



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 88 за 2007 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.Н. Готов, [С. Н. Емельянов](#),
[В. В. Сазонов](#)

Определение движения
механических объектов по
данным видеоизмерений в
задачах робототехники

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Готов Ю.Н., Емельянов С. Н., Сазонов В. В. Определение движения механических объектов по данным видеоизмерений в задачах робототехники // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 88. 29 с.
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-88>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Ю.Н.Глотов, С.Н.Емельянов, В.В.Сазонов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ
МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ
ПО ДАННЫМ ВИДЕОИЗМЕРЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ РОБОТОТЕХНИКИ**

Москва - 2007

Аннотация

Описана методика определения движения стержня, качающегося на бифилярном подвесе, по данным видеоизмерений. Исходной информацией служат координаты концевых точек изображения стержня на ПЗС-матрице ТВ-камеры. Получаемая последовательность измерений накапливается на некотором отрезке времени и затем обрабатывается методом наименьших квадратов с помощью интегрирования нелинейных уравнений движения стержня. Рассмотрен также вариант обработки данных последовательно поступающими порциями (т.н. метод динамической фильтрации). Приводятся примеры обработки реальных данных измерений и статистические оценки точности определения движения стержня. Разработанная методика предназначена для использования в контуре управления работа-манипулятора, взаимодействующего с подвижными объектами.

Y.N.Glotov, S.N.Emel'yanov, V.V.Sazonov. Determination of a mechanical objects motion on video measurements in robotics problems. The paper describes the methods of determining a motion of a rod swinging on a double-wound suspension. A proper vision system produces measurements for such determining. Each measurement contains coordinates of end points of the rod image in a TV-camera. A sequence of those measurements, accumulated in a few seconds, is processed simultaneously by means of the least squares method and integrating the rod motion equations. Also, the recurring method is considered which processes the measurement data parted in successive portions (the method of dynamic filtration). The paper contains some examples of processing the real measurement data and estimating the accuracy of the motion determination. These methods are intended for the use in a control loop of a robot-manipulator interacting with movable objects.

1. Введение. В середине 90-х годов в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН проводились эксперименты по захвату роботоманипулятором подвижного объекта [1]. Объектом служил стержень, качающийся на бифилярном подвесе. Существенной частью программного обеспечения этих экспериментов была программа определения движения стержня по видеоинформации, предоставляемой системой технического зрения (СТЗ). Изображение стержня в ТВ-камере СТЗ проецировалось на ПЗС-матрицу и преобразовывалось в цифровой код. Полученная информация обрабатывалась, и в результате определялись координаты концевых точек изображения стержня на ПЗС-матрице. Эти данные, накопленные на отрезке времени длиной 0.3 с и более, подвергались статистической обработке с использованием математической модели движения стержня. Такая обработка позволяла спрогнозировать движение стержня на несколько секунд вперед, вывести манипулятор в точку захвата и выполнить захват.

Используемая в [1] математическая модель колебаний стержня выражается конечными формулами, полученными при решении линеаризованных уравнений движения. На достаточно продолжительных интервалах времени (30 с и более) ошибка определения и прогноза движения стержня с помощью этой модели становится достаточно большой. В данной работе предложены новая модель колебаний стержня, основанная на нелинейных уравнениях движения, и рекуррентный алгоритм обработки данных измерений. Новый способ определения движения стержня характеризуется большей универсальностью и значительным увеличением времени прогноза движения стержня с приемлемой погрешностью. Несмотря на некоторую сложность и громоздкость предлагаемого алгоритма, современные ПЭВМ обеспечивают достаточно быструю его реализацию и возможность использования в контуре управления роботом.

2. Математическая модель движения стержня. При выводе уравнений движения стержня, качающегося на бифилярном подвесе (рис. 1), сделаем следующие допущения. Стержень — абсолютно жесткий и представляет собой отрезок однородной материальной прямой; нити подвеса нерастяжимы, невесомы и имеют одинаковую длину; точки крепления нитей к неподвижной балке лежат в одной горизонтальной плоскости. Из активных сил, приложенных к стержню, будем учитывать силы тяжести и линейного вязкого трения о воздух.

