



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 62 за 2007 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[А. Д. Брюно](#), [И. В. Горючкина](#)

Все базовые  
асимптотические разложения  
решений уравнения  $P_6$  в  
случае  $a \cdot b \neq 0$

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А. Д., Горючкина И. В. Все базовые асимптотические разложения решений уравнения  $P_6$  в случае  $a \cdot b \neq 0$  // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 62. 33 с.

<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-62>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

ВСЕ БАЗОВЫЕ  
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ  
РАЗЛОЖЕНИЯ  
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ  $P_6$   
В СЛУЧАЕ  $a \cdot b \neq 0$

Москва, 2007 г.

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Все базовые асимптотические разложения решений уравнения P6 в случае  $a \cdot b \neq 0$ . Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Здесь методами степенной геометрии получены те асимптотические разложения решений уравнения P6 вблизи его особой точки  $x = 0$ , у которых порядок первого члена меньше единицы. Эти разложения названы базовыми. Они образуют 19 семейств и включают разложения четырех типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные и экзотические. Все другие асимптотические разложения решений уравнения P6 вблизи трех его особых точек  $x = 0$ ,  $x = 1$  и  $x = \infty$  вычисляются из базовых разложений с помощью симметрий уравнения. Большинство этих разложений — новые.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. All base asymptotic expansions of solutions to the equation P6 in the case  $a \cdot b \neq 0$ . Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

With the methods of power geometry we obtained those asymptotic expansions of solutions to the equation P6 near its singular point  $x = 0$ , which have the order of the first term less one. These expansions are named base expansions. They organize 19 families and include expansions of four types: power, power-logarithmic, complicated and exotic. All other asymptotic expansions of solutions to the equation P6 near its singular points  $x = 0$ ,  $x = 1$  and  $x = \infty$  compute from the base expansions by means of symmetries of the equation. The most of these expansions are new.

©ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00050).

e-mail: abruno@keldysh.ru, chukhareva@yandex.ru

## §1. Общие свойства уравнения

**2.1.1. Постановка задачи.** Шестое уравнение Пенлеве [27] имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) - y' \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left[ a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right], \quad (2.1.1)$$

где  $a, b, c, d$  – комплексные параметры,  $x$  и  $y$  – комплексные переменные,  $y' = dy/dx$ . Это уравнение имеет три особые точки  $x = 0$ ,  $x = \infty$  и  $x = 1$ .

При всех значениях параметров уравнения в окрестностях особых точек ищем асимптотические разложения его решений, которые при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$  имеют вид

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (2.1.2)$$

где показатели степени  $r$  и  $s$  – комплексные числа.

В случае  $\operatorname{Re} r \neq \operatorname{Re} s$  упорядочивание степеней  $s$  асимптотического разложения (2.1.2) идет по вещественным частям  $\operatorname{Re} s$ .

$$\text{При } x \rightarrow \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r \text{ и } \operatorname{Re} s \text{ возрастают;} \\ \infty, & \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} r \text{ и } \operatorname{Re} s \text{ убывают.} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

При этом, комплексные коэффициенты  $c_r$  и  $c_s$  асимптотического разложения (2.1.2) могут быть четырех типов:

1.  $c_r$  и  $c_s$  – постоянные (*степенные разложения*);
2.  $c_r$  – постоянный,  $c_s$  – многочлены от  $\ln x$  (*степенно-логарифмические разложения*);
3.  $c_r$  и  $c_s$  – степенные ряды по убывающим степеням  $\ln x$  (*сложные разложения*).

В случае  $\operatorname{Re} s = \operatorname{Re} r$  упорядочивание степеней  $s$  асимптотического разложения (2.1.2) идет по мнимым частям  $\operatorname{Im} s$ . При

$$x^{-\operatorname{Re} r} y \rightarrow \begin{cases} 0, & |\operatorname{Im} s| > |\operatorname{Im} r|, \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} s) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r) \text{ и } |\operatorname{Im} s| \text{ возрастают;} \\ \infty, & \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r) \cdot \operatorname{Im} s < |\operatorname{Im} r| \text{ и } \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r) \cdot \operatorname{Im} s \text{ убывают.} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Если  $x^{-\operatorname{Re} r} y \rightarrow \operatorname{const} \neq 0$  возможен любой из случаев (2.1.4). Здесь комплексные коэффициенты асимптотического разложения (2.1.2) суть  $c_r$  – ненулевая постоянная,  $c_s$  – многочлены от  $\ln x$ .

4. На комплексной плоскости выпуклая оболочка множества  $\mathbf{K} \cup r$  содержит угол с вершиной в некоторой точке, и одна из сторон этого угла параллельна мнимой оси (*экзотические разложения*).

Мы также предполагаем, что  $\arg x$  ограничен с одной стороны.

**Замечание 2.1.1.** Поскольку носитель уравнения (2.1.1) вещественный и степенные асимптотики  $c_r x^r$  решений уравнения имеют не более одного критического числа, то в экзотических разложениях (2.1.2) решений уравнения (2.1.1) все коэффициенты постоянны.

Представим уравнение (2.1.1) в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на  $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$  и перенесем в левую сторону правую часть уравнения. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} f(x, y) \stackrel{def}{=} & 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) \\ & + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + \\ & 2y'[x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + \\ & x^2(x-1)^2y(y-1)] - [2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\ & 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

**2.1.2. Носитель и многоугольник.** Носитель левой части уравнения (2.1.5), то есть множество показателей степени ее мономов, есть

$$\mathbf{S}(f) = \{Q = (q_1, q_2) : q_1 = 0, 1, 2, 3, q_2 = 3 - q_1 + k, k = 0, 1, 2, 3\}.$$

Носитель  $\mathbf{S}(f)$  и его выпуклая оболочка  $\Gamma(f)$  изображены на рис. 2 а.

Так как параметры  $a, b \neq 0$ , то многоугольник  $\Gamma(f)$  имеет вид параллелограмма с вершинами  $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$ , где  $Q_1 = (3, 0)$ ,  $Q_2 = (3, 3)$ ,  $Q_3 = (0, 6)$ ,  $Q_4 = (0, 3)$  и ребрами  $\Gamma_1^{(1)}$ ,  $\Gamma_2^{(1)}$ ,  $\Gamma_3^{(1)}$ ,  $\Gamma_4^{(1)}$ , показанными на рис. 2 а. Носитель  $\mathbf{S}(f)$  уравнения (2.1.5) лежит в целочисленной решетке  $\mathbb{Z}^2$ .

**2.1.3. Нормальные конусы.** Вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_j^{(0)}$  и  $\mathbf{U}_j^{(1)}$  вершин  $\Gamma_j^{(0)}$  и ребер  $\Gamma_j^{(1)}$  суть (см. рис. 2 б).

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1^{(0)} &= \{p_2 < 0, p_2 < p_1\}, & \mathbf{U}_1^{(1)} &= \{p_1 = p_2 < 0\}, \\ \mathbf{U}_2^{(0)} &= \{p_1 > p_2 > 0\}, & \mathbf{U}_2^{(1)} &= \{p_1 > 0, p_2 = 0\}, \\ \mathbf{U}_3^{(0)} &= \{p_2 > p_1, p_2 > 0\}, & \mathbf{U}_3^{(1)} &= \{p_1 = p_2 > 0\}, \\ \mathbf{U}_4^{(0)} &= \{p_1 < p_2 < 0\}, & \mathbf{U}_4^{(1)} &= \{p_1 < 0, p_2 = 0\}. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Согласно п. 5.4 гл. 1 [62] для  $\omega = -1$  разбиение комплексной плоскости  $r \in \mathbb{C}$  на приведенные нормальные конусы  $\check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$  показано на рис. 1.

**2.1.4. Симметрии.** Шестое уравнение Пенлеве имеет три основные симметрии, возникающие при заменах переменных

$$1) x = 1/x^*, y = 1/y^*; \quad 2) x = \check{x}, y = \check{x}/\check{y}; \quad 3) x = 1 - x^\circ, y = 1 - y^\circ.$$

**Теорема 2.1.1.** Уравнение (2.1.1) переходит в себя при подстановке

$$(x, y, a, b, c, d) = (1/x^*, 1/y^*, -b^*, -a^*, c^*, d^*). \quad (2.1.7)$$

При этом параллелограмм  $\Gamma(f)$  отражается относительно своего центра  $Q = (3/2, 3)$  (см. рис. 3а).

*Доказательство.* При замене  $y = 1/y^*$  имеем  $y' = -y^{*'} / y^{*2}$ ,  $y^{*''} = (2y^{*' - y^* y^{*''}}) / y^{*3}$ . При замене  $x = 1/x^*$  имеем  $dx^*/dx = -x^{*2}$  и  $y^{*' = -x^{*2} \dot{y}^*$ ,  $y^{*''} = \ddot{y}^* x^{*4} + 2\dot{y}^* y^{*3}$ , где точка означает производную по  $x^*$ . Следовательно,

$$y' = x^{*2} \dot{y}^* y^{*-2}, \quad y'' = (2x^{*4} \ddot{y}^{*2} - x^{*4} \dot{y}^* y^* - 2x^{*3} \dot{y}^* y^*) / y^{*3}. \quad (2.1.8)$$

Подставляя в уравнение (2.1.1) выражения (2.1.8), а также  $x = 1/x^*$  и  $y = 1/y^*$ , после сокращений, приведения подобных членов и умножения на  $x^{*3} y^{*6}$ , получаем уравнение вида (2.1.1), где вместо переменных  $x, y$  стоят  $x^*, y^*$ , а вместо параметров  $a, b, c, d$  стоят  $-b^*, -a^*, c^*, d^*$  соответственно. ■

**Теорема 2.1.2.** Уравнение (2.1.1) переходит в себя при подстановке

$$(x, y, a, b, c, d) = (\check{x}, \check{x}/\check{y}, -\check{b}, -\check{a}, -\check{d} + 1/2, -\check{c} + 1/2). \quad (2.1.9)$$

При этом параллелограмм  $\Gamma(f)$  отражается относительно горизонтальной оси  $q_2 = 3$  и деформируется параллельно этой оси (см. рис. 3б).

**Теорема 2.1.3.** Уравнение (2.1.1) переходит в себя при подстановке

$$(x, y, a, b, c, d) = (1 - x^\circ, 1 - y^\circ, a^\circ, -c^\circ, -b^\circ, d^\circ). \quad (2.1.10)$$

*Доказательства* теорем 2.1.2 и 2.1.3 проводятся аналогично доказательству теоремы 2.1.1. ■

Первые две симметрии переводят разложения решений в окрестности нуля в разложения решений в окрестности бесконечности (и обратно). Тем самым, позволяют сократить вычисления и проверить полученные результаты. С их помощью одно ребро переводится в любое из остальных трех, вершины  $\Gamma_3^{(0)} = Q_3$  и  $\Gamma_4^{(0)} = Q_4$  – в вершины  $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$  и  $\Gamma_2^{(0)} = Q_2$  соответственно (и обратно). Поэтому, вычислив разложения решений, соответствующие одному ребру и двум вершинам, с помощью симметрий можно получить решения, соответствующие остальным трем ребрам и двум вершинам. Третья симметрия переводит разложения решений в окрестности нуля в разложения решений в окрестности единицы.

### 2.1.5. Исключительные решения.

**Теорема 2.1.4.** Уравнение (2.1.1) имеет четыре исключительных решения:  $\mathcal{I}_1 : y(x) = 0$  при  $b = 0$ ;  $\mathcal{I}_2 : y(x) = 1$  при  $c = 0$ ;  $\mathcal{I}_3 : y(x) = x$  при  $d = 1/2$ ;  $\mathcal{I}_4 : y(x) = \infty$  при  $a = 0$ .

