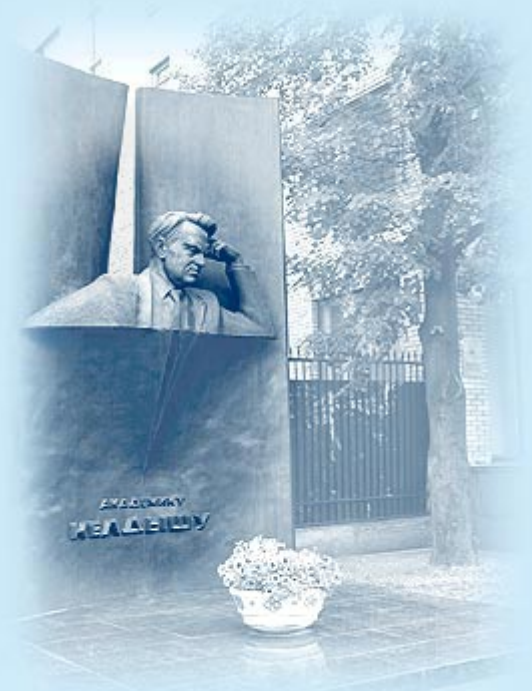




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 44 за 2007 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Л. Д. Пустыльников

## Асимптотика производных функции $\xi(\zeta, \chi)$

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Пустыльников Л. Д. Асимптотика производных функции  $\xi(\zeta, \chi)$  // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 44. 12 с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-44>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

Л.Д. Пустыльников

**АСИМПТОТИКА ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ  $\xi(s, \chi)$**

Москва, 2007 г.

УДК 511.36

Л.Д. Пустыльников. Асимптотика производных функции  $\xi(s, \chi)$ .  
Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
Москва, 2007.

В работе выводится асимптотическая формула для производных  
функции Дирихле  $\xi(s, \chi)$ .

L.D. Pustyl'nikov. An asymptotic formula for the derivatives of the func-  
tion  $\xi(s, \chi)$ . Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of  
RAS, Moscow, 2007.

An asymptotic formula for the derivatives of the Dirichlet function  $\xi(s, \chi)$   
is derived.

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда  
фундаментальных исследований (проекты 05-01-00050 и 06-01-00085).

E-mail: lpustyl'n@spp.keldysh.ru

Сайт: [www.keldysh.ru/электронная библиотека/](http://www.keldysh.ru/электронная_библиотека/)

Каталог публикаций сотрудников ИПМ/препринт/

В этой работе мы находим асимптотическую формулу для значений четных производных функции

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi),$$

где  $\chi = \chi(n)$  вещественный примитивный характер по модулю  $k$ ,

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi(-1) = +1, \\ 1, & \text{если } \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

$L(s, \chi)$  —  $L$ -функция Дирихле,  $\Gamma(s)$  — гамма-функция Эйлера. При этом будем предполагать, что

$$L(1/2, \chi) \neq 0.$$

Известно, что при всех  $s$  справедливо равенство  $\xi(s, \chi) = \xi(1-s, \chi)$ , и поэтому все нечетные производные функции  $\xi(s, \chi)$  в точке  $s = 1/2$  равны нулю. Нахождение явного асимптотического выражения для значений четных производных функции  $\xi(s, \chi)$ , когда порядок производной стремится к бесконечности представляет интерес в связи с расширенной гипотезой Римана.

**Теорема.** *Предположим, что  $\chi(n)$  — четный вещественный примитивный характер (т.е.  $\chi(-1) = 1$ ), а  $m$  — четное натуральное число. Тогда при  $m \rightarrow \infty$  справедливо следующее асимптотическое равенство*

$$\begin{aligned} \frac{d^m \xi}{ds^m} \left(\frac{1}{2}, \chi\right) &\sim \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \left(\ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + \beta\right)^m \times \\ &\times \exp\left(-\frac{mk}{\ln \frac{mk}{\pi}} e^\beta\right) \left(\frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}}\right)^{1/4} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m \left(\frac{1}{2(\ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi})^2} + \frac{1}{2 \ln \frac{mk}{\pi}}\right)}}, \end{aligned}$$

где  $\beta = \beta(m)$  — такая функция, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta(m) = 0$ .

