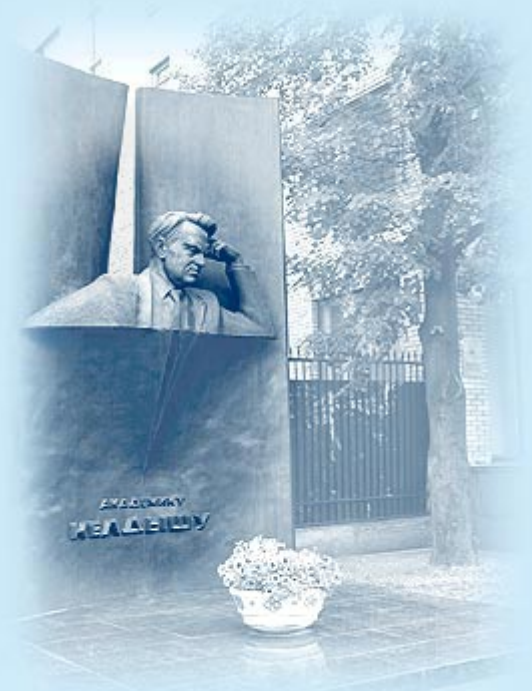




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 35 за 2007 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

А. Д. Брюно, В. П. Варин

Сложные семейства  
периодических решений  
ограниченной задачи

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А. Д., Варин В. П. Сложные семейства периодических решений ограниченной задачи // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 35. 18 с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-35>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, В.П. Варин

СЛОЖНЫЕ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ  
ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

Москва, 2007 г.

А.Д. Брюно, В.П. Варин. Сложные семейства периодических решений ограниченной задачи. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Плоская круговая ограниченная задача трех тел рассматривается при малых значениях отношения масс  $\mu$  основных тел. Здесь продолжено изучение семейств периодических решений, начатое в препринте "Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых  $\mu$ ". С помощью порождающих семейств при малых  $\mu > 0$  изучается семейство  $i$ , начинающееся прямыми круговыми орбитами бесконечно малого радиуса вокруг тела большей массы. Показано, что при росте  $\mu$  структура семейства  $i$  испытывает бесконечно много самобифуркаций с образованием бесконечного числа замкнутых подсемейств, каждое из которых существует лишь в некотором интервале значений  $\mu$ . Кроме того, дана теория образования подковообразных орбит и орбит в форме "головастиков"; указана структура основных семейств, содержащих периодические решения с такими орбитами.

A.D. Bruno, V.P. Varin. Complicated families of periodic solutions of the restricted problem. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2007.

We consider the plane circular restricted three-body problem for small mass ratios  $\mu$  of principal bodies. Here we continue the study of families of periodic solutions which we begun in Preprint "Periodic solutions of the restricted three-body problem for small  $\mu$ ". Using generating families, for small  $\mu > 0$ , we studied the family  $i$  which begins as direct circular orbits of infinitely small radius around the body of bigger mass. We demonstrated that, as  $\mu$  increases, the structure of the family  $i$  undergoes infinitely many bifurcations with the birth of infinitely many closed subfamilies, each of which exists only in some interval of values of  $\mu$ . In addition, we give the theory of generation of shoe-like orbits and orbits in the form of "tadpoles"; we present the structure of principal families containing periodic solutions with these orbits.

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Москва, 2007 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 05-01-00050.

E-mails: [bruno@keldysh.ru](mailto:bruno@keldysh.ru), [varin@keldysh.ru](mailto:varin@keldysh.ru)

[http: www.keldysh.ru](http://www.keldysh.ru)

(см. электронная библиотека, каталог публикаций сотрудников ИПМ, препринт).

## 6. Семейство $i$

Семейство  $i$  начинается прямыми круговыми орбитами бесконечно малого радиуса вокруг тела  $P_1$  большей массы. В отличие от семейства  $h$ , описанного в разд. 5 и устроенного просто для всех  $\mu \in [0, 0.5]$ , семейство  $i$  устроено довольно сложно.

6.1. *Порождающее семейство  $i$  ( $\mu = 0$ ).* Начальный участок был последовательно описан ([11], § 2; [20], п. 10.2.7; [47], п. 1.1). Бифуркации семейства Id с семействами  $E_{(p+1)/p}$  описаны в подразд. 4.2.

В табл. 2, построенной аналогично табл. 1, приведены данные о начальных критических орбитах этого семейства, причем индекс  $m$  у номера  $k_m$  указывает число решений-отрезков, из которых составлена эта орбита.

Характеристики семейства в системе координат  $\tilde{a}, \tilde{e}$  показаны на фиг. 8. Указаны номера  $l$  кусков  $\mathbf{K}_l$ , из которых состоит начало порождающего семейства; они перечисляются ниже. При этом некоторые участки характеристик совпадают: на левой характеристике  $\mathbf{K}_3 \subset \mathbf{K}_7 \subset \mathbf{K}_{16}$  и  $\mathbf{K}_9 \subset \mathbf{K}_{13}$ , а на правой характеристике  $\mathbf{K}_3 \subset \mathbf{K}_9 \subset \mathbf{K}_{16} \subset P_2^{**}$  и  $\mathbf{K}_7 \subset \mathbf{K}_{13}$ .

$\mathbf{K}_1$ . Семейство Id от  $a = 0$  до орбиты 2, т.е. Id(2). Здесь  $a = |\tilde{a}| \in (0, 2^{-2/3})$ ,  $\tilde{e} = 1$ , т.е.  $e = 0$ ,  $C \geq 3.1748$ ,  $T = 2\pi(N - 1)^{-1}$ ,  $\text{Tr} = 2 \cos T$ .

$\mathbf{K}_2$ . Семейство  $E_2^\pm$  от Id(2) до  $E_2(-0)$  (орбита 5<sub>1</sub>). На нем находится орбита 3, где тело  $P_3$  сталкивается с телом  $P_1$ . После этого семейство  $i$  состоит из трехкратных орбит с обратным направлением движения. В частности, при  $\tilde{e} = -1$  семейство  $i$  содержит орбиту 4, которая является трижды пройденной орбитой семейства Ig, т.е.  $h$ . После этой орбиты при  $\tilde{e} > -1$  этот кусок семейства  $i$  будет семейством  $E_2^-$ , а до этой орбиты он был семейством  $E_2^+$ . Здесь  $T = 2\pi$ ,  $\text{Tr} = 2$ .