*Доказательство.* Мы считаем, что при  $y = \text{const}$ , квадрат  $y'^2$  является двукратным нулем. Поэтому отношения  $y'^2/y$  при  $y = 0$  и  $y'^2/(y - 1)$  при  $y = 1$  являются однократными нулями. Наконец, при  $y = x$  в уравнении (2.1.1) с  $d = 1/2$  дроби со знаменателем  $y - x$  взаимно уничтожаются. Решение  $y(x) = 0$  при  $b = 0$  симметрией (2.1.7) переводится в случай  $y(x) = \infty$  при  $a = 0$ . ■

## §2. Разложения вблизи нуля, соответствующие вершинам

**2.2.1. Выбор вершин.** Так как  $x \rightarrow 0$ , то  $\omega = -1$  и конус задачи  $\mathcal{K} = \{p_1 < 0\}$ . Согласно (2.1.6) с конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_3^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_4^{(0)}$ , вершин  $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ ,  $\Gamma_3^{(0)} = Q_3$ ,  $\Gamma_4^{(0)} = Q_4$  соответственно. Рассмотрим их последовательно.

Вершине  $\Gamma_1^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение  $\hat{f}_1^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2bx^3 = 0$ , которое не имеет решений.

Вершине  $\Gamma_3^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение  $\hat{f}_3^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 = 0$ , которое имеет только тривиальные решения.

**2.2.2. Разложения решений, соответствующие вершине  $\Gamma_4^{(0)}$ .** Вершина  $\Gamma_4^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} Q_4$  – левая нижняя, по теореме 1.5.1 [62] ей соответствует пара значений  $\omega_4^{(0)} = -1$ ,  $\tau = 1$ .

Соответствующее вершине  $\Gamma_4^{(0)}$  укороченное уравнение есть

$$\hat{f}_4^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2y(y')^2 - 2xy^2y' - 2x^2y^2y'' = 0. \quad (2.2.1)$$

Его характеристическое уравнение  $\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} 2(r^2 - r - r^2 + r) \equiv 0$  имеет произвольное решение. Поэтому решением уравнения (2.2.1) является выражение

$$y = c_r x^r \quad (2.2.2)$$

с произвольными комплексными постоянными  $c_r$  и  $r$ .

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_4^{(0)} = \{p_1 < p_2 < 0\}$ . Согласно п. 5.4 гл. 1 приведенный нормальный конус  $\check{\mathbf{U}}_4^{(0)} = -(1, r)$ , где

$$r : r \in \mathbb{C}, 0 \leq \text{Re} r \leq 1, r \neq 0, r \neq 1. \quad (2.2.3)$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\delta \hat{f}_4^{(0)}(x, y)}{\delta y} = 2x^2(y')^2 + 4x^2yy' \frac{d}{dx} - 4xyy' - 2xy^2 \frac{d}{dx} - 4x^2yy'' - 2x^2y^2 \frac{d^2}{dx^2}.$$

На укороченном решении  $y = c_r x^r$  она дает линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^2 x^{2r} \left( r^2 + 2rx \frac{d}{dx} - 2r - x \frac{d}{dx} - 2r(r-1) - x^2 \frac{d^2}{dx^2} \right).$$

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^2(k^2 - 2rk + r^2) = 0 \quad (2.2.4)$$

имеет двукратный корень  $k_{1,2} = r$ .

Конус задачи

$$\mathcal{K} = \{ \operatorname{Re} k < \operatorname{Re} r \text{ или } \operatorname{Re} k = \operatorname{Re} r, |\operatorname{Im} k| > |\operatorname{Im} r|, \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r) \}.$$

Так как числа  $k_{1,2}$  не лежат в конусе задачи  $\mathcal{K}$ , то они не являются критическими, т. е.  $\varkappa = 0$ . Согласно п. 2.2 гл. 1 [62] носитель разложения решений имеет вид

$$\mathbf{K} = \{ s = r + lr + m(1-r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z} \}. \quad (2.2.5)$$

Решению (2.2.2) укороченного уравнения (2.2.1) соответствуют разложения решений полного уравнения (2.1.5)

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s \text{ по } s \in \mathbf{K}, \quad (2.2.6)$$

где  $r$  из (2.2.3),  $\mathbf{K}$  из (2.2.5),  $c_r$  – ненулевая комплексная постоянная, все  $c_s$  постоянны и однозначно определены.

Изучим разложения (2.2.6). Носитель (2.2.5) имеет две образующие  $r$  и  $1-r$  и располагается на комплексной плоскости в угле с вершиной в точке  $r$ , стороны которого параллельны векторам  $(\operatorname{Re} r, \operatorname{Im} r)$  и  $(\operatorname{Re}(1-r), \operatorname{Im}(1-r))$ . Рассмотрим три случая, предполагая, что  $\operatorname{Im} r > 0$ .

*Случай 1:*  $\operatorname{Re} r = 0$ . В этом случае угол  $V$  заштрихован на рис. 4а. Разложения (2.2.6) являются экзотическими. Обозначим их семейство  $\mathcal{A}_{00}^+$ .

*Случай 2:*  $0 < \operatorname{Re} r < 1$ . В этом случае угол  $V$  заштрихован на рис. 4б. Разложения (2.2.6) являются степенными. Это семейство  $\mathcal{A}_0$ .

*Случай 3:*  $\operatorname{Re} r = 1$ . В этом случае угол  $V$  заштрихован на рис. 4в. В этом случае разложения (2.2.6) также являются экзотическими. Обозначим их семейство  $\mathcal{A}_{01}^-$ .

Итак, доказана



**Теорема 2.2.1.** При  $x \rightarrow 0$  вершине  $\Gamma_4^{(0)}$  соответствуют пять семейств дупараметрических разложений (по  $c_r$  и  $r$ ), определенные формулами (2.2.6) и (2.2.5), а именно: семейство  $\mathcal{A}_0$  степенных разложений с  $\operatorname{Re} r \in (0, 1)$ , семейства экзотических разложений  $\mathcal{A}_{00}^\tau$  с  $\operatorname{Re} r = 0$ ,  $r \neq 0$ ,  $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$  и  $\mathcal{A}_{01}^\tau$  с  $\operatorname{Re} r = 1$ ,  $r \neq 1$ ,  $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$ .

Для семейств  $\mathcal{A}_{00}^\tau$  более точный вид разложения (2.2.6) см. в (2.3.47).

Разложение (2.2.6) с  $\operatorname{Re} r \in (0, 1)$  было известно ранее. В [46, 48, 56-59] доказана его сходимость для малых  $|x|$  разными способами.

При  $\operatorname{Im} r = 0$  носитель (2.2.5) разложения (2.2.6) вещественный.

Рассмотрим случай, когда  $\operatorname{Re} r \neq 0$ ,  $\operatorname{Re} r \neq 1$  и  $\operatorname{Im} r \neq 0$ . Изобразим на плоскости  $\operatorname{Re} q_1, \operatorname{Im} q_1$  множество  $\mathbf{K} \cup \{r\}$ . Пусть, например,  $\operatorname{Im} r = 1$ . При разных значениях  $\operatorname{Re} r = 1/4$ ,  $\operatorname{Re} r = 1/2$ ,  $\operatorname{Re} r = 3/4$ , это множество показано на рис. 5а, 5б, 5в соответственно. Из рис. 5б видно, что при  $\operatorname{Re} r = 1/2$  значению  $\operatorname{Re} s = 1$  соответствуют два значения  $\operatorname{Im} s = 0$  и  $\operatorname{Im} s = 2$ , что отлично от случая  $\operatorname{Im} r = 0$  (см. [11], [16]).

Вычислим второе приближение разложения (2.2.6) в случае комплексного носителя (2.2.5).

В с л у ч а е  $1 > \operatorname{Re} r > 1/2$  второе приближение решения есть (см. рис. 5в)

$$y = c_r x^r + c_1 x. \quad (2.2.7)$$

Второе приближение уравнения (2.1.5) есть  $\hat{f}_4^{(0)}(x, y) = -x^3(y')^2 + 2x^3yy'' - 2(b-d)xy^2$ . Коэффициент  $c_1 = -b_1/\nu(1)$ , где

$$b_1 \stackrel{\text{def}}{=} x^{-2r-1} \hat{f}_4^{(0)}(x, c_r x^r) = c_r^2(-2(b-d) - 2r + r^2),$$

$\nu(1) = 2c_r^2(r-1)^2$ . Получаем

$$c_1 = \frac{2(b-d) - (r-1)^2 + 1}{2(r-1)^2}. \quad (2.2.8)$$

В с л у ч а е  $0 < \operatorname{Re} r < 1/2$  второе приближение решения есть (см. рис. 5а)

$$y = c_r x^r + c_{2r} x^{2r}, \quad (2.2.9)$$

Второе приближение уравнения (2.1.5) есть  $\hat{f}_4^{(0)}(x, y) = -3x^2y^2(y')^2 + 2xy^3y' + 2x^2y^3y'' - 2ay^4 + 2cy^4$ . Коэффициент  $c_{2r} = -b_{2r}/\nu(2r)$ , где  $b_{2r} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-4r} \hat{f}_4^{(0)}(x, c_r x^r) = -c_r^4(2(a-c) + r^2)$ ,  $\nu(2r) = 2c_r^2r^2$ . Получаем

$$c_{2r} = c_r^2 \frac{2(a-c) + r^2}{2r^2}. \quad (2.2.10)$$

В с л у ч а е  $\operatorname{Re} r = 1/2$ ,  $\operatorname{Im} r \neq 0$  второе приближение решения есть (см. рис. 5б)  $y = c_r x^r + c_1 x + c_{2r} x^{2r}$ , где коэффициенты  $c_1$  и  $c_{2r}$  определены ранее формулами (2.2.8) и (2.2.10) соответственно.

В с л у ч а е  $r = 1/2$  второе приближение решения есть (см. рис. 5б)  $y = c_{1/2} \sqrt{x} + c_1 x$ , где  $c_{1/2}$  – произвольная постоянная, коэффициент

$$c_1 = (3 + 8(b - d) + c_{1/2}^2 + 8c_{1/2}^2(a - c))/2 \quad (2.2.11)$$

есть сумма (2.2.8) и (2.2.10).

Вычислим нестепенные решения уравнения (2.2.1). Преобразуем его

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-3} \hat{f}_4^{(0)}(x, y) = 2x^2 \frac{(y')^2}{y^2} - 2x \frac{y'}{y} - 2x^2 \frac{y''}{y} = 0, \quad (2.2.12)$$

так что  $\mathbf{S}(g) = \{0\}$ . Положим  $g^* \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2 \frac{(y')^2}{y^2} - 2x \frac{y'}{y}$ , тогда  $\operatorname{coef}(g^*) = 2 - 2 = 0$ . По теоремам 1.3.5 и 1.3.6 [62] возможно существуют нестепенные решения уравнения (2.2.1), стремящиеся к бесконечности. Сделаем логарифмические преобразования  $\xi = \ln x$ ,  $\eta = d \ln y / d\xi$  в уравнении (2.2.12). Производную по  $\xi$  будем обозначать точкой. Тогда при замене  $\xi = \ln x$ , имеем

$$y' = \dot{y}/x, \quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2. \quad (2.2.13)$$

При этом уравнение (2.2.12) примет вид

$$2 \frac{(\dot{y}^2) - \ddot{y}y}{y^2} = 0. \quad (2.2.14)$$

Сделаем в выражении (2.2.14) преобразование  $\eta = d \ln y / d\xi$ , тогда

$$\dot{y} = \eta y, \quad \ddot{y} = (\dot{\eta} + \eta^2)y. \quad (2.2.15)$$

При этом получаем уравнение  $-2\dot{\eta} = 0$ . Оно имеет решение  $\eta = \operatorname{const}$ , которому соответствует степенное решение  $y = \tilde{c}x^\eta$ ,  $\tilde{c} = \operatorname{const}$ . Оно нам не подходит. Следовательно, данной вершине не соответствует никакое сложное разложение решений уравнения (2.1.5).

### §3. Разложения вблизи нуля, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$

**2.3.1. Предварительный анализ.** Ребро  $\Gamma_4^{(1)}$  – левое вертикальное, по теореме 1.5.1 [62] ему соответствует пара значений  $\omega_4^{(1)} = -1$ ,  $r_4 = 0$ .

