

М.Б. Гавриков, Р.В. Сорокин, А.А. Таюрский, Г.В. Шмаровоз

О влиянии внешней цепи на динамику плазменного шнура

### **Аннотация**

Разработан метод исследования влияния конфигурации и параметров внешней электрической цепи на динамику плазменного шнура в установках типа Z-пинч. Плазма считается полностью ионизованной нерелятивистской и двухжидкостной, в частности, полностью учитывается инерция электронов. Выведены электротехнические уравнения для различных внешних цепей. Предложен численный алгоритм исследования совместной динамики плазменного шнура и зарядов и токов внешней цепи. Проведены тестовые расчёты, получены предварительные результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00573).

M.B. Gavrikov, R.V. Sorokin, A.A. Tayurskiy, G.V. Shmarovoz

About influence of external circuit on dynamics of plasma cord

### **Abstract**

Research method of influence of configuration and external electric circuit's parameters on dynamics of plasma cord in Z-pinch type plants is developed. Plasma is considered to be completely ionic nonrelativistic and two-fluid. In particular, electron's inertia is completely taken into account. The electrotechnical equations for different external circuits are derived. Numerical algorithm of combined dynamics of plasma cord and external circuit's charges and currents research is suggested. Test calculations are carried out. Preliminary results are obtained.

Исследования сжатия плазменного шнура на установках типа „Z-пинч“ стояли у истоков программы управляемого термоядерного синтеза [1,2,3]. Поскольку разряд в установке происходит за очень короткий промежуток времени ( $\sim$  десятки наносекунд), то повлиять на него можно, в основном, только за счёт конструктивных особенностей самой установки. Одна из возможностей – изменение геометрии разрядной камеры – привела к созданию установок типа „плазменный фокус“, на которых был получен ряд интересных результатов [4]. Другая возможность, обсуждаемая в настоящей работе, – изменение внешней цепи, куда всегда включён плазменный шнур. Во внешней цепи, с одной стороны, аккумулируется энергия (в виде заряда на обкладках конденсаторной батареи), необходимая для проведения разряда. С другой, конфигурация и параметры внешней цепи существенно влияют на сам процесс разряда. Однако, характер этого влияния неизвестен, и его исследование и составляет цель настоящей работы.

Традиционно считается, что внешняя цепь состоит из последовательно соединённых индуктивности, ёмкости и сопротивления (см. конфигурацию (а) из §4). Анализ более сложных внешних цепей не проводился. В этой работе предложена методика такого анализа. Она существенно использует двухжидкостную природу плазменного шнура и основана на *уравнениях двухжидкостной электромагнитной гидродинамики* [5] (*ДЖЭМГД - уравнения*), в которых, в отличие от МГД - моделей плазмы, полностью учитывается инерция электронов, но в то же время двухкомпонентная электрон - ионная полностью ионизованная плазма предполагается квазинейтральной, а электромагнитное поле – квазистационарным. Оказывается, в этом случае можно существенно упростить исследование влияния внешней цепи на разряд, сведя его к решению некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Это делается возможным благодаря найденным в [6], так называемым, однородным (гомогенным) течениям бездиссипативного плазменного шнура в ДЖЭМГД - приближении с произвольным законом изменения полного тока  $I(t)$ . Гомогенные течения плазменного шнура характеризуются линейной зависимостью в каждый момент времени радиальной гидродинамической скорости течения от радиуса. Интерес к таким течениям вызван тем, что любое цилиндрически симметричное движение шнура вблизи оси симметрии приближённо является гомогенным. Для гомогенных течений радиус шнура  $R(t)$  находится по току  $I(t)$  посредством некоторого ОДУ 2-го порядка, а параметры

плазмы восстанавливаются по функциям  $R(t)$ ,  $I(t)$  с помощью явных формул (см. §5).

В общем случае плазменный шнур включается в качестве элемента в произвольную внешнюю цепь, наряду с традиционными элементами типа сопротивления, ёмкости, индуктивности, трансформатора и пр. Электротехнические уравнения такой цепи несложно получить на основе законов Кирхгофа, баланса энергии и закона Фарадея для подвижного контура. (см. §4). Электротехнические уравнения цепи вместе с ДЖЭМГД - уравнениями для плазмы шнура образуют самосогласованную систему, из которой ищутся как параметры течения плазмы шнура, так и токи и заряды внешней цепи. Для гомогенных течений эта довольно сложная система уравнений резко упрощается и переходит в систему ОДУ.

Итак, если ограничиться специальными (гомогенными) движениями плазменного шнура, то его взаимодействие с внешней цепью полностью описывается системой ОДУ, что резко упрощает исследование влияния внешней цепи на динамику шнура. В какой мере результаты этого исследования переносятся на общие движения плазменного шнура проверяется совместным расчётом ДЖЭМГД - уравнений для шнура и электротехнических уравнений внешней цепи по некоторой конечно-разностной схеме (§6). На этом этапе возможен учёт и диссипативных эффектов (магнитной и гидродинамических вязкостей, теплопроводности и пр.).

Работа носит методологический характер. Наша цель – разработка и демонстрация математического инструмента исследования влияния внешней цепи на динамику плазменного шнура. В настоящем отчёте приведены предварительные результаты этого исследования, полный анализ требует дальнейшей работы. Здесь есть и свои проблемы. Например, система ОДУ, моделирующая взаимодействие шнура с внешней цепью для гомогенных течений, имеет особенность при старшей производной и для определённых комбинаций параметров цепи является жёсткой системой ОДУ, что необходимо учитывать при численном решении. Аналогичная проблема возникает при совместном расчёте ДЖЭМГД - уравнений шнура и электротехнических уравнений цепи. В то же время возможность анализа любых, даже самых сложных, внешних цепей открывает широкий простор для численного эксперимента. Например, представляет интерес исследование одновременного разряда нескольких установок типа „Z-пинч“, включённых в единую внешнюю цепь. Однако, анализ этих возможностей выходит за рамки этой работы.

## §1. Уравнения ДЖЭМГД

Динамика нерелятивистской двухкомпонентной полностью ионизованной электропроводной плазмы с полным учётом инерции электронов подчиняется уравнениям *двухжидкостной электромагнитной гидродинамики* (ДЖЭМГД) [5,7]:

$$\begin{aligned}
\text{(а)} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{U} = 0, \quad \text{(б)} \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = 0, \\
\text{(в)} \quad & \frac{\partial \rho S_{\pm}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho S_{\pm} \mathbf{U} = \mp \lambda_{\mp} \operatorname{div} (S_{\pm} \mathbf{j}) + \frac{\lambda m_{\mp} j^2}{\lambda_{\pm} T_{\pm} m_{\Sigma} \sigma}, \\
\text{(г)} \quad & c^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \text{(д)} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\
\text{(е)} \quad & \mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -c^{-1} [\mathbf{U} \times \mathbf{H}] + \rho^{-1} \operatorname{Div} \mathbf{W} + \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \\
\text{(ж)} \quad & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\lambda_{\pm} = m_{\pm}/e_{\pm}$ ,  $\lambda = \lambda_+ + \lambda_-$ , а тензоры *внутренних напряжений*  $\Pi$  и *электродинамического состояния*  $\mathbf{W}$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \Pi^{(h)} + \Pi^{(p)} + \Pi^{(c)}, \\
\mathbf{W} &= (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^{(p)} + \Pi^{(c)}) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) \mathbf{E}_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{U} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{U}), \\
\Pi^{(h)} &= \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + p_{\Sigma} E_3, \quad \Pi^{(p)} = \frac{H^2}{8\pi} E_3 - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^{(c)} = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\rho} \lambda_+ \lambda_-.
\end{aligned} \tag{2}$$

Считается, что термодинамические параметры плазменных компонент  $S_{\pm}, \rho_{\pm}, p_{\pm}, \varepsilon_{\pm}, T_{\pm}$  связаны известными уравнениями состояния и вторым законом термодинамики:

$$\begin{aligned}
p_{\pm} &= p_{\pm}(\rho_{\pm}, T_{\pm}), \quad \varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\pm}(\rho_{\pm}, T_{\pm}), \\
T_{\pm} dS_{\pm} &= d\varepsilon_{\pm} + p_{\pm} d\left(\frac{1}{\rho_{\pm}}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Система (1–3), являющаяся замкнутой и определённой, положена ниже в основу исследования динамики плазменного шнура. По её решению гидродинамические скорости и плотности плазменных компонент вычисляются по формулам:

$$\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{U} \pm \frac{\lambda_{\mp} \mathbf{j}}{\rho}, \quad \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda} \rho, \quad \lambda = \lambda_+ + \lambda_-, \quad \lambda_{\pm} = \frac{m_{\pm}}{e_{\pm}}. \tag{4}$$

Двухжидкостная природа уравнений ДЖЭМГД (1–3) состоит в том, что в силу уравнений (1–3) скорости и плотности компонент плазмы, вычисляемые по (4), удовлетворяют точным законам сохранения массы,

энергии, импульса, т.е. гидродинамическим уравнениям, записанным для каждой плазменной компоненты.

Выше  $\sigma$  – это электропроводимость плазмы. При необходимости в уравнениях (1–3) можно учесть и другие диссипативные эффекты [7]: вязкость и теплопроводность компонент плазмы, обмен энергией между электронами и ионами, потери на излучение и пр.

На решении системы (1–3) выполнен закон сохранения полной энергии [7]:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Pi} = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \rho \left( \frac{U^2}{2} + \varepsilon + \frac{\lambda_+ \lambda_- j^2}{2\rho^2} \right) + \frac{H^2}{8\pi}, \\ \mathbf{\Pi} &= \rho \mathbf{U} \left( \frac{U^2}{2} + \varepsilon + \frac{p_\Sigma}{\rho} + \frac{\lambda_+ \lambda_- j^2}{2\rho^2} \right) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + A \mathbf{j} \end{aligned} \quad (6)$$

объёмная плотность полной энергии плазмы и поток полной энергии, а выражения для объёмной плотности внутренней энергии и плотности  $A$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\lambda_+ \varepsilon_+ + \lambda_- \varepsilon_-}{\lambda}, \\ A &= \lambda_+ \lambda_- \rho^{-1} \langle \mathbf{U}, \mathbf{j} \rangle + \frac{\lambda_+ \lambda_- (\lambda_- - \lambda_+) j^2}{2\rho^2} + \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\lambda} (\varepsilon_+ - \varepsilon_-) + \frac{\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-}{\rho}. \end{aligned}$$

В дальнейшем предполагается, что электроны и ионы являются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты  $\gamma > 1$ . Тогда соотношения (3) конкретизируются:

$$p_\pm = \frac{k\rho_\pm T_\pm}{m_\pm}, \quad \varepsilon_\pm = \frac{kT_\pm}{(\gamma - 1)m_\pm}, \quad S_\pm = \frac{k}{(\gamma - 1)m_\pm} \ln \frac{T_\pm}{\rho_\pm^{\gamma-1}} + \text{const}, \quad (7)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана. В этом случае энтропийные уравнения (1.в) удобнее записать относительно давлений компонент  $p_\pm$ :

$$\frac{\partial p_\pm}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p_\pm + \gamma p_\pm \operatorname{div} \mathbf{U} \pm \lambda_\mp \rho^{\gamma-1} \mathbf{j} \cdot \nabla \left( \frac{p_\pm}{\rho^\gamma} \right) = (\gamma - 1) \frac{m_\mp j^2}{m_\Sigma \sigma}. \quad (1.в')$$

Заметим, что в случае идеальных газов формальный переход к МГД в системе (1–3) состоит в выбрасывании всех членов уравнений, содержащих  $\rho$  в знаменателе, при этом вместо (1.в) надо пользоваться уравнениями (1.в').

