

$$\frac{D}{B} = \frac{D^3 E}{A^2}, \frac{A}{B} = \frac{D^2 E}{A}, E = 1, \frac{D^3 E}{A} = B^\alpha, E = \frac{D}{A}, \sqrt{AE} = 1.$$

Данная система уравнений не имеет решения, таким образом не существует преобразования подобия сохраняющего задачу в общем виде, а значит в таком виде задача не допускает автомодельных решений. Однако, количество соотношений для определения параметров подобия можно сократить, положив равными нулю или бесконечности безразмерные параметры K и T .

Рассмотрим сначала случай, когда вырождены оба этих параметра, тогда для определения параметров подобия получим следующую систему уравнений

$$\frac{D}{B} = \frac{D^3 E}{A^2}, \frac{A}{B} = \frac{D^2 E}{A}, \frac{D^3 E}{A} = B^\alpha, E = \frac{D}{A}.$$

В новую систему не входят соотношения, которые раньше получались из (3.10) и (3.13). Данные соотношения удобно разрешить относительно B

$$A = B^\lambda, D = B^\mu, E = B^{-1/3},$$

где

$$\lambda = \alpha/2 + 2/3, \mu = \alpha/2 + 1/3.$$

Таким образом, существует группа преобразований подобия, зависящая от параметра B , которая оставляет задачу неизменной. Поскольку мы предполагаем, что решение задачи единственно, то оно также должно быть инвариантно относительно этих преобразований, т.е. для любого $B > 0$ и произвольного действительного α решение задачи должно удовлетворять соотношениям

$$H(\xi, \tau) = B^{-\mu} H(B^\lambda \xi, B\tau),$$

$$P(\xi, \tau) = B^{1/3} P(B^\lambda \xi, B\tau),$$

$$L(\tau) = B^{-\lambda} L(B\tau), \tag{3.14}$$

$$a(\tau) = B^{-\lambda} a(B\tau).$$

Выбирая $B = 1/\tau$, получим:

$$\begin{aligned}
 H(\xi, \tau) &= \tau^\mu H\left(\frac{\xi}{\tau^\lambda}, 1\right) = \tau^\mu \tilde{H}\left(\frac{\xi}{\tau^\lambda}\right), \\
 P(\xi, \tau) &= \tau^{-1/3} P\left(\frac{\xi}{\tau^\lambda}, 1\right) = \tau^{-1/3} \tilde{P}\left(\frac{\xi}{\tau^\lambda}\right), \\
 L(\tau) &= \tau^\lambda L(1) = \tau^\lambda \tilde{L}, \\
 a(\tau) &= \tau^\lambda a(1) = \tau^\lambda \tilde{a}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Таким образом, используя инвариантность задачи, относительно указанной группы преобразований подобия, можно определить автомодельные переменные. Подставляя выражения для определяемых величин в уравнения (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения \tilde{a} , \tilde{L} , \tilde{H} , \tilde{P} .

Если параметр T не равен нулю или бесконечности, т.е. если давление в области лага не вырождено, то из (3.10) следует, что параметры подобия должны удовлетворять соотношению $E = 1$, которое противоречит условию $E = B^{-1/3}$, кроме случая тождественного преобразования подобия. Таким образом, не существует преобразования подобия отличного от тождественного, которое сохраняет систему уравнений исходной задачи в случае невырожденного давления в лаге.

В случае, когда невырожден параметр K , коэффициенты подобия должны дополнительно удовлетворять соотношению $\sqrt{AE} = 1$, которое следует из (3.13). Подставляя полученные выше выражения для параметров A и E в новое соотношение, получим условие $\alpha = 0$, т.е. в случае невырожденного значения параметра K преобразование сохраняющее систему приобретает вид

$$A = B^{2/3}, D = B^{1/3}, E = B^{-1/3}.$$

Решение в автомодельных переменных в этом случае

$$\begin{aligned}
 H(\xi, \tau, K) &= \tau^{1/3} \tilde{H}\left(\frac{\xi}{\tau^{2/3}}, K\right), \\
 P(\xi, \tau, K) &= \tau^{-1/3} \tilde{P}\left(\frac{\xi}{\tau^{2/3}}, K\right), \\
 L(\tau, K) &= \tau^{2/3} \tilde{L}(K), \\
 a(\tau, K) &= \tau^{2/3} \tilde{a}(K).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Кроме того появляется дополнительное требование постоянства потока жидкости разрыва на входе в скважину.

При поиске решения задачи гидроразрыва пласта необходимо учитывать некоторые естественные ограничения на его вид, так, например, функция, задающая раскрытие трещины, должна быть непрерывна, дифференцируема, положительна по всей длине трещины и обращаться в ноль в носике, а функция, задающая давление, должна быть непрерывна. Поэтому формальное использование произвольных значений параметров K и T может привести к получению нефизичного решения. Рассмотрим как ведет себя решение задачи при различном выборе определяющих параметров.

1. Величина лага является убывающей функцией абсолютной величины параметра T . Действительно, если большая отрицательная величина горного давления действует в большой области лага, это приводит к отрицательному раскрытию в области лага. Таким образом, в автомоделном решении при нулевом горном давлении лаг может иметь произвольную величину, зависящую только от второго параметра K , в то время как в автомоделном решении при бесконечно большом горном давлении лаг должен быть малой величиной по сравнению с длиной трещины.
2. Величина лага является убывающей функцией параметра K . Действительно, из соотношения (3.13) видно, что при уменьшении величины K жидкость занимает все меньшую часть равновесной трещины. Таким образом, в автомоделном решении при $T = 0$ лаг может занимать всю трещину при нулевом K , в то время как при бесконечно большом K лаг должен быть малой величиной по сравнению с длиной трещины.
3. Если оба параметра T и K обращаются в ноль, то трещина становится неравновесной, поскольку не действует ни один из механизмов препятствующих ее неограниченному росту и, как видно из соотношения (3.13), длина трещины должна быть бесконечна, если жидкость занимает сколь угодно малую, но конечную область.
4. Если параметр K обращается в бесконечность, то из его определения ясно, что это соответствует ситуации, когда поток жидкости разрыва на входе в трещину обращается в ноль, т.е. трещина не может продолжать развиваться.

Из этих рассуждений ясно, что, из всех условий, при которых формально можно получить автомоделные решения методом подобия, практически могут реализовываться только три случая.