Ребру  $\Gamma_4^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\begin{aligned} \hat{f}_4^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} & 2x^2 y (y')^2 - 3x^2 y^2 (y')^2 - 2xy^2 y' + 2xy^3 y' - 2x^2 y^2 y'' \\ & + 2x^2 y^3 y'' - 2ay^4 + 2cy^4 + 4ay^5 - 2ay^6 = 0. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_4^{(1)} = \{-\lambda(1, 0), \lambda > 0\}$ . Поскольку  $r_4 = 0$ , то ищем его степенные решения в виде  $y = c_0 \neq 0$ ,  $c_0 = \text{const}$ . Вычислим  $c_0$ . Определяющее уравнение есть

$$\tilde{f}(c_0) \stackrel{\text{def}}{=} c_0^{-3} \hat{f}_4^{(1)}(x, c_0) \stackrel{\text{def}}{=} -2ac_0(c_0^2 - 2c_0 + 1 - c/a) = 0. \quad (2.3.2)$$

Высота ребра равна трем. Уравнение (2.3.2) третьей степени. Оно всегда имеет корень  $c_0 = 0$ . Согласно п. 3.2 гл. 1 [62] надо выделить случаи, когда уравнение  $c_0^2 - 2c_0 + 1 - c/a = 0$  имеет нулевой, бесконечный и кратные корни. Оно не имеет бесконечного корня, но имеет нулевой корень  $c_0 = 0$  при  $a = c$  и двукратный корень  $c_0 = 1$  при  $c = 0$ . Поэтому, рассмотрим три случая:  $a \neq c \neq 0$ ,  $a = c \neq 0$  и  $a \neq 0$ ,  $c = 0$ .

**Замечание 2.3.2.** В качестве основного значения квадратного корня из комплексного числа будем брать его главное значение, тогда для комплексного числа  $z$  его квадратный корень можно записать в виде  $\pm\sqrt{z}$ .

**2.3.2. Разложения решений при  $a \neq c \neq 0$ .** Сначала вычислим в этом случае степенные, степенно-логарифмические и экзотические разложения решений уравнения (2.1.5), соответствующие ребру  $\Gamma_4^{(1)}$ . Уравнение (2.3.2) имеет два ненулевых корня

$$c_{0i} = 1 + (-1)^i \sqrt{c/a}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.3)$$

Первая вариация

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{f}_4^{(1)}(x, y)}{\delta y} &= 2x^2(y')^2 + 4x^2yy' \frac{d}{dx} - 6x^2y(y')^2 - 6x^2y^2y' \frac{d}{dx} - 4xyy' \\ &\quad - 2xy^2 \frac{d}{dx} + 6xy^2y' + 2xy^3 \frac{d}{dx} - 4x^2yy'' - 2x^2y^2 \frac{d^2}{dx^2} + 6x^2y^2y'' \\ &\quad + 2x^2y^3 \frac{d^2}{dx^2} - 8ay^3 + 8cy^3 + 20ay^4 - 12ay^5. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -2xc_{0i}^2 \frac{d}{dx} + 2xc_{0i}^3 \frac{d}{dx} - 2x^2c_{0i}^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x^2c_{0i}^3 \frac{d^2}{dx^2} - 8ac_{0i}^3 + \\ &\quad + 8cc_{0i}^3 + 20ac_{0i}^4 - 12ac_{0i}^5. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Характеристическое уравнение есть

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_{0i}^2 (k^2(c_{0i} - 1) - 4c_{0i}(c - a) + 10ac_{0i}^2 - 6ac_{0i}^3) = 0. \quad (2.3.6)$$

С учетом  $c_{0i}$  из (2.3.3), оно имеет два корня для каждого значения  $i = 1, 2$

$$k_i = \tau(\sqrt{2c} + (-1)^i \sqrt{2a}), \quad i = 1, 2, \quad \tau = \pm 1. \quad (2.3.7)$$

Согласно п. 5.5 гл. 1 [62] для каждого значения  $i = 1, 2$  здесь имеются два конуса задачи

$$\mathcal{K}_i^\tau = \{k_i : \operatorname{Re} k_i > 0 \text{ или } \operatorname{Re} k_i = 0, \tau \operatorname{Im} k_i > 0\}. \quad (2.3.8)$$

Положим  $\theta_i = \sqrt{2c} + (-1)^i \sqrt{2a}$ . Для фиксированного значения  $i = 1, 2$  будем различать три случая.

Случай 1.  $\operatorname{Re} \theta_i = 0$ . В этом случае в каждом из конусов задачи  $\mathcal{K}_i^\tau$  имеется по одному критическому числу. Пусть для определенности  $\operatorname{Im} \theta_i > 0$ , тогда  $\theta_i \in \mathcal{K}_i^+$  и  $-\theta_i \in \mathcal{K}_i^-$ . Носитель разложений решений есть

$$\mathbf{K} = \{s = l, l \in \mathbb{N}\}. \quad (2.3.9)$$

С учетом критических чисел  $k_i \stackrel{\text{def}}{=} \tau \theta_i$  имеем два множества

$$\mathbf{K}(\tau \theta_i) = \{s = l + m \tau \theta_i, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l + m > 0\}. \quad (2.3.10)$$

Поскольку критические числа  $\tau \theta_i$  не лежат в  $\mathbf{K}$ , то согласно пп. 2.2 и 2.3 гл. 1 [62] им соответствуют два семейства разложений

$$\mathcal{B}_i^\tau : y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.11)$$

где  $s \in \mathbf{K}(\tau \theta_i)$ , комплексные коэффициенты:  $c_{0i}$  из (2.3.3),  $c_{si}$  с  $s = \tau \theta_i$  – произвольная постоянная, остальные  $c_{si}$  – постоянны и однозначно определены. Носитель  $\mathbf{K}(\tau \theta_i)$  каждого из разложений (2.3.11) располагается в четверти комплексной плоскости:  $V_+^\tau = \{\operatorname{Re} s \geq 0, \tau \operatorname{Im} s \geq 0\}$ .

Разложения (2.3.11) являются экзотическими, если  $c_{si}$  с  $s = \tau \theta_i$  – ненулевая произвольная постоянная.

В случае  $c_{si} = 0$  с  $s = \tau \theta_i$  разложения (2.3.11) являются разложениями по целым степеням  $x$ . Семейства таких разложений обозначим  $\mathcal{B}_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Разложение (2.3.11) в случае  $c_{si} = 0$  с  $s = \tau \theta_i$  (по целым степеням  $x$ ) было известно [42, §46]. Согласно теореме 1.2.5 [62] оно сходится для достаточно малых  $|x|$ .

В случае  $c_{si} = 0$  с  $s = \tau \theta_i$  второе приближение разложений решений (2.3.11) есть  $y = c_{0i} + c_{1i}x$ . Вычислим коэффициент  $c_{1i}$ , который согласно п. 2.6 гл. 1 [62] определяется из уравнения  $c_{1i} = -b_{1i}/\nu(1)$ . Второе приближение уравнения (2.1.5), соответствующее данному ребру, есть

$$\begin{aligned} \hat{f}_4^{(1)}(x, y) = & -2(b-d)xy^2 + 2x^3y''y + 4(a+b-c-d)xy^3 + 6x^2y'y^2 \\ & + 2x^3y''y^2 - x^3(y')^2 - 2x^3(y')^2y - 2(4a+b+c-d)xy^4 \\ & - 6x^2y'y^3 - 4x^3y''y^3 + 6x^3(y')^2y^2 + 4axy^5. \end{aligned}$$

Коэффициент

$$b_{1i} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1} \hat{f}_4^{(1)}(x, c_{0i}) =$$

$$2c_{0i}^2(-b + d + 2(a + b - c - d)c_{0i} + (-4a - b - c + d)c_{0i}^2 + 2ac_{0i}^3). \quad (2.3.12)$$

Согласно (2.3.6)  $\nu(1) = 2c_{0i}^2(c_{0i} - 1 - 4c_{0i}(c - a) + 10ac_{0i}^2 - 6ac_{0i}^3)$ . Наконец, с учетом (2.3.2) и (2.3.3), получаем

$$c_{1i} = (-1)^i \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})^2 + b - d}{1 - 2(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})^2}. \quad (2.3.13)$$

Положим  $k_i = \theta_i$ , если  $\text{Re } \theta_i > 0$  и  $k_i = -\theta_i$ , если  $\text{Re } \theta_i < 0$ .

**С л у ч а й 2.**  $\text{Re } \theta_i \neq 0$ ,  $\theta_i \notin \mathbb{Z}$ . В этом случае оба конуса задачи  $\mathcal{K}_i^T$  содержат одно и тоже критическое число  $k_i$ ,  $\mathfrak{a}_i = 1$ . Носитель разложений решений уравнения (2.1.5) с учетом  $k_i$  есть

$$\mathbf{K}(k_i) = \{s = l + mk_i, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l + m > 0\}. \quad (2.3.14)$$

Так как число  $k_i$  не лежит в множестве  $\mathbf{K}$ , определенном формулой (2.3.9), то согласно п. 2.2 гл. 1 [62] получаем семейство степенных разложений решений уравнения (2.1.5), которые определяются формулой

$$\mathcal{B}_i : y = c_{0i} + \sum c_{si} x^s \text{ по } s \in \mathbf{K}(k_i), i = 1, 2, \quad (2.3.15)$$

где  $\mathbf{K}(k_i)$  из (2.3.14), комплексные коэффициенты таковы:  $c_{0i}$  определен формулой (2.3.3),  $c_{k_i i}$  — произвольный, остальные  $c_{si}$  постоянны и однозначно определены.

Разложение (2.3.15) было известно [42, § 46] только в случае  $c_{k_i i} = 0$ . Согласно теореме 1.2.5 [62] оно сходится для достаточно малых  $|x|$ .

Второе приближение разложений решений (2.3.15) зависит от расположения числа  $\text{Re } k_i$ . Если  $\text{Re } k_i > 1$ , тогда второе приближение есть  $y = c_{0i} + c_{1i}x$ , что аналогично случаю  $\text{Re } \theta_i = 0$ . Коэффициент  $c_{1i}$  определен формулой (2.3.13). Если  $0 < \text{Re } k_i < 1$ , то второе приближение решений есть  $y = c_{0i} + c_{k_i i}x^{k_i}$ , где коэффициент  $c_{k_i i}$  — произвольный. Если  $\text{Re } k_i = 1$ , то второе приближение решений имеет вид  $y = c_{0i} + c_{1i}x + c_{k_i i}x^{k_i}$ , где коэффициенты таковы:  $c_{k_i i}$  — произвольный,  $c_{1i}$  определен формулой (2.3.13).

**С л у ч а й 3.**  $\theta_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . В этом случае оба конуса задачи  $\mathcal{K}_i^T$  содержат одно и тоже критическое число  $k_i$ ,  $\mathfrak{a}_i = 1$ . Поскольку число  $k_i$  лежит в множестве  $\mathbf{K}$ , определенном формулой (2.3.9), то согласно п. 2.2 гл. 1 [62] семейство разложений решений есть

$$\mathcal{B}_i : y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si} (\ln x) x^s, i = 1, 2, \quad (2.3.16)$$

где коэффициенты таковы:  $c_{0i}$  определен формулой (2.3.3),  $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i} \ln x$ ,  $\alpha_{k_i i}$  – произвольная постоянная, коэффициент  $\beta_{k_i i}$  постоянный и однозначно определенный, остальные  $c_{si}$  – многочлены от  $\ln x$ , которые однозначно определяются.

Второе приближение разложений решений (2.3.11) зависит от расположения числа  $k_i$ . Если  $k_i = 1$ , тогда второе приближение решений имеет вид  $y = c_{0i} + c_{1i}x$ . Согласно следствию 1.2.1 [62] коэффициент  $c_{1i} = \alpha_{1i} + \beta_{1i} \ln x$ , где  $\alpha_{1i}$  – произвольная постоянная,  $\beta_{1i}$  вычисляется по формуле  $\beta_{1i} = -b_{1i}/\nu'(1)$ . Коэффициент  $b_{1i}$  вычислен ранее и определен формулой (2.3.12),  $\nu'(1) = 4c_{0i}^2(c_{0i} - 1)$ . Учитывая (2.3.3), получаем

$$c_{1i} = \alpha_{1i} + (-1)^i \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})^2 + b - d}{2} \ln x. \quad (2.3.17)$$

Если  $(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})^2 + b - d = 0$ , то выполняется условие совместности и в разложении (2.3.16) коэффициенты таковы:  $c_{1i}$  – произвольная постоянная,  $c_{si}$  – постоянны и однозначно определены.