Выпишем систему ДЖЭМГД в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla, \\
\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} &= -\frac{\nabla p_\Sigma}{M} + \varkappa^2 [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] + \varkappa^2 \xi^2 \operatorname{Div} \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\rho}, \\
\frac{dp_\pm}{dt} + \gamma p_\pm \operatorname{div} \mathbf{U} \pm \left( \frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm} \right)^{1/2} \varkappa \xi \rho^{\gamma-1} \operatorname{div} \left( \mathbf{j} \frac{p_\pm}{\rho^\gamma} \right) &= \nu_m \varkappa^2 M (\gamma - 1) \frac{m_\mp}{m_\Sigma} j^2, \\
\mathbf{E} + \xi^2 \rho^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \zeta \nu_m \mathbf{j} - \zeta [\mathbf{U} \times \mathbf{H}] + \zeta \rho^{-1} \operatorname{Div} \mathbf{W}, \\
\zeta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H},
\end{aligned} \tag{8}$$

где безразмерные выражения тензоров имеют вид:

$$\mathbf{W} = \Lambda \varkappa \xi [\Pi^{(p)} + \xi^2 \Pi^{(c)}] + \xi \varkappa^{-1} M^{-1} \left[ \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{1/2} p_+ - \left( \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^{1/2} p_- \right] \mathbf{E}_3 + \xi^2 (\mathbf{U} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{U}),$$

$$\Pi^{(p)} = \frac{H^2}{2} \mathbf{E}_3 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}, \quad \Pi^{(c)} = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\rho}, \quad \Lambda = \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{1/2} - \left( \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^{1/2}, \quad \lambda_\pm = \frac{m_\pm}{e_\pm}.$$

Числа подобия  $\xi, \zeta, \varkappa, M, \nu_m$  вычисляются по формулам:

$$\xi = \frac{cm_-^{1/2}}{2\pi^{1/2} e [n]^{1/2} [L] Z^{1/2}}, \quad \zeta = \frac{[U][H]}{c[E]}, \quad \varkappa = \frac{v_A}{[U]}, \quad M = \frac{[U]^2 [\rho]}{[p]}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi \sigma [L][U]},$$

где квадратные скобки означают характерный масштаб соответствующей величины ( $[L]$ —длины,  $[\rho]$ —плотности,  $[n]$ —концентрации числа частиц и т.д.),  $e = e_-$ ,  $Z = e_+/e_-$ ,  $v_A = [H](4\pi[\rho])^{-1/2}$  — характерная альфвеновская скорость,  $M$  — число Маха,  $\nu_m$  — безразмерная магнитная вязкость. При этом приняты следующие соотношения:

$$[\rho] = m_+[n], \quad [t] = \frac{[L]}{[U]}, \quad [j] = \frac{c[H]}{4\pi[L]}, \quad [T] = \frac{p}{k[n]}, \quad [S] = \frac{k}{m_+}, \tag{9}$$

где  $k$  — постоянная Больцмана. Если отказаться от каких-то соотношений (9), то в системе (8) появятся новые числа подобия. Часто, напротив, вводят дополнительные соотношения между характерными масштабами:  $[E] = [U][H]/c$ ,  $[U] = v_A$ . Тогда  $\zeta = 1$ ,  $\varkappa = 1$ ,  $M = 2/\beta$ , где  $\beta = 8\pi[p]/[H]^2$  — параметр удержания. В частности, решения идеальной ( $\sigma = +\infty$ ) ДЖЭМГД зависят только от двух безразмерных параметров  $\xi$  и  $\beta$ .

## §2. Уравнения ДЖЭМГД в цилиндрических и лагранжевых координатах

Рассмотрим осесимметричные течения плазмы, для которых  $U_z = U_\varphi = 0$ ,  $H_r = H_z = 0$ ,  $E_\varphi = 0$ . Обозначая  $U = U_r$ ,  $H = H_\varphi$ ,  $E = E_z$ , в случае цилиндрической симметрии приведём ДЖЭМГД - уравнения к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho U) &= 0, & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{H}{4\pi \rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r H) &= 0, \\ \frac{\partial p_\pm}{\partial t} + U \frac{\partial p_\pm}{\partial r} + \frac{\gamma p_\pm}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U) &= (\gamma - 1) \frac{m_\mp}{m_\Sigma} \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} \left[ r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (r H) \right]^2, \\ c^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial r} &= 0, \\ E - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} \right) &= \frac{c}{4\pi r \sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r H) - \frac{U H}{c} + \frac{c \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left( U \frac{\partial}{\partial r} (r H) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $p = p_\Sigma = p_+ + p_-$ ,  $m_\Sigma = m_+ + m_-$ ,  $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$ ,  $\sigma = \sigma_\perp$  – поперечная проводимость плазмы, вычисляема по формуле [8,9]

$$\sigma = \frac{e_+ e_-}{\eta}, \quad \eta = \eta_\perp = 0,5129 \frac{m_e}{\tau_e n}, \quad \tau_e = \frac{3m_e^{1/2} (kT_e)^{3/2}}{4(2\pi)^{1/2} \Lambda e^4 Z^2 n}, \quad (11)$$

где  $m_e = m_-$ ,  $e = e_-$ ,  $Z = e_+ / e_-$ ,  $T_e = T_-$  – электронная температура в К,  $n$  – концентрация числа частиц ионов,  $\Lambda$  – кулоновский логарифм ( $\Lambda = 15$ ). По решению системы (10) остальные параметры течения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} v_r^\pm &= U, \quad v_\varphi^\pm = 0, \quad v_z^\pm = \pm \frac{\lambda_\mp}{\rho} \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (r H), \\ \rho_\pm &= \frac{\lambda_\pm}{\lambda} \rho, \quad \lambda = \lambda_+ + \lambda_-, \quad j_r = j_\varphi = 0, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (r H), \\ E_r &= -\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{4\pi \rho r} H \frac{\partial}{\partial r} (r H) + \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-). \end{aligned} \quad (12)$$

Наконец, на решении (10) закон сохранения полной энергии (5) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho U^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{\lambda_+ \lambda_- j_z^2}{2\rho} \right] + \\ + r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r U \left[ \frac{\rho U^2}{2} + \frac{p\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\lambda_+ \lambda_- j_z^2}{2\rho} \right] - \frac{c r}{4\pi} E H \right\} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Численное нахождение решений системы (10) удобно проводить в массовых лагранжевых переменных  $(\tau, m)$ , где

$$\tau = t, \quad m(t, r) = \int_0^r r \rho(t, r) dr.$$

Связь между операторами дифференцирования в лагранжевых и элеровых координатах легко устанавливается с учётом соотношений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial t} &= 1, \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = -r\rho U, \quad \frac{\partial m}{\partial r} = r\rho, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} &= 1, \quad \frac{\partial t}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \tau} = U, \quad \frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{r\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial m}{\partial r} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tau} = r\rho \frac{\partial}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} - r\rho U \frac{\partial}{\partial m}.\end{aligned}$$

Используя эти формулы, перепишем систему (10) в лагранжевых переменных  $(\tau, m)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial m} (rU), \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + r \frac{\partial}{\partial m} \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= -\frac{H^2}{4\pi r\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{p_{\pm}}{\rho} \right) + (\gamma - 1)p_{\pm} \frac{\partial}{\partial m} (rU) &= (\gamma - 1) \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{c^2 \rho}{16\pi^2 \sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial m} (rH) \right]^2, \\ c^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{H}{r\rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial m} \left( E + \frac{HU}{c} \right), \\ E - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi} \frac{\partial}{\partial m} \left( r^2 \rho \frac{\partial E}{\partial m} \right) &= \frac{c\rho}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial m} (rH) - \frac{UH}{c} + \frac{c\lambda_+ \lambda_-}{4\pi} \frac{\partial}{\partial m} \left( r\rho U \frac{\partial}{\partial m} (rH) \right), \\ \frac{\partial r}{\partial \tau} &= U.\end{aligned}\tag{14}$$

Выражения для остальных параметров течения имеют вид:

$$\begin{aligned}v_r^{\pm} &= U, \quad v_{\varphi}^{\pm} = 0, \quad v_z^{\pm} = \pm \frac{\lambda_{\mp} c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial m} (rH), \quad \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda} \rho, \\ E_r &= -\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{4\pi} H \frac{\partial}{\partial m} (rH) + r \frac{\partial}{\partial m} (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-), \\ j_r &= j_{\varphi} = 0, \quad j_z = \frac{c\rho}{4\pi} \frac{\partial}{\partial m} (rH).\end{aligned}\tag{15}$$

Закон сохранения полной энергии (13) в лагранжевых переменных запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{U^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{H^2}{8\pi\rho} + \frac{\lambda_+ \lambda_-}{2} \left( \frac{j_z}{\rho} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial m} \left[ rU \left( p - \frac{H^2}{8\pi} \right) - \frac{cr}{4\pi} EH \right] = 0.$$

Уравнения для электромагнитного поля в (14) упрощаются, если перейти к электрическому полю  $E^* = E + UH/c$  в системе отсчёта, жёстко связанной с движущимся веществом:

$$\begin{aligned}c^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{H}{r\rho} \right) &= \frac{\partial E^*}{\partial m}, \\ E^* - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi} \frac{\partial}{\partial m} \left( r^2 \rho \frac{\partial E^*}{\partial m} \right) &= \frac{c\rho}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial m} (rH) - \frac{c\lambda_+ \lambda_-}{4\pi} \frac{\partial}{\partial m} \left( r^3 \rho H \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{U}{r} \right) \right).\end{aligned}\tag{16}$$



### §3. Граничные условия в задаче о динамике плазменного шнура

Рассмотрим динамику цилиндрически симметричного ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ,  $\partial/\partial z = 0$ ) плазменного шнура радиуса  $R(t)$ , подчиняющуюся уравнениям ДЖЭМГД (10). Вне шнура предполагается вакуум. Пусть  $I(t)$  – полный ток, протекающий через шнур в момент времени  $t$ . Функция  $I(t)$  либо задаётся, либо получается из совместного с системой (10) решения электротехнического уравнения внешней цепи, выводимого ниже (§4). Граничные условия для параметров плазмы шнура имеют вид:

- на оси  $r = 0$ :  $U = 0$ ,  $H = 0$ ,  $\frac{\partial E}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial p_{\pm}}{\partial r} = 0$ ,
- на подвижной границе  $r = R(t)$ :  $p = 0$ ,  $H = \frac{2I(t)}{cR(t)}$ ,
- кинематическое условие для скорости границы:  $\dot{R}(t) = U(t, R(t))$ ,

где точка здесь и ниже означает дифференцирование по  $t$ .