**Следствие.** *При выполнении условий теоремы 1 существует такое  $m_0 = m_0(k)$ , зависящее от  $k$ , что при  $m \geq m_0$  справедливо неравенство*

$$\frac{d^m \xi}{ds^m} \left(\frac{1}{2}, \chi\right) > 0.$$

Доказательство теоремы проведено в последующих пяти пунктах.

$\mathbf{1}^0$ . Пусть  $k > 15$ ,  $\chi$  — четный примитивный характер,  $\pi x^*/k \geq \pi/15$ ,  $x^* \geq k/15$  и

$$\frac{d^m \xi}{ds^m} \left( \frac{1}{2}, \chi \right) = \left( \frac{1}{2} \right)^m \int_1^\infty (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx, \quad (0)$$

где  $\theta(x, \chi) = 2e^{-\pi x/k} + 2 \sum_{n=2}^\infty \chi(n) e^{-n^2 \pi x/k}$ ,  $k \geq 2$ . Пусть  $x^* = k/15$ ,

$$I'_m = \int_{x^*}^\infty (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx. \quad (1)$$

Полагаем  $x = e^u$ ,  $u = \ln x$ . Тогда  $du = dx/e^u$ . Так как при  $x \geq x^*$  выполнено неравенство  $\theta(x, \chi) > 0$ , то  $I'_m$  можно преобразовать следующим образом:

$$I'_m = \int_{u^*}^\infty u^m e^{u/4} \theta(e^u, \chi) du = \int_{u^*}^\infty e^{F(u)} du, \quad (2)$$

где  $u^* = \ln x^*$ ,

$$F(u) = m \ln u + \frac{u}{4} + \left( \ln 2 - \frac{\pi}{k} e^u \right) + \ln(1 + \psi(e^u)), \quad (3)$$

$$\psi(e^u) = \sum_{n=2}^\infty \chi(n) e^{-(n^2 - 1)\pi e^u/k}. \quad (4)$$

Дифференцируя (4), получаем равенства

$$\frac{dF}{du} = \frac{m}{u} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{k} e^u + \frac{d \ln(1 + \psi(e^u))}{du}, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 F}{du^2} = -\frac{m}{u^2} - \frac{\pi}{k} e^u + \frac{d^2 \ln(1 + \psi(e^u))}{du^2}. \quad (6)$$

При  $u \geq u^*$  рассмотрим уравнение

$$\frac{dF}{du}(u) = 0. \quad (7)$$

Так как  $x \geq 1$ , то в силу (4)–(6) существует такое  $m^* = m^*(k) \geq 2$ , что, если  $m \geq m^*$ , то при  $u \geq u^*$

$$\frac{d^2 F}{du^2}(u) < 0. \quad (8)$$

Поэтому, если в области  $u \geq u^*$  решение уравнения (7) существует, то оно — единственное. Рассмотрим приближенное уравнение

$$\frac{m}{u} - \frac{\pi}{k} e^u = 0. \quad (9)$$

В силу леммы 1.2 из работы [2] его решение  $u = \hat{u}$  имеет вид

$$\hat{u} = \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_1, \quad (10)$$

где  $c_1 = c_1(m)$  — функция, удовлетворяющая равенству  $\lim_{m \rightarrow \infty} c_1(m) = 0$ . Поэтому в силу (10), (7) и (5) решение  $u = \tilde{u}$  уравнения (7) имеет вид

$$\tilde{u} = \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2, \quad (11)$$

где  $c_2 = c_2(m)$  — функция, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_2(m) = 0. \quad (12)$$

Поэтому  $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{u}(m) = \infty$ . Выберем число  $m^*$  — достаточно большим, чтобы при  $m \geq m^*$  выполнялось неравенство  $\tilde{u}(m) > u^* = \ln(k/15)$ . Пусть  $\varepsilon_m$  — константа, удовлетворяющая неравенству

$$0 < \varepsilon_m < \tilde{u} - u^* = \tilde{u} - \ln \frac{k}{15}. \quad (13)$$