Разложение (2.3.16) было известно [42, § 46] только в случае, когда выполнено условие совместности и все коэффициенты  $c_{si}$  постоянны. Согласно теореме 1.2.5 [62] оно сходится для достаточно малых  $|x|$ . Разложения (2.3.11) – экзотические, (2.3.14) – степенное, (2.3.16) – степенно-логарифмическое.

Теперь согласно п. 3.2 гл. 1 [62] вычислим нестепенные решения уравнения (2.3.1), соответствующие нулевому решению определяющего уравнения (2.3.2).

Сделаем в нем логарифмическое преобразование  $\xi = \ln x$ , при этом  $y'$ ,  $y''$  преобразуются по формулам (2.2.13). Получаем уравнение

$$\varphi(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_4^{(1)}(\xi, y) = 2\ddot{y}y^2(y-1) + \dot{y}^2y(2-3y) + 2(c-a)y^4 + 4ay^5 - 2ay^6 = 0. \quad (2.3.18)$$

Носитель  $\mathbf{S}(\varphi)$ , его выпуклая оболочка, грани  $\Phi_j^{(d)}$ ,  $d = 0, 1$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  изображены на рис. 6 а, соответствующие граням вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_j^{(d)}$ ,  $d = 0, 1$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  – на рис. 6 б.

Поскольку  $\xi = \ln x \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ , то конус задачи  $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$  и  $\omega = 1$ . Кроме того,  $y \neq \text{const}$ . С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_2^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_3^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_1^{(1)}$ ,  $\mathbf{U}_2^{(1)}$ . Рассмотрим соответствующие им грани последовательно.

Вершине  $\Phi_1^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_1^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y = 0. \quad (2.3.19)$$

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_2 < 0, p_2 < -2p_1\}$ . Ищем решения уравнения (2.3.19) в виде  $y = c_r \xi^r$ ,  $c_r \neq 0$ ,  $c_r$  – произвольная по-

стоянная. Характеристическое уравнение  $\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} r = 0$  имеет единственное решение  $r = 0$ . Вектор  $P = \omega(1, r) = (1, 0) \notin \mathbf{U}_1^{(0)} \cap \mathcal{K}$ , т. е. подходящих решений нет.

Вершинам  $\Phi_2^{(0)}$  и  $\Phi_3^{(0)}$  соответствуют укороченные уравнения  $\hat{\varphi}_2^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2(c-a)y^4 = 0$  и  $\hat{\varphi}_3^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 = 0$ . Так как они алгебраические, то согласно замечанию 1.1.1 не дают подходящих решений.

Ребру  $\Phi_1^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_1^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\dot{y}y^2 + 2j^2y + 2(c-a)y^4 = 0. \quad (2.3.20)$$

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{\lambda(1, -2), \lambda > 0\}$ . Ищем решения уравнения (2.3.20) в виде  $y = c_{-2}\xi^{-2}$ ,  $c_{-2} \neq 0$ . Определяющее уравнение  $\tilde{\varphi}(c_{-2}) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_{-2}^3(c_{-2}(c-a) - 2) = 0$  имеет ненулевое решение

$$c_{-2} = 2/(c-a). \quad (2.3.21)$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\delta\hat{\varphi}(\xi, y)}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} 2j^2 + 4yj\frac{d}{d\xi} - 4y\dot{y} - 2y^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 8(c-a)y^3.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = -2c_{-2}^2\frac{1}{\xi^6} \left( \xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 8 + 4\xi\frac{d}{d\xi} - 4(c-a)c_{-2} \right). \quad (2.3.22)$$

Характеристический многочлен  $\nu(k) = -2c_{-2}^2(k^2 + 3k)$  имеет два корня  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = -3$ . Конус задачи

$$\mathcal{K} = \{\text{Re } k < -2 \text{ или } \text{Re } k = -2, \text{Im } k \neq 0\}.$$

Только число  $k_2 = -3$  лежит в конусе задачи  $\mathcal{K}$ , т. е.  $k_2$  – единственное критическое число,  $\varkappa = 1$ . Носитель разложения решений  $\mathbf{K} = \{s = -2 - 2l; l > 0\}$ . Носитель разложения решения с учетом  $k_2$  есть

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = -2 - l; l > 0\}. \quad (2.3.23)$$

Разложение решений есть

$$y = \frac{2}{c-a}\frac{1}{\xi^2} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\xi^s}. \quad (2.3.24)$$

Поскольку  $k_2 \notin \mathbf{K}$ , условие совместности автоматически выполнено, т. е. комплексный коэффициент  $c_{-3}$  – произвольная постоянная. Сделаем обратную замену  $\xi = \ln x$  в (2.3.24) и получим асимптотику решения уравнения (2.1.5)

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0 = \frac{2}{c-a}\frac{1}{\ln^2 x} + \frac{c_{-3}}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\ln^s x}, \quad (2.3.25)$$

где комплексные коэффициенты таковы:  $c_{-3}$  – произвольная постоянная, остальные  $c_{-s}$  – постоянны и однозначно определены.

Согласно п. 4.2 гл. 1 [62] вычислим критические числа укороченных решений (2.3.25). Первая вариация определена формулой (2.3.4). Обозначим ее  $\mathcal{M}(x, y)$ . Сделаем в  $\mathcal{M}(x, y)$  логарифмическую замену  $\xi = \ln x$  и производную по  $\xi$  будем обозначать точкой. Согласно (2.2.13) оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} & 2\dot{y}^2 + 4y\dot{y}\frac{d}{d\xi} - 6y\dot{y}^2 - 6y^2\dot{y}\frac{d}{d\xi} - 4y\ddot{y} - 2y^2\frac{d}{d\xi} + 6y^2\ddot{y} + 2y^3\frac{d}{d\xi} \\ & - 4y(\ddot{y} - \dot{y}) - 2y^2\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) + 6y^2(\ddot{y} - \dot{y}) + 2y^3\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi}\right) \\ & - 8ay^3 + 8cy^3 + 20ay^4 - 12ay^5 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}(\xi, y). \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Для решений (2.3.24) имеем  $y = 2\xi^{-2}/(c - a) + \dots$ . Поэтому в операторе  $\mathcal{N}$  члены старшей по  $\xi$  степени  $n$  имеют  $n = -4$  и образуют оператор  $\mathcal{N}_{-4} = -2y^2 d^2/d\xi^2$ , где  $y = 2\xi^{-2}/(c - a)$ . Ему соответствует характеристический многочлен  $\nu(k) = -8k^2/(c - a)^2$ , который имеет двукратный корень  $k = 0$ . Конус задачи  $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 0\}$ . Так как число  $k = 0$  не лежит в конусе задачи, то критических чисел нет,  $\varkappa = 0$ . Носитель разложения решений имеет вид  $\mathbf{K} = \{s = l, l \in \mathbb{N}\}$ . По теореме 1.4.1 [62] для решений исходного уравнения (2.1.5) существует единственное разложение, образующее семейство

$$\mathcal{B}_3 : y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_{\sigma} x^{\sigma}, \quad (2.3.27)$$

где  $\varphi_0$  из (2.3.25),  $\varphi_{\sigma}$  ряды по убывающим степеням логарифмов.

По теореме 1.4.2 [62] степени логарифмов в  $\varphi_{\sigma}$  не превосходят  $-8\sigma$ .

Разложения (2.3.27) и (2.3.25) – новые.

Ребру  $\Phi_2^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\varphi}_2^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 + 4ay^5 + 2(c - a)y^4 = 0,$$

которое имеет только постоянные решения  $y = 1 + (-1)^i \sqrt{c/a}$ ,  $i = 1, 2$ . Они нам не подходят, ибо являются решениями полного уравнения (2.3.18) и совпадают с решениями (2.3.3), которые уже изучены.

Теперь решим уравнение (2.3.1) в явном виде. Для этого положим  $\dot{y} = p$  и будем рассматривать  $p$  как функцию от  $y$ . Тогда  $\ddot{y} = (dp/dy)p$  и уравнение (2.3.1) принимает вид

$$2\frac{dp}{dy}py(y - 1) + p^2(2 - 3y) + 2(c - a)y^3 + 4ay^4 - 2ay^5 = 0 \quad (2.3.28)$$



Полагая  $p^2 = q$ , получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dq}{dy}y(y-1) + q(2-3y) + 2(c-a)y^3 + 4ay^4 - 2ay^5 = 0 \quad (2.3.29)$$

Соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{dq}{dy}y(y-1) + q(2-3y) = 0$$

имеет решение  $q = C_1 y^2 (y-1)$ , где  $C_1$  – произвольная постоянная. Методом вариации этой постоянной получаем для нее из (2.3.29) уравнение

$$(y-1)^2 C_1' + 2(c-a) + 4ay - 2ay^2 = 0,$$

т. е.  $C_1' = -\frac{2c}{(y-1)^2} + 2a$ . Оно имеет решение  $C_1 = 2c/(y-1) + 2ay + C_2$ , где  $C_2$  – произвольная постоянная. Следовательно,

$$q \stackrel{\text{def}}{=} C_1 y^2 (y-1) = \left( \frac{2c}{y-1} + 2ay + C_2 \right) y^2 (y-1)$$

и

$$\frac{dy}{d\xi} \stackrel{\text{def}}{=} p \stackrel{\text{def}}{=} \pm \sqrt{q} = \pm \sqrt{(2c/(y-1) + 2ay + C_2) y^2 (y-1)}. \quad (2.3.30)$$

Интегрирование уравнения (2.3.30) происходит по-разному в зависимости от значения  $C_2$  и параметров  $a$  и  $c$ . Рассмотрим три случая значений постоянной  $C_2$ .

*Случай  $C_2 = 2c$ .* В этом случае уравнение (2.3.30) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm \sqrt{2a} y \sqrt{y^2 + (c/a - 1) y}. \quad (2.3.31)$$

Положим  $t^2 = 1 + (c/a - 1)/y$ , тогда

$$y = \left( \frac{c}{a} - 1 \right) / (t^2 - 1) \quad (2.3.32)$$

и уравнение (2.3.31) принимает вид  $dt/d\xi = \pm \sqrt{2a}/2 (c/a - 1)$ . Его решения суть  $t = \pm \sqrt{2a}/2 (c/a - 1) (\xi + C_3)$ , где  $C_3$  – произвольная постоянная. Из (2.3.32) получаем

$$y = \frac{1}{\frac{c-a}{2} (\xi + C_3)^2 - \frac{a}{c-a}}. \quad (2.3.33)$$

При  $\xi \rightarrow \infty$  из (2.3.33) получаем разложение в ряд Лорана по степеням  $\xi$

$$y = \frac{2}{c-a} \frac{1}{\xi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{C_4}{\xi} + \frac{C_5}{\xi^2} \right)^k, \quad (2.3.34)$$

где  $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} -2C_3$  – произвольная постоянная,  $C_5 \stackrel{\text{def}}{=} -C_3 + \frac{2a}{(c-a)^2}$ .

Учитывая  $\xi = \ln x$ , получаем явный вид (2.3.33) разложения (2.3.25).

*Случай*  $C_2 = -2(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 + 2c$ . В этом случае уравнение (2.3.30) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm\sqrt{2a}y(y - (1 \mp c/a)). \quad (2.3.35)$$

Его интеграл есть

$$\frac{y - (1 + (-1)^i \sqrt{c/a})}{y} = \exp(\pm\sqrt{2}(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})\xi + C_6), \quad (2.3.36)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $C_6$  – произвольная постоянная.

Учитывая  $\xi = \ln x$ , из (2.3.36) получаем

$$y = \frac{1 + (-1)^i \sqrt{c/a}}{1 - C_7 x^{\pm\theta_i}}, \quad (2.3.37)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\theta_i = \sqrt{2}(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})$ ,  $C_7$  – произвольная постоянная.

Пусть для определенности  $\operatorname{Re} \theta_i \geq 0$ ,  $\theta_i \neq 0$ , тогда при  $x \rightarrow 0$  функция (2.3.37) раскладывается в ряд по степеням  $C_7 x^{\theta_i}$

$$y = (1 + (-1)^i \sqrt{c/a}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (C_7 x^{\theta_i})^k, \quad (2.3.38)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $C_7$  – произвольная постоянная. В зависимости от значения  $\theta_i$  ряд (2.3.38) является явным видом разложений (2.3.11), (2.3.15), (2.3.16), а функция (2.3.37) – их суммой.