В системе (10) электрическое поле  $E$  в каждый момент времени  $t$  ищется из решения дифференциального уравнения 2-го порядка на отрезке  $0 \leq r \leq R(t)$ . Поставим для него краевую задачу. Выведем условие на правом конце  $r = R(t)$ . Из условия на подвижной границе  $r = R(t)$  для магнитного поля  $H(t, R(t)) = \frac{2I(t)}{cR(t)}$  имеем:

$$\frac{d}{dt}H(t, R(t)) = \frac{2\dot{I}(t)}{cR(t)} - \frac{2I(t)}{cR^2(t)}\dot{R}(t) = \frac{2\dot{I}(t)}{cR(t)} - \frac{2I(t)}{cR^2(t)}U|_{r=R(t)},$$

где использовано кинематическое условие для скорости границы. Используя его ещё раз, а также четвёртое уравнение системы (10), получим, с другой стороны:

$$\frac{d}{dt}H(t, R(t)) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial r}\dot{R}(t) = \left( c\frac{\partial E}{\partial r} + U\frac{\partial H}{\partial r} \right) \Big|_{r=R(t)}.$$

Отсюда получаются следующие краевые условия для нахождения поля  $E(t, r)$ ,  $0 \leq r \leq R(t)$ :

$$\frac{\partial E}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r} \Big|_{r=R(t)} = \frac{2\dot{I}(t)}{c^2R(t)} - \frac{U}{c} \Big|_{r=R(t)} \left[ \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=R(t)} + \frac{2I(t)}{cR^2(t)} \right]. \quad (17)$$

В лагранжевых переменных решается система (14), причём на постоянном отрезке  $0 \leq m \leq M_*$ , где

$$M_* = \int_0^{R(t)} r \rho(t, r) dr$$

не зависит от  $t$  ( $2\pi M_*$  – это масса плазмы шнура, приходящаяся на единицу длины). Граничные условия для пятого уравнения системы (14) получаются из (17) переходом к лагранжевым переменным:

$$\begin{aligned} m = 0 : \quad E(0) - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{2\pi} \frac{\partial E}{\partial m}(0) &= \frac{c}{2\pi \sigma(0)} \frac{H}{r} \Big|_{m=0} + \frac{c \lambda_+ \lambda_-}{\pi \rho(0)} \frac{HU}{r^2} \Big|_{m=0}, \\ m = M_* : \quad \frac{\partial E}{\partial m} \Big|_{m=M_*} &= \frac{2\dot{I}(\tau)}{c^2 r^2 \rho} \Big|_{m=M_*} - \frac{U}{c} \left[ \frac{\partial H}{\partial m} + \frac{2I(\tau)}{c r^3 \rho} \right] \Big|_{m=M_*}, \end{aligned} \quad (18)$$

при этом радиус шнура равен  $R(\tau) = r(\tau, M_*)$ . Поясним, как в (18) получается граничное условие на левом конце  $m = 0$ . Подставим в пятое уравнение системы (10) ряды для  $E = E_0(t) + E_2(t)r^2 + E_4(t)r^4 + \dots$ ,  $H = H_1(t)r + H_3(t)r^3 + \dots$ ,  $U = U_1(t)r + U_3(t)r^3 + \dots$ . Выполняя действия над рядами, получим, собирая нулевые коэффициенты разложений по  $r$ , равенство:

$$E_0 - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{\pi \rho_0} E_2 = \frac{c}{2\pi \sigma_0} H_1 + \frac{c \lambda_+ \lambda_-}{\pi \rho_0} H_1 U_1, \quad (*)$$

где учтена чётность по  $r$  функций  $\rho$  и  $\sigma$  (см. (11)), а  $\rho_0$ ,  $\sigma_0$  – нулевые коэффициенты разложений этих функций в степенные ряды по  $r$ . Принимая во внимание равенства  $E_0 = E(0)$ ,  $\rho_0 = \rho(0)$ ,  $\sigma_0 = \sigma(0)$ ,

$$H_1 = \frac{H}{r} \Big|_{m=0}, \quad U_1 = \frac{U}{r} \Big|_{m=0},$$

$$2E_2 = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \rho(0) \left( \frac{1}{r \rho} \frac{\partial E}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \rho(0) \frac{\partial E}{\partial m} \Big|_{m=0}$$

и подставляя полученные выражения для коэффициентов разложения в (\*), приходим к граничному условию при  $m = 0$  в (18). Наконец, переходя в (18) к полю  $E^* = E + HU/c$  в системе отсчёта, жёстко связанной с движущимся веществом, получим:

$$\begin{aligned} m = 0 : \quad E^*(0) - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{2\pi} \frac{\partial E^*}{\partial m}(0) &= \frac{c}{2\pi \sigma(0)} \frac{H}{r} \Big|_{m=0}, \\ m = M_* : \quad \frac{\partial E^*}{\partial m} \Big|_{m=M_*} &= \frac{2\dot{I}(\tau)}{c^2 r^2 \rho} \Big|_{m=M_*} + \frac{2I(\tau)}{c^2 r} \left( \frac{\partial U}{\partial m} - \frac{U}{r^2 \rho} \right) \Big|_{m=M_*}. \end{aligned} \quad (18')$$

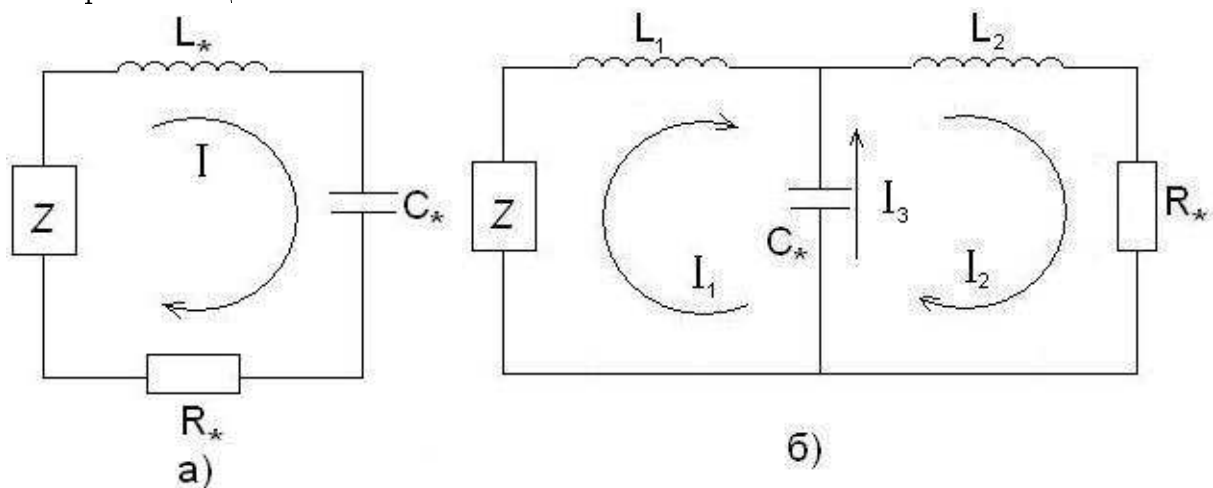
Второе условие в (18') можно записать в ещё более компактном виде, если учесть, что  $r^{-1} \left( \frac{\partial U}{\partial m} - \frac{U}{r^2 \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{U}{r} \right)$ .

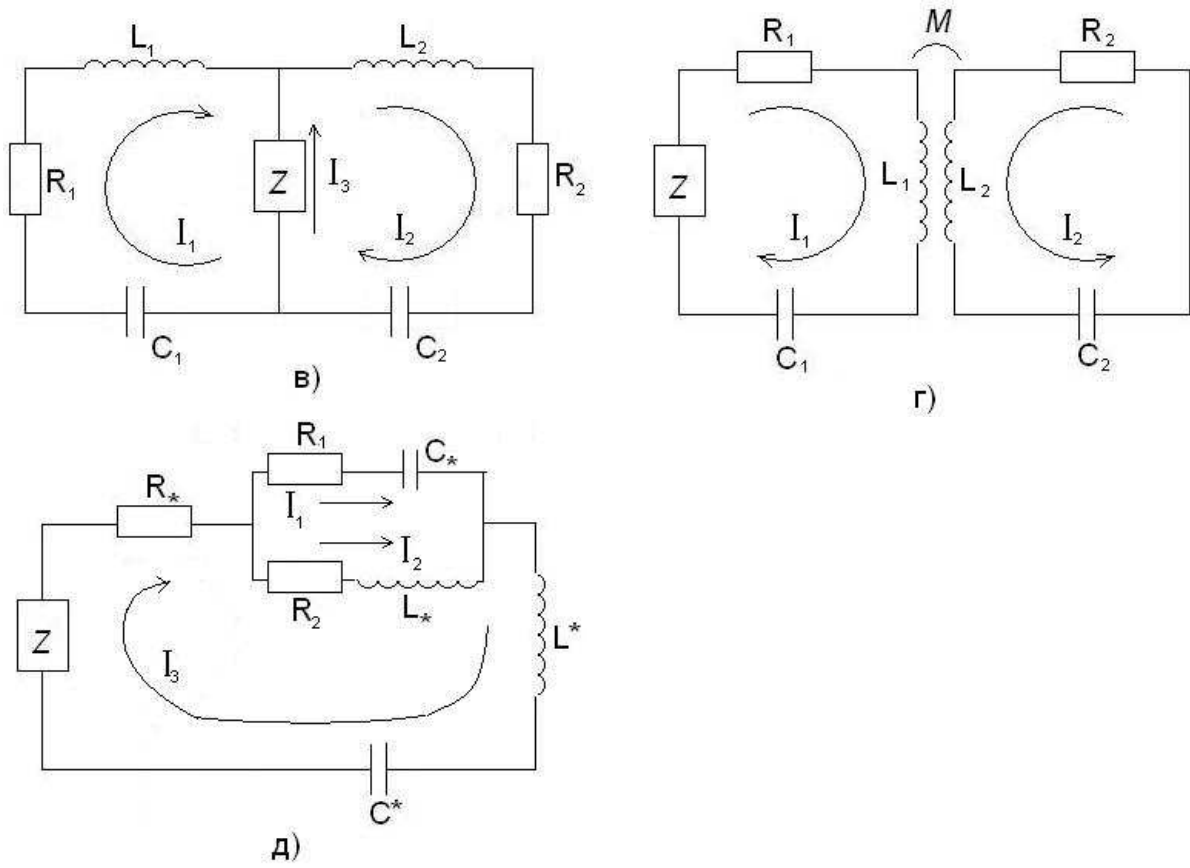
Отметим, что любая нечётная по  $r$  функция (скажем,  $r$ ,  $U$ ,  $H$ ) при переходе к лагранжевой координате  $m$  теряет аналитичность по  $m$  в нуле, но разлагается в ряд по *нечётным* степеням  $m^{1/2}$ . С другой стороны, чётные по  $r$  функции ( $E$ ,  $\rho$ ,  $p_{\pm}$  и т.д.) при переходе к лагранжевым координатам разлагаются в ряд по степеням  $m$ , причём в разложении присутствуют все степени  $m$ . Это обстоятельство учтено в граничном условии (18) на левом конце  $m = 0$ , и его необходимо учитывать при аппроксимации производных в нуле на лагранжевой сетке.

Наконец, отметим, что уравнение 2-го порядка для  $E$  (как в лагранжевых, так и в эйлеровых координатах) имеет особенность в нуле, поэтому интересующие нас *ограниченные в нуле* решения этого уравнения образуют одномерное пространство решений и, следовательно, требуют для своего нахождения только одного граничного условия. Таким определяющим граничным условием является условие на правом конце в (17) и (18). Роль условия на левом конце при этом чисто техническая, призванная гарантировать ограниченность решения в нуле и определяемая потребностями счёта.