1. Случай нулевого горного давления $T = 0$ и невырожденного параметра K . Следует отметить, что в данном случае автомодельное решение имеет место при постоянной величине закачиваемой в трещину жидкости и имеет вид (3.16). Данное решение обладает ненулевым лагом, величина которого определяется величиной параметра K .
2. Случай бесконечно большого горного давления $T = \infty$ и невырожденного параметра K . Автомодельные переменные для решения в данном случае ничем не отличаются от предыдущего случая, поскольку решение получено при помощи того же преобразования подобия, однако, в данном случае лаг в решении отсутствует.
3. Случай бесконечно большого горного давления $T = \infty$ и $K = 0$. В данном случае задача остается инвариантной для более широкого набора преобразований подобия и автомодельное решение имеет вид (3.15).

Наличие автомодельного решения в первом случае было указано в работе [Garagash D.I., 2005], однако, оно было приведено без строгого обоснования. Из анализа подобия становится ясна природа данного решения, его наличие связано с вырождением определяющего параметра задачи T , т.е. данное решение носит предельный характер.

В работе [Garagash D.I., 2005] указывается, что в случае $T = \infty$ имеет место автомодельное решение [Spence D.A., Sharp P.W., 1985], однако, сама постановка задачи отличается от используемой в [Garagash D.I., 2005] и здесь, т.к. в постановке Спенса и Шарпа длина трещины определяется на основании материального баланса и не используется условие разрушения вида (3.13). Добавление условия (3.13) уменьшает количество автомодельных решений системы, кроме случая $K = 0$. В действительности используемый у Спенса и Шарпа параметр K , которому они придают значение коэффициента интенсивности, является функцией времени. Этот факт выпадает из рассмотрения авторов, поскольку K определяется не при рассмотрении общего решения, а при анализе связи между уже обезразмеренными давлением и раскрытием трещины в автомодельных переменных.

3.2.2 Анализ инвариантности относительно сдвига по времени

Рассмотрим преобразования сдвига по времени $\tau' = \tau - \delta$, где δ – произвольное действительное число. И будем искать преобразования для остальных определяемых и определяющих величин задачи, которое сохраняет неизменной систему уравнений в случае сдвига по времени.

Как и в случае преобразования подобия, функция $f(\tau)$ не может быть произвольной если мы хотим, чтобы при сдвиге по времени задача сохранялась. Данная функция должна удовлетворять соотношению $f(\tau') = f(\tau - \delta) = f(\tau)g(\delta)$, где g – произвольная функция. Решением данного функционального уравнения является функция $e^{\alpha\tau}$, при этом $g = e^{-\alpha\delta}$. Поэтому естественно искать преобразование для остальных функций в общем виде

$$\xi' = e^{A\delta}\xi, \quad H' = e^{D\delta}H, \quad P' = e^{E\delta}P, \quad L' = e^{A\delta}L, \quad a' = e^{A\delta}a.$$

Здесь, как и в случае преобразования подобия, параметры преобразования для ξ , a и L согласованы, т.к. ясно, что в случае автомодельного решения данные величины должны изменяться одинаково.

Производя сначала замену в уравнениях (3.8), (3.9), (3.11), (3.12), из условия инвариантности задачи относительно указанного преобразования получим условия на параметры преобразования

$$2D - 2A + E = 0, \quad D = A + E, \quad 3D + E - A = -\alpha.$$

Откуда получаем значения параметров $E = 0$, $A = D = -\alpha/2$. Отметим, что при $\alpha = 0$ преобразование вырождается, поэтому дальше считаем, что $\alpha \neq 0$.

Условие, получаемое из (3.10), не накладывает дополнительных ограничений на параметры преобразования при любой величине параметра T , конечной или бесконечной.

Далее, в случае невырожденного K , ограничение $A/2 + E = 0$, получаемое из (3.13), означает, что $A = 0$, и значит не существует нетривиального автомодельного решения. Если же параметр K вырожден, то дополнительного ограничения не возникает и мы окончательно имеем

$$A = D = -\frac{\alpha}{2}, \quad E = 0.$$

Таким образом, автомодельное решение, полученное при помощи преобразования сдвига по времени, существует при вырожденном K и любой величине T . Условие $E = 0$ означает, что данное решение характеризуется условием постоянства давления на входе в трещину.

Здесь, как и ранее, необходимо исключить некоторые случаи, чтобы решение могло существовать физически. Случай бесконечно большого K соответствует стоящей трещине. Случай $K = 0$ и $T = 0$ соответствует неустойчивому росту трещины.

Таким образом, существует группа преобразований, зависящая от параметра δ , которая оставляет задачу неизменной. Поскольку мы предполагаем, что решение задачи единственно, то оно также должно быть инвариантно относительно этих преобразований, т.е. для любых δ решение задачи

должно удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned}
H(\xi, \tau, T) &= e^{\alpha\delta/2} H(\xi/e^{\alpha\delta/2}, \tau - \delta, T), \\
P(\xi, \tau, T) &= P(\xi/e^{\alpha\delta/2}, \tau - \delta, T), \\
L(\tau, T) &= e^{\alpha\delta/2} L(\tau - \delta, T), \\
a(\tau, T) &= e^{\alpha\delta/2} a(\tau - \delta, T).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Выбирая $\delta = \tau$, получим:

$$\begin{aligned}
H(\xi, \tau, T) &= e^{\alpha\tau/2} H(\xi/e^{\alpha\tau/2}, 0, T) = e^{\alpha\tau/2} \tilde{H}(\xi/e^{\alpha\tau/2}, T), \\
P(\xi, \tau, T) &= P(\xi/e^{\alpha\tau/2}, 0, T) = \tilde{P}(\xi/e^{\alpha\tau/2}, T), \\
L(\tau, T) &= e^{\alpha\tau/2} L(0, T) = e^{\alpha\tau/2} \tilde{L}(T), \\
a(\tau, T) &= e^{\alpha\tau/2} a(0, T) = e^{\alpha\tau/2} \tilde{a}(T).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Таким образом, используя инвариантность задачи относительно указанной группы преобразований, можно определить автомодельные переменные. Подставляя выражения для определяемых величин в уравнения (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения \tilde{a} , \tilde{L} , \tilde{H} , \tilde{P} .

Итак, при помощи анализа инвариантности системы уравнений относительно преобразования сдвига по времени обнаружено новое семейство автомодельных решений, которые имеют место при вырождении параметра K . При этом ясно, что управляющими параметрами задачи являются T и α . Как и раньше лаг является убывающей функцией абсолютной величины T . При $T = 0$ лаг занимает всю трещину и трещина не устойчива. С увеличением абсолютной величины T до бесконечности лаг стремится к нулю.