$\mathbf{K}_3$ . Семейство  $C_{12}$  с  $N > 2$ , т.е. с  $a < 2^{-2/3}$ , от  $E_2(-0)$  до  $E_2(+0)$ , т.е. орбиты 7<sub>1</sub>. При  $\tilde{e} = 0$  этот кусок содержит орбиту 6<sub>1</sub>, на которой тело  $P_3$  сталкивается с телом  $P_1$ . При переходе семейства через орбиту 6<sub>1</sub> трехкратные обратные орбиты переходят в однократные прямые ( $\tilde{e} > 0$ ). Здесь  $\text{Tr} = +\infty$ .

$\mathbf{K}_4$ . Семейство  $E_2^-$  от  $E_2(+0)$  до Id(2) (орбита 8, совпадающая с орбитой 2). На этом куске  $T = 2\pi$ ,  $\text{Tr} = 2$ .

$\mathbf{K}_5$ . Семейство Id от Id(2) до Id(3/2), т.е. орбиты 10. Здесь  $T = 2\pi(N - 1)^{-1}$ ,  $\text{Tr} = 2 \cos T$ .

$\mathbf{K}_6$ . Семейство  $E_{3/2}^+$  от Id(3/2) до  $E_{3/2}(-1)$ , т.е. орбиты 11<sub>2</sub>. Здесь  $T = 4\pi$ ,  $\text{Tr} = 2$ .

$\mathbf{K}_7$ . Семейство  $C_{12} + B_1$  от  $E_{3/2}(+1)$  до  $E_{3/2}(-1)$ , т.е. орбиты 15<sub>2</sub>. Каждая орбита состоит из двух решений-отрезков: один из семейства  $C_{12}$  и

другой из семейства  $B_1$ . В дальнейшем через  $C_{k,k+1} + lB_1$  будем обозначать кусок порождающего семейства периодических решений, каждая орбита которого состоит из одного решения-отрезка семейства  $C_{k,k+1}$  и  $l$  одинаковых решений-отрезков семейства  $B_1$ ; при этом значение постоянной Якоби  $C$  на них одинаково. Орбита  $12_2$  включает экстремальную орбиту  $C_{12}(1)$ , где  $C$  достигает максимума. На орбите  $12_2$  правая характеристика семейства  $i$  достигает максимума по  $\tilde{a}$  и минимума по  $\tilde{e}$ , после чего возвращается обратно по характеристике семейства  $B_1$ , т.е. имеет точку возврата. На орбите  $13_2$  тело  $P_3$  сталкивается с телом  $P_1$  на решении-отрезке из семейства  $C_{12}$ , а на орбите  $14_2$  – на решении-отрезке из семейства  $B_1$ , после чего прямое движение меняется на обратное. Здесь  $\text{Tr}$  на орбите  $11_2$  падает от 2 до  $-\infty$ , а затем подпрыгивает до  $+\infty$  и остается таким до орбиты  $12_2$ , где падает до  $-\infty$  и остается таким до конца этого куска.

**К<sub>8</sub>.** Семейство  $E_{3/2}^\pm$  от  $E_{3/2}(-1)$  до  $E_{3/2}(-0)$ , т.е. орбиты  $17_1$ .  $T = 4\pi$ ,  $\text{Tr} = 2$ . Орбита  $16$  – это пятикратная круговая орбита из семейства  $\text{I}r$ , т.е.  $h$ . После нее семейство  $E_{3/2}^+$  переходит в семейство  $E_{3/2}^-$ .

**К<sub>9</sub>.** Семейство  $C_{23}$  от  $E_{3/2}(-0)$  до  $E_{3/2}(+0)$ , т.е. орбиты  $19_1$ . На орбите  $18_1$  происходит столкновение тела  $P_3$  с телом  $P_1$  и меняется направление движения. Здесь  $\text{Tr} = +\infty$ .

**К<sub>10</sub>.** Семейство  $E_{3/2}^-$  от  $E_{3/2}(+0)$  до  $\text{Id}(3/2)$  (орбита 20, совпадающая с орбитой 10). Здесь  $\tilde{T} = 2 = \text{Tr}$ .

**К<sub>11</sub>.** Семейство  $\text{Id}$  от  $\text{Id}(3/2)$  до  $\text{Id}(4/3)$  (орбита 22). Здесь  $T = 2\pi(N - 1)^{-1}$ ,  $\text{Tr} = 2 \cos T$ .

**К<sub>12</sub>.** Семейство  $E_{4/3}^+$  от  $\text{Id}(4/3)$  до  $E_{4/3}(+1)$  (орбита  $23_2$ ). Здесь  $\tilde{T} = 3$ ,  $\text{Tr} = 2$ .

**К<sub>13</sub>.** Семейство  $C_{23} + B_1$  от  $E_{4/3}(+1)$  до  $E_{4/3}(-1)$  (орбита  $27_2$ ). Орбита  $24_2$  включает экстремальную орбиту  $C_{23}(1)$ . На орбите  $24_2$  правая характеристика (идушая по характеристике семейства  $B_1$ ) имеет точку возврата. Орбиты  $25_2$  и  $26_2$  – столкновительные. Здесь  $\text{Tr}$  на орбите  $23_2$  падает от 2 до  $-\infty$ , а затем подскакивает к  $+\infty$ ; на орбите  $24_2$  перескакивает к  $-\infty$  и остается таким до конца этого куска.

**К<sub>14</sub>.** Семейство  $E_{4/3}^\pm$  от  $E_{4/3}(-1)$  до  $E_{4/3}(-0)$  (орбита  $29_1$ ), включая семикратную орбиту  $\text{I}r(4/3)$  (орбита 28). Здесь  $\tilde{T} = 3$ ,  $\text{Tr} = 2$ .

**К<sub>15</sub>.** Семейство  $C_{34}$  от  $E_{4/3}(-0)$  до  $E_{3/2}(-1)$  (орбита  $30_3$ ). Здесь  $\text{Tr} = +\infty$ .

**К<sub>16</sub>.** Семейство  $C_{12} + 2B_1$  от  $E_{3/2}(-1)$  до  $E_{3/2}(+1)$  (орбита  $34_3$ ), включая столкновительные орбиты  $30_3$  и  $31_3$  и экстремальную орбиту  $33_3$ . Здесь  $\text{Tr} = +\infty$  до орбиты  $33_3$ , где перескакивает на  $-\infty$ , а на орбите  $34_3$  пере-

скакивает на  $+\infty$ .