#### §4. Электротехническое уравнение внешней цепи

Полный ток  $I(t)$ , протекающий через плазменный шнур, замыкается на внешнюю цепь с локализованным в ней начальным электрическим зарядом, благодаря которому происходит разряд в газовой камере и образуется плазменный шнур. Динамика разряда зависит от конфигурации и параметров внешней цепи. Исследование этой зависимости и является целью работы. Рассмотрим следующие конкретные цепи:





Через  $Z$  символически обозначается разрядная камера  $Z$ -пинча, которая предполагается цилиндром радиуса  $R_{ex}$  и высоты  $z_0$ , к торцам которого подводится напряжение. Боковая стенка камеры является диэлектриком, торцы-металлические. Технические подробности см. в [1,2,3]. Разряд предполагается цилиндрически симметричным, а процессом преобразования полного тока шнура на торце в линейный ток внешней цепи мы пренебрегаем. Для составления уравнений цепи используются три принципа:

- 1) законы Кирхгофа [10], записанные для контуров, не содержащих разрядную камеру  $Z$ ,
- 2) закон сохранения энергии (5) из §1,
- 3) закон Фарадея для подвижного контура [9]

$$\oint_{\Gamma(t)} \mathbf{E}^* d\mathbf{l} = -c^{-1} \frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S \langle \mathbf{H}, \mathbf{n} \rangle d\sigma,$$

где  $\Gamma(t)$  – подвижный контур,  $\Phi$  – поток магнитного поля через двумерную поверхность  $S$ , для которой  $\partial S = \Gamma(t)$ ,  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$  – электрическое поле в системе отсчёта движущегося контура,  $\mathbf{v}$  – поле скоростей точек контура  $\Gamma(t)$ ; при этом направление единичной нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  согласовано с направлением обхода контура

$\Gamma(t)$ .

Как обычно, делается предположение об идеальности всех элементов цепи, которое, в частности, означает, что магнитное поле вне каждого элемента (в том числе и вне разрядной камеры  $Z$ ) пренебрежимо мало. Это позволяет ввести понятие разности потенциалов между концами любого элемента, однако, закон Кирхгофа для контура, содержащего разрядную камеру, ничего не даёт, поскольку неизвестна связь полного тока через разрядную камеру с напряжением на её торцах. Для такого контура надо пользоваться либо законом сохранения энергии, либо законом Фарадея для подвижного контура.

В общем виде закон сохранения энергии цепи без взаимной индукции её частей можно записать следующим образом:

$$-\frac{d}{dt} \left\{ \int_{V_p} \mathcal{E} dx + \int_{V_0 \setminus V_p} \frac{H^2}{8\pi} + \sum_k \frac{L_k I_k^2}{2c^2} + \sum_n \frac{Q_n^2}{2C_n} \right\} = \sum_s R_s I_s^2, \quad (19)$$

где  $V_p$  – область камеры, занятая плазмой,  $V_0$  – вся область камеры, а суммы берутся по всем индуктивностям  $L_k$ , всем ёмкостям  $C_n$  и всем сопротивлениям  $R_s$  цепи, при этом  $I_k = I_k(t)$ ,  $Q_k = Q_k(t)$  – токи цепи и заряды на обкладках конденсаторов в момент времени  $t$ , а  $\mathcal{E}$  вычисляется по (6).

Если учесть взаимную индукцию участков цепи, то закон сохранения энергии цепи модифицируется так:

$$-\frac{d}{dt} \left\{ \int_{V_p} \mathcal{E} dx + \int_{V_0 \setminus V_p} \frac{H^2}{8\pi} + \sum_{k,l} \frac{L_{kl} I_k I_l}{2c^2} + \sum_n \frac{Q_n^2}{2C_n} \right\} = \sum_s R_s I_s^2, \quad (20)$$

где  $L_{kl}$  – коэффициенты само (при  $k = l$ ) и взаимной (при  $k \neq l$ ) индукции. Соотношение (20) показывает, что *уменьшение в единицу времени суммарной энергии плазмы шнура и электромагнитного поля в части камеры, не занятой плазмой, ёмкостях и индуктивностях цепи равно джоулеву теплу, выделяющемуся на сопротивлениях цепи*. При этом элементы цепи предполагаются неподвижными.

В рассматриваемом цилиндрически симметричном случае:

$$V_p = \{0 \leq z \leq z_0, 0 \leq r \leq R(t)\}, \quad V_0 = \{0 \leq z \leq z_0, 0 \leq r \leq R_{\text{ex}}\}.$$

С учётом выражения (13) для закона сохранения энергии в ДЖЭМГД-плазме и выражений для электрического и магнитного полей в вакууме:

$$H_\varphi(t, r) = \frac{2I(t)}{cr}, \quad E_z(t, r) = \frac{2\dot{I}(t)}{c^2} \ln \frac{r}{R(t)} + E_z(t), \quad R(t) \leq r \leq R_{\text{ex}},$$

где  $E_z(t)$  – электромагнитное поле на подвижной границе шнура, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \int_{V_p} \mathcal{E} dx + \int_{V_0 \setminus V_p} \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 2\pi z_0 \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^{R(t)} r \mathcal{E} dr + (8\pi)^{-1} \int_{R(t)}^{R_{\text{ex}}} r H_\varphi^2 dr \right\} = \\
& = 2\pi z_0 \left\{ R\dot{R} \left( \mathcal{E} - \frac{H^2}{8\pi} \right) \Big|_{r=R(t)} + \int_0^{R(t)} r \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dr + (8\pi)^{-1} \int_{R(t)}^{R_{\text{ex}}} r \frac{\partial H_\varphi^2}{\partial t} dr \right\} = \\
& = 2\pi z_0 \left\{ R\dot{R} \left( \mathcal{E} - \frac{H^2}{8\pi} \right) \Big|_{r=R(t)} - \int_0^{R(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ rU \left[ \frac{\rho U^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{\lambda_+ \lambda_- j_z^2}{2\rho} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{cr}{4\pi} E_z H_\varphi \right\} dr + \frac{I\dot{I}}{c^2\pi} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} \right\} = z_0 I E_z(t) + 2z_0 \frac{I\dot{I}}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} = z_0 I(t) E_z|_{r=R_{\text{ex}}}. \quad (21)
\end{aligned}$$

В этой выкладке были использованы кинематическое условие для скорости границы (§3) и граничное условие для давления  $p|_{R(t)} = 0$ .

Поскольку полный ток в шнуре  $I(t)$  это один из токов цепи, то преобразование (21) сводит закон сохранения энергии цепи (20) к обыкновенному дифференциальному уравнению, связывающему токи цепи, куда входят функции  $R(t)$ ,  $E_z(t)$  (радиус шнура и электрическое поле на подвижной границе шнура), вычисляемые по уравнениям сплошной среды (10) или (14). С другой стороны, ток  $I(t)$  входит в граничные условия (17), (18) для систем (10) и (14). В итоге возникает самосогласование уравнений динамики плазмы шнура и уравнений для токов внешней цепи.

Приведём вывод уравнений цепи для конфигураций (в) и (г). Выберем направление токов как указано на рисунке.

В случае (в) закон Кирхгофа, применённый к внешней контуре  $R_1 - L_1 - L_2 - R_2 - C_2 - C_1 - R_1$  даёт

$$\frac{L_1}{c^2} \dot{I}_1 + \frac{L_2}{c^2} \dot{I}_2 + I_2 R_2 + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_1} + R_1 I_1 = 0, \quad (22)$$

где  $\dot{Q}_1 = I_1$ ,  $\dot{Q}_2 = I_2$ . Кроме того,

$$I_2 = I_1 + I_3. \quad (23)$$

Закон сохранения энергии (19) с учётом вычисления (21) приводит к равенству:

$$2z_0 \frac{I_3 \dot{I}_3}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + z_0 I_3 E_z(t) + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{L_1 I_1^2}{2c^2} + \frac{L_2 I_2^2}{2c^2} + \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} \right\} + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получим:

$$L_1 \frac{I_1 \dot{I}_1}{c^2} + L_2 \frac{I_2 \dot{I}_2}{c^2} + \frac{Q_1 I_1}{C_1} + \frac{Q_2 I_2}{C_2} + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + 2z_0 \frac{I_3 \dot{I}_3}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + z_0 I_3 E_z(t) = 0. \quad (24)$$

С учётом (22) и (23) слагаемые (24), не содержащие  $I_3$ , могут быть переписаны в виде:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{I_1 \dot{I}_1}{c^2} + L_2 \frac{I_2 \dot{I}_2}{c^2} + \frac{Q_1 I_1}{C_1} + \frac{Q_2 I_2}{C_2} + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 &= I_1 \left\{ L_1 \frac{\dot{I}_1}{c^2} + L_2 \frac{\dot{I}_2}{c^2} + \right. \\ &\left. + \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + R_1 I_1 + R_2 I_2 \right\} + \frac{I_3 \dot{I}_2}{c^2} L_2 + \frac{Q_2 I_3}{C_2} + R_2 I_3 = I_3 \left\{ L_2 \frac{\dot{I}_2}{c^2} + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 I_2 \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (24) и сокращая на  $I_3$ , получим окончательное выражение:

$$\dot{I}_3 \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + L_2 \frac{\dot{I}_2}{c^2} + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 I_2 + z_0 E_z(t) = 0.$$

Откуда получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения токов и зарядов в цепи (в):

$$(в) \quad \begin{cases} \dot{I}_3 \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + L_2 \frac{\dot{I}_2}{c^2} + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 I_2 + z_0 E_z(t) = 0 \\ \frac{L_1 + L_2}{c^2} \dot{I}_2 - \frac{L_1}{c^2} \dot{I}_3 + \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + (R_1 + R_2) I_2 - R_1 I_3 = 0 \\ \dot{Q}_1 = I_2 - I_3, \quad \dot{Q}_2 = I_2 \end{cases}$$

Из  $R(t) < R_{\text{ex}}$  следует, что эта система уравнений разрешается в явном виде относительно  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{I}_3$ ,  $\dot{Q}_1$ ,  $\dot{Q}_2$ . Функции  $R(t)$ ,  $E_z(t)$  определяются из решения уравнений сплошной среды (10) или (14). Нетрудно получить ту же систему (в), опираясь не на закон сохранения энергии, а на закон Фарадея.