Практический интерес представляют две различные ситуации

1. Случай $K = 0$ и $T = \infty$. Напомним, что для данного случая при рассмотрении с помощью преобразований подобия был получен самый широкий класс решений, который по виду совпадал с решением Спенса и Шарпа [Spence D.A., Sharp P.W., 1985]. Автомодельные переменные для решения в данном случае также полностью совпадают с полученными в указанной работе, однако, оказывается, что отсутствие

критерия разрушения в постановке Спенса и Шарпа, и здесь приводит к существенному расширению класса решений. А именно, при учете критерия разрушения автомодельное решение, полученное в этом разделе, становится возможным только при $K = 0$ и $\alpha \neq 0$. Отметим также, что в данном случае экспоненциальное автомодельное решение называется предельным для автомодельных решений обычного вида. Впервые решения вида $e^{\alpha t} f(xe^{\beta t})$ были получены в работах С. Гольдштейна, а выяснение их групповой природы и предельного характера было выполнено в работе Баренблатта [Баренблатт Г.И., 1954].

2. Случай $K = 0$ и конечного T не равного нулю. Наличие автомодельности такого вида указано еще в работе Христиановича и Желтова [Khristianovic S., Zheltov Y., 1955]. Хотя решение, которое рассматривается в указанной работе является приближенным, но экспоненциальный характер нарастания потока был установлен авторами.

3.3 Асимптотическое поведение задачи

В работах Зельдовича и Баренблатта [Баренблатт Г.И., 1982] подробно исследовано происхождение и значение автомодельных решений. Такие решения, как правило, появляются в вырожденных задачах, когда один или несколько из определяющих параметров полной задачи равны нулю или бесконечности, а функции, определяющие решение полной задачи, имеют конечный предел, не равный нулю, при стремлении выбранного параметра к нулю или бесконечности. Автомодельные решения зачастую описывают асимптотическое или промежуточно асимптотическое поведение решения общей задачи, т.е. после того как в ходе эволюции одна или несколько характерных величин задачи вырождаются, решение принимает автомодельный вид.

В полной задаче о развитии трещины гидроразрыва изначально присутствует большое число определяющих параметров, выделяющих единственное решение. Они входят как в уравнения, так и в граничные и начальные данные. Однако, обычной ситуацией при проведении гидроразрыва является увеличение начальной длины и ширины трещины в десятки раз, поэтому ясно, что отношения параметров задачи, входящих в начальные данные, к аналогичным параметрам, характеризующим трещину на более поздних стадиях ее роста, существенно отличаются от единицы. Таким образом, стартуя из состояния с большим количеством определяющих параметров, мешающих автомодельности, трещина в ходе развития переходит в состояние, где определенное количество параметров вырождается и может иметь место одно из автомодельных решений рассмотренных в предыдущих разделах.

Если автомодельные решения задачи найдены, то обычно не составляет труда определить класс решений, которые асимптотически имеют автомодельный вид. В предыдущих разделах были получены несколько ветвей автомодельных решений задачи гидроразрыва, проанализируем теперь их асимптотический смысл.

Рассмотрим сначала задачу, в которой скорость закачки жидкости в трещину постоянна. Напомним, что решение задачи определяется уравнениями (2.1), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.12), а также начальными данными (2.13). Введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{a^*}, \tau = \frac{t}{t^*}, \bar{H} = \frac{H}{H^*}, \bar{P} = \frac{P}{P^*}, \bar{a} = \frac{a}{a^*}, \bar{L} = \frac{L}{a^*}, f = \frac{Q_0}{Q_0^*}. \quad (3.19)$$

Здесь H^* – характерное раскрытие трещины, P^* – характерное давление в заполненной жидкостью части трещины, t^* – характерное время процесса, a^* – характерная длина области трещины заполненной жидкостью разрыва и Q_0^* – характерная величина потока разрывающей жидкости в трещину. Подставляя данные выражения в (2.1), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.12) и (2.13), получим

$$\left(\frac{a^* H^*}{t^* \frac{1}{\eta} H^{*3} \frac{P^*}{a^*}} \right) \frac{\partial \bar{H}}{\partial \tau} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{H}^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq \bar{a}, \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{a^* H^*}{t^* \frac{1}{\eta} H^{*3} \frac{P^*}{a^*}} \right) \frac{d\bar{a}}{d\tau} = - \frac{\bar{H}^2}{3} \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\bar{a}-0}, \quad (3.21)$$

$$\bar{P} = \frac{T_0}{P^*}, \quad \text{при } \bar{a} \leq \xi \leq \bar{L}, \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{Q_0^*}{\frac{1}{\eta} H^{*3} \frac{P^*}{a^*}} \right) f(\tau) = - \frac{\bar{H}^3}{3} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad (3.23)$$

$$\left(\frac{P^* a^*}{E' H^*} \right) \bar{P} = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{L}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \xi'} \frac{\xi' d\xi'}{\xi'^2 - \xi^2}, \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq \bar{L}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{K_{Ic}}{P^* \sqrt{a^*}} = \sqrt{\bar{L}} \left[\int_0^{\bar{a}} \frac{\bar{P} d\xi}{\sqrt{\bar{L}^2 - \xi^2}} + \frac{T_0}{P^*} \int_{\bar{a}}^{\bar{L}} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{L}^2 - \xi^2}} \right], \quad (3.25)$$

$$\bar{P} = \begin{cases} \frac{P_0}{P^*} - \left(\frac{P_0}{P^*} - T\right) \frac{\xi^2}{\bar{a}(t_0)^2}, & 0 \leq \xi \leq \bar{a}(t_0) \\ T, & \bar{a}(t_0) \leq \xi \leq \bar{L}(t_0). \end{cases} \quad (3.26)$$

Комбинации характерных величин, входящие в уравнения (3.20), (3.21), (3.23) и (3.24), равны единице. Действительно, в уравнения (3.20) и (3.21) входит отношение характерного объема области трещины, заполненной жидкостью, к характерному объему закачанной жидкости. Поскольку в рассматриваемой постановке задачи жидкость не вытекает из трещины, значит данные величины равны друг другу. В граничное условие (3.23) и уравнение (3.24) входят определения для величин Q_0^* и P^* соответственно, через другие характерные величины.