**К<sub>17</sub>**. Семейство  $C_{34}$  от  $E_{3/2}(+1)$  до  $E_{4/3}(+0)$  (орбита 35<sub>1</sub>).  $\text{Tr} = +\infty$ .

**К<sub>18</sub>**. Семейство  $E_{4/3}^-$  от  $E_{4/3}(+0)$  до  $\text{Id}(4/3)$  (орбита 36, совпадающая с орбитой 20). Здесь  $\tilde{T} = 3$ ,  $\text{Tr} = 2$ .

**К<sub>19</sub>**. Семейство  $\text{Id}$  от  $\text{Id}(4/3)$  до  $\text{Id}(5/4)$  (орбита 38). Здесь  $T = 2\pi/(N-1)$ ,  $\text{Tr} = 2 \cos T$ .

**К<sub>20</sub>**. Семейство  $E_{5/4}^+$  от  $\text{Id}(5/4)$  до  $E_{5/4}(+1)$  (орбита 39<sub>2</sub>). Здесь  $\tilde{T} = 4$ ,  $\text{Tr} = 2$ .

Имеется более полное описание [47] начального участка порождающего семейства  $i$ , а также описание всего этого семейства. Дело в том, что уже описанный начальный участок состоит из циклов, каждый из которых состоит из одного куска  $\text{Id}_p$  семейства  $\text{Id}$  и нескольких кусков семейств  $E_{(p+1)/p}^\pm$  и  $S$ ; при этом цикл заканчивается на той же конечной орбите куска  $\text{Id}_p$ , от которого отошел кусок семейства  $E_{(p+1)/p}^+$ . Первый цикл включает куски **К<sub>1</sub>** – **К<sub>4</sub>**. Второй цикл состоит из кусков **К<sub>5</sub>** – **К<sub>10</sub>**; третий цикл – куски **К<sub>11</sub>** – **К<sub>18</sub>**. Куски **К<sub>19</sub>** и **К<sub>20</sub>** составляют начало четвертого цикла. Все порождающее семейство  $i$  состоит из бесконечного числа таких циклов, структура которых усложняется с ростом номера  $p$ . В частности, все циклы имеют участки правой характеристики, проходящие по характеристике семейства  $B_1$ , и участки, идущие вдоль кривой  $P_2^{**}$ , соответствующей телу  $P_2$ . Эти участки имеют зигзагообразную структуру, схематически показанную на фиг. 9 для участков, проходящих по характеристике семейства  $B_1$ . По оси ординат на фиг. 9 откладывается число  $n$  смен направлений характеристики (зигзагов).

Теперь рассмотрим эволюцию семейства  $i$  при возрастании  $\mu$  от нуля. Это удобнее делать отдельно для каждой пары циклов.

6.2. *Эволюция первого и второго циклов.* На фиг. 10, *а*, *б*, в показаны вычисленные фрагменты правой характеристики семейства  $i$  при  $\mu = \mu_J = 9.5388 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu = 3 \cdot 10^{-3}$  соответственно. Видно, что первый зигзаг характеристики с ростом  $\mu$  опускается вниз, затем загибается влево и приближается к левой нижней части этого фрагмента. При  $\mu = \mu'_1 \approx 4.1313 \cdot 10^{-3}$  обе части характеристики встречаются (фиг. 10, *г*) и происходит бифуркация. При  $\mu > \mu'_1$  образуется замкнутое семейство, которое обозначим  $i_1$ ; его характеристики это замкнутые кривые, показанные на фиг. 11, *а* для  $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu_M = 1.2155 \cdot 10^{-2}$ ,  $\mu = 2.3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\mu = 3.5 \cdot 10^{-2}$ . С ростом  $\mu$  характеристики семейства  $i_1$  уменьшаются в размерах и при  $\mu = \mu''_1 \approx 3.66863 \cdot 10^{-2}$  семейство  $i_1$  стягивается в одну орбиту, показанную на фиг. 11, *а* точкой. Следовательно, семейство  $i_1$  существует только в интервале  $\mu \in [\mu'_1, \mu''_1]$ . На фиг. 11, *а*

незамкнутые характеристики соответствуют  $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ . При сравнении с фиг. 10, *г* видно, что между незамкнутыми характеристиками в интервале  $\mu \in (\mu'_1, 5 \cdot 10^{-3})$  произошла еще одна бифуркация.

6.3. *Эволюция второго и третьего циклов.* На фиг. 11, *б* показаны вычисленные характеристики участков второго и третьего циклов при  $\mu = 5 \cdot 10^{-4}$ . Видна эволюция зигзага третьего цикла, аналогичная эволюции зигзага второго цикла. При  $\mu = \mu'_2 \approx 6.61705 \cdot 10^{-4}$  происходит бифуркация, показанная на фиг. 11, *в*. При  $\mu > \mu'_2$  образуется замкнутое семейство, которое обозначим  $i_2$ . С ростом  $\mu$  характеристики семейства  $i_2$  уменьшаются в размерах; на фиг. 11, *г* они показаны для  $\mu = 7 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu = \mu_J$ ,  $\mu = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ . Наконец, при  $\mu = \mu''_2 \approx 5.27272 \cdot 10^{-3}$  семейство  $i_2$  стягивается в одну орбиту, показанную на фиг. 11, *г* точкой. Незамкнутая характеристика внизу слева на фиг. 11, *г* соответствует  $\mu = 7 \cdot 10^{-4}$ . Следовательно, семейство  $i_2$  существует только в интервале  $\mu \in [\mu'_2, \mu''_2]$ .

Аналогично из третьего и четвертого циклов при  $\mu = \mu'_3 \approx 2.15292 \cdot 10^{-4}$  образуется замкнутое семейство  $i_3$ , которое существует до  $\mu = \mu''_3 \approx 1.88241 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, семейство  $i_3$  существует при  $\mu \in [\mu'_3, \mu''_3]$ .

Было вычислено также семейство  $i_4$ , возникающее из четвертого и пятого циклов при  $\mu = \mu'_4 \approx 9.54305 \cdot 10^{-5}$  и заканчивающееся при  $\mu = \mu''_4 \approx 8.86552 \cdot 10^{-4}$ .