В случае (г) необходимо учесть коэффициент взаимной индукции  $M$  индуктивностей  $L_1$  и  $L_2$ . Тогда закон Кирхгофа для контура тока  $I_2$  даёт:

$$\frac{L_2}{c^2} \dot{I}_2 + \frac{M}{c^2} \dot{I}_1 + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 I_2 = 0, \quad (25)$$

где  $\dot{Q}_2 = I_2$ . Закон сохранения (20) с учётом вычислений (21) и соотношений  $L_{11} = L_1$ ,  $L_{22} = L_2$ ,  $L_{12} = L_{21} = M$  даёт:

$$\frac{2z_0}{c^2} I_1 \dot{I}_1 \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + z_0 I_1 E_z(t) + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{L_1 I_1^2}{2c^2} + \frac{L_2 I_2^2}{2c^2} + \frac{M I_1 I_2}{c^2} + \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} \right\} + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 0, \quad (26)$$

где  $\dot{Q}_1 = I_1$ . Выполнив дифференцирования, получим:

$$I_1 \dot{I}_1 \left\{ \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + \frac{L_1}{c^2} \right\} + z_0 I_1 E_z(t) + \frac{L_2 I_2 \dot{I}_2}{c^2} + \frac{M \dot{I}_1 I_2}{c^2} + \frac{M \dot{I}_1 I_2}{c^2} + \frac{Q_1 I_1}{C_1} + \frac{Q_2 I_2}{C_2} + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 0. \quad (27)$$

С учётом (25) все слагаемые (27), куда входит непродифференцированный ток  $I_2$ , в сумме равны нулю:

$$\frac{L_2 I_2 \dot{I}_2}{c^2} + \frac{M \dot{I}_1 I_2}{c^2} + \frac{Q_2 I_2}{C_2} + R_2 I_2^2 = I_2 \left\{ \frac{L_2 \dot{I}_2}{c^2} + \frac{M \dot{I}_1}{c^2} + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 I_2 \right\} = 0$$

Поэтому равенство (27) можно сократить на  $I_1$ , откуда получаем:

$$\dot{I}_1 \left\{ \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + \frac{L_1}{c^2} \right\} + \frac{M \dot{I}_2}{c^2} + \frac{Q_1}{C_1} + R_1 I_1 + z_0 E_z(t) = 0.$$

Окончательно получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений для цепи (г):

$$(г) \quad \begin{cases} \dot{I}_1 \left\{ \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + \frac{L_1}{c^2} \right\} + \frac{M \dot{I}_2}{c^2} + \frac{Q_1}{C_1} + R_1 I_1 + z_0 E_z(t) = 0 \\ \frac{M \dot{I}_1}{c^2} + \frac{L_2 \dot{I}_2}{c^2} + \frac{Q_2}{C_2} + R_2 I_2 = 0 \\ \dot{Q}_1 = I_1, \quad \dot{Q}_2 = I_2 \end{cases}$$

Учитывая неравенства  $M^2 \leq L_1 L_2$ ,  $R(t) < R_{\text{ex}}$ , полученная система уравнений легко разрешается в явном виде относительно  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{Q}_1$ ,  $\dot{Q}_2$ .

Аналогично выводятся и уравнение для остальных цепей. Приведём окончательные результаты:

$$(а) \quad \begin{cases} \dot{I} \left\{ \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + \frac{L_*}{c^2} \right\} + \frac{Q}{C_*} + R_* I + z_0 E_z(t) = 0 \\ \dot{Q} = I \end{cases}$$

$$(б) \quad \begin{cases} \dot{I}_1 \left\{ \frac{L_1}{c^2} + \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} \right\} - \frac{Q}{C_*} + z_0 E_z(t) = 0 \\ \dot{I}_2 \frac{L_2}{c^2} + I_2 R_* + \frac{Q}{C_*} = 0 \\ \dot{Q} = I_2 - I_1 \end{cases}$$

$$(д) \quad \begin{cases} \dot{I}_3 \left\{ \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} + \frac{L_*}{c^2} \right\} + \frac{Q}{C_*} + \frac{q}{C_*} + (R_1 + R_*) I_3 - R_1 I_2 + z_0 E_z(t) = 0 \\ \frac{L_*}{c^2} \dot{I}_2 + (R_1 + R_2) I_2 - R_1 I_3 - \frac{Q}{C_*} = 0 \\ \dot{Q} = I_3 - I_2, \quad \dot{q} = I_3 \end{cases}$$



## §5. Гомогенные течения плазменного шнура

Рассмотрим цилиндрически симметричные решения ДЖЭМГД - уравнений для идеальной ( $\sigma = +\infty$ ) плазмы, для которых  $U_r(t, r) = U_0(t)r$ , т.е. радиальная скорость в каждый момент времени линейно зависит от радиуса. Такие течения называются *однородными (гомогенными)*. Поскольку радиальная скорость  $U_r$  – нечётная функция радиуса, то вблизи оси  $z$  любое цилиндрически симметричное течение плазмы приближённо является гомогенным.

В [6] показано, что ДЖЭМГД - уравнения (10) допускают следующие гомогенные решения:

$$\begin{aligned} \rho(t, r) &= \frac{f(y)}{w^2(t)}, \quad p(t, r) = \frac{g(y)}{w^{2\gamma}(t)}, \quad U_r(t, r) = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}r, \quad H_\varphi(t, r) = \frac{2yI(t)}{cR_0^2w(t)} \left( \frac{R_0^2 + q^2}{y^2 + q^2} \right)^{1/2}, \\ E_z(t, r) &= \frac{2(R_0^2 + q^2)^{1/2}}{c^2R_0^2} \left\{ \dot{I}(t)(y^2 + q^2)^{1/2} - \frac{y^2}{(y^2 + q^2)^{1/2}} \frac{I(t)\dot{w}(t)}{w(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $I(t) \in C^1[0, +\infty)$  – произвольная функция,  $y = r/w(t)$ ,  $w(t)$  – решение задачи:

$$\ddot{w} - \frac{K}{w^{2\gamma-1}} + \frac{\chi I^2(t)}{w} = 0, \quad w(0) = 1, \quad \chi = \frac{4(R_0^2 + q^2)}{\lambda_+ \lambda_- c^4 R_0^4}, \quad (29)$$

а функции  $f(y)$ ,  $g(y)$ , определяющие пространственные профили плотности и давления, имеют вид:

$$f(y) = a^{-2} \frac{y^2 + 2q^2}{(y^2 + q^2)^2}, \quad g(y) = \frac{K}{2a^2} \left\{ \ln \frac{R_0^2 + q^2}{y^2 + q^2} - \left( \frac{R_0^2}{q^2} + 1 \right)^{-1} + \left( \frac{y^2}{q^2} + 1 \right)^{-1} \right\}, \quad (30)$$

$a^2 = 4\pi(c^2\lambda_+\lambda_-)^{-1}$ . Здесь  $K > 0$ ,  $q > 0$  – произвольные константы,  $R_0$  – радиус шнура в момент времени  $t = 0$ ,  $w(t) = R(t)/R_0$  – безразмерный радиус шнура в момент времени  $t$ ,  $I(t)$  – полный ток в шнуре. Можно прямой подстановкой убедиться, что решение (30-28) удовлетворяет системе (10) с  $\sigma = +\infty$ . При этом давления компонент  $p_\pm$  восстанавливаются по формуле  $p_\pm = \alpha_\pm p$ , где  $\alpha_+ + \alpha_- = 1$ ,  $\alpha_\pm \geq 0$  – любые. Легко проверить, что для решения (28-30) выполнены все граничные условия из §3 для давления, магнитного и электрического полей на подвижной границе и на оси  $r = 0$ .

Для гомогенного решения в уравнениях внешней цепи из §4 функции  $E_z(t)$ ,  $R(t)$  ищутся не из решения ДЖЭМГД - уравнения (10) (оно уже решено посредством формул (28)÷(30)), а могут быть указаны в простом виде. Из (28):

$$E_z(t) = E_z(t, R(t)) = \frac{2}{c^2} \left( 1 + \frac{q^2}{R_0^2} \right) \dot{I}(t) - \frac{2I}{c^2} \frac{\dot{w}}{w},$$

а  $w(t) = R(t)/R_0$  ищется из решения ОДУ (29). Поэтому на гомогенных течениях динамика плазмы шнура и токов внешней цепи определяется из решения систем ОДУ. Так, для цепей (а)÷(д) из §4 эти системы в безразмерном виде выписываются следующим образом:

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{I} \{l_1 - \ln w\} + \eta_{01}Q + I \left\{ \eta_1 - \frac{\dot{w}}{w} \right\} = 0, \\ \dot{Q} = I, \\ \ddot{w} - \frac{K_*}{w^{2\gamma-1}} + \frac{\chi_* I^2(t)}{w} = 0, \quad w(0) = 1, \end{cases}$$

$$(б) \quad \begin{cases} \dot{I}_1 \{L_* - \ln w\} - \eta_0 Q - I_1 \frac{\dot{w}}{w} = 0, \\ L^* \dot{I}_2 + \eta_1 I_2 + \eta_0 Q = 0, \quad \dot{Q} = I_2 - I_1, \\ \ddot{w} - \frac{K_*}{w^{2\gamma-1}} + \frac{\chi_* I^2(t)}{w} = 0, \quad w(0) = 1. \end{cases}$$

$$(в) \quad \begin{cases} \dot{I}_3 \{a_0 - \ln w\} + L_2 \dot{I}_2 + \eta_{02}Q_2 + \eta_{12}I_2 - I_3 \frac{\dot{w}}{w} = 0, \\ (L_1 + L_2)\dot{I}_2 - L_1 \dot{I}_3 + \eta_{01}Q_1 + \eta_{02}Q_2 + (\eta_{11} + \eta_{12})I_2 - \eta_{11}I_3 = 0, \\ \dot{Q}_1 = I_2 - I_3, \quad \dot{Q}_2 = I_2, \\ \ddot{w} - \frac{K_*}{w^{2\gamma-1}} + \frac{\chi_* I^2(t)}{w} = 0, \quad w(0) = 1. \end{cases}$$

$$(г) \quad \begin{cases} \dot{I}_1 \{l_1 - \ln w\} + m_0 \dot{I}_2 + \eta_{01}Q_1 + \eta_1 I_1 - I_1 \frac{\dot{w}}{w} = 0, \\ m_0 \dot{I}_1 + l_2 \dot{I}_2 + \eta_{02}Q_2 + \eta_2 I_2 = 0, \quad \dot{Q}_1 = I_1, \quad \dot{Q}_2 = I_2, \\ \ddot{w} - \frac{K_*}{w^{2\gamma-1}} + \frac{\chi_* I^2(t)}{w} = 0, \quad w(0) = 1, \end{cases}$$

$$(д) \quad \begin{cases} \dot{I}_3 \{l^* - \ln w\} + \eta_* Q + \eta^* q + (\eta_1 + \eta_3)I_3 - \eta_1 I_2 - I_3 \frac{\dot{w}}{w} = 0, \\ l_* \dot{I}_2 + (\eta_1 + \eta_2)I_2 - \eta_1 I_3 - \eta_* Q = 0, \quad \dot{Q} = I_3 - I_2, \quad \dot{q} = I_3, \\ \ddot{w} - \frac{K_*}{w^{2\gamma-1}} + \frac{\chi_* I^2(t)}{w} = 0, \quad w(0) = 1, \end{cases}$$

где безразмерные параметры  $K_*$ ,  $\chi_*$ ,  $\eta_1$ ;  $L_*$ ,  $L^*$ ,  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ ;  $a_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\eta_{01}$ ,  $\eta_{02}$ ,  $\eta_{11}$ ,  $\eta_{12}$ ;  $m_0$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $\eta_{01}$ ,  $\eta_{02}$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ;  $l^*$ ,  $l_*$ ,  $\eta^*$ ,  $\eta_*$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  имеют тот же смысл, что и аналогичные параметры из §7.

## §6. Разностная схема для численного исследования одномерных ДЖЭМГД - уравнений

Рассмотрим цилиндрически симметричный случай (аналогично рассматриваются случаи плоской и сферической симметрии). Используя массовые лагранжевые координаты (и обозначая время  $\tau$  через  $t$ ), запишем систему (14) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial m} (rU), \\
\frac{\partial U}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial m} \left( M^{-1} p + \frac{\varkappa^2}{2} H^2 \right) &= -\varkappa^2 \frac{H^2}{r\rho}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_{\pm}}{\rho} \right) + (\gamma - 1) p_{\pm} \frac{\partial}{\partial m} (rU) &= (\gamma - 1) \nu_m M \varkappa^2 \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \rho \left[ \frac{\partial}{\partial m} (rH) \right]^2, \\
\frac{\partial r}{\partial t} &= U, \\
\zeta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{r\rho} \right) &= \frac{\partial E^*}{\partial m}, \\
E^* - \xi^2 \frac{\partial}{\partial m} \left( r^2 \rho \frac{\partial E^*}{\partial m} \right) &= \zeta \nu_m \rho \frac{\partial}{\partial m} (rH) - \zeta \xi^2 \frac{\partial}{\partial m} \left[ r^3 \rho H \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{U}{r} \right) \right],
\end{aligned} \tag{31}$$

где  $\varkappa$ ,  $M$ ,  $\zeta$ ,  $\xi$ ,  $\nu_m$  – числа подобия из §1, причём с учётом выражения (11) для проводимости  $\sigma$  безразмерную магнитную вязкость  $\nu_m$  можно записать следующим образом:

$$\nu_m = \frac{\nu_0}{T_e^{3/2}}, \quad \nu_0 = 12,825 \cdot 10^{-12} \cdot [n]^{3/2} [U]^{-1} [L]^{-1} [p]^{-3/2}. \tag{32}$$

Здесь  $T_e = T_-$  – безразмерное значение электронной температуры.