Используя равенство указанных величин единице, выразим характерные величины P^* , H^* и a^* , а также параметры K и T , через Q_0^* и t^* :

$$P^* = \left(\frac{\eta}{E'}\right)^{1/3} E' t^{*-1/3}, \quad (3.27)$$

$$H^* = \left(\frac{\eta}{E'}\right)^{1/6} Q_0^{*1/2} t^{*1/3}, \quad (3.28)$$

$$a^* = \left(\frac{\eta}{E'}\right)^{-1/6} Q_0^{*1/2} t^{*2/3}, \quad (3.29)$$

$$K = K_{Ic} \left(\frac{\eta}{E'}\right)^{-1/4} E'^{-1} Q_0^{*-1/4}, \quad (3.30)$$

$$T = T_0 \left(\frac{\eta}{E'}\right)^{-1/3} E'^{-1} t^{*1/3}. \quad (3.31)$$

Решение задачи определяется как и ранее параметрами K и T , а также параметрами, входящими в начальные данные

$$\bar{a}(t_0) = \frac{a(t_0)}{a^*}, \quad \bar{L}(t_0) = \frac{L(t_0)}{a^*}, \quad \Pi = \frac{P_0}{P^*}. \quad (3.32)$$

Интуитивно ясно и хорошо подтверждается численными расчетами, что особенности распределения давления в трещине в начальный момент времени существенны лишь в самом начале ее развития. Откажемся от рассмотрения начального этапа роста трещины, т.е. будем интересоваться развитием трещины, когда ее длина сильно увеличилась по сравнению с начальной длиной, т.е. $L^* \gg \bar{L}(t_0)$. Длина трещины не меньше чем длина области заполненной жидкостью, величина которой имеет порядок a^* , следовательно, если $L^* \gg \bar{L}(t_0)$, то при этом должно быть $t^* \gg (L_0^{3/2}(\eta/E')^{1/4})/(Q_0^*)^{3/4} = T_1$. Но при таких t^* параметры $\bar{L}(t_0)$ и $\bar{a}(t_0)$ много меньше единицы. На

практике принято считать, что если некоторый параметр задачи много больше или много меньше единицы, то зависимостью от этого параметра можно пренебречь. Вообще говоря, исключить зависимость от малого или большого параметра можно только в том случае, когда функции, определяющие решение задачи, имеют конечный предел отличный от нуля при вырождении этого параметра [Баренблатт Г.И., 1982]. Для большинства нелинейных задач аналитически проверить наличие такого предела невозможно, поэтому для проверки необходимо использовать численные эксперименты с решением полной задачи. В данном конкретном случае такой предел существует, поэтому при $L^* \gg \bar{L}(t_0)$ и $t^* \gg T_1$ зависимость решения от параметров $\bar{L}(t_0)$ и $\bar{a}(t_0)$ незначительна.

Далее, т.к. мы предполагаем, что жидкость закачивается в трещину с постоянной скоростью, то с увеличением длины трещины характерное давление в области заполненной жидкостью должно уменьшаться. Действительно, ширина трещины увеличивается, а давление в лаге постоянно, поэтому для сохранения величины потока, проходящего через трещину, давление в области заполненной жидкостью должно уменьшаться. Величина давления в заполненной части трещины имеет порядок $P^* = (\eta/E')^{1/3} E' t^{*-1/3}$, откуда следует, что при $t^* \gg ((\eta/E')E'^3)/P_0^3 = T_2$ параметр $\Pi \gg 1$ и следовательно незначителен. Совершенно аналогично, при $t^* \gg ((\eta/E')E'^3)/T_0^3 = T_3$ параметр $T \gg 1$. Итак, при $t^* \gg T_1$, $t^* \gg T_2$ и $t^* \gg T_3$ решение задачи хорошо описывается автомодельным решением, полученным при условии $T = \infty$.

Чтобы прояснить асимптотический смысл автомодельного решения, полученного при условии $T = 0$, предположим, что параметры задачи таковы, что $T_1 \ll T_3$ и $T_2 \ll T_3$. Значения параметров и характерных величин задачи, при которых имеют место данные соотношения, легко можно установить из определений величин T_1 , T_2 и T_3 . Отметим, что данные соотношения заведомо выполняются при нулевом горном давлении, т.е. $T_0 = 0$. Далее, отметим, что при $t^* \ll T_3$ параметр $T \ll 1$. Значит, если значения параметров задачи таковы, что T_1 и T_2 с одной стороны и T_3 с другой далеко разнесены друг от друга, то автомодельное решение, полученное при условии $T = 0$, хорошо описывает решение полной задачи при временах достаточно больших, чтобы исчезло влияние особенностей начального условия, и вместе с тем достаточно малых, чтобы можно было пренебречь отличием горного давления от нуля, т.е. при $T_1 \ll t^* \ll T_3$ и $T_2 \ll t^* \ll T_3$. В подобных случаях говорят, что автомодельное решение представляет собой промежуточную асимптотику.

В случае обеих асимптотик $T = 0$ или $T = \infty$, в задаче остается единственный управляющий параметр K , величина которого не зависит от времени, если скорость закачки жидкости в трещину постоянна.

Если поток жидкости в трещину увеличивается, то можно считать, что с

увеличением характерного времени задачи t^* увеличивается и характерная величина потока Q_0^* . При достаточно большом t^* параметр $K \ll 1$. Следовательно решение задачи, в случае увеличивающейся скорости закачки, хорошо описывается одним из автомодельных решений, получаемых при условии $K = 0$.

1. Если давление на входе в трещину уменьшается, то решение полной задачи асимптотически хорошо описывается автомодельным решением, полученным при условиях $K = 0$ и $T = \infty$. Единственным определяющим параметром задачи в этом случае остается α .
2. Если давление на входе в трещину сохраняется, то решение полной задачи асимптотически хорошо описывается автомодельным решением, полученным при условиях $K = 0$ и невырожденного T . В этом случае поведение решения определяется параметрами T и α .

4 Численное решение задачи

4.1 Обезразмеривание постановки задачи

Для численного решения задачу удобно обезразмерить также как и в разделе 3.3. При этом система в безразмерном виде содержит уравнения (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), уравнение обратное к (3.12)

$$\bar{H} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\bar{a}} F \left(\frac{\xi}{\bar{L}}, \frac{\xi'}{\bar{L}} \right) \bar{P} d\xi' + T \int_{\bar{a}}^{\bar{L}} F \left(\frac{\xi}{\bar{L}}, \frac{\xi'}{\bar{L}} \right) d\xi' \right], \quad 0 \leq \xi \leq \bar{L}, \quad (4.1)$$

а также начальное условие (3.26).

4.2 Особенности реализации

Для проведения вычислений удобно выбрать сетку, которая состоит из двух частей и изменяется вместе с ростом трещины. Первая часть сетки состоит из точек, находящихся в области заполненной жидкостью; точка, соединяющая две части сетки, движется вместе с границей жидкости и лага; вторая часть сетки состоит из точек, находящихся в области лага; последняя точка совпадает с подвижной границей трещины. Функции, заданные на подвижной сетке, необходимо переинтерполировать на каждом шаге по времени, но использование подвижной сетки позволяет упростить вычисления.