Чтобы записать соотношения, выражающие используемую модель, введем правую декартову систему координат $O_1x_1x_2x_3$. Точка O_1 — середина отрезка прямой, соединяющей точки A_1 и A_2 крепления нитей к неподвижной балке (рис. 1), ось O_1x_1 направлена вдоль вектора $\overrightarrow{A_2A_1}$, ось O_1x_3 направлена вертикально вниз. Ниже координаты точек и компоненты векторов указываются в системе $O_1x_1x_2x_3$. По определению этой системы $A_1 = (a, 0, 0)$,

$A_2 = (-a, 0, 0)$, и в положении покоя стержня координаты его концов — точек B_1 и B_2 (рис. 1) — имеют вид $B_1 = (b, 0, h)$, $B_2 = (-b, 0, h)$, где a , b и h — положительные постоянные. Числовые значения этих постоянных находились при юстировке стенда.

Координаты точек B_1 и B_2 в произвольном положении стержня представим в виде $B_1 = (b + u_1, v_1, h + w_1)$, $B_2 = (-b + u_2, v_2, h + w_2)$. Величины u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2$) подчинены трем связям, выражающим неизменность длин отрезков A_1B_1 , A_2B_2 и B_1B_2 :

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv (u_1 + b - a)^2 + v_1^2 + (w_1 + h)^2 - h^2 - (b - a)^2 = 0, \\ f_2 &\equiv (u_2 - b + a)^2 + v_2^2 + (w_2 + h)^2 - h^2 - (b - a)^2 = 0, \\ f_3 &\equiv (u_1 - u_2 + 2b)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2 - 4b^2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве независимых координат системы можно было бы взять переменные u_1, v_1, v_2 . Однако величины u_2, w_1, w_2 не удалось выразить через них в удобной аналитической форме. По этой причине уравнения движения стержня запишем в виде уравнений Лагранжа 2-го рода со связями:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (2)$$

Здесь $\{q_1, \dots, q_6\} = \{u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2\}$, λ_j — множители Лагранжа, T — кинетическая энергия стержня, Π — потенциальная энергия стержня в поле силы тяжести, \mathcal{R} — диссипативная функция Релея, задающая силы вязкого трения о воздух. Для удобства записи последующих формул введем обозначения: $q = (q_1, \dots, q_6)^T \in \mathbb{R}^6$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

Согласно теореме Кенига кинетическую энергию стержня представим в виде

$$T = \frac{1}{2} M |\mathbf{v}_c|^2 + \frac{1}{2} I |\boldsymbol{\Omega}|^2. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{v}_c = 1/2 (\dot{u}_1 + \dot{u}_2, \dot{v}_1 + \dot{v}_2, \dot{w}_1 + \dot{w}_2)$ — скорость центра масс стержня, $I = Mb^2/3$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно отрезку B_1B_2 , $\boldsymbol{\Omega}$ — проекция угловой скорости стержня на плоскость, перпендикулярную отрезку B_1B_2 .

Орт \mathbf{n} стержня представим следующим образом

$$\mathbf{n} = \left(\frac{u_1 - u_2}{2b} + 1, \frac{v_1 - v_2}{2b}, \frac{w_1 - w_2}{2b} \right).$$

Поскольку $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}$, имеем,

$$|\boldsymbol{\Omega}|^2 = |\dot{\mathbf{n}}|^2 = \frac{(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2 + (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)^2 + (\dot{w}_1 - \dot{w}_2)^2}{4b^2}.$$

Подставляя выписанные выражения для \mathbf{v}_c и $\mathbf{\Omega}$ в (3), получаем

$$T = \frac{M}{6}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_1\dot{u}_2 + \dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_1\dot{v}_2 + \dot{w}_1^2 + \dot{w}_2^2 + \dot{w}_1\dot{w}_2).$$