Система (31) решается на отрезке  $0 \leq m \leq M_*$ , где характерный масштаб массовой лагранжевой переменной  $m$  равен  $[m] = [\rho][L]^2$ . Граничные условия (18') в безразмерном виде запишутся так:

$$\begin{aligned}
m = 0 : \quad E^*(0) - 2\xi^2 \frac{\partial E^*}{\partial m}(0) &= 2\nu_m(0) \zeta \frac{H}{r} \Big|_{m=0}, \\
U(0) = 0, \quad H(0) = 0, \quad r(0) = 0; \\
m = M_* : \quad \zeta^{-1} \frac{\partial E^*}{\partial m} \Big|_{m=M_*} &= \left( \frac{\dot{I}(t)}{\rho r^2} + \frac{I(t)}{r} \left[ \frac{\partial U}{\partial m} - \frac{U}{\rho r^2} \right] \right) \Big|_{m=M_*}, \\
p|_{m=M_*} = 0, \quad H|_{m=M_*} &= \frac{I(t)}{R(t)}, \quad R(t) = r(t, M_*)
\end{aligned} \tag{33}$$

Функция  $I(t)$  либо задаётся, либо при наличии внешней цепи ищется самосогласованным образом из уравнения внешней цепи. Безразмерные значения производных параметров плазмы равны:

$$\begin{aligned}
j_{\varphi} = \rho \frac{\partial}{\partial m} (rH), \quad v_r^{\pm} = U, \quad v_z^{\pm} = \pm \left( \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \right)^{1/2} \xi \varkappa \frac{\partial}{\partial m} (rH), \\
E_z = E^* - \zeta H U, \quad E_r = \Lambda \zeta \xi \varkappa H \frac{\partial}{\partial m} (rH) + M^{-1} \zeta \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{p_+}{\omega_c^-} - \frac{p_-}{\omega_c^+} \right),
\end{aligned}$$

$$T_+ = \frac{p_+}{\rho} \left(1 + \frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right), \quad T_- = \frac{p_-}{\rho} \left(1 + \frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right) Z^{-1}, \quad Z = \frac{e_+}{e_-}, \quad \Lambda = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{1/2} - \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{1/2},$$

где  $\omega_c^\pm = [t][H]c^{-1}\lambda_\pm^{-1}$  – безразмерные циклотронные частоты.

Рассмотрим численный метод решения задачи (31-33). Введём на отрезке  $[0, M_*]$  целые и полуцелые узлы:  $h = M_*/N$ ,

$$\begin{aligned} kh, \quad 0 \leq k \leq N : & \quad U, r, E^* \\ (k + 1/2)h, \quad 0 \leq k < N : & \quad p_\pm, p, \rho, H, B = H/r, \end{aligned}$$

причём справа указаны те параметры плазмы, которые аппроксимируются сеточными функциями соответственно в целых или дробных узлах. Переход с нижнего ( $t = t_n$ ) на верхний ( $t = t_n + \tau$ ) временной слой,  $f^n \rightarrow f^{n+1}$ , для сеточных функций, аппроксимирующих параметры течения  $f = U, r, p_\pm, \rho, H, E^*$ , происходит по следующим формулам (экономя индексы, опустим в обозначениях номер временного слоя  $n$ ):

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{U_k^1 - U_k^0}{\tau} + \frac{r_k^0}{h} \left[ \left( \frac{p + \omega}{M} + \frac{\varkappa^2}{2} H^2 \right)_{k+1/2}^0 - \left( \frac{p + \omega}{M} + \frac{\varkappa^2}{2} H^2 \right)_{k-1/2}^0 \right] = \\ = -\frac{\varkappa^2}{2r_k^0} \left[ \left( \frac{H^2}{\rho} \right)_{k+1/2}^0 + \left( \frac{H^2}{\rho} \right)_{k-1/2}^0 \right], \quad 0 < k \leq N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_0^1 = 0, \quad \omega_{k+1/2} = \mu_0 \rho_{k+1/2} (U_{k+1} - U_k) \cdot 0,5 [(U_{k+1} - U_k) - |U_{k+1} - U_k|], \quad 0 \leq k < N \\ f_{N+1/2} = 2f_{N-1/2} - f_{N-3/2}, \quad f = \frac{1}{\rho}, \quad p, \quad H^2, \quad \omega_{N+1/2} = -\omega_{N-1/2} \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{r_k^1 - r_k^0}{\tau} = U_k^1, \quad 0 \leq k \leq N$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)_{k+1/2}^1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)_{k+1/2}^0}{r_k^{1/2} = \frac{r_k^0 + r_k^1}{2}} = \frac{(r^{1/2}U^1)_{k+1} - (r^{1/2}U^1)_k}{h}, \quad 0 \leq k < N \end{aligned}$$

$$4) \quad \frac{\left(\frac{B}{\rho}\right)_{k+1/2}^1 - \left(\frac{B}{\rho}\right)_{k+1/2}^0}{\tau} = \zeta^{-1} \frac{E_{k+1}^* - E_k^*}{h}, \quad 0 \leq k < N$$

$$\begin{aligned} 5) \quad E_k^* - \frac{\xi^2}{h} \left[ (r^2)_{k+1/2}^0 \rho_{k+1/2}^0 \frac{E_{k+1}^* - E_k^*}{h} - (r^2)_{k-1/2}^0 \rho_{k-1/2}^0 \frac{E_k^* - E_{k-1}^*}{h} \right] = \frac{\nu_0 \zeta}{(T_e^{3/2})_k^0} \rho_k^0 \times \\ \times \left[ \frac{(r^2)_{k+1/2}^0 B_{k+1/2}^0 - (r^2)_{k-1/2}^0 B_{k-1/2}^0}{h} \right] + \zeta \xi^2 \frac{(W_{k+1/2}^0 B_{k+1/2}^0 - W_{k-1/2}^0 B_{k+1/2}^0)}{h}, \end{aligned}$$

$$0 < k < N$$

$$W_{k+1/2} = 2(Ur)_{k+1/2} - (r^2)_{k+1/2} \rho_{k+1/2} \frac{(rU)_{k+1} - (rU)_k}{h}, \quad 0 \leq k < N$$

$$f_k = \frac{f_{k+1/2} + f_{k-1/2}}{2}, \quad f = T_e, \rho, \quad 0 < k < N$$

$$f_{k+1/2} = \frac{f_k + f_{k+1}}{2}, \quad f = r^2, Ur, \quad 0 \leq k < N$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & \frac{\left(\frac{p_{\pm}}{\rho}\right)_{k+1/2}^1 - \left(\frac{p_{\pm}}{\rho}\right)_{k+1/2}^0}{\tau} + (\gamma - 1)(p_{\pm} + \omega_{\pm})_{k+1/2}^0 \frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)_{k+1/2}^1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)_{k+1/2}^0}{\tau} = \\ & = \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\nu_0 M \varkappa^2}{\left(T_e^{3/2}\right)_{k+1/2}^0} \rho_{k+1/2}^0 \left[ \frac{(r^2 B)_{k+1}^0 - (r^2 B)_k^0}{h} \right]^2, \quad 0 \leq k < N \end{aligned}$$

$$(r^2 B)_0 = 0, \quad (r^2 B)_N = I(t_n), \quad B_k = \frac{B_{k+1/2} + B_{k-1/2}}{2}, \quad 0 < k < N$$

$$\omega_{\pm} = \alpha_{\pm} \omega, \quad \alpha_+ + \alpha_- = 1, \quad \alpha_{\pm} \geq 0, \quad \text{например, } \alpha_+ = \alpha_- = 1/2$$

Аппроксимация граничных условий для  $E^*$ :

$$E_0^* - 2\xi^2 \frac{E_1^* - E_0^*}{h} = \frac{2\nu_0 \zeta}{\left(T_e^{3/2}\right)_0^0} B_0^0 \quad (34)$$

$$B_0 = \frac{3}{2} B_{1/2} - \frac{1}{2} B_{3/2}, \quad (T_e)_0 = \frac{3}{2} (T_e)_{1/2} - \frac{1}{2} (T_e)_{3/2},$$

$$\zeta^{-1} \frac{E_N^* - E_{N-1}^*}{h} = \frac{\dot{I}(t_n)}{\rho_N^0 (r_N^0)^2} + \frac{I(t_n)}{r_N^0} \left[ \frac{U_N^0 - U_{N-1}^0}{h} - \frac{U_N^0}{\rho_N^0 (r_N^0)^2} \right],$$

$$\rho_N = \frac{3}{2} \rho_{N-1/2} - \frac{1}{2} \rho_{N-3/2} \quad \left( \text{либо } \left(\frac{1}{\rho}\right)_N = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho}\right)_{N-1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho}\right)_{N-3/2} \right).$$

Условие устойчивости. Шаг  $\tau$  на каждом временном слое выбирается из условия Куранта:

$$\tau \leq \frac{h}{U_{\text{эфф}}} \quad (35)$$

$$U_{\text{эфф}} = \max_{0 \leq k < N} \left\{ r_{k+1/2}^0 \rho_{k+1/2}^0 \left( |U_{k+1/2}^0| + \left[ M^{-1} \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)_{k+1/2}^0 + \varkappa^2 \left(\frac{H^2}{\rho}\right)_{k+1/2}^0 \right]^{1/2} \right) \right\}$$

$$U_{k+1/2} = \frac{U_k + U_{k+1}}{2}, \quad r_{k+1/2} = \frac{r_k + r_{k+1}}{2}.$$

Практически  $\tau$  вычисляется по формуле  $\tau = \kappa_0 h / U$ , где коэффициент запаса  $0 < \kappa_0 < 1$  подбирается экспериментально, как и коэффициент  $\mu_0$  в выражении для искусственной вязкости  $\omega_{k+1/2}$ . Типичные значения  $\kappa_0 = 0,1 \div 0,8$ ,  $\mu_0 = 2 \div 4$ .

Организация счёта очевидна. Из уравнений 1) находим сеточную функцию  $U^1$ , затем из 2) - функцию  $r^1$ , после чего из 3) ищется сеточная функция  $\rho^1$ . Далее, из 5), решая прогонкой систему линейных уравнений, вычисляем  $E^*$ , используя граничные условия (34), а затем из 4) находим функцию  $B^1$ . Наконец, из 6) ищем  $p_{\pm}^1$  и вычисляем  $p^1 = p_+^1 + p_-^1$ . После этого определяется из условия устойчивости (35) новый временной шаг  $\tau$  и процесс вычислений повторяется.