Пусть известно распределение функций \bar{P} и \bar{H} в некоторый, например начальный, момент времени. Вычисление их распределений на следующем шаге по времени ведется по следующему алгоритму:

1. При помощи уравнения (3.9) вычисляется положение границы жидкости на новом шаге по времени.
2. Перестраивается сетка, так чтобы точка, разделяющая две части сетки, совпадала с новой границей жидкости, затем на новую сетку переинтерполируются значения \bar{P} и \bar{H} .
3. При помощи уравнения (3.8) вычисляются новые значения функции \bar{H} в области, заполненной жидкостью, при этом используются величины \bar{P} с предыдущего шага по времени.
4. Используя новые значения \bar{H} в области, заполненной жидкостью, а также условия (3.10), при помощи (3.12) вычисляются новые значения раскрытия трещины в области лага.
5. Используя новые значения \bar{H} во всей трещине, при помощи (3.12) вычисляются новые значения \bar{P} .
6. При помощи (3.13) определяется новая длина трещины.
7. Перестраивается сетка, так чтобы последняя точка совпадала с концом трещины, затем на новую сетку переинтерполируются значения \bar{P} и \bar{H} .

Вместо решения полной системы уравнений в выбранном алгоритме используется последовательное решение внутренней и внешней задачи на каждом шаге по времени. Это обусловлено тем, что в результате дискретизации полной задачи получается плохо обусловленная матрица, одна часть которой разрежена, а другая заполнена.

Отметим, что при $\xi = \xi'$ в (4.1) и (3.12) присутствуют особенности. Особенность в (4.1) интегрируемая, а интеграл (3.12) необходимо понимать в смысле его главного значения по Коши. Поэтому, при вычислениях удобно задавать сеточные функции \bar{P} и \bar{H} в средних точках сетки.

После того как раскрытие трещины на следующем шаге по времени определено для участка заполненного жидкостью, его можно определить и для лага. Следует отметить, что уравнение движения жидкости описывает состояние системы только в области, заполненной жидкостью. Вне жидкости действительны только уравнения упругости. Для определения

раскрытия требуется решить интегральное уравнение

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\bar{a}}^{\bar{L}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \xi'} \frac{\xi' d\xi'}{\xi'^2 - \xi^2} = T + \frac{1}{\pi} \int_0^{\bar{a}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \xi'} \frac{\xi' d\xi'}{\xi'^2 - \xi^2}.$$

Полученную в результате решения функцию $\partial \bar{H} / \partial \xi'$ далее необходимо проинтегрировать с начальным условием обеспечивающим непрерывность раскрытия трещины на подвижной границе жидкости.

Известно, что задача отыскания решения интегрального уравнения такого вида является некорректной. Дополнительной сложностью при решении данного уравнения является и то, что интеграл входящий в левую часть содержит особенность в ядре и существует только в смысле главного значения Коши.

Исследование матрицы, которая получается при дискретизации указанного уравнения, показывает, что в матрице системы нет диагонального преобладания и ситуация ухудшается при сгущении сетки, что соответствует свойствам некорректно поставленной задачи. Одним из наиболее простых способов регуляризации является замена матричного уравнения $Ax = B$ на уравнение $(A + \alpha E)x = B$. Причем известно, что при стремлении ошибки вычисления элементов системы $\delta \rightarrow 0$ и параметра регуляризации $\alpha \rightarrow 0$ к нулю решение стремиться к точному, в слабом смысле [Иванов В.К., 1967].

Условие равновесия трещины (3.13) можно использовать для нахождения длины трещины после изменения распределения \bar{P} . Для решения указанного уравнения можно использовать метод деления отрезка пополам или его модификации, один конец отрезка, в котором ищется решение, это положение равновесия на предыдущем шаге, второй конец можно выбрать произвольно, считая, что если трещина увеличилась больше чем ожидалось, то режим ее роста стал неустойчивым.

4.3 Результаты вычислений

Численное решение полной задачи с начальными данными дает возможность проверить правильность выводов относительно асимптотического поведения задачи. Действительно, наблюдая за поведением решения, при различных значениях параметров задачи, с течением времени, можно обнаружить, что оно выходит на автомодельную асимптотику. Характерным признаком автомодельного решения является постоянство отношения длины области заполненной жидкостью к длине всей трещины.

Рассмотрим случай, когда $Q_0(t) = const$, т.е. жидкость закачивается в трещину с постоянной скоростью. На рис. 4.1 изображены зависимости

$a(t)$ и $a(t)/L(t)$ при $T = 0$ и различных K . На графиках зависимостей $a(t)/L(t)$ можно наблюдать процесс выхода на константу, величина которой полностью определяется величиной параметра K . Если $K \gg 1$, т.е. поток жидкости в трещину мал по сравнению с его масштабом, определяемым константами задачи, то лаг мал (рис. 4.1, b), но конечен, что соответствует случаю toughness domination в работе [Garagash D.I., 2005]. В случае, когда $K \ll 1$, т.е. поток в трещину велик, лаг занимает большую часть трещины (рис. 4.1, a), что соответствует случаю viscosity domination в той же работе. На рис. 4.2 представлены нормированные профили давления, соответствующие режиму с $K \ll 1$ (рис. 4.2, a) и $K \gg 1$ (рис. 4.2, b): в первом случае мы имеем примыкание графика давления к оси с конечной производной, во втором случае профиль давления укрупняется. Эти решения в работе [Garagash D.I., 2005] названы вязкоподобными и жесткоподобными, что соответствует преобладанию гидродинамических или упругих процессов в решении.

Наиболее интересный случай, когда $T \neq 0$, т.е. при ненулевом горном давлении. В этом случае автомодельный режим с конечным значением лага не устанавливается (рис. 4.3, a), жидкость стремится занять весь объем трещины. Профиль давления при этом становится круче, стремясь к бесконечной производной. Величина $a(t)/(a(t_0)t^{2/3}) \rightarrow const$ (рис. 4.3, b). Таким образом, это решение также автомодельно, но в пределе имеет нулевой лаг.

Сравнение профилей давления в [Spence D.A., Sharp P.W., 1985] с давлением на рис. 4.4 показывает, что полученное решение приближается к автомодельному решению, построенному в этой работе, но не равномерно по пространству. Этот результат, на первый взгляд неожиданный, на самом деле очевиден. Решение, построенное в этой работе, при $T \neq 0$, в переменных, обезразмеренных на величины $L(t)$ и $P(t)$, соответствует случаю, когда давление в клюве трещины $T_0/P(t)$ стремится к бесконечности, что соответствует решению [Spence D.A., Sharp P.W., 1985]. Учитывая, что для конечных и не экспоненциально растущих значений потока $P(t) \rightarrow 0$ при увеличении раскрытия трещины, это решение является основным в теории трещин гидроразрыва.