Подставляя (11) в (4), получаем:

$$\begin{aligned} e^{F(\hat{u})} &= 2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)^m \exp \left\{ -\frac{mk}{\ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right\} \times \\ &\times \left( \frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right)^{1/4} \left( 1 + \psi \left( \frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Далее, в силу (12) при  $m \rightarrow \infty$  имеем асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \left( \frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right)^{1/4} &\sim \left( \frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} \right)^{1/4}, \\ \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 &\sim \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi}, \end{aligned}$$

и равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi \left( \frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right) = 0.$$

Поэтому в силу (14) при  $m \rightarrow \infty$  получаем асимптотическое равенство

$$e^{F(\tilde{u})} \sim 2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)^m \exp \left\{ -\frac{mk}{\ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right\} \left( \frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} \right)^{1/4}. \quad (15)$$

Подставляя (11) в (6), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u}) &= -\frac{m}{\left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)^2} - \frac{\pi}{k} \exp \left\{ \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right\} + \\ &+ \frac{d^2 \ln \left( 1 + \psi \left( 1 + \exp \left\{ \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right\} \right) \right)}{du^2} = \quad (16) \\ &= -\frac{m}{\left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)^2} - \frac{m}{\ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} + o(m) < -c_3 \frac{m}{\ln \frac{mk}{\pi}}, \end{aligned}$$

где при большом значении  $m$  константа  $c_3 > 0$  не зависит от  $m$  и  $\lim_{m \rightarrow \infty} o(m)/m = 0$ .

Оценим величину  $|d^3 F(u)/du^3|$  в области  $\tilde{u} - \varepsilon_m \leq u \leq \tilde{u} + \varepsilon_m$ , где  $\varepsilon_m$  — константа, удовлетворяющая неравенствам (13). Дифференцируя (6), имеем:

$$\frac{d^3 F}{du^3}(u) = \frac{2m}{u^3} - \frac{\pi}{k} e^u + \frac{d^3 \ln(1 + \psi(e^u))}{du^3}.$$

Поэтому в силу (11)

$$\sup_{\tilde{u} - \varepsilon_m \leq u \leq \tilde{u} + \varepsilon_m} \left| \frac{d^3 F}{du^3}(u) \right| < c_4 \left( \frac{m}{\left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 - \varepsilon_m \right)^3} + \frac{mke^{\varepsilon_m}}{\ln \frac{mk}{\pi}} \right), \quad (17)$$

где  $c_4 > 0$  — константа, не зависящая от  $m$ . В области  $\tilde{u} - \varepsilon_m \leq u \leq \tilde{u} + \varepsilon_m$  имеем равенства

$$F(u) = \tilde{F}(u) + \hat{F}(u), \quad (18)$$

$$\begin{cases} \tilde{F}(u) = F(\tilde{u}) + (1/2)(d^2 F/du^2)(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2, \\ \hat{F}(u) = (1/6)(d^3 F/du^3)(\beta)(u - \tilde{u})^3, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\tilde{u} - \varepsilon_m \leq \beta \leq \tilde{u} + \varepsilon_m$ . Применяя лемму 2.1 из работы [2], имеем:

$$\int_{\tilde{u} - \varepsilon_m}^{\tilde{u} + \varepsilon_m} \exp \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2 \right) du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\left| \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u}) \right|}} (1 + R_{\varepsilon_m}),$$

где

$$|R_{\varepsilon_m}| < \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u}) \varepsilon_m^2\right)}{1 + \sqrt{1 - \exp\left(\frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u}) \varepsilon_m^2\right)}}.$$

Поэтому в силу (16)

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2\right) du = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + R_{\varepsilon_m}), \quad (20) \\ & \sqrt{m \left( \frac{1}{2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)^2} + \frac{e^{c_2}}{2 \ln \frac{mk}{\pi}} + \frac{o(m)}{m} \right)} \end{aligned}$$

где

$$|R_{\varepsilon_m}| < \frac{\exp\left(-\frac{m\varepsilon_m^2}{2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)} - \frac{me^{c_2}\varepsilon_m^2}{2 \ln \frac{mk}{\pi}} + \varepsilon_m^2 o(m)\right)}{1 + \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{m\varepsilon_m^2}{2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)} - \frac{me^{c_2}\varepsilon_m^2}{2 \ln \frac{mk}{\pi}} + \varepsilon_m^2 o(m)\right)}}. \quad (21)$$

В силу (18) получаем:

$$e^{F(u)} = e^{\tilde{F}(u) + \hat{F}(u)} = e^{\tilde{F}(u)} + e^{\tilde{F}(u)} \left( e^{\hat{F}(u)} - 1 \right).$$

Следовательно,

$$\int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)} du = \int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{\tilde{F}(u)} du + R'_{\varepsilon_m}, \quad (22)$$

где согласно (19)

$$|R'_{\varepsilon_m}| < e^{F(\tilde{u})} \sup_{\tilde{u}-\varepsilon_m \leq u \leq \tilde{u}+\varepsilon_m} \left| e^{\hat{F}(u)} - 1 \right| \int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2\right) du. \quad (23)$$

Применяя равенство для  $\hat{F}(u)$  из (19) и оценку (17) и предполагая, что  $\varepsilon_m^3 m$  не превосходит константы, не зависящей от  $m$ , получаем



неравенство

$$\sup_{\tilde{u}-\varepsilon_m \leq u \leq \tilde{u}+\varepsilon_m} \left| e^{\hat{F}(u)} - 1 \right| < c_5 \varepsilon_m^3 \frac{mk}{\ln \frac{mk}{\pi}},$$

в котором  $c_5$  — константа, не зависящая от  $m$ .

Если же справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^3 m = 0, \quad (24)$$

то из предыдущего равенства и (23) следует, что

$$|R'_{\varepsilon_m}| < e^{F(\tilde{u})} \int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} \exp \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2 \right) du \cdot o'(m),$$

где  $\lim_{m \rightarrow \infty} o'(m) = 0$ . Поэтому в силу (22) при  $m \rightarrow \infty$  имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)} du \sim e^{F(\tilde{u})} \int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} \exp \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2 \right) du. \quad (25)$$

Применяя теперь (25), (15), (20), (21) и предполагая, что выполнено равенство (24) и равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^2 m = \infty, \quad (26)$$

получаем при  $m \rightarrow \infty$  следующее асимптотическое равенство:

$$\int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)} du \sim 2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)^m \exp \left\{ -\frac{mk}{\ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right\} \left( \frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} \right)^{1/4} \times \quad (27)$$

$$\times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m \left( \frac{1}{2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} \right)^2} + \frac{1}{2 \ln \frac{mk}{\pi}} \right)}},$$

где  $c_2 = c_2(m)$  — функция, удовлетворяющая равенству (12).

$2^0$ . Введем величины  $u_+ = \tilde{u} + \varepsilon_m$ ,  $u_- = \tilde{u} - \varepsilon_m$ . Так как  $u = \tilde{u}$  — решение уравнения (7), то

$$F(u_+) = F(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon_m^2}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\zeta_+), \quad F(u_-) = F(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon_m^2}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\zeta_-), \quad (28)$$

где  $\zeta_+$  и  $\zeta_-$  — числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\tilde{u} \leq \zeta_+ \leq \tilde{u} + \varepsilon_m, \quad \tilde{u} - \varepsilon_m \leq \zeta_- \leq \tilde{u}. \quad (29)$$

Применяя (6), (11) и (29), получаем:

$$\max \left( \frac{d^2 F}{du^2}(\zeta_-), \frac{d^2 F}{du^2}(\zeta_+), \right) < - \frac{m}{\left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 + \varepsilon_m \right)^2} - \frac{mke^{c_2 - \varepsilon_m}}{\ln \frac{mk}{\pi}} + c_6, \quad (30)$$

где  $c_6$  — константа, не зависящая от  $m$ . Пусть теперь

$$\varepsilon_m = m^{-(1/2-\delta)}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{6}. \quad (31)$$

Тогда будут справедливы равенства (24) и (26), и в силу (28) и (30) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} F(\tilde{u}) - F(u_+) &> c_7 m^\delta, \quad F(\tilde{u}) - F(u_-) > c_7 m^\delta, \\ e^{F(u_+)} &= e^{F(\tilde{u}) - (F(\tilde{u}) - F(u_+))} < \frac{e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}}, \\ e^{F(u_-)} &= e^{F(\tilde{u}) - (F(\tilde{u}) - F(u_-))} < \frac{e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}}, \end{aligned} \quad (32)$$

в которых  $c_7 > 0$  — константа, не зависящая от  $m$ . Так как согласно (6) при больших  $m$  в области  $u^* \leq u \leq \tilde{u}$  справедливо неравенство  $(d^2 F/du^2)(u) < 0$ ,  $(dF/du)(\tilde{u}) = 0$  и функция  $F(u)$  монотонно возрастает с ростом  $u$ , то в силу (32) и (11) справедливо неравенство

$$\int_{u^*}^{\tilde{u} + \varepsilon_m} e^{F(u)} du < \tilde{u} e^{F(u_-)} < \frac{\left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right) e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}}.$$

В силу равенства  $x^* = k/15$  и определения функции  $\theta(x, \chi)$  имеем:

$$\left| \int_1^{x^*} (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx \right| < c_8 k \ln^m \frac{k}{15},$$

где  $c_8$  — константа, не зависящая от  $k$  и  $m$ . Поэтому из двух последних неравенств имеем:

$$\left| \int_1^{x_-} (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx \right| < c_8 \left( \frac{\left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right) e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}} + k \ln^m \frac{k}{15} \right), \quad (33)$$

где

$$x_- = e^{u_-} = e^{\tilde{u}} - \varepsilon_m. \quad (34)$$

**3<sup>0</sup>**. Пусть  $\tilde{x}_m$  — положительное число, удовлетворяющее уравнению

$$\ln^{mk} \tilde{x}_m = e^{\pi \delta \tilde{x}_m}, \quad (35)$$

где  $\delta$  — число, введенное в (31). Тогда имеем равенства

$$\frac{mk}{\pi \delta} = \frac{\tilde{x}_m}{\ln \ln \tilde{x}_m}, \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{mk}{\pi \delta} = \ln \tilde{x}_m - \ln \ln \ln \tilde{x}_m = \tilde{y}_m - \ln \ln \tilde{y}_m \stackrel{\text{def}}{=} f(\tilde{y}_m), \quad (36)$$

где

$$\tilde{y}_m = \ln \tilde{x}_m. \quad (37)$$

Пусть  $\hat{y}_m$  — решение уравнения

$$\mu = \hat{y}_m - \ln \hat{y}_m. \quad (38)$$

В силу (36) и (38) имеем неравенства  $f(\hat{y}_m) > \mu$ ,  $f(\mu) < \mu$ , и так как функция  $f(y)$  монотонно возрастает с ростом  $\mu$ , то в силу (36)  $\tilde{y}$  удовлетворяет неравенству

$$\mu < \tilde{y}_m < \hat{y}_m. \quad (39)$$

Согласно (36) и лемме 1.1 из [2] решение  $\hat{y}_m$  уравнения (38) имеет вид

$$\hat{y}_m = \ln \frac{mk}{\pi \delta} + \ln \ln \frac{mk}{\pi \delta} + c_9,$$

а функция  $c_9 = c_9(m)$  удовлетворяет равенству  $\lim_{m \rightarrow \infty} c_9(m) = 0$ , и поэтому в силу (39) и (37) справедливы соотношения

$$\ln \frac{mk}{\pi \delta} < \ln \tilde{x}_m < \ln \frac{mk}{\pi \delta} + \ln \ln \frac{mk}{\pi \delta} + c_9. \quad (40)$$

Применяя теперь (32) и (40), получаем следующую оценку:

$$\left| \int_{u_+}^{\ln \tilde{x}_m} e^{F(u)} du \right| < e^{F(u_+)} |\ln \tilde{x}_m - u_+| < \frac{e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}} \left( \ln \frac{mk}{\pi \delta} + \ln \ln \frac{mk}{\pi \delta} + c_9 - u_+ \right). \quad (41)$$

**4<sup>0</sup>**. Оценим интеграл

$$\tilde{\mathbf{I}}_m \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{x}_m}^{\infty} (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx,$$

где  $\tilde{x}_m$  — величина, определенная в (35). Согласно (35), (40) и определению функции  $\theta(x, \chi)$  (см. начало п. 1<sup>0</sup>) имеем:

$$|\tilde{I}_m| < 2 \int_{\tilde{x}_m}^{\infty} x^{-3/4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi x}{k}(n^2 - \delta)} dx < 2 \int_{mk/\pi\delta}^{\infty} x^{-3/4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi x}{k}(n^2 - \delta)} dx. \quad (42)$$

5<sup>0</sup>. Пусть

$$I_m = \int_1^{\infty} (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx. \quad (43)$$

Тогда в силу (1) имеем: Пусть

$$I_m = \int_1^{x_-} (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx + \int_{u_-}^{u_+} e^{F(u)} du + \int_{u_+}^{\ln \tilde{x}_m} e^{F(u)} du + \int_{\tilde{x}_m}^{\infty} (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx, \quad (44)$$

где  $u_-$  и  $u_+$  — величины, введенные в начале п. 2<sup>0</sup>, величина  $x_- = e^{u_-}$  введена в (34), а величина  $\tilde{x}_m$  — решение уравнения (35).

Предполагая, что справедливы соотношения (31), в силу (33), (41) и (42) при больших  $m$  имеем:

$$\left| \int_0^{x_-} (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx + \int_{u_+}^{\ln \tilde{x}_m} e^{F(u)} du + \int_{\tilde{x}_m}^{\infty} (\ln^m x) x^{-3/4} \theta(x, \chi) dx \right| \leq \leq c_{10} \frac{\left( \ln \frac{mk}{\pi\delta} + \ln \ln \frac{mk}{\pi\delta} + c_{11} \right) e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 m^\delta}} + 2 \int_{mk/\pi\delta}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi x}{k}(n^2 - \delta)} dx. \quad (45)$$

В силу (25), (20) и (21) первое и второе слагаемое в правой части неравенства (43) при  $m \rightarrow \infty$  есть

$$o \left( \int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)} du \right).$$

Поэтому в силу (44) и (45) при  $m \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство

$$I_m \sim \int_{\tilde{u}-\varepsilon_m}^{\tilde{u}+\varepsilon_m} e^{F(u)} du,$$

а в силу (27) справедливо асимптотическое равенство

$$I_m \sim 2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} + c_2 \right)^m \exp \left\{ -\frac{mk}{\ln \frac{mk}{\pi}} e^{c_2} \right\} \left( \frac{mk}{\pi \ln \frac{mk}{\pi}} \right)^{1/4} \times \quad (46)$$

$$\times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m \left( \frac{1}{2 \left( \ln \frac{mk}{\pi} - \ln \ln \frac{mk}{\pi} \right)^2} + \frac{1}{2 \ln \frac{mk}{\pi}} \right)}},$$

где  $c_2 = c_2(m)$  — функция, удовлетворяющая равенству (12). Так как в силу равенств (0) и (43)

$$\frac{d\xi^m}{ds^m} \left( \frac{1}{2}, \chi \right) = \left( \frac{1}{2} \right)^m I_m,$$

то из (46) следует теорема, если положить  $\beta(m) = c_2(m)$ . Теорема 2 доказана.

## Список литературы

- [1] L.D. Pustyl'nikov, On the asymptotic behaviour of the Taylor series coefficient of  $\xi(s)$  // Russian Math. Surveys, v. 55, (2000), N 2, p. 349–350.
- [2] L.D. Pustyl'nikov, An asymptotic formula for the Taylor coefficients of the function  $\xi(s)$  // Izvestiya: Mathematics **65**:1 (2001), p. 85–98.