Разностные аппроксимации всех пространственных производных имеют порядок  $O(h^2)$ , а временных -  $O(\tau)$ . Однако аппроксимация граничных значений на этапе 1) и граничных условий (34) для  $E^*$  более грубая - порядка  $O(h)$ . Нетрудно повысить точность этих аппроксимаций, однако это не приводит к улучшению счёта.

В начальный момент времени заданы сеточные функции  $\rho$ ,  $U$ ,  $r$ ,  $p_{\pm}$ ,  $H$ . Сеточные функции  $B = H/r$  и  $H$  пересчитываются друг через друга посредством интерполяции  $B_{k+1/2} = 2H_{k+1/2}/(r_k + r_{k+1})$ ,  $0 \leq k < N$ .

## §7. Тестирование численного алгоритма и учёт внешней цепи

Конечно - разностная схема из §6 тестировалась посредством аналитических решений двух типов. Во-первых, использовалось разрывное гомогенное течение плазменного шнура типа контактного разрыва [6]. Во-вторых, схема проверялась на гладких гомогенных решениях из §5. В обоих случаях результаты сравнения были весьма удовлетворительные.

Рассмотрим подробнее второй случай. Гомогенное решение (28-30) в лагранжевых координатах и безразмерном виде запишется так:

$$\begin{aligned} \rho(t, m) &= \frac{\rho_0}{w^2(t)} \frac{\rho_0 y^2 + 2}{(\rho_0 y^2 + 1)^2}, \quad p(t, m) = \frac{p_0}{w^{2\gamma}(t)} \left(1 - \frac{m}{M_*}\right), \quad U_r(t, m) = \xi \dot{w}(t) y, \\ H_{\varphi}(t, m) &= (\rho_0 + y_*^{-2})^{1/2} \frac{y}{(\rho_0 y^2 + 1)^{1/2}} \frac{I(t)}{w(t)}, \quad r(t, m) = \xi w(t) y, \\ E_z(t, m) &= \frac{\xi \zeta}{\rho_0 y_*} (\rho_0 y_*^2 + 1)^{1/2} \left\{ \dot{I}(t) (\rho_0 y^2 + 1)^{1/2} + \frac{\dot{w}(t) I(t)}{w(t)} \frac{\rho_0 y^2}{(\rho_0 y^2 + 1)^{1/2}} \right\}, \\ E_z^*(t, m) &= \frac{\xi \zeta}{\rho_0 y_*} \dot{I}(t) (\rho_0 y^2 + 1)^{1/2}, \quad 0 \leq m \leq M_*, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $I(t) \in C^1[0, +\infty)$  - произвольная функция, а  $w(t)$  - решение задачи:

$$\ddot{w} - \frac{K_*}{w^{2\gamma-1}} + \frac{\chi_* I^2(t)}{w} = 0, \quad w(0) = 1, \quad K_* = \frac{p_0}{MM_*}, \quad \chi_* = \frac{\varkappa^2 (\rho_0 y_*^2 + 1)}{\rho_0 y_*^2 \xi^2}, \quad (37)$$

где  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $M$ ,  $\varkappa$  - числа подобия из §1,  $\rho_0$ ,  $p_0$  - произвольные константы,  $y_* = \xi^{-1} R_0 [L]^{-1}$  - безразмерный радиус шнура, умноженный на  $\xi^{-1}$ . Наконец,

$M_* = m(y_*)$ , где

$$m(y) = \frac{\xi^2}{2} \{ \ln(\rho_0 y^2 + 1) + 1 - (\rho_0 y^2 + 1)^{-1} \}, \quad 0 \leq y \leq y_* \quad (38)$$

монотонно возрастающая функция, переводящая  $[0, y_*]$  на  $[0, M_*]$ , а в формулах (36)  $y = y(m)$  – обратная функция. Физический смысл  $p_0$ ,  $\rho_0$  очевиден:  $\rho_0$  – половина безразмерной плотности,  $p_0$  – безразмерное давление на оси шнура в начальный момент времени. Заметим, что при замене переменных  $m \rightarrow \xi^2 m$ ,  $t \rightarrow \xi t$ ,  $r \rightarrow \xi r$  в решении (36-38) исчезает зависимость от  $\xi$ .

На Рис. 1 приведено сравнение численного решения с аналитическим (36)÷(38) для  $I(t) = t + 1$ . Как видно, разностная схема на протяжении более десяти колебаний практически идеально отслеживает как режимы сжатия шнура, так и расширения, затем начинает нарастать сдвиг по фазе между численным и аналитическим решениями, хотя амплитуды и периоды обоих колебаний практически совпадают. Аналогичная картина наблюдается и для других токов и при сравнении пространственных профилей – аналитических и счётных – параметров течения.

Основные идеи совместного расчёта динамики шнура и внешней цепи рассмотрим на примере простейшей конфигурации (а) из §4, токи и заряды которой подчиняются системе уравнений:

$$\dot{I} \left\{ \frac{L_*}{c^2} + \frac{2z_0}{c^2} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} \right\} + \frac{Q}{C_*} + R_* I + z_0 E_z(t) = 0, \quad \dot{Q} = I.$$

Для поля  $E_z^* = E_z + c^{-1}UH$  эта система с учётом граничных значений для  $U$  и  $H$  запишется в виде:

$$\frac{L_*}{c^2} \frac{dI}{dt} + \frac{2z_0}{c^2} \frac{d}{dt} \left( I \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} \right) + \frac{Q}{C_*} + R_* I + z_0 E_z^*(t) = 0, \quad \dot{Q} = I.$$

В безразмерном виде последняя система переписется так:

$$\alpha_0 \frac{dI}{dt} + \frac{d}{dt} \left( I \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} \right) + \eta_0 Q + \eta_1 I + \eta_2 E_z^*(t) = 0, \quad \dot{Q} = I, \quad (39)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{L_*}{2z_0}, \quad \eta_0 = \frac{c^2[t][Q]}{2z_0 C_* [I]}, \quad \eta_1 = \frac{c^2 R_* [t]}{2z_0}, \quad \eta_2 = \frac{c^2 [E][t]}{2[I]}$$

и принято соглашение  $[Q] = [t][I]$ . В качестве характерного масштаба для полного тока можно взять  $[I] = cR_0[H]/2$ .

С учётом внешней цепи краевое условие для  $E^*$  на правой границе меняется. Действительно, исключая  $\dot{I}$  из уравнения (39) и подставляя

полученное выражение во второе условие (33), получим:

$$\begin{aligned}
\dot{I} &= \left[ I(\dot{R}/R - \eta_1) - \eta_0 Q - \eta_2 E_z^*(t) \right] \left( \alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R(t)} \right)^{-1} \\
&\left[ \frac{\eta_2}{\rho r^2} \left( \alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}}{r} \right)^{-1} E_* + \zeta^{-1} \frac{\partial E_*}{\partial m} \right] \Bigg|_{m=M_*} = \\
&= I(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{U}{r} \right) + \left( \frac{U}{r} - \eta_1 \right) \frac{\left( \alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}}{r} \right)^{-1}}{\rho r^2} \right\} \Bigg|_{m=M_*} - \frac{\eta_0}{\rho r^2} \frac{Q(t)}{\alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}}{r}} \Bigg|_{m=M_*}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Рассмотрим разностную схему для (39):

$$\begin{cases} \alpha_0 \frac{I^{n+1} - I^n}{\tau} + \tau^{-1} \left\{ I^{n+1} \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R^{n+1}} - I^n \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R^n} \right\} + \\ + \eta_0 \frac{Q^n + Q^{n+1}}{2} + \eta_1 \frac{I^n + I^{n+1}}{2} + \eta_2 E_z^{*n} = 0, \\ \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\tau} = \frac{I^n + I^{n+1}}{2}, \end{cases} \tag{41}$$

где шаг  $\tau > 0$  совпадает с временным шагом в разностной схеме. Учитывая  $R^{n+1} = r_N^1$ ,  $R^n = r_N^0$ ,  $E_z^{*n} = E_N^*$  (см. обозначения §6), приходим к следующему алгоритму. Сначала прогонкой, с учётом изменённого граничного условия, находим  $E^*$  и, в частности,  $E_N^*$ . Затем, решая *линейную* систему, находим из (41) величины  $I^{n+1}$ ,  $Q^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
I^{n+1} &= \left[ \left( \alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R^n} - \frac{\tau \eta_1}{2} - \frac{\tau^2 \eta_0}{4} \right) I^n - \tau \eta_0 Q^n - \tau \eta_2 E_N^* \right] \times \\
&\times \left[ \alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R^{n+1}} + \frac{\tau \eta_1}{2} + \frac{\tau^2 \eta_0}{4} \right]^{-1}, \quad Q^{n+1} = \left[ \alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R^{n+1}} + \frac{\tau \eta_1}{2} + \frac{\tau^2 \eta_0}{4} \right]^{-1} \times \\
&\times \left[ \left( \alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}}{R^{n+1}} + \frac{\tau \eta_1}{2} - \frac{\tau^2 \eta_0}{4} \right) Q^n + \frac{\tau}{2} \left( \alpha_0 + \ln \frac{R_{\text{ex}}^2}{R^n R^{n+1}} \right) I^n - \frac{\tau^2}{2} \eta_2 E_N^* \right].
\end{aligned}$$

Причём при дискретизации правого граничного условия (40) для  $E^*$  величины  $Q(t)$ ,  $I(t)$  снимаются с  $n$ -го временного слоя и равны  $Q^n$ ,  $I^n$  соответственно.

Возможны более сложные подходы. Например, в (41) вместо  $E_z^{*n}$  можно взять  $(E_z^{*,n+1} + E_z^{*,n})/2$ . Тогда разностная схема (41) имеет второй порядок аппроксимации,  $E_z^{*n}$  ищется так же как и выше, а  $E_z^{*,n+1}$  определяется совместно с  $I^{n+1}$ ,  $Q^{n+1}$  из некоторой системы линейных уравнений. Всё сказанное переносится и на другие внешние цепи.

## Литература



1. А.М. Андрианов, О.А. Базилевская, Ю.Г. Прохорова. Сб. „Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций“. Т.2, стр. 185, Т.4, стр. 182.
2. Л.А. Арцимович, А.М. Андрианов, О.А. Базилевская, Ю.Г. Прохорова, Н.В. Филиппов. Атомн. энерг. Т.3, 84,1956.
3. В.С. Комельков. ЖЭТФ. Т.35, вып.1(7), 1958.
4. Н.В. Филиппов. Физика плазмы. Т.9, вып.1, 1983.
5. М.Б. Гавриков. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, N199, 1988.
6. М.Б. Гавриков, Р.В. Сорокин. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, N40, 2006.
7. М.Б. Гавриков. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, N59, 2006.
8. С.И. Брагинский. Вопросы теории плазмы. Сб. статей под ред. М.А. Леонтовича. Вып.1, М., Гостехиздат, 1963, стр. 183-272.
9. Л. Спитцер. Физика полностью ионизованного газа. М., „Мир“, 1965.
10. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М., „Наука“, 1966.