И, наконец, случай экспоненциально растущего потока – это предельное асимптотическое решение, в смысле Баренблатта. На рис. 4.5 изображена зависимость $a(t)$ и $a(t)/L(t)$ при экспоненциальном росте потока жидкости в трещину. Здесь, как и в случае $T = 0$, с течением времени устанавливается автомодельный режим с конечным значением лага. Это можно объяснить тем, что масштаб давления, например, давление на забое скважины, в этом случае не убывает. Приближенное решение, полученное в [Khristianovic S., Zheltov Y., 1955], соответствует случаю $P = const$ в жидкости.

Отметим, что процесс установления автомодельного режима зависит от

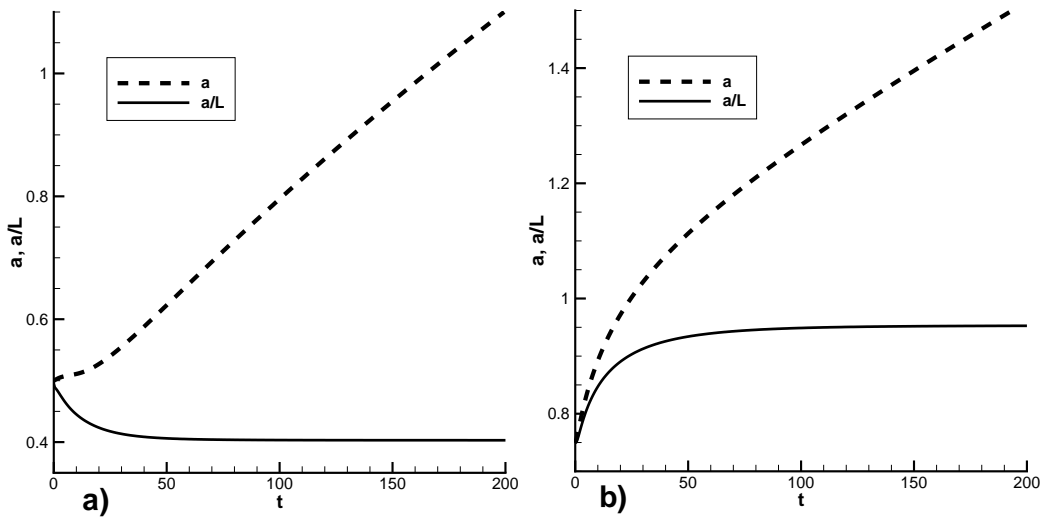


Рис. 4.1: $a(t)$ и $a(t)/L(t)$ при $T = 0$ и а) $K \ll 1$, б) $K \gg 1$

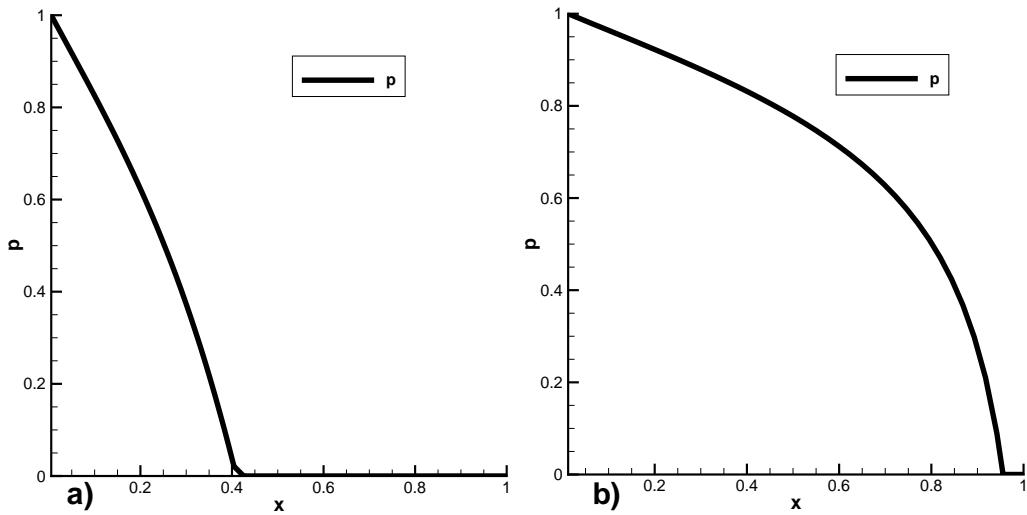


Рис. 4.2: Автоподобное $P(\xi)/P(0)$ при $T = 0$ и а) $K \ll 1$, б) $K \gg 1$

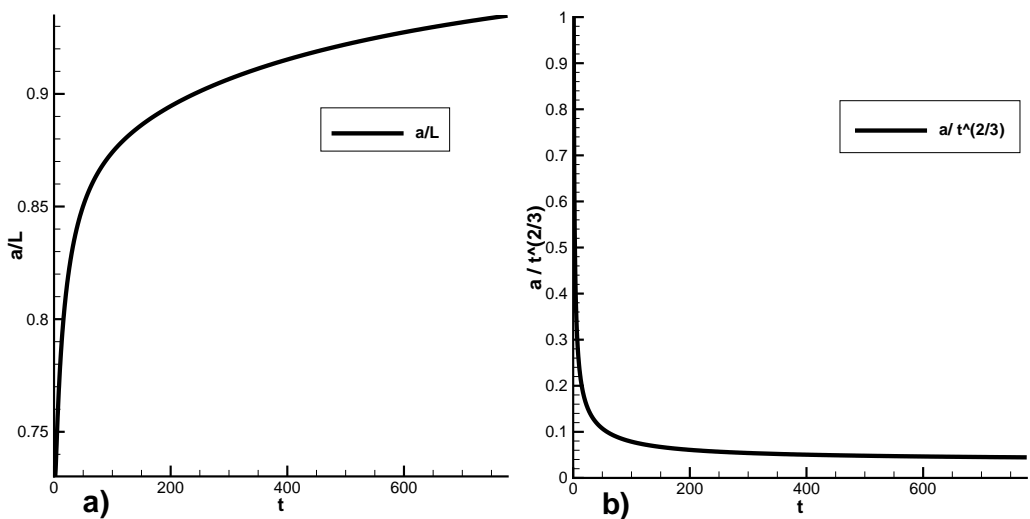


Рис. 4.3: а) $a(t)$ и б) $a(t)t^{-2/3}$ при $T \neq 0$

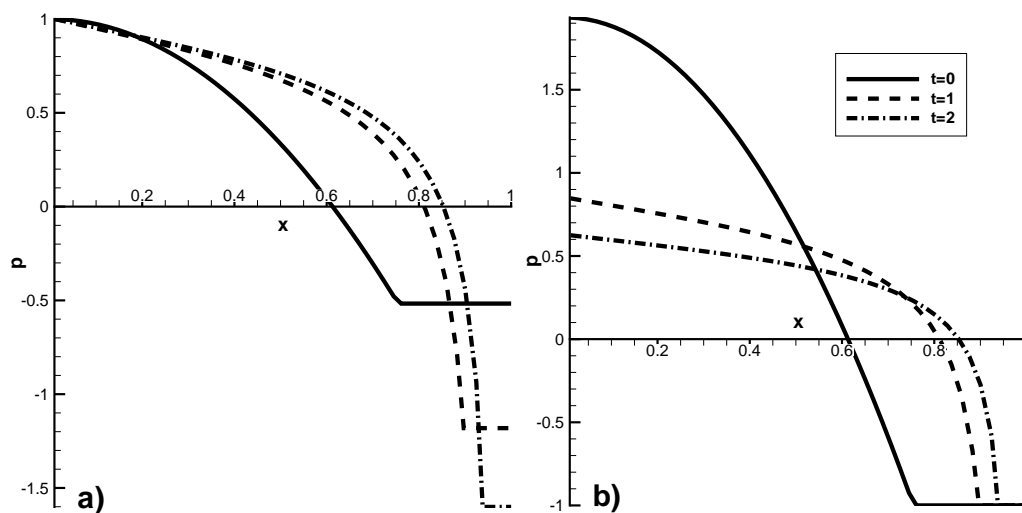


Рис. 4.4: Изменение а) $P(\xi)/P(0)$ и б) $P(\xi)/T$ при $T \neq 0$

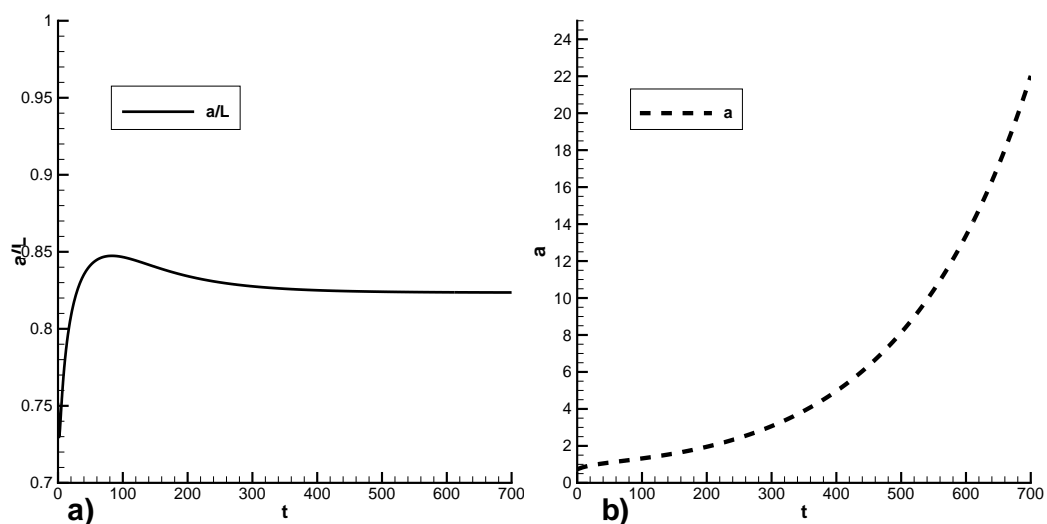


Рис. 4.5: а) $a(t)$ и б) $a(t)/L(t)$ при экспоненциальном росте потока

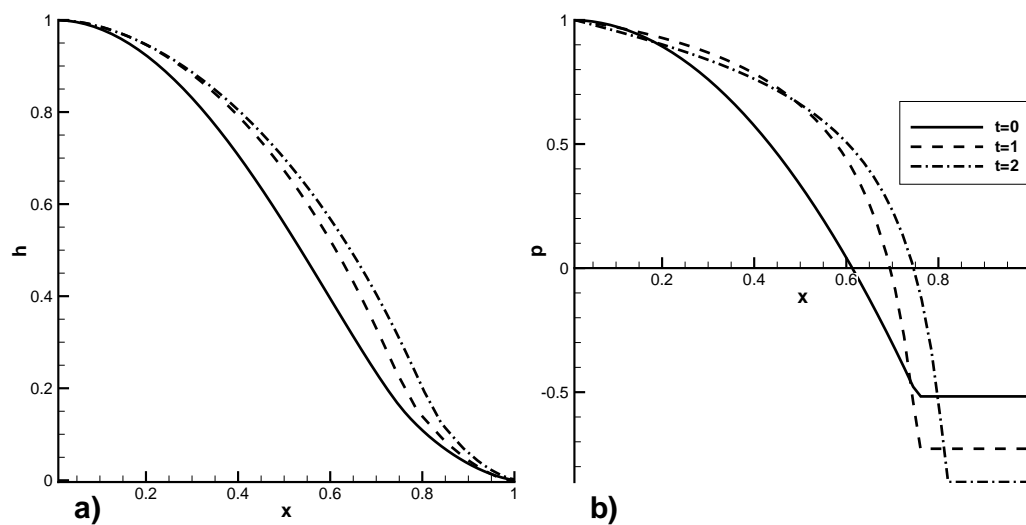


Рис. 4.6: Неавтономное изменение а) $H(\xi)/H(0)$ и б) $P(\xi)/P(0)$

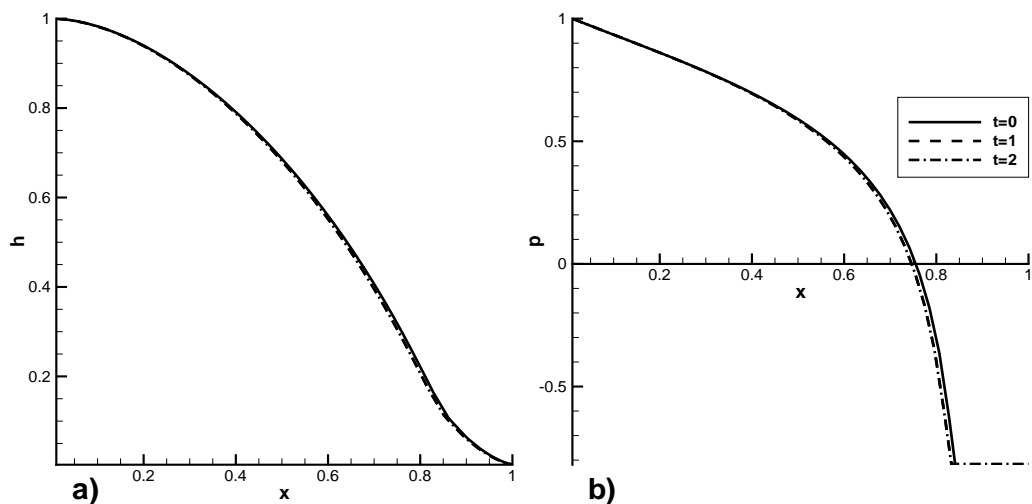


Рис. 4.7: Автомоделное изменение а) $H(\xi)/H(0)$ и б) $P(\xi)/P(0)$

параметров, входящих в начальные данные, и может быть достаточно сложным. Так, например, в случае, изображенном на рис. 4.5, поток жидкости в трещину в начале ее роста близок к нулю, поэтому жидкость затекает далеко в трещину, при этом давление на входе в трещину и раскрытие трещины уменьшаются, а отношение $a(t)/L(t)$ увеличивается. Однако, с ростом трещины и потока на входе поведение решения изменяется, после того как параметры задачи, зависящие от начальных данных, вырождаются, решение принимает автомоделный вид, т.е. длина и ширина экспоненциально растут, а отношение $a(t)/L(t)$ и давление на входе остаются постоянными.

5 Заключение

В данной работе рассмотрена самосогласованная модель развития трещины в упругой среде. Самосогласованная в том смысле, что на границе трещины давление равно нормальной компоненте напряжения с обратным знаком, а раскрытие трещины равно смещению. Длина трещины определяется не балансом масс, а условием разрушения. При этом баланс масс выполняется автоматически, т.к. поток из трещины в упругую среду отсутствует.