#### 6.4. Обобщения.

*Гипотеза.* Существуют две монотонно убывающие к нулю последовательности  $\mu'_k, \mu''_k, \mu'_k < \mu''_k, k = 1, 2, \dots$ , такие, что при возрастании  $\mu$  от семейства  $i$  отделяются замкнутые семейства  $i_k$ , существующие только в интервалах  $\mu \in [\mu'_k, \mu''_k]$ .

Начальные части последовательностей  $\{\mu'_k\}, \{\mu''_k\}$  показаны в табл. 3, где указана также эмпирическая асимптотика их нормированных значений.

При  $\mu = \mu_J$ , что соответствует случаю Солнце – Юпитер, были вычислены [10, 11] семейства  $i_2$  и  $i_3$ ; характеристика семейства  $i_2$  показана на фиг. 11, *г*. Были вычислены [12] связанные с ними замкнутые локально кратные семейства. При  $\mu = \mu_M \approx 1.2155092 \cdot 10^{-2}$ , что соответствует случаю Земля – Луна, имеется замкнутое семейство  $i_1$  (фиг. 11, *а*), не указанное при вычислении семейства  $i$  для  $\mu_M$  [15].

6.5. *Внешнее кольцо почти круговых орбит.* Семейство  $i$  описывает все почти круговые периодические орбиты прямого направления движения с  $a < 1$ , т.е. из внутреннего кольца по отношению к телу  $P_2$ . Пери-

одические орбиты прямого направления движения из внешнего кольца к телу  $P_2$  не принадлежат одному семейству, а расположены на счетном множестве семейств.

При  $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$  были вычислены [9] семейства периодических решений, включающие куски

$$\text{Id}_p = \left\{ \frac{p}{p-1} > N > \frac{p+1}{p} \right\}$$

возмущенного семейства  $\text{Id}$  круговых орбит с прямым сидерическим движением для  $p = -2, -3, \dots, -7$ . Характеристики вычисленных семейств на плоскости  $\tilde{a}, \tilde{e}$  состоят из горизонтальных кусков, соответствующих семействам  $\text{Id}_p$ ; вертикальных кусков, соответствующих семействам  $E_{p/(p-1)}$  (их бифуркации согласуются с фиг. 5); и наклонных кусков, идущих вдоль характеристик семейств  $A_i$  и  $B_j$  фиг. 4, т.е. располагаются вблизи характеристик порождающих семейств. Исключением из этого правила является последнее семейство, которое является замкнутым. Для него указанное значение  $\mu$  не мало и уже достаточно для самобифуркации (как у семейства  $i$ ).

## 7. Подковы и головастики

7.1. *Окрестность неподвижных точек* ([2], гл. VIII, § 5; [28], § 2). Синоподическая задача двух тел  $P_1$  и  $P_3$  имеет однопараметрическое семейство неподвижных точек

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad y_1 = -x_2, \quad y_2 = x_1 \quad (7.1)$$

т.е.  $a = 1, e = 0, n = 1$ . В окрестности этого семейства введем локальные координаты  $y, z_1, z_2, z_3$  следующим образом ([2], гл. VIII, § 3). Начнем с элементов Делоне

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1-e^2)}, \quad l = Nt, \quad g = \tilde{\omega} - t$$

где  $\tilde{\omega}$  — аргумент перицентра. Система канонических координат

$$L, \quad \rho_2 = L - G, \quad y = l + g, \quad \varphi_2 = -g$$

называется *первой системой элементов Пуанкаре*. Наконец, система канонических координат

$$L, \quad z_2 = \sqrt{2\rho_2} \cos \varphi_2, \quad y, \quad z_3 = \sqrt{2\rho_2} \sin \varphi_2$$

называется *второй системой элементов Пуанкаре*.



Семейство (7.1) выделяется равенствами  $L = 1$ ,  $z_2 = z_3 = 0$ . Локальными для семейства (7.1) будут координаты

$$z_1 = L - 1, \quad z_2, \quad y, \quad z_3 \quad (7.2)$$

Функция Гамильтона (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \mu R \\ H_0 &= \rho_2 - z_1 - \frac{1}{2}(1 + z_1)^{-2} = -\frac{1}{2} + \rho_2 - \frac{3}{2}z_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} (k+1)(-z_1)^k \\ R &= r^{-1} + r \cos h - (1 - 2r \cos h + r^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

( $r$  и  $h$  — полярные координаты тела  $P_3$  на плоскости  $x_1, x_2$ ). При этом  $\rho_2 = z_2^2 + z_3^2$ .

Функция  $R$  разлагается в сходящийся ряд вида

$$R = \sum R_{mnkl} z_1^m z_2^k z_3^l \exp(iny)$$

с целыми  $m, n, k, l$ , где  $m, k, l$  — неотрицательные.

Согласно вычислениям ([2], гл. VIII, п. 5.Б) имеем

$$\beta_{000}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{0n00} \exp(iny) = 1 + \cos y - [2 - 2 \cos y]^{-1/2} \quad (7.4)$$

В координатах (7.2) семейство неподвижных точек задается уравнением  $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ , а координата  $y$  — это угол неподвижной точки на плоскости  $x_1, x_2$ . Согласно (7.4) при  $y = 0$  имеется сингулярное возмущение, ибо эта точка попадает на тело  $P_2$ . Поэтому в ограниченной задаче при  $\mu = 0$  имеется разорванная окружность, т.е. интервал  $y \in (0, 2\pi)$ , неподвижных точек.

Было показано ([2], гл. VIII, п. 3.Б), что только три из них — порождающие:

$$y_3^0 = \pi, \quad y_4^0 = \pi/3, \quad y_5^0 = 2\pi - \pi/3$$

Им соответствуют три неподвижные точки  $L_3, L_4, L_5$ , являющиеся решениями Лагранжа. Из каждой такой точки выходит по одному порождающему семейству периодических решений:  $E_1^-, G_1^+$  и  $G_1^-$  соответственно. Все решения порождающих семейств имеют период  $T = 2\pi$  и след  $\text{Tr} = 2$ . При  $\mu > 0$

$$T = 2\pi(1 + \tilde{\omega}_1\mu + o(\mu^2)), \quad \text{Tr} = 2 + \text{Tr}_1\mu + o(\mu^2)$$

Были приведены значения  $\tilde{\omega}_1$  и  $\text{Tr}_1$  для семейств  $G_1$  и  $E_1^-$  ([2], Приложение; табл. 1 и 2). При  $\mu = 0$  семейства  $G_1^\pm$  пересекаются с семейством  $E_1^-$  при  $e = 0.917$  ([2], рис. 17).