### Результаты численного расчёта

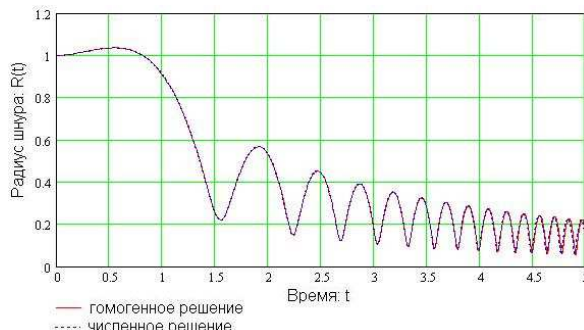


Рис. 1

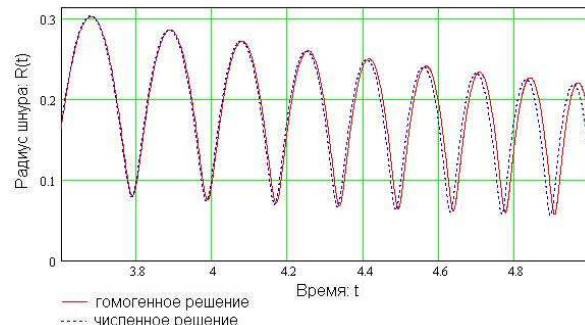


Рис. 1а

На Рис. 1а изображено увеличение соответствующей части Рис. 1.

Ниже приведены результаты расчёта для радиуса плазменного шнура в зависимости от времени, полученные численной реализацией систем а), б), в), г) из §5 для соответствующих цепей. Общие параметры и начальные условия для цепей таковы:  $w(0) = 1$ ,  $\dot{w}(0) = 0$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $K_* = 1$ ,  $\chi_* = 1$ , начальные значения всех токов считаем нулевыми. Системы рассматривались для безразмерных параметров, аналогичных параметрам из §7. Рис. 2 представляет собой реализацию системы а), для которой  $Q(0) = 15$ . На Рис. 3,4,5 поведение радиуса шнура для системы г), для которой  $Q_1(0) = 15$ ,  $Q_2(0) = 10$ . Так как цепь г) получается добавлением нового участка к а) посредством взаимной индукции,

то для левой части цепи мы берем те же параметры, что и для а), а для правой варьируем. Следует отметить Рис. 4, где видно, что при уменьшении ёмкости конденсатора, происходит более сильное сжатие, но за меньшее время. Причём для второго набора параметров (жирная линия на графике) сжатие сильнее и быстрее, чем для первого (тонкая линия). В частности,  $w_{1\min} = 0.0097, t_1 = 0.085, w_{2\min} = 0,0061, t_2 = 0,034$ .

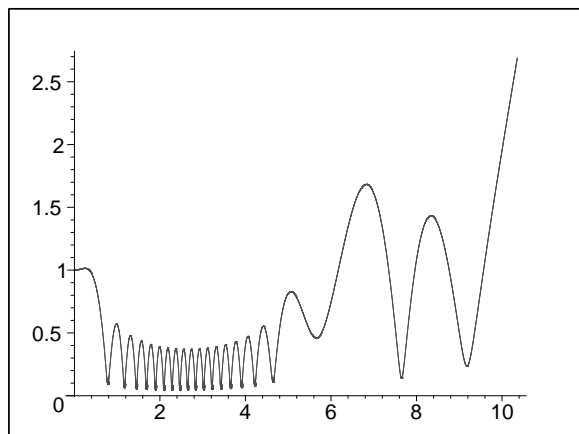
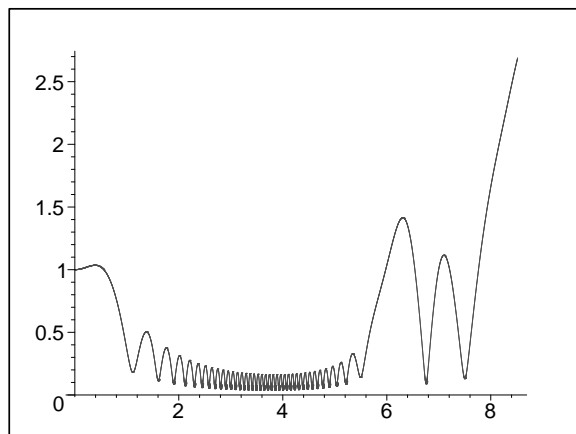
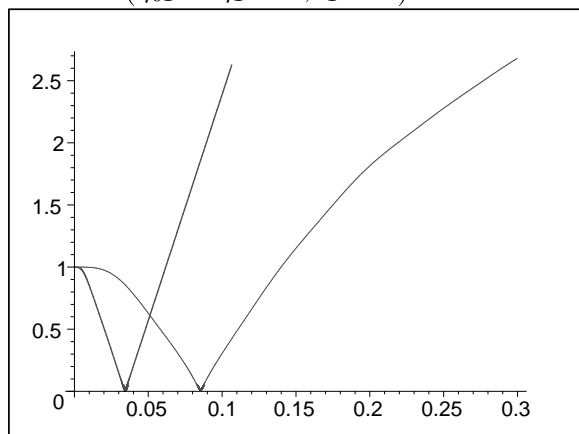
Рис. 2 ( $\eta_{01} = \eta_1 = 1, l_1 = 2$ )Рис. 3 ( $\eta_2 = 0, \eta_{02} = 1, l_2 = 1, m_0 = 1$ )

Рис. 4

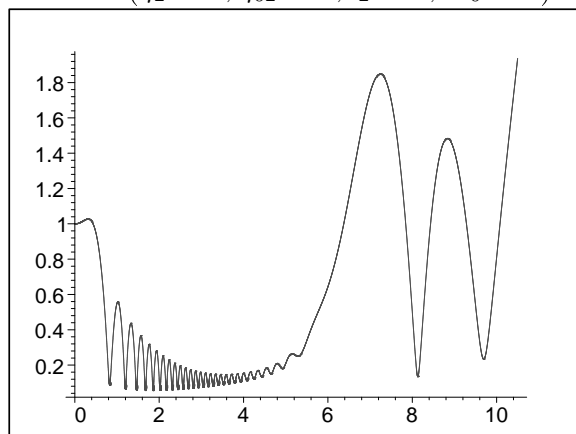


Рис. 5

— ( $\eta_2 = 1, \eta_{02} = 300, l_2 = 0, 1, m_0 = 0, 1$ ) ( $\eta_2 = 1, \eta_{02} = 1, l_2 = 0, 01, m_0 = 0, 1$ )  
 — ( $\eta_2 = 1, \eta_{02} = 300, l_2 = 0, 01, m_0 = 0, 1$ )

На Рис. 6,7 поведение радиуса шнура для системы б), для которой  $Q(0) = 15$ . Уменьшая  $\eta_0$ , мы увеличиваем ёмкость конденсатора, сохраняя заряд на его обкладках, что ведёт к понижению напряжения в цепи, и к снижению интенсивности колебаний (Рис. 6). Чем больше отношение  $L^*/L_*$ , тем сильнее сжатие и интенсивнее колебания, и наоборот. При  $L_* \gg 1$  первое колебание масштабируется в колебание с большой амплитудой, превышающее размеры установки  $R_{\text{ex}}$  (Рис. 7). На Рис. 8,9 поведение радиуса шнура для системы в). При добавлении к исходному контуру такого же, подключённого параллельно, но с незаряженной

ёмкостью, продолжительность колебаний удваивается (Рис. 8). Сжатие плазменного шнура зависит от разности зарядов в начальный момент времени  $|Q_1 - Q_2|$ . Можно добиться еще большего сжатия, зарядив симметричные обкладки конденсаторов разноименными зарядами:  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 < 0$ . Например, вариант  $Q_1 = 15$ ,  $Q_2 = -15$  эквивалентен  $Q_1 = 0$ ,  $Q_2 = 30$  (Рис. 9).

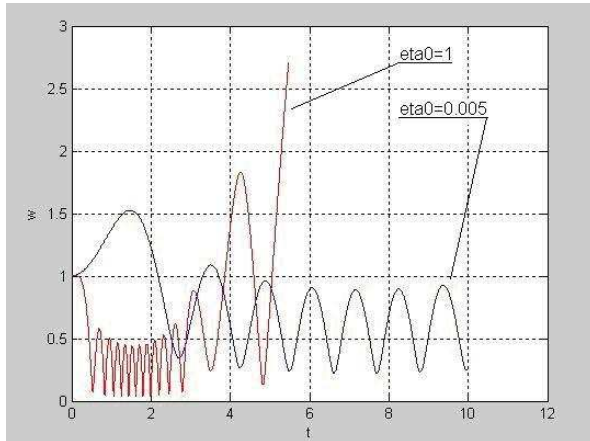


Рис. 6 ( $\eta_0 = 1, \eta_0 = 0,005, \eta_1 = 1, L_* = 1, L^* = 1$ )

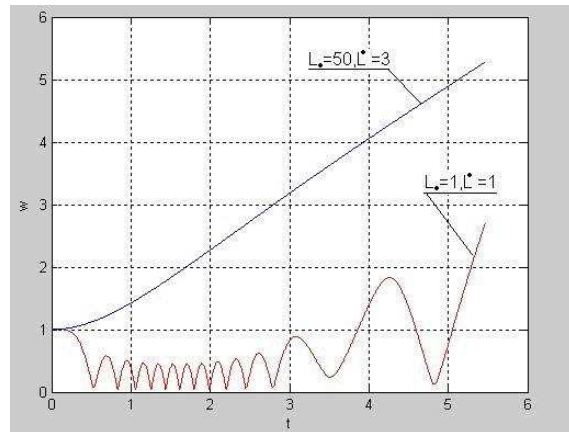


Рис. 7 ( $\eta_0 = 1, \eta_1 = 1, L_* = 50, L^* = 3; L_* = 1, L^* = 1$ )

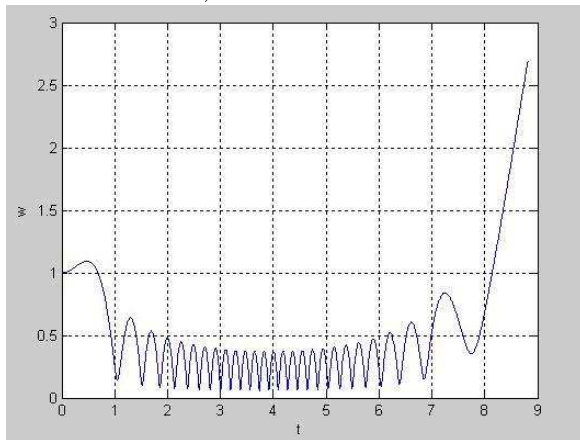


Рис. 8 ( $\eta_{01} = 1, \eta_{02} = 1, \eta_{11} = 1, \eta_{12} = 1, a_0 = 2, L_1 = 1, L_2 = 2, Q_1 = 0, Q_2 = 15$ )

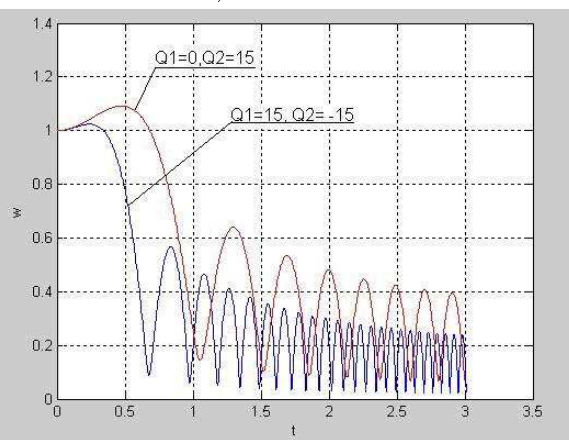


Рис. 9 ( $\eta_{01} = 1, \eta_{02} = 1, \eta_{11} = 1, \eta_{12} = 1, a_0 = 2, L_1 = 1, L_2 = 2, Q_1 = 15, Q_2 = -15; Q_1 = 0, Q_2 = 15$ )