Проведено исследование задачи методом подобия и установлено наличие автомоделных режимов в случае $T_0 = 0$ и $T_0 = \infty$, где T_0 – горное давление с обратным знаком.

Если $T_0 = 0$, то существует единственный определяющий параметр задачи K , характеризующий отношение масштаба потока к потоку в трещину. Режим с $T_0 = 0$ подробно исследован в работе [Garagash D.I., 2005]. В настоящей работе показан характер выхода на автомоделную асимптотику для различных значений определяющего параметра.

Автомодельное решение задачи с $T_0 = \infty$ – это широко известное решение [Spence D.A., Sharp P.W., 1985]. В работе установлено, что если коэффициент интенсивности напряжений не зависит от времени, то существует единственный класс автомодельных решений с теми же степенными законами изменения во времени. Более широкий класс автомодельных решений соответствует коэффициенту интенсивности напряжений, меняющемуся со временем, и не имеет физического смысла. Его появление – результат того, что Спенс и Шарп ввели его после разделения пространственных и временных переменных. Наиболее важным результатом с точки зрения практики является тот факт, что при конечном горном давлении и не слишком быстро растущем потоке в трещину, отношение $T = T_0/P^*$, где P^* – масштаб изменения давления (например, давление на входе в трещину), растет со временем и, как следствие, наиболее широкий класс решений имеет асимптотику в виде решений [Spence D.A., Sharp P.W., 1985], к которым сходится неравномерно.

Решение KGD, впервые полученное в [Khristianovic S., Zheltov Y., 1955] и исследованное в [Barenblatt G.I., 1956], при постоянном значении давления на забое скважины и экспоненциальном росте потока является предельным автомодельным решением (по терминологии Баренблатта). Для него характерно наличие большого лага. Граница трещины в области лага вогнута внутрь и, за исключением области непосредственно рядом с кончиком, смыкается с производной близкой к нулю.

Список литературы

- [Barenblatt G.I., 1956] Barenblatt, G.I., 1956. On the formation of horizontal cracks in hydraulic fracture of an oil-bearing stratum. Prikl. Mat. Mech. 20, 475–486.