Изучим периодические решения ограниченной задачи при  $y \in (0, 2\pi)$  и малых  $\mu > 0$ ,  $z_1, z_2, z_3$ . Будем считать, что  $z_i = O(\sqrt{\mu})$  и выделим в гамильтониане (7.3) члены до  $O(\mu)$  включительно. Такое первое приближение гамильтониана и соответствующая система Гамильтона имеют вид

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} + \rho_2 - \frac{3}{2}z_1^2 + \mu\beta_{000}(y) \quad (7.5)$$

$$\dot{\rho}_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = -1, \quad \dot{z}_1 = \mu \frac{d\beta_{000}}{dy}, \quad \dot{y} = 3z_1 \quad (7.6)$$

Теперь сделаем замену

$$z_1 = \mu^{1/2}z, \quad \rho_2 = \mu\rho, \quad t = \mu^{-1/2}\tau, \quad \varphi_2 = \varphi \quad (7.7)$$

Не будучи канонической, т.е. не сохраняя гамильтонов характер всей системы, она переводит систему (7.6) в систему

$$\rho' = 0, \quad \varphi' = -\mu^{-1/2} \quad (7.8)$$

$$y' = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad z' = \frac{\partial H}{\partial y}; \quad H = -\frac{3}{2}z^2 + \beta_{000}(y) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{3}{2}z^2 + \cos y - (2 - 2\cos y)^{-1/2} \quad (7.9)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\tau$ . Следовательно, у подсистемы (7.8) имеется первый интеграл  $\rho = \text{const}$ . Интегральные кривые подсистемы (7.9), т.е. линии уровня функции  $H$ , изображены на фиг. 12. Имеются орбиты трех типов: 1) либрации вокруг точки  $L_4$  или точки  $L_5$  — ”головастики”; 2) асимптотические к точке  $L_3$ ; 3) либрации вокруг ”восьмерки” асимптотических решений — с подковообразными интегральными кривыми.

7.2. *Периодические решения системы (7.8), (7.9).* За исключением неподвижных точек и асимптотических решений, все остальные решения подсистемы (7.9) — периодические. Найдем их периоды. Подсистема (7.9) имеет вид

$$y' = 3z, \quad z' = \sin y(-1 + (2 - 2\cos y)^{-3/2}) \quad (7.10)$$

Положим  $v^2 = 2 - 2\cos y$ . Тогда  $|v| \leq 2$  и

$$\sin y = v(1 - \frac{v^2}{4})^{1/2}, \quad y' = v'(1 - \frac{v^2}{4})^{-1/2}, \quad H = -\frac{3}{2}z^2 + 1 - \frac{v^2}{2} - \frac{1}{v} \quad (7.11)$$

В координатах  $z, v \geq 0$  линии уровня функции  $H$  показаны на фиг. 13. Точка  $(0,1)$  — неподвижная; она соответствует точке  $L_4$ . Точке  $L_3$  соответствует точка  $(0,2)$ ; в ней и на асимптотической кривой  $H = -3/2$ .

Асимптотическая кривая пересекает ось  $v$  при  $v = \sqrt{2} - 1$ . На линиях уровня функции  $H = \text{const}$  имеем

$$z^2 = \frac{1}{3}(2 - 2H - v^2 - \frac{2}{v})$$

Поэтому из первого уравнения системы (7.10) и равенств (7.11) получаем

$$\frac{2}{\sqrt{3}}v^{1/2}[(4 - v^2)(2v - 2Hv - v^3 - 2)]^{-1/2}dv = d\tau \quad (7.12)$$

Для точки  $z = 0$ ,  $v = v_0$  находим

$$H = H_0 = 1 - v_0^2/2 - v_0^{-1} \quad (7.13)$$

Кривая  $H = H_0 = \text{const}$  имеет на оси  $v$  еще две точки — корни уравнения  $2 - v_0^2v - v_0v^2 = 0$ , из них положителен только один

$$v_1 = \frac{1}{2}[(v_0^2 + \frac{8}{v_0})^{1/2} - v_0]$$

Будем интегрировать уравнение (7.12) вдоль линии уровня от  $v_0 \in (0, 1)$  до

$$\begin{aligned} v_2 &= 2, \text{ если } v_0 \in (0, \sqrt{2} - 1) \\ v_2 &= v_1, \text{ если } v_0 \in (\sqrt{2} - 1, 1) \end{aligned}$$

При учете формулы (7.13) получаем

$$I(v_0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{v_0}^{v_2} (v_0v)^{1/2} [(4 - v^2)(v - v_0)(2 - v_0^2v - v_0v^2)]^{-1/2} dv \quad (7.14)$$

Для подковообразных орбит  $v_0 \in (0, \sqrt{2} - 1)$  и период  $T(v_0) = 4I(v_0)$ . Для орбит в форме головастиков  $v_0 \in (\sqrt{2} - 1, 1)$  и период  $T(v_0) = 2I(v_0)$ . График функции  $\tilde{T}(v_0) \stackrel{\text{def}}{=} T(v_0)/(2\pi)$  показан на фиг. 14. При этом  $\tilde{T}(v_0) \rightarrow 2/(3\sqrt{3}) \approx 0.385$ , если  $v_0 \rightarrow 1$ . При  $v_0 \rightarrow \sqrt{2} - 1$  с обеих сторон  $\tilde{T}(v_0) \rightarrow +\infty$ .

Решения системы (7.8), (7.9) расположены на инвариантных торах

$$\rho = \rho_0 = \text{const} \neq 0, \quad H = H_0 = \text{const}$$

и на инвариантном многообразии  $\rho = 0$ . Частота периодических решений на этом многообразии равна  $\omega_1 = 1/\tilde{T}(v_0)$ , а частота внешних вращений по углу  $\varphi$  равна  $\omega_2 = -1/\sqrt{\mu}$ .