Последнюю формулу можно записать в матричной форме:

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q}, \quad A = \frac{M}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Потенциальную энергию стержня возьмем в виде:

$$\Pi = -Mg \frac{w_1 + w_2}{2} = -a^T q, \quad a = \frac{1}{2}(0, 0, 0, 0, Mg, Mg)^T \in \mathbb{R}^6.$$

В качестве независимых обобщенных координат системы можно взять

$$\alpha = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \beta = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad \gamma = \frac{v_1 - v_2}{2b}.$$

Эти величины имеют простой геометрический смысл: α и β — координаты x_1 и x_2 центра масс стержня; γ — синус угла между стержнем и плоскостью $O_1x_1x_3$. Уравнения Лагранжа 2-го рода, отвечающие таким обобщенным координатам, имеют устойчивое стационарное решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Оно описывает покой стержня. Кроме того, в случае отсутствия трения о воздух уравнения Лагранжа относительно α , β и γ допускают три семейства частных нестационарных решений, описывающих движение стержня по одной из его степеней свободы. В этих семействах либо $\alpha = 0$, $\beta = 0$, либо $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, либо $\beta = 0$, $\gamma = 0$. В первом из этих семейств стержень не выходит из плоскости $O_1x_1x_3$, во втором семействе он качается в направлении оси O_1x_2 подобно качелям, в третьем совершает колебания вокруг O_1x_3 , причем его середина остается на этой оси. Линеаризованные уравнения для переменных α , β , γ имеют вид

$$\ddot{\alpha} + \Omega_1^2 \alpha = 0, \quad \ddot{\beta} + \Omega_2^2 \beta = 0, \quad \ddot{\gamma} + \Omega_3^2 \gamma = 0.$$

Здесь

$$\Omega_1^2 = \frac{6g[a(b-a)^2 + bh^2]}{bh[(b-a)^2 + 6h^2]}, \quad \Omega_2^2 = \frac{g}{h}, \quad \Omega_3^2 = \frac{3ag}{bh}$$

суть квадраты собственных частот. Из вида выписанных уравнений следует, что обобщенные координаты α , β и γ являются нормальными координатами

линеаризованной системы. Поэтому при наличии трения о воздух диссипативную функцию Релея естественно взять в виде:

$$2\mathcal{R} = \mu_1\dot{\alpha}^2 + \mu_2\dot{\beta}^2 + \mu_3b^2\dot{\gamma}^2 = \mu_1\frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2)^2}{4} + \mu_2\frac{(\dot{v}_1 + \dot{v}_2)^2}{4} + \mu_3\frac{(\dot{v}_1 - \dot{v}_2)^2}{4},$$

или в матричной форме

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\dot{q}^T R \dot{q}, \quad R = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 + \mu_3 & \mu_2 - \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 - \mu_3 & \mu_2 + \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнения (2) запишем в виде

$$A\ddot{q} - a = -R\dot{q} + J^T\lambda. \quad (4)$$

Эти уравнения должны рассматриваться вместе с уравнениями связей (1). Процедура исключения неопределенных множителей в уравнениях Лагранжа осуществляется обычным способом. Продифференцируем уравнения (1) дважды по времени. Получим

$$J\ddot{q} + d = 0, \quad (5)$$

$$J = \begin{vmatrix} u_1 + b - a & 0 & v_1 & 0 & w_1 + h & 0 \\ 0 & u_2 - b + a & 0 & v_2 & 0 & w_2 + h \\ u_1 - u_2 + 2b & u_2 - u_1 - 2b & v_1 - v_2 & v_2 - v_1 & w_1 - w_2 & w_2 - w_1 \end{vmatrix},$$

$$d = \begin{vmatrix} \dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{w}_1^2 \\ \dot{v}_2^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{w}_2^2 \\ (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2 + (\dot{w}_1 - \dot{w}_2)^2 \end{vmatrix}.$$

Уравнения (4), (5) образуют замкнутую линейную систему относительно неизвестных \ddot{q} , λ . Определитель этой системы отличен от нуля. Ее можно решить (численно) и найти

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}). \quad (6)$$

Уравнения (6) лежат в основе алгоритма определения движения стержня по данным измерений. Эти уравнения интегрируются численно методом Рунге – Кутты 4-го порядка, причем при каждом вычислении их правой части решается система (4), (5).