- [Batchelor G.K., 1967] Batchelor, G.K., 1967. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [Bunger A.P. et al., 2005] Bunger, A.P., Detournay, E., Jeffrey, R.G., 2005. Crack tip behavior in near-surface fluid-driven fracture experiments. C. R. Acad. Sci. Paris 333, 299–304.
- [Garagash D.I., 2005] Garagash D.I. Propagation of a plain-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early time solution. Int. J. Solids and Structure. 2005.
- [Garagash D.I., Detournay E., 2005] Garagash, D.I., Detournay, E., 2005. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: small toughness solution. ASME J. Appl. Mech. 72 (6), 916–928.

- [Groenenboom J. et al., 2001] Groenenboom, J., van Dam, D.B., de Pater, C.J., 2001. Time-lapse ultrasonic measurements of laboratory hydraulic-fracture growth: tip behavior and width profile. *Soc. Pet. Eng. J.* 6 (1), 14–24.
- [Irvin G.R., 1957] Irvin, G.R., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *ASME J. Appl. Mech.* 24, 361–364.
- [Khristianovic S., Zheltov Y., 1955] Khristianovic, S., Zheltov, Y., 1955. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids. In: *Proceedings of the 4th World Petroleum Congress, Rome, vol. II*, pp. 579–586.
- [Mark. G. Mack] *Mechanics of Hydraulic Fracturing*.
- [Medlin W., Masse L., 1984] Medlin, W., Masse, L., 1984. Laboratory experiments in fracture propagation. *Soc. Pet. Eng. J.* (June), 256–268.
- [Perkins T.K., Kern L.R., 1961] Perkins, T.K., Kern, L.R., 1961. Widths of hydraulic fractures. *J. Pet. Tech., Trans. AIME* 222, 937–949.
- [Spence D.A., Sharp P.W., 1985] Spence, D.A., Sharp, P.W., 1985. Self-similar solution for elastohydrodynamic cavity flow. *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A* (400), 289–313.
- [Баренблатт Г.И., 1954] Баренблатт Г.И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. – *Прикладная математика и механика*, 1955, т. 19, с. 61-88.
- [Баренблатт Г.И., 1982] Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Ленинград Гидрометеоздат, 1982.
- [Иванов В.К., 1967] Иванов В.К. Об интегральных уравнениях Фредгольма 1-го рода. *Дифференциальные уравнения*, 1967, 3, N. 3
- [Мусхелишвили Н.И., 1954] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Акад. наук СССР, 1954.