Положим

$$n = -\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\tilde{T}(v_0)}{\sqrt{\mu}} \quad (7.15)$$

7.3. *Локальные семейства периодических решений.* Вернемся к системе (7.6). Структура ее решений такая же, как у системы (7.8), (7.9). В частности, она имеет инвариантное многообразие  $\rho_2 = 0$  заполненное периодическими решениями с отношением частот (7.15). Полная система (7.3) является возмущением системы (7.6). При таких возмущениях возникают бифуркации семейств периодических решений на тех решениях из многообразия  $\rho_2 = 0$ , для которых отношение частот (7.15) — целое число. Это происходит при значениях  $v_0$ , при которых

$$\tilde{T}(v_0) = n\sqrt{\mu} \quad (7.16)$$

Как видно из фиг. 14, для любого  $\mu \in (0, 1/2)$  существуют единственные значения

$$v_0 = v_0^{(n)} \in (0, \sqrt{2} - 1), \quad \text{и} \quad v_0 = \tilde{v}_0^{(n)} \in (\sqrt{2} - 1, 1)$$

для которых выполнено равенство (7.16) с  $n > 0$  и  $n > 2/(3\sqrt{3\mu})$  соответственно. Поэтому бифуркационная орбита-подкова имеется для каждого натурального  $n$ , а бифуркационная орбита-головастик вблизи точки  $L_4$  имеется лишь для каждого целого  $n > 2/(3\sqrt{3\mu})$  (аналогично вблизи точки  $L_5$ ).

7.4. *Глобальная структура семейств с подковообразными орбитами.* Периодические решения с подковообразными орбитами являются симметричными. Поэтому они пересекаются с плоскостью симметрии  $\Pi$ , и характеристики семейств таких решений образуют кривые на плоскости  $\Pi$ . Для малых  $|\tilde{e} - 1|$  расположение этих характеристик схематически показано на фиг. 15, что получается, если результаты работы [48] изобразить в координатах  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{e}$ . Семейства, характеристики которых в координатах  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{e}$  содержат горизонтальный участок  $\tilde{e} \approx 1$ , назовем *основными* и обозначим  $\Gamma\text{Н}$ . Если продолжить эти семейства, то они пересекаются с семейством  $E_1^-$  как локально кратные. Учитывая локальные результаты подразд. 7.3 и [48], и глобальные результаты [49, 50], получим расположение характеристик натуральных основных семейств с подковообразными орбитами  $\Gamma\text{Н}$ , показанное на фиг. 15 в координатах  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{e}$ . При этом полоса  $\tilde{e} \in [-1, -2]$  помещена сверху для непрерывности характеристик. Показаны характеристики двух натуральных замкнутых семейств, которые периодически повторяются, как внутрь, так и наружу изображенного кольца. Вертикальный отрезок — это характеристика семейства  $E_1^-$ , выходящего из неподвижной точки  $L_3$ . Числа  $m$  в местах его пересечения с характеристиками семейств  $\Gamma\text{Н}$  указывают локальную кратность этих

семейств; они расположены справа. Внутри кольца у каждой его четверти приведено четыре числа, соответствующие характеристикам, расположенным в том же порядке, что и числа. Одинаковые числа у негоризонтальных участков характеристик указывают на участки характеристик, соответствующие одному участку семейства. Участки характеристик с номерами 1,2,3,4 принадлежат одному семейству, а с номерами 5,6,7,8 — другому. Все это согласуется с численными результатами о подковообразных орбитах [4, 5, 48].

7.5. *Глобальная структура семейств с орбитами в форме головастиков.* В принципе, структура этих семейств аналогична структуре семейств орбит-подков. Основное отличие заключается в том, что орбиты головастики не являются симметричными и характеристики их семейств нельзя изобразить на плоскости симметрии  $\Pi$ . Однако их можно изобразить как кривые в трехмерном глобальном сечении  $\Gamma$  фазового пространства ([2], гл. III, п. 2.Д) с координатами  $a, \theta, \tilde{e}$ . Поскольку каждое такое семейство пересекается с семейством  $G_1$  как локально  $q$ -кратное, то ему соответствуют  $2q$  характеристик. Только две из этих характеристик существуют при малых  $|\tilde{e} - 1|$ ; назовем их *главными характеристиками* семейства. Рассмотрим проекции главных характеристик на полуплоскость  $a, \tilde{e}$ . По-прежнему основными семействами FT будем называть те, у которых эти проекции содержат горизонтальный участок  $\tilde{e} \approx 1$ . Проекции главных характеристик основных семейств FT схематически показаны на фиг. 16, аналогичной фиг. 15. На фиг. 16 вертикальный отрезок — это проекция характеристики семейства  $G_1$ , точка  $a = \tilde{e} = 1$  — проекция неподвижной точки  $L_4$ , и рост кратности пересечений семейств FT с семейством  $G_1$  происходит в обратном направлении: изнутри наружу.

В традиционной терминологии семейство  $G_1$  — это семейство короткопериодических решений, выходящее из неподвижной точки  $L_4$ , горизонтальные участки характеристик фиг. 16 соответствуют семейству долгопериодических решений, выходящему из неподвижной точки  $L_4$  при малых  $\mu > 0$ , а сами основные семейства FT — мосты резонансных периодических решений [51].

*Замечание.* Периодические решения, рассмотренные в разд. 7, не имеют порождающих решений в основной предельной задаче (и в остальных предельных задачах тоже). Семейства  $i_k$ , рассмотренные в разд. 6, хотя и имеют порождающее семейство  $i$ , но сильно от него отличаются. Их нельзя рассматривать как лишь возмущения порождающего семейства. Эти примеры показывают, что порождающих решений основной предельной задачи недостаточно для описания семейств периодических решений

### Литература

1. *Euler L.* Theoria Motuum Lunae. Typis Academiae Imperialis Scientiarum, Petropoli, 1772. Reprinted in: Opera Omnia, Ser. 2 / Ed. L. Courvoisier, V. 22. Orell Füssli Turici, Lausanne, 1958, 411 p.
2. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.
3. *Брюно А.Д.* Периодические решения системы Гамильтона // Космич. исследования. 2006. Т. 44. N 3. С. 258-271.
4. *Llibre J., Olle M.* The motion of Saturn coorbital satellites in the restricted three-body problem // Astron. Astrophys. 2001. V. 378. P. 1087-1099.
5. *Llibre J., Olle M.* Horseshoe periodic orbits in the restricted three-body problem // New Advances in Celestial Mechanics and Hamiltonian Systems / Eds. J. Delgado et al., Dordrecht: Kluwer; 2004. P. 137-152.
6. *Franklin F.A., Colombo G.* A dynamical model for the radial structure of Saturn's ring // Icarus. 1970. V. 12. N. 3. P. 338-347.
7. *Kotoulas T., Voyatzis G.* Comparative study of the 2:3 and 3:4 resonant motion with Neptune: An application of symplectic mappings and low frequency analysis // Celest. Mech. and Dynam. Astron. 2004. V. 88. N 4. P. 343-363.
8. *Voyatzis G., Kotoulas T., Hadjidemetriou J.D.* Symmetric and non-symmetric periodic orbits in the exterior mean motion resonances with Neptune // Celest. Mech. and Dynam. Astron. 2005. V. 91. N 1-2. P. 191-202.
9. *Voyatzis G., Kotoulas T.* Planar periodic orbits in exterior resonances with Neptune // Planetary and Space Science. 2005. V 53. N 1-2. P. 1189-1199.
10. *Colombo G., Franklin F.A.* On a family of periodic orbits of the restricted three-body problem and the question of the gaps in the asteroid belt and in Saturn's ring // Astron. Journal. 1968. V. 73 N 2. P. 111-123.
11. *Брюно А.Д.* Однократные периодические решения ограниченной задачи трех тел в случае Солнце – Юпитер. Препринт N 66. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1993. 27 с.