3. Определение движения стержня по данным измерений. Для описания метода обработки данных видеоизмерений введем связанную с камерой систему координат $O_2y_1y_2y_3$. Ось O_2y_3 является оптической осью камеры и направлена из ее объектива наружу.

Матрицу перехода от системы координат камеры к системе координат стенда обозначим $\|r_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где r_{ij} — косинус угла между осями O_1x_i и O_2y_j . Элементы этой матрицы будем выражать через углы φ_1 , φ_2 и φ_3 , на которые надо повернуть систему $O_1x_1x_2x_3$ последовательно вокруг осей O_1x_1 , O_2x_2 , O_3x_3 , чтобы (при совпадении точек O_1 и O_2) перевести ее в систему $O_2y_1y_2y_3$. Справедливы формулы:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos \varphi_2 \cos \varphi_3, & r_{21} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_3, \\ r_{12} &= -\cos \varphi_2 \sin \varphi_3, & r_{22} &= -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3, \\ r_{13} &= \sin \varphi_2, & r_{23} &= -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{31} &= -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3, \\ r_{32} &= \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_3, \\ r_{33} &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \end{aligned}$$

Если какая-либо точка имеет в системе $O_1x_1x_2x_3$ координаты (x_1, x_2, x_3) , а в системе $O_2y_1y_2y_3$ — координаты (y_1, y_2, y_3) , то имеют место соотношения

$$y_i = b_i + \sum_{k=1}^3 x_k r_{ki} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь (b_1, b_2, b_3) — координаты точки O_1 в системе координат $O_2y_1y_2y_3$.

В плоскости ПЗС-матрицы камеры введем систему координат $O_3\xi\eta$. Начало этой системы лежит на оптической оси камеры (оси O_2y_3), оси $O_3\xi$ и $O_3\eta$ параллельны осям O_2y_1 и O_2y_2 соответственно. Будем считать, что если какая-либо точка имеет в системе $O_2y_1y_2y_3$ координаты (y_1, y_2, y_3) и попадает в поле зрения камеры, то координаты изображения этой точки в плоскости $O_3\xi\eta$ определяются соотношениями

$$\xi = f \frac{y_1}{y_3}, \quad \eta = f \frac{y_2}{y_3}. \quad (7)$$

Здесь f — фокусное расстояние объектива камеры. Координаты ξ и η будем измерять в пикселах (полагаем, что пикселы — квадратные). В этом случае f является безразмерной величиной и представляет собой отношение фокусного расстояния к стороне пиксела.

Данные измерений, получаемые в результате обработки телевизионного изображения стержня, представляют собой [2] последовательности координат точек $B'_1 = (\xi_1, \eta_1)$ и $B'_2 = (\xi_2, \eta_2)$, являющихся изображениями точек B_1 и B_2 на ПЗС-матрице, и моменты времени, к которым эти координаты относятся. Время отсчитывается от момента запуска программы обработки

изображения. Измерения $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$, отвечающие моменту времени t_i , обозначим $z_i = \left(\xi_1^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \eta_2^{(n)} \right)$. Здесь $n = 1, 2, \dots, N$; $t_1 < t_2 < \dots < t_N$.

Примем, что движение стержня подчиняется уравнениям (4), (5). Тогда движение точек B_1 и B_2 можно описать функциями $\xi_1(t), \eta_1(t), \xi_2(t), \eta_2(t)$, рассчитываемыми вдоль решений этих уравнений. Приведем расчетные формулы.

Координаты точек B_1 и B_2 в системе $O_1x_1x_2x_3$ обозначим (x'_1, x'_2, x'_3) и (x''_1, x''_2, x''_3) , координаты тех же точек в системе $O_2y_1y_2y_3$ обозначим соответственно (y'_1, y'_2, y'_3) и (y''_1, y''_2, y''_3) . Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} x'_1 &= b + u_1, & x'_2 &= v_1, & x'_3 &= h + w_1, \\ x''_1 &= b + u_2, & x''_2 &= v_2, & x''_3 &= h + w_2, \\ \xi_1 &= f \frac{y'_1}{y'_3}, & \eta_1 &= f \frac{y'_2}{y'_3}, & \xi_2 &= f \frac{y''_1}{y''_3}, & \eta_2 &= f \frac{y''_2}{y''_3}, \end{aligned} \quad (8)$$

причем x'_i и y'_j , x''_i и y''_j связаны указанными выше формулами.

Из функций (8) составим вектор

$$F(t, \alpha) = \left[\xi_1(t, \alpha), \eta_1(t, \alpha), \xi_2(t, \alpha), \eta_2(t, \alpha) \right]^T,$$

где α — вектор, компонентами которого являются начальные условия решения уравнений (4), (5), некоторые параметры этих уравнений и параметры видеосистемы. Более точно, компонентами α являются: обобщенные координаты $u_1(t_1)$, $v_1(t_1)$ и $v_2(t_1)$, обобщенные скорости $\dot{u}_1(t_1)$, $\dot{v}_1(t_1)$ и $\dot{v}_2(t_1)$, коэффициенты вязкого трения μ_1 , μ_2 и μ_3 , координаты b_1 , b_2 и b_3 , углы φ_1 , φ_2 и φ_3 , фокусное расстояние f , всего 16 величин.

Измерения содержат ошибки, поэтому для рассчитанных описанным способом функций $F(t, \alpha)$ даже при правильном выборе α могут иметь место лишь приближенные соотношения $z_n \approx F(t_n, \alpha)$. Определение движения стержня сводится к поиску решения уравнений (4), (5), обеспечивающего наименьшие ошибки выполнения этих соотношений. Такая задача решается стандартным методом наименьших квадратов.

Следуя методу наименьших квадратов, аппроксимацией движения стержня на отрезке $t_1 \leq t \leq t_N$ будем считать решение системы (4), (5), доставляющее минимум функционалу

$$\Psi(\alpha) = \sum_{n=1}^N \|z_n - F(t_n, \alpha)\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Минимизация функционала Ψ , как правило, проводится по 16 величинам. Существует также вариант минимизации по 6

величинам. В этом случае уточняются начальные значения обобщенных координат и скоростей, а остальные параметры фиксированы. Ниже для определенности рассматриваем первый случай.

Минимизация Ψ сводится к решению уравнения $\partial\Psi/\partial\alpha = 0$ и выполняется методом Левенберга – Марквардта, который является одной из модификаций метода Гаусса-Ньютона. На каждом шаге этого метода поправка $\Delta\alpha$ к имеющемуся значению α находится из системы

$$(B(\alpha) + \varkappa E) \Delta\alpha = b(\alpha).$$

Здесь

$$B(\alpha) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial F(t_n, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^T \frac{\partial F(t_n, \alpha)}{\partial \alpha},$$

$$b(\alpha) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial F(t_n, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^T [z_n - F(t_n, \alpha)],$$

\varkappa – положительный параметр, E – единичная матрица порядка 16. Вычисление частных производных по начальным условиям и коэффициентам вязкого трения сводится к численному интегрированию уравнений в вариациях для системы (4), (5). Частные производные по параметрам камеры вычисляются по явным формулам. На первом шаге метода Левенберга – Марквардта $\varkappa = 0.01$. На последующих шагах: если $\Psi(\alpha + \Delta\alpha) < \Psi(\alpha)$, то уменьшаем \varkappa в 10 раз и вектору α присваиваем значение $\alpha + \Delta\alpha$; в противном случае увеличиваем \varkappa в 10 раз и повторяем расчеты. Процесс заканчивается, когда либо $\Delta\alpha$ будет достаточно мало, либо \varkappa слишком велико.

Чтобы алгоритм минимизации был надежен, необходимо иметь достаточно точное начальное приближение точки минимума. В качестве начального приближения величин $u_1(t_1)$, $v_1(t_1)$, $v_2(t_1)$ используются значения этих величин, найденные по значению z_1 из условия наименьшей (в смысле метода наименьших квадратов) ошибки в выражениях (1), (8). Начальные скорости вычисляются по приближенным формулам:

$$\dot{u}_1(t_1) = \frac{u_1(t_2) - u_1(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad \dot{v}_1(t_1) = \frac{v_1(t_2) - v_1(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad \dot{v}_2(t_1) = \frac{v_2(t_2) - v_2(t_1)}{t_2 - t_1},$$

где величины $u_1(t_2)$, $v_1(t_2)$, $v_2(t_2)$ вычисляются по измерению z_2 аналогично величинам $u_1(t_1)$, $v_1(t_1)$, $v_2(t_1)$.

Следуя методу наименьших квадратов, точность оценки $\alpha_* = \operatorname{argmin}\Psi(\alpha)$ будем характеризовать соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в измерениях величин ξ_1 , η_1 , ξ_2 , η_2 не коррелированы, имеют нулевые средние значения и одинаковые дисперсии. При сделанных допущениях α_* – случайный вектор с при-

близительно нормальным распределением. Среднее значение α_* равно истинному значению α ; его ковариационная матрица и оценка дисперсии ошибок в измерениях вычисляются по формулам

$$K_\alpha = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^{16} = \sigma^2 B^{-1}(\alpha_*), \quad \sigma^2 = \frac{\Psi(\alpha_*)}{4N - 16}.$$

Соответствующее стандартное отклонение σ характеризует точность аппроксимации данных видеоизмерений функциями (8), точность оценки $\alpha = \alpha_*$ характеризуется стандартными отклонениями компонент вектора α_* — квадратными корнями из диагональных элементов матрицы K_α .

В качестве характеристики точности определения движения стержня будем использовать ковариационную матрицу $K_\beta(t)$ вектора

$$\beta(t, \alpha_*) = [x'_1(t, \alpha_*), x'_2(t, \alpha_*), x'_3(t, \alpha_*), x''_1(t, \alpha_*), x''_2(t, \alpha_*), x''_3(t, \alpha_*)]^T.$$

Она рассчитывается по формуле

$$K_\beta(t) = \frac{\partial \beta(t, \alpha_*)}{\partial \alpha} K_\alpha \left[\frac{\partial \beta(t, \alpha_*)}{\partial \alpha} \right]^T.$$

Квадратные корни из диагональных элементов этой матрицы обозначим $\sigma_{x'_i}(t)$ и $\sigma_{x''_i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$). Эти величины представляют собой стандартные отклонения оценок $x'_i(t, \alpha_*)$ и $x''_i(t, \alpha_*)$.

4. Пример определения движения стержня по данным измерений. Результаты определения движения стержня по описанной методике на интервалах времени длиной 5, 10 и 15 сек. приведены на рис. 2 – 7. Рисунки относятся к одному и тому же движению, определяемому на увеличивающихся интервалах времени; левые точки этих интервалов совпадают. Рис. 2, 4 и 6 иллюстрируют точность аппроксимации данных измерений функциями (8). В левой части рисунков сплошной линией изображены графики функций $\xi_i(t)$ и $\eta_i(t)$ ($i = 1, 2