*Случай*  $C_2 \neq 2c$ ,  $C_2 \neq -2(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 + 2c$ . Запишем уравнение (2.3.30) в виде

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm\sqrt{2a} \sqrt{y^2 \left( y^2 + \frac{C_2 - 2a}{2a}y + \frac{2c - C_2}{2a} \right)}. \quad (2.3.39)$$

Уравнение  $y^2 + \frac{C_2 - 2a}{2a}y + \frac{2c - C_2}{2a} = 0$  имеет два различных ненулевых корня  $\alpha$  и  $\beta$ . При этом

$$\alpha + \beta = -\frac{C_2 - 2a}{2a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{2c - C_2}{2a}. \quad (2.3.40)$$

Подстановка Эйлера

$$t^2 = \frac{y - \beta}{y - \alpha}; \quad y = \frac{\alpha t^2 - \beta}{t^2 - 1} \quad (2.3.41)$$

приводит уравнение (2.3.30) к виду

$$\frac{\pm 2 dt}{\sqrt{2a} (\alpha t^2 - \beta)} = d\xi.$$

Его интеграл есть

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2a} \alpha \beta} \ln \frac{t - \sqrt{\beta/\alpha}}{t + \sqrt{\beta/\alpha}} = \xi + C_8, \quad (2.3.42)$$

где  $C_8$  – произвольная постоянная. Учитывая (2.3.40) и (2.3.42) получаем

$$\frac{t - \sqrt{\beta/\alpha}}{t + \sqrt{\beta/\alpha}} = C_9 \exp \left( \pm \sqrt{2c - C_2} \xi \right),$$

где  $C_9$  – произвольная постоянная; т. е.

$$t = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \left( 1 - \frac{2}{1 - C_9 \exp \left( \pm \sqrt{2c - C_2} \xi \right)} \right). \quad (2.3.43)$$

Положим

$$\varphi = C_9 \exp \left( \pm \sqrt{2c - C_2} \xi \right). \quad (2.3.44)$$

Тогда из (2.3.41) и (2.3.43) получаем

$$y = \frac{4\alpha\beta}{\beta(\sqrt{1/\varphi} + \sqrt{\varphi})^2 - \alpha(\sqrt{1/\varphi} - \sqrt{\varphi})^2}. \quad (2.3.45)$$

Положим  $2i\psi \stackrel{\text{def}}{=} \pm \sqrt{2c - C_2} (\xi + C_{10})$ , где  $C_{10}$  – произвольная постоянная. Учитывая  $\xi = \ln x$  имеем

$$\psi = \pm i \frac{\sqrt{2c - C_2}}{2} (\ln x + C_{10}).$$

Тогда (2.3.45) принимает вид

$$y = \frac{\alpha\beta}{\beta \cos^2 \psi + \alpha \sin^2 \psi}. \quad (2.3.46)$$

Согласно (2.3.44)  $y$  разлагается в ряд по степеням  $\varphi = (C_{11}x)^{\pm\sqrt{2c-C_2}}$ , где  $C_{11}$  – произвольная постоянная.

Если  $2c - C_2$  – вещественное отрицательное число, то число  $i\sqrt{2c - C_2} \stackrel{\text{def}}{=} 2\gamma$  – вещественно. В этом случае  $\psi = \gamma \ln(C_{11}x)$  и согласно (2.3.40) и (2.3.46)

$$y = \frac{2c - C_2}{2a} \frac{1}{\beta \cos^2[\ln(C_{11}x)\gamma] + \alpha \sin^2[\ln(C_{11}x)\gamma]}. \quad (2.3.47)$$

Из (2.3.46) видно, что  $y$  разлагается в ряд по целым степеням  $\varphi$ , т. е. по целым степеням  $x^{2\gamma i}$ , что дает ряд по чисто мнимым степеням  $x$ .

Для вершины  $\Gamma_4^{(0)}$  подсумма (2.2.6) с  $r = \pm\sqrt{2c - C_2}$ ,  $2c - C_2 \in \mathbb{R}$ ,  $2c - C_2 < 0$ , соответствующая  $m = 0$  в (2.2.5), есть функция (2.3.47), которая является решением укороченного уравнения (2.3.1), соответствующим ребру  $\Gamma_4^{(1)}$ .

**2.3.3. Разложения решений при  $a = c \neq 0$ .** Вычислим сначала степенные, степенно-логарифмические и экзотические разложения решений уравнения (2.1.1), соответствующие ребру  $\Gamma_4^{(1)}$ . В этом случае определяющее уравнение (2.3.2) имеет два нулевых решения и одно ненулевое решение  $c_{02} = 2$  из (2.3.3). Ему соответствует два собственных значения  $k_2 = \pm 2\sqrt{2a}$  из (2.3.7). В качестве  $\theta_2$  берем то из значений  $k_2$ , для которого  $\operatorname{Re} k_2 \geq 0$ .

Значению  $c_{02}$  соответствуют семейства разложений  $\mathcal{B}_2$  или  $\mathcal{B}_2^T$ , для которых сохраняются формулы степенных, степенно-логарифмических или экзотических разложений из случая  $a \neq c \neq 0$ . Также в зависимости от значения  $\theta_2$  возможны три случая. А именно: случай 1 ( $\operatorname{Re} \theta_2 = 0$ , разложение решений определено формулой (2.3.11)), случай 2 ( $\operatorname{Re} \theta_2 \neq 0$ ,  $\theta_2 \notin \mathbb{Z}$ , разложение решений определено формулой (2.3.15)), случай 3 ( $\theta_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , разложение решений определено формулой (2.3.16)).

Вычислим теперь нестепенные решения уравнения (2.3.1), соответствующие двукратно нулевому решению определяющего уравнения (2.3.2). В этом случае уравнение (2.3.18) принимает вид

$$\phi(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_4^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2\ddot{y}y^2(y-1) + \dot{y}^2y(2-3y) - 2ay^6 + 4ay^5 = 0. \quad (2.3.48)$$

Носитель  $\mathbf{S}(\phi)$ , его выпуклая оболочка, грани  $\Phi_j^{(d)}$ ,  $d = 0, 1$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  изображены на рис. 7 а, соответствующие граням вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_j^{(d)}$ ,  $d = 0, 1$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  – на рис. 7 б.

Конус задачи  $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$ , т. е.  $\omega = 1$ . Кроме того,  $y \neq \text{const}$ . С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_2^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_3^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_1^{(1)}$ ,  $\mathbf{U}_2^{(1)}$ . Рассмотрим соответствующие им грани последовательно.

Вершине  $\Phi_1^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение (2.3.19). Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 < -p_1\}$ . Вектор  $P = (1, 0)$ , полученный ранее в случае  $a \neq c$ , не лежит в нормальном конусе  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ , следовательно, подходящих решений нет.

Вершинам  $\Phi_2^{(0)}$  и  $\Phi_3^{(0)}$  соответствуют укороченные уравнения  $\hat{\phi}_2^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 4ay^5 = 0$  и  $\hat{\phi}_3^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 = 0$ . Они алгебраические и согласно замечанию 1.1.1 не дают подходящих решений.

Ребру  $\Phi_1^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{\phi}_1^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y + 4ay^5 = 0. \quad (2.3.49)$$

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{\lambda(1, -1), \lambda > 0\}$ . Ищем решения уравнения (2.3.49) в виде  $y = c_{-1}\xi^{-1}$ ,  $c_{-1} \neq 0$ . Определяющее уравнение  $\tilde{\phi}(c_{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} -2c_{-1}^3(2ac_{-1}^2 - 1) = 0$  имеет два ненулевых решения

$$c_{-1} = (-1)^j / \sqrt{2a}, \quad j = 1, 2. \quad (2.3.50)$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\delta \hat{\phi}(\xi, y)}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} 2\dot{y}^2 + 4y\dot{y} \frac{d}{d\xi} - 4y\ddot{y} - 2y^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 20y^4.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = -2c_{-1}^2 \xi^{-4} \left( \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{d}{d\xi} + 3 - 10ac_{-1}^2 \right). \quad (2.3.51)$$

Характеристический многочлен  $\nu(k) = -2c_{-1}^2(k^2 + k - 2)$  имеет два корня  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -2$ . Конус задачи

$$\mathcal{K} = \{\text{Re } k < -1 \text{ или } \text{Re } k = -1, \text{Im } k \neq 0\}.$$

Число  $k_2 = -2$  лежит в конусе задачи  $\mathcal{K}$ , т. е.  $k_2$  – единственное критическое число,  $\varkappa = 1$ . Исходный носитель разложения решений  $\mathbf{K} = \{s = -1 - 2l; l > 0\}$ . Носитель разложения решения с учетом  $k_2$  есть

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = -1 - l; l > 0\}. \quad (2.3.52)$$

Разложения решений суть

$$y = (-1)^j \xi^{-1} / \sqrt{2a} + \sum_{s=2}^{\infty} c_{-s} \xi^{-s}, \quad j = 1, 2. \quad (2.3.53)$$

Поскольку  $k_2 \notin \mathbf{K}$ , условие совместности автоматически выполнено, т. е. комплексный коэффициент  $c_{-2}$  – произвольная постоянная.

Сделаем обратную замену  $\xi = \ln x$  в (2.3.53) и получим два семейства асимптотик решений уравнения (2.1.5)

$$\mathcal{F}_j : y \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{0j} = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x} + \frac{c_{-2j}}{\ln^2 x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-sj}}{\ln^s x}, \quad j = 1, 2, \quad (2.3.54)$$

где комплексные коэффициенты таковы:  $c_{-2j}$  – произвольная постоянная, остальные  $c_{-sj}$  – постоянны и однозначно определены.

Согласно п. 4.2 гл. 1 [62] вычислим критические числа укороченных решений (2.3.54). Оператор  $\mathcal{N}(\xi, y)$  определен формулой (2.3.26). Для решений (2.3.53) имеем  $y = (-1)^j \xi^{-1} / \sqrt{2a} + \dots$ . Поэтому в операторе  $\mathcal{N}$  члены старшей по  $\xi$  степени  $n$  имеют  $n = -2$  и образуют оператор  $\mathcal{N}_{-2} = -2y^2 d^2/d\xi^2$ , где  $y = (-1)^j \xi^{-1} / \sqrt{2a}$ . Ему соответствует характеристический многочлен  $\nu(k) = -k^2/2a$ , который имеет двукратный корень  $k = 0$ . Конус задачи  $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 0\}$ . Так как число  $k = 0$  не лежит в конусе задачи, то критических чисел нет,  $\mathfrak{a} = 0$ . Носитель разложения решений имеет вид  $\mathbf{K} = \{s = l, l \in \mathbb{N}\}$ . По теореме 1.4.1 [62] для решений исходного уравнения (2.1.5) существуют единственные разложения, образующие семейства

$$\mathcal{B}_{3+j} : y = \phi_{0j} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \phi_{\sigma j} x^\sigma, \quad j = 1, 2, \quad (2.3.55)$$

где  $\phi_{0j}$  из (2.3.54),  $\phi_{\sigma j}$  ряды по убывающим степеням логарифмов.

По теореме 1.4.2 [62] степени логарифмов в  $\phi_{\sigma j}$  не превосходят  $-4\sigma$ .

Разложения (2.3.55) и (2.3.54) – новые.

Ребру  $\Phi_2^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение  $\hat{\phi}_2^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 + 4ay^5 = 0$ , которое имеет постоянное решение  $y = 2$ . Оно нам не подходит, так как является решением полного уравнения (2.3.48) и совпадает с решением  $s_{02}$ , изученным в начале этого пункта.

Решим при  $a = c \neq 0$  уравнение (2.3.1) в явном виде. Для этого рассмотрим уравнение (2.3.30).

Интегрирование уравнения (2.3.30) происходит по-разному в зависимости от значения  $C_2$  и параметра  $a$ . Рассмотрим три случая значений постоянной  $C_2$ .

*Случай  $C_2 = 2a$ .* В этом случае уравнение (2.3.30) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm \sqrt{2a} y^2. \quad (2.3.56)$$

Уравнение (2.3.31) имеет решение

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2a} \xi + C_3}, \quad (2.3.57)$$

где  $C_3$  – произвольная постоянная.

Напоминаем, что  $x \rightarrow 0$ , т. е.  $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x \rightarrow \infty$ . Тогда (2.3.57) раскладывается в ряд Лорана по степеням  $\xi$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(C_4 \xi)^k}, \quad (2.3.58)$$

где  $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} \pm C_3/\sqrt{2a}$  – произвольная постоянная.

Учитывая  $\xi = \ln x$ , получаем явный вид разложения (2.3.54)

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(C_4 \ln x)^k} \stackrel{\text{def}}{=} \pm \frac{1}{\sqrt{2a} \ln x + C_3}. \quad (2.3.59)$$

*Случай*  $C_2 = -6a$ . В этом случае уравнение (2.3.30) имеет решение

$$y = \frac{2}{1 - C_5 x^{\theta_2}}, \quad (2.3.60)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\theta_2 = 2\sqrt{2a}$ ,  $C_5$  – произвольная постоянная.

При  $\operatorname{Re} \theta_2 \geq 0$ ,  $\theta_2 \neq 0$  и  $x \rightarrow 0$  функция (2.3.60) раскладывается в ряд по степеням  $C_5 x^{\theta_2}$

$$y = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (C_5 x^{\theta_2})^k, \quad (2.3.61)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $C_5$  – произвольная постоянная. В зависимости от значения  $\theta_2$  ряд (2.3.61) является явным видом разложений (2.3.11), (2.3.15) или (2.3.16), а функция (2.3.60) – их суммой.

*Случай*  $C_2 \neq 2a$ ,  $C_2 \neq -6a$ . В этом случае уравнение (2.3.30) имеет решение (2.3.46), сохранившееся из случая  $a \neq c \neq 0$ .

**2.3.4. Разложения решений при  $a \neq 0$ ,  $c = 0$ .** Вычислим в этом случае сначала степенные, степенно-логарифмические и экзотические разложения решений уравнения (2.1.1), соответствующие ребру  $\Gamma_4^{(1)}$ . Уравнение (2.3.2) имеет двукратный корень  $c_0 = 1$ . Согласно (2.3.5) при  $a \neq 0$ ,  $c = 0$  для него линейный оператор  $\mathcal{L}(x) \equiv 0$ .

Для того чтобы исследовать уравнение (2.1.5) в этом случае, сделаем замену  $y = u + 1$ . Получаем уравнение

$$\begin{aligned} g(x, u) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x, u + 1) \stackrel{\text{def}}{=} ((2u + 1)u'^2 - 2(u + u^2)u'')x^5 \\ &+ ((-3 - 8u - 3u^2)u'^2 - 2(u + u^2)u' + 2(4u^2 + u^3 + 3u)u'')x^4 + \\ &((10u + 6u^2 + 3)u'^2 + 2(5u^2 + 2u^3 + 3u)u' - 2(5u^2 + 3u + 2u^3)u'') \\ &- 2bu^2)x^3 + ((-3u^2 - 4u - 1)u'^2 - 6(2u^2 + u + u^3)u' + 2(u^3 + 2u^2 + u)u'') \\ &- 2(d + a)u^4 - 4(a + d - b)u^3 - 2(d + a - 2b)u^2)x^2 \\ &+ (2(u^3 + 2u^2 + u)u' + 4au^5 + 2(6a - b + d)u^4 \\ &- 4(b - 3a - d)u^3 - 2(b - d - 2a)u^2)x \\ &- 8au^3 - 12au^4 - 2au^2 - 8au^5 - 2au^6 = 0. \end{aligned} \quad (2.3.62)$$

Носитель  $\mathbf{S}(g)$ , его выпуклая оболочка  $\mathbf{\Gamma}(g)$ , грани  $G_i^{(d)}$ ,  $d = 0, 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  изображены на рис. 8 а. Вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_i^{(d)}$ ,  $d = 0, 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  – на рис. 8 б.

Уравнение (2.3.62) имеет двукратное тривиальное решение  $u = 0$ . В уравнении (2.1.5) ему соответствует двукратное исключительное решение

$$\mathcal{I}_2 : y = 1.$$

По теореме 2.1.4 для исходного уравнения (2.1.1) оно является исключительным однократным. А двукратность решения  $y = 1$  возникла после умножения уравнения (2.1.1) на множитель  $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$ , содержащий как сомножитель  $(y-1)$ .

Конус задачи  $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0, p_2 < 0\}$ , т. е.  $\omega = -1$ . Кроме того,  $u(x) \neq \text{const}$ . С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}_1^{(1)}$ .

Вершине  $G_1^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_1^{(0)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 2au^2 = 0. \quad (2.3.63)$$

Вещественный нормальный конус  $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 < 0\}$ . Первое приближение решения имеет вид  $u = c_\rho x^\rho$ , где  $c_\rho$  – ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени  $\rho$  определим из характеристического уравнения

$$\chi(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \rho^2 - 2a = 0, \quad (2.3.64)$$

т. е.  $\rho_{1,2} = \pm\sqrt{2a}$ .

Согласно п. 5.4 гл. 1 [62] приведенный нормальный конус  $\check{\mathbf{U}}_1^{(0)} = -(1, \rho)$ , где

$$\rho : \rho \in \mathbb{C}, \text{Re } \rho \geq 0, \rho \neq 0. \quad (2.3.65)$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\partial \hat{g}_1^{(0)}(x, u)}{\partial u} = 2u''x^2 + 2\frac{d^2}{dx^2}ux^2 - 2u'\frac{d}{dx}x^2 + 2u'x + 2\frac{d}{dx}ux - 4au.$$

Линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) = 2c_\rho x^\rho(\rho(\rho-1) + \frac{d^2}{dx^2}x^2 - \rho\frac{d}{dx}x + \rho + \frac{d}{dx}x - 2a).$$

Характеристическое уравнение  $\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_\rho k(k-\rho) = 0$  имеет два корня  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = \rho$ . Согласно п. 5.5 гл. 1 конус задачи  $\mathcal{K} = \{\text{Re } k > \text{Re } \rho \text{ или } \text{Re } k = \text{Re } \rho, |\text{Im } k| > |\text{Im } \rho|, \text{sgn}(\text{Im } k) = \text{sgn}(\text{Im } \rho)\}$ . Числа  $k_{1,2} \notin \mathcal{K}$ , т. е. критических чисел нет.

Носитель разложения решений есть

$$\mathbf{K} = \{s = \rho + l\rho + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.3.66)$$

Разложение решений имеет вид

$$u = c_\rho x^\rho + \sum c_s x^s \text{ по } s \in \mathbf{K}. \quad (2.3.67)$$



Носитель разложения (2.3.67) на комплексной плоскости  $s$  расположен в угле с вершиной в точке  $\rho$ , натянутый на точки  $s = 2\rho$  и  $s = \rho + 1$ .

После обратной замены  $y = u + 1$  разложения (2.3.67) образуют семейство

$$\mathcal{B}_6 : y = 1 + c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \quad (2.3.68)$$

где  $\rho = \pm\sqrt{2a}$  и удовлетворяет (2.3.65),  $s$  пробегает множество (2.3.66), комплексные коэффициенты:  $c_\rho$  – ненулевая произвольная постоянная, все  $c_s$  постоянны и однозначно определены. Согласно теореме 1.2.5 [62] разложение (2.3.68) сходится для достаточно малых  $|x|$ . В случае  $\operatorname{Re} \rho = 0$  разложения (2.3.68) являются экзотическими. Обозначим их семейства как  $\mathcal{B}_6^\tau$ , где  $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \rho)$ .

Семейство  $\mathcal{B}_6$  – новое. Если  $\sqrt{2a} \in \mathbb{N}$ , то согласно (2.3.66) все показатели  $s$  – целые.

Вычислим второе приближение разложения решений (2.3.67) при  $\operatorname{Re} \rho > 0$ .

В с л у ч а е  $\operatorname{Re} \rho > 1$  второе приближение решений есть  $u = c_\rho x^\rho + c_{\rho+1} x^{\rho+1}$ . Второе приближение уравнения (2.3.62) есть

$$\hat{g}_1^{(0)}(x, u) = 3u'^2 x^3 - 6uu'' x^3 - 6uu' x^2 + 2xu^2(2a - b + d).$$

Коэффициент  $c_{\rho+1} = -b_{\rho+1}/\nu(\rho+1)$ , где  $b_{\rho+1} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-2\rho-1} \hat{g}_1^{(0)}(x, c_\rho x^\rho) = 2c_\rho^2(d - b - a)$ ,  $\nu(\rho+1) = 2c_\rho(\rho+1)$ . Таким образом, получаем

$$c_{\rho+1} = c_\rho \frac{a + b - d}{\rho + 1}. \quad (2.3.69)$$

В с л у ч а е  $0 < \operatorname{Re} \rho < 1$  второе приближение решений есть  $u = c_\rho x^\rho + c_{2\rho} x^{2\rho}$ . Второе приближение уравнения (2.3.62) есть

$$\hat{g}_1^{(0)}(x, u) = -4uu'^2 x^2 + 4u^2 u'' x^2 + 4u^2 u' x - 8au^3.$$

Коэффициент  $c_{2\rho} = -b_{2\rho}/\nu(2\rho)$ , где  $b_{2\rho} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-3\rho} \hat{g}_1^{(0)}(x, c_\rho x^\rho) = -8ac_\rho^3$ ,  $\nu(2\rho) = 8ac_\rho$ . Таким образом, получаем

$$c_{2\rho} = c_\rho^2. \quad (2.3.70)$$

В с л у ч а е  $\operatorname{Re} \rho = 1$ ,  $\operatorname{Im} \rho \neq 0$  второе приближение решений есть  $u = c_\rho x^\rho + c_{\rho+1} x^{\rho+1} + c_{2\rho} x^{2\rho}$ , коэффициенты  $c_{\rho+1}$  и  $c_{2\rho}$  определены формулами (2.3.69) и (2.3.70) соответственно.

В с л у ч а е  $\rho = 1$ , т. е.  $a = 1/2$ , второе приближение решений есть  $u = c_1 x + c_2 x^2$ . Коэффициенты:  $c_1$  – произвольная постоянная,

$$c_2 = c_1 \frac{a + b - d + 2c_1}{2} \quad (2.3.71)$$

есть сумма (2.3.69) и (2.3.70).

Вычислим нестепенные решения уравнения (2.3.63), если они существуют. Преобразуем его

$$h(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} u^{-2} \hat{g}_1^{(0)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{u''}{u} x^2 - \frac{u'^2}{u^2} x^2 + 2 \frac{u'}{u} x - 2a = 0, \quad (2.3.72)$$

так что  $\mathbf{S}(h) = \{0\}$ . Уравнение  $h(x, u) = 0$  содержит ненулевую постоянную  $-2a$ ,

$$h^* = 2 \frac{u''}{u} x^2 - \frac{u'^2}{u^2} x^2, \quad \text{coef}(h^*) = 2 - 1 = 1 \neq 0. \quad (2.3.73)$$

Так как  $a \neq 0$ , то уравнение (2.3.64) не имеет кратных корней, т. е. по теоремам 1.3.5 и 1.3.6 [62] нестепенных решений уравнения (2.3.63) не существует. Следовательно, вершине  $G_1^{(0)}$  не соответствует никакое сложное разложение решений уравнения (2.1.5).

Ребру  $G_1^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\begin{aligned} \hat{g}_1^{(1)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} & 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 2au^2 - 6u''ux^3 + 3u'^2x^3 - 6u'ux^2 \\ & - 2(b-d-2a)u^2x6u''ux^4 - 30u'^2x^4 + 6u'ux^3 - 2(d+a-2b)u^2x^2 \\ & - 2u''ux^5 + u'^2x^5 - 2u'ux^4 - 2bu^2x^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.3.74)$$

Это ребро горизонтально. Уравнение (2.3.74) не имеет степенных решений, т. е. ему не соответствуют степенные или степенно-логарифмические разложения решений. Возможно уравнение (2.3.74) имеет нестепенные решения.левой вершине  $G_1^{(0)} = (0, 2)$  этого ребра соответствует укороченное уравнение (2.3.63). Так как для обоих этих уравнений (2.3.63) и (2.3.74) суммарный порядок дифференцирования  $\Delta(\hat{g}_1^{(1)}) = \Delta(\hat{g}_1^{(0)}) = 2$ , то согласно теореме 1.3.4 [62] уравнение (2.3.74) не имеет нестепенных решений при  $x \rightarrow 0$ .

Решению  $c_0 = 0$  определяющего уравнения (2.3.2), как и в случае  $a \neq c \neq 0$ , соответствует семейство сложных разложений  $\mathcal{B}_3$  из (2.3.27).

Решим в случае  $a \neq 0, c = 0$  уравнение (2.3.1) в явном виде. Для этого рассмотрим уравнение (2.3.30), его интегрирование происходит по-разному в зависимости от значения  $C_2$  и параметра  $a$ . Рассмотрим три случая значений постоянной  $C_2$ .

*Случай  $C_2 = 0$ .* В этом случае уравнение (2.3.30) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm \sqrt{2a} y \sqrt{y(y-1)}. \quad (2.3.75)$$

Оно имеет решение

$$y = -\frac{2}{a(\xi + C_3)^2 - 2}, \quad (2.3.76)$$

равное (2.3.33) при  $c = 0$ . При  $\xi \rightarrow \infty$  из (2.3.76) получаем разложение в ряд Лорана по степеням  $\xi$

$$y = -\frac{2}{a} \frac{1}{\xi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{C_4}{\xi} + \frac{C_5}{\xi^2} \right)^k, \quad (2.3.77)$$

где  $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} -2C_3$  – произвольная постоянная,  $C_5 \stackrel{\text{def}}{=} -C_3 - 2$ .

Учитывая  $\xi = \ln x$ , получаем явный вид (2.3.76) разложения (2.3.25).

*Случай*  $C_2 = -2a$ . В этом случае уравнение (2.3.30) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm \sqrt{2a} y (y - 1). \quad (2.3.78)$$

Его интеграл есть

$$\frac{y-1}{y} = \exp(\pm \sqrt{2a} \xi + C_6), \quad (2.3.79)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $C_6$  – произвольная постоянная.

Учитывая  $\xi = \ln x$ , из (2.3.79) получаем

$$y = \frac{1}{1 - C_7 x^\rho}, \quad (2.3.80)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\rho = \sqrt{2a}$ ,  $C_7$  – произвольная постоянная.

При  $\operatorname{Re} \rho \geq 0$ ,  $\rho \neq 0$  и  $x \rightarrow 0$  функция (2.3.80) раскладывается в ряд по степеням  $C_8 x^\rho$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (C_8 x^\rho)^k, \quad (2.3.81)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $C_8$  – произвольная постоянная. Ряд (2.3.81) является явным видом разложений (2.3.68), а функция (2.3.80) – их суммой.

*Случай*  $C_2 \neq 0$ ,  $C_2 \neq -2a$ . В этом случае уравнение (2.3.30) имеет решение (2.3.46), сохранившееся из случая  $a \neq c \neq 0$ .

В случае  $a \neq 0$ ,  $c = 0$  формула (2.3.47) принимает вид

$$y = -\frac{C_2}{2a} \frac{1}{\beta \cos^2[\ln(C_{11}x)^\gamma] + \alpha \sin^2[\ln(C_{11}x)^\gamma]}, \quad (2.3.82)$$

где  $\gamma = i \sqrt{-C_2}$ ,  $C_2$  – вещественное положительное число,  $\alpha$  и  $\beta$  из (2.3.40), т. е.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -C_2/(2a)$ .

### 2.3.5. Сводка результатов и их обсуждение.

**Теорема 2.3.1.** Ребру  $\Gamma_4^{(1)}$  соответствуют 6 семейств разложений решений типов 1 – 3:

$\mathcal{B}_1$ , которое существует при  $0 \neq a \neq c \neq 0$ , определяется формулами (2.3.11) с  $C_7 = 0$ , (2.3.15), (2.3.16) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{B}_2$ , которое существует при  $a \neq 0, c \neq 0$ , определяется формулами (2.3.11) с  $C_7 = 0$ , (2.3.15), (2.3.16) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{B}_3$ , которое существует при  $0 \neq a \neq c$ , определяется формулами (2.3.27), (2.3.25), (2.3.33) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{B}_4$  и  $\mathcal{B}_5$  существуют при  $a = c \neq 0$ , определяются формулами (2.3.55), (2.3.54), (2.3.59) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{B}_6$  существует при  $c = 0, \rho = \pm\sqrt{2a}, \operatorname{Re} \rho > 0$  определяется формулами (2.3.68), (2.3.66) и имеет 1 параметр;

и 6 семейств экзотических разложений решений с  $\tau = \pm 1$ :

$\mathcal{B}_1^\tau$ , которые существуют при  $a \neq c \neq 0, \operatorname{Re}(\sqrt{2c} - \sqrt{2a}) = 0$ , определяются формулами (2.3.11), (2.3.10), (2.3.37) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{B}_2^\tau$ , которые существуют при  $a \neq 0, c \neq 0, \operatorname{Re}(\sqrt{2c} + \sqrt{2a}) = 0$ , определяются формулами (2.3.11), (2.3.10), (2.3.37) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{B}_6^\tau$ , которые существуют при  $a \neq 0, c = 0, \operatorname{Re} \sqrt{2a} = 0$ , определяются формулами (2.3.68), (2.3.66), (2.3.80) и имеют 1 параметр;

Семейства  $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5$  – сложные,  $\mathcal{B}_1^\tau, \mathcal{B}_2^\tau, \mathcal{B}_6^\tau$  – экзотические, остальные – степенные или степенно-логарифмические.

**Замечание 2.3.3.** Семейства  $\mathcal{B}_j^+$  и  $\mathcal{B}_j^-$  отличаются тем, что комплексные показатели степени их разложений комплексно сопряжены. При комплексном сопряжении разложений получаются разложения с сопряженными комплексными показателями степеней. Если разложение из  $\mathcal{B}_j^+$  совпадает с комплексным сопряжением некоторого разложения из  $\mathcal{B}_j^-$ , то этим разложениям соответствует одна и та же вещественная функция. Следовательно, возможны случаи, когда разложению из  $\mathcal{B}_j^+$  и разложению из  $\mathcal{B}_j^-$  соответствует одна и та же функция. Обычно это происходит, если все параметры  $a, b, c, d$  в уравнении (2.1.1) вещественные. Поскольку мы не предполагаем вещественности всех этих параметров, то семейства разложений  $\mathcal{B}_j^+$  и  $\mathcal{B}_j^-$  считаем разными семействами.

**Замечание 2.3.4.** Высота ребра  $\Gamma_4^{(1)}$  равна трем. Определяющее уравнение (2.3.2) третьей степени. Оказалось, что во всех случаях каждому его корню соответствует свое (или свои в случае экзотических семейств) семейство разложений решений.

**Замечание 2.3.5.** Семейства  $\mathcal{A}_{00}^\tau$ ,  $\mathcal{A}_0$ ,  $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_6$ ,  $\mathcal{B}_1^\tau$ ,  $\mathcal{B}_2^\tau$ ,  $\mathcal{B}_6^\tau$  называются *базовыми*. С помощью симметрий уравнения (2.1.7), (2.1.9) и (2.1.10) из них получаются другие семейства разложений.

Существование семейств  $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_6$ ,  $\mathcal{B}_1^\tau$ ,  $\mathcal{B}_2^\tau$ ,  $\mathcal{B}_6^\tau$  в зависимости от параметров показано в табл. 1.

Табл. 1.

$0 \neq a \neq c \neq 0$	$a = c \neq 0$	$a \neq 0 = c$
$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^\tau$	$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^\tau$	$\mathcal{I}_2$
$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^\tau$	$\mathcal{B}_4$	$\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_6^\tau$
$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_5$	$\mathcal{B}_3$

Базовые семейства  $\mathcal{A}_0$  и  $\mathcal{A}_{00}^\tau$  существуют при всех значениях параметров  $a, b, c, d$  уравнения (2.1.1).

## Литература

11. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2004.
16. Брюно А.Д., Чухарева И.В. Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. №49.
27. Розов Н.Х. Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1984. 4. 233–234.
42. Gromak I. V., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002.
46. Kimura H. The construction of a general solution of a Hamiltonian system with the singularity and its application to Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1983. **134**. 363–392.
48. Okamoto K. Studies on the Painleve equations I. The six Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. **146**. 337–381.
56. Shimomura S. Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular points // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 163–184.
57. Shimomura S. Series expansions of Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular point // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 185–197.
58. Shimomura S. Supplement to "Series expansions of Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular point" // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 363–371.
59. Shimomura S. A family of solutions of a nonlinear ordinary differential equation and its application to Painlevé equations (III), (V), (VI) // J. Math. Soc. Japan. 987. **39**. 649–662.
62. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Методы, используемые при исследовании асимптотических разложений решений уравнения P6. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. № .

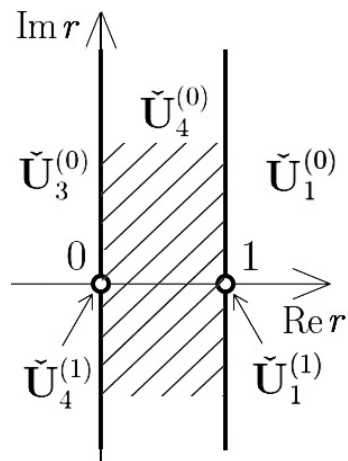


Рис. 1

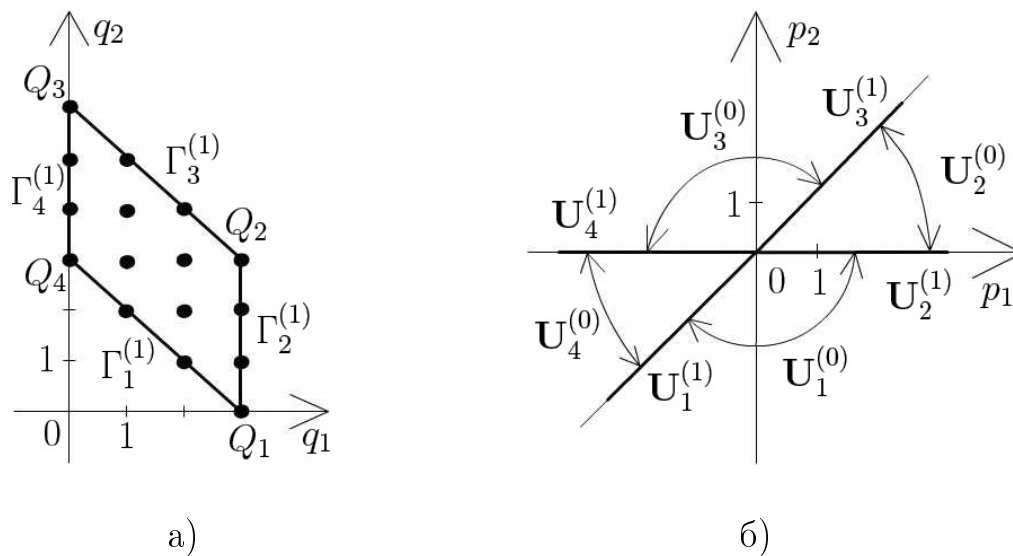


Рис. 2

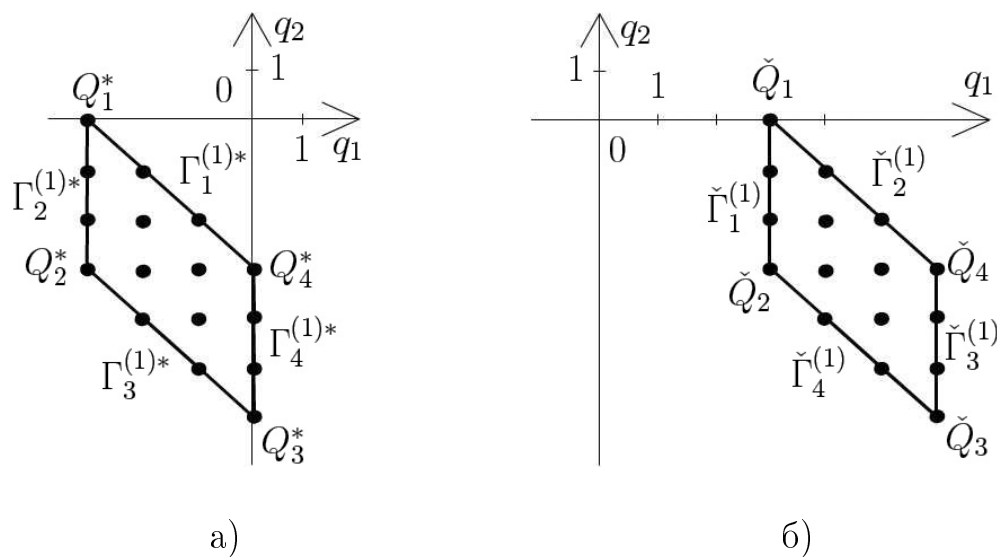
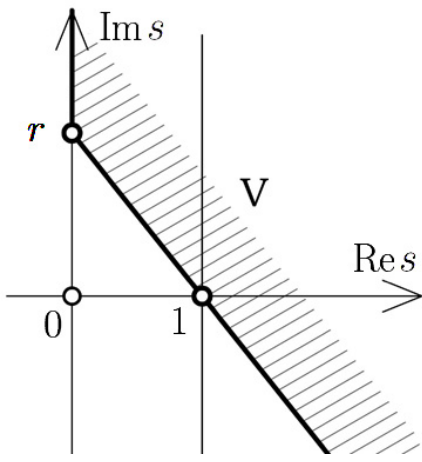
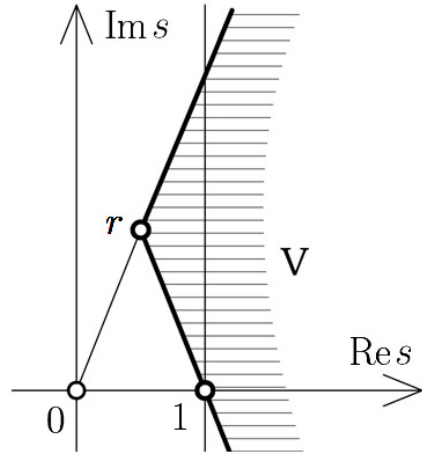


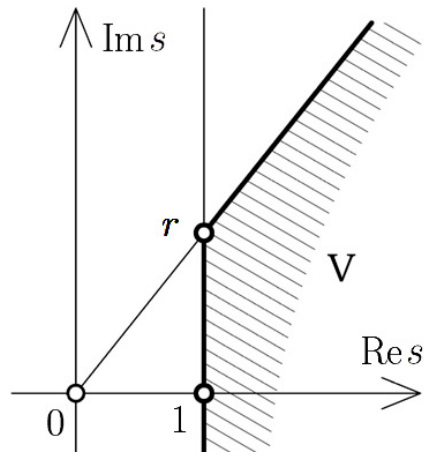
Рис. 3



a)



б)



в)

Рис. 4



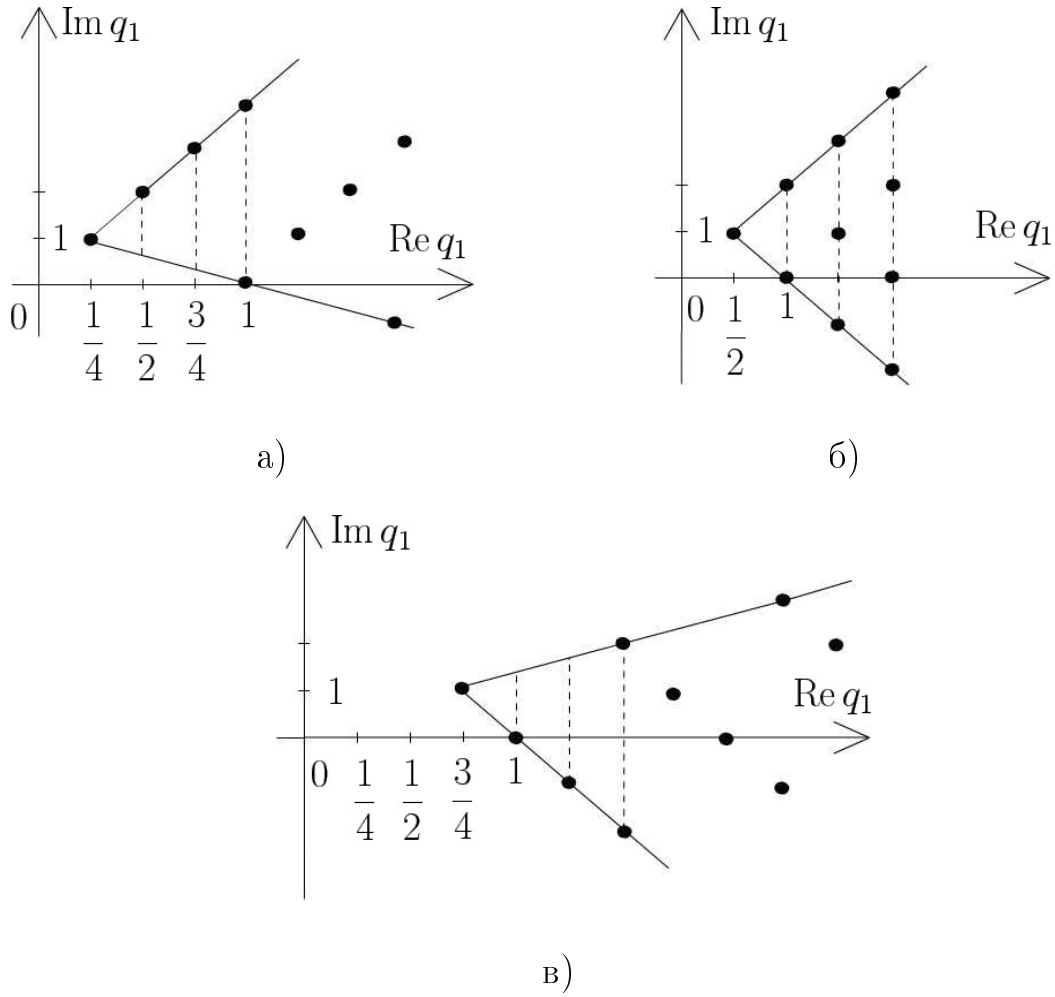


Рис. 5

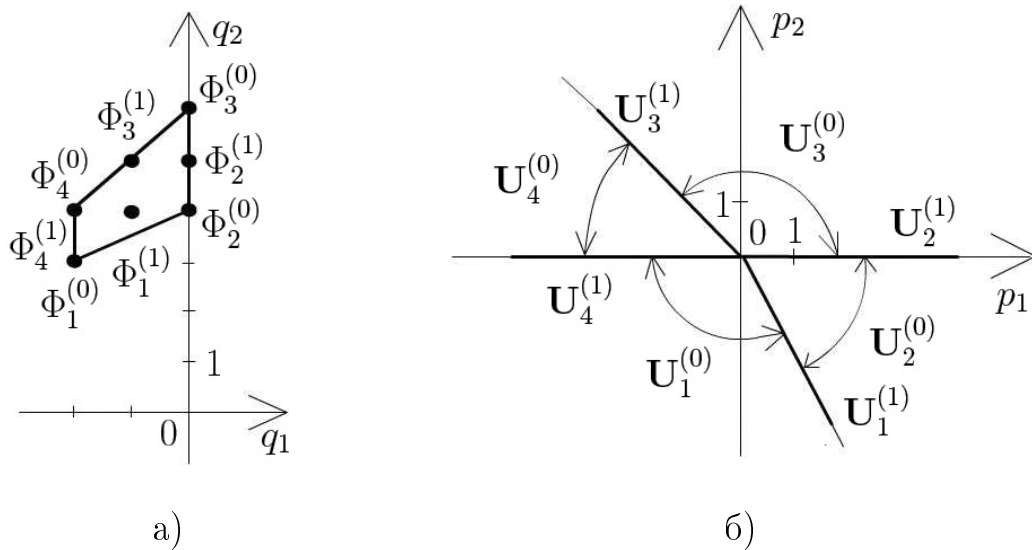


Рис. 6

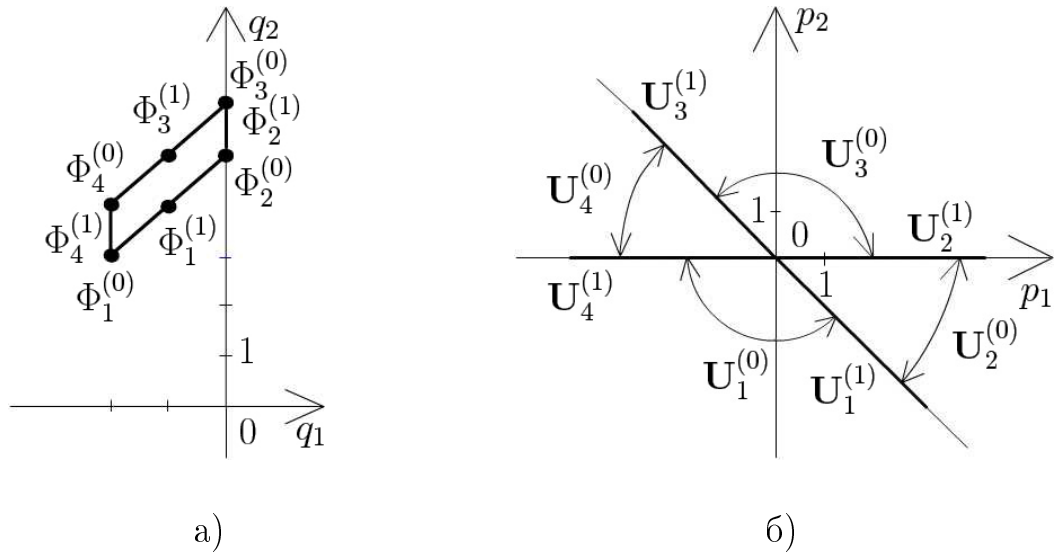


Рис. 7

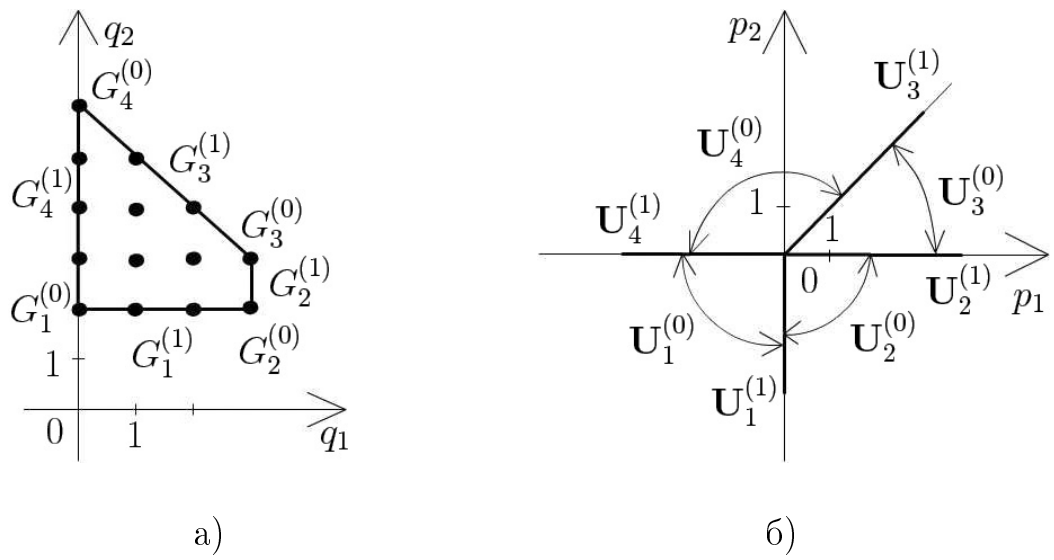


Рис. 8