12. *Брюно А.Д.* Двукратные периодические решения ограниченной задачи трех тел в случае Солнце – Юпитер. Препринт N 67. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1993. 29 с.
13. *Брюно А.Д.* Многократные периодические решения ограниченной задачи трех тел в случае Солнце – Юпитер. Препринт N 68. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1993. 23 с.
14. *Брюно А.Д.* Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. Препринт N 93. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1996. 32 с.
15. *Broucke M.R.* Periodic orbits in the restricted three-body problem with Earth-Moon masses // NASA. Techn. Report 32-1168. Pasadena, 1968. 92 p.
16. *Papadakis K., Goudas C.* Restricted three-body problem: An approximation of its general solution. P. 1. The manifold of symmetric periodic solutions // *Astrophis. Space Sci.* 2006. V. 305. N. 2. P. 99-124.
17. *Hénon M.* Exploration numérique du problème restreint. I - Masses égales, orbites périodique // *Ann. Astrophys.* 1965. V. 28. N 3. P. 499-511.
18. *Hénon M.* Sur les orbits interplanétaires qui rencontrent deux fois la terre // *Bull. Astron., Ser. 3.* 1968. V. 3. N. 3. P. 377-402.
19. *Брюно А.Д., Варин В.П.* О семействах периодических решений ограниченной задачи трех тел. Препринт N 10. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 20 с.
20. *Hénon M.* Generating Families of the Restricted Three-Body Problem. Berlin etc.: Springer, 1997. 278 p. (Lect. Notes Phys. V. 52).
21. *Hénon M.* Generating Families of the Restricted Three-Body Problem. II. Quantitative Study of Bifurcations. Berlin etc.: Springer, 2001. 301 p. (Lect. Notes Phys. V. 65).
22. *Bruno A.D., Varin V.P.* On families of periodic solutions of the restricted three-body problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2006. V. 95. N. 1. P. 27-54.
23. *Szebehely V.* Theory of Orbits. N.Y.; L.: Acad. Press, 1967. = *Себекей В.* Теория орбит. М: Наука, 1982. 656 с.

24. *Брюно А.Д.* О периодических облетах Луны. Препринт N 91. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1978. 25 с.
25. *Bruno A.D.* On periodic flybys of the moon // *Celest. Mech.* 1981. V. 24. N 3. P. 255-268.
26. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
27. *Bruno A.D.* Power geometry and four applications // *J. Math. Sci.* 1999. V. 95. N 5. P. 2483-2512.
28. *Брюно А.Д., Петрович В.Ю.* Десингуляризации ограниченной задачи трех тел. Препринт N 53. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 11 с.
29. *Hill G.W.* Researches in the lunar theory // *Amer. J. Math.* 1878. V. 1. P. 5-26; 129-147; 245-260.
30. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem V. Hill's case: periodic orbits and their stability // *Astron. and Astrophys.* 1969. V. 1. N. 2. P. 223-238.
31. *Коган А.Ю.* Далекие спутниковые орбиты в ограниченной круговой задаче трех тел // *Космич. исследования.* 1988. Т. 26. N. 6. С. 813-818.
32. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* Квазиспутниковые периодические орбиты // *Аналитическая небесная механика* /Ред. К.В. Холшевников. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. С. 53-57.
33. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* Теория возмущений и анализ эволюции квазиспутниковых орбит в ограниченной задаче трех тел // *Космич. исследования.* 1993. Т. 31. N 2. С. 75-99.
34. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной // *Письма в Астрон. журнал.* 1994. Т. 20. N 3. С. 229-240.
35. *Benest D.* Libration effects for retrograde satellites in the restricted three-body problem // *Celest. Mech.* 1976. V. 13. N 2. P. 203-215.
36. *Wintner A.* The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton etc.: Oxford Univ. Press, 1941 = *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики: М.: Наука, 1967. 523 с.



37. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. VI. Hill's case: nonperiodic orbits // *Astron. and Astrophys.* 1969. V. 1. N. 1. P. 24-36.
38. *Bruno A.D.* Singular perturbations in Hamiltonian mechanics // *Hamiltonian Mechanics.* / Ed. J. Seimenis. N.Y.: Plenum Press, 1994. P. 43-49.
39. *Perko L.M.* Families of symmetric periodic solutions of Hill's problem. I: First species periodic solutions for  $C \ll -1$  // *Amer. J. Math.* 1982. V. 104. N 2. P. 321-352.
40. *Perko L.M.* Families of symmetric periodic solutions of Hill's problem II: Second species periodic solutions for  $C \ll -1$  // *Amer. J. Math.* 1982. V. 104. N 2. P. 353-397.
41. *Perko L.M.* Periodic solutions of the restricted problem that are analytic continuations of periodic solutions of Hill's problem for small  $\mu > 0$  // *Celest. Mech.* 1983. V. 30. P. 115-132.
42. *Perko L.M.* Second species solutions with an  $O(\mu^\nu)$ ,  $0 < \nu < 1$ , near moon passage // *Celest. Mech.* 1981. V. 24. N 2. P. 155-171.
43. *Hitzl D.L., Hénon M.* Critical generating orbits for second species periodic solutions of the restricted problem // *Celest. Mech.* 1977. V. 15. N 4. P. 421-452.
44. *Hitzl D.L., Hénon M.* The stability of second species periodic orbits in the restricted problem ( $\mu = 0$ ) // *Acta Astronaut.* 1977. V. 4. N. 9-10. P. 1019-1039.
45. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейство  $h$  периодических решений ограниченной задачи при малых  $\mu$ . Препринт N 67. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 32 с.
46. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейство  $h$  периодических решений ограниченной задачи при больших  $\mu$ . Препринт N 64. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. 31 с.
47. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Порождающее семейство  $i$  периодических решений ограниченной задачи. Препринт N 36. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 27 с.
48. *Barrabes E., Mikkola S.* Families of periodic horseshoe orbits in the restricted three-body problem // *Astron. and Astrophys.* 2005. V. 432. N. 3. P. 1115-1129.

49. *Schanzle A.F.* Horseshoe-shaped orbits in the Jupiter-Sun restricted problem // *Astron. Journal*, 1967. V. 72. N 2. P. 149-157.
50. *Taylor D.B.* Horseshoe-shaped periodic orbits in the restricted problem of three bodies for Sun-Jupiter mass ration // *Astron. and Astrophys.* 1981. V. 103. N 2. P. 288-294.
51. *Henrard J.* The web of periodic orbits of  $L_4$  // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2002. V. 83. N. 1-4. P. 291-302.

Таблица 2.

$k$	$T/(2\pi)$	$C$	Tr	$\tilde{a}(0)$	$\tilde{e}(0)$	$\tilde{a}(T/2)$	$\tilde{e}(T/2)$
1	1/2	3.4668	-2	-0.4807	1	0.4807	1
2	1	3.1748	2	-0.6300	1	0.6300	1
3	1	1.5874	2	-0.6300	$\pm 2$	0.6300	$\pm 2$
4	1	0	2	-0.6300	-1	0.6300	-1
5 <sub>1</sub>	1	0.3027	$[2, +\infty]$	-0.6300	-0.4126	0.6300	-0.4126
6 <sub>1</sub>	1	1.7935	$+\infty$	-0.5575	0	0.6657	-0.4978
7 <sub>1</sub>	1	2.8720	$[+\infty, 2]$	-0.6300	0.4126	0.6300	0.4126
8	1	3.1748	2	-0.6300	1	0.6300	1
9	3/2	3.0925	-2	-0.7113	1	0.7113	1
10	2	3.0575	2	-0.7631	1	0.7631	1
11 <sub>2</sub>	2	2.0876	$[2, -\infty],$ $[-\infty, +\infty]$	-0.7631	0.1044	0.7631	1.8955
12 <sub>2</sub>	2.281	2.8741	$[+\infty, -\infty]$	-0.6328	0.4182	0.9001	1.3695
13 <sub>2</sub>	2.055	1.7935	$-\infty$	-0.5575	0	0.7377	1.9669
14 <sub>2</sub>	1.973	1.4018	$-\infty$	-0.5548	-0.0368	0.7133	$\pm 2$
15 <sub>2</sub>	2	-0.2960	$[-\infty, 2]$	-0.7631	-0.6067	0.7631	-1.3932
16	2	-0.4367	2	-0.7631	-1	0.7631	-1
17 <sub>1</sub>	2	-0.3505	$[2, +\infty]$	-0.7631	-1.3104	0.7631	-0.6896
18 <sub>1</sub>	2	1.4845	$+\infty$	-0.6736	$\mp 2$	23.872	-1.9581
19 <sub>1</sub>	2	2.9712	$[+\infty, 2]$	-0.7631	1.3104	0.7631	0.6896
20	2	3.0575	2	-0.7631	1	0.7631	1

Таблица 2 (окончание).

$k$	$T/(2\pi)$	$C$	Tr	$\tilde{a}(0)$	$\tilde{e}(0)$	$\tilde{a}(T/2)$	$\tilde{e}(T/2)$
21	5/2	3.0392	-2	-0.7990	1	0.7990	1
22	3	3.0285	2	-0.8254	1	0.8254	1
23 <sub>2</sub>	3	2.5673	[2, -∞], [-∞, +∞]	-0.8254	1.6657	0.8254	1.6657
24 <sub>2</sub>	3.347	2.9712	[+∞, -∞]	-0.7634	1.3099	0.9507	1.1765
25 <sub>2</sub>	3.088	1.4845	-∞	-0.6736	±2	0.7548	1.9214
26 <sub>2</sub>	2.990	1.4018	-∞	-0.6717	-1.9985	0.7133	±2
27 <sub>2</sub>	3	-0.5544	[-∞, 2]	-0.8254	-1.2358	0.8254	-1.2357
28	3	-0.6057	2	-0.8254	-1	0.8254	-1
29 <sub>1</sub>	3	-0.5646	[2, +∞]	-0.8254	-0.7886	0.8254	-0.7885
30 <sub>3</sub>	2.858	-0.2960	+∞	-0.7631	-0.6067	1.0894	-1.0821
31 <sub>3</sub>	2.973	1.4018	+∞	-0.5548	-0.0368	2.0701	-2.4830
32 <sub>3</sub>	3.111	1.7935	+∞	-0.5575	0	1.5137	-2.6606
33 <sub>3</sub>	3.575	2.8741	[+∞, -∞]	-0.6328	0.4182	1.1566	-1.1354
34 <sub>3</sub>	3.103	2.0876	[-∞, +∞]	-0.7631	0.1044	1.4578	-2.6859
35 <sub>1</sub>	3	2.9874	[+∞, 2]	-0.8254	0.7885	0.8254	0.7885
36	3	3.0285	2	-0.8254	1	0.8254	1
37	7/2	3.0216	-2	-0.8457	1	0.8457	1
38	4	3.0170	2	-0.8617	1	0.8617	1
39 <sub>2</sub>	4	2.7447	[2, -∞], [-∞, +∞]	-0.8617	0.4786	0.8617	1.5213

Таблица 3.

$k$	$\mu'_k$	$\mu''_k$	$\mu'_k/\mu'_1$	$\mu''_k/\mu''_1$	$k^{-8/3}$
1	$4.131 \cdot 10^{-3}$	$3.669 \cdot 10^{-2}$	1	1	1
2	$6.617 \cdot 10^{-4}$	$5.273 \cdot 10^{-3}$	0.160	0.144	0.157
3	$2.153 \cdot 10^{-4}$	$1.882 \cdot 10^{-3}$	0.052	0.051	0.053
4	$9.543 \cdot 10^{-5}$	$8.866 \cdot 10^{-4}$	0.023	0.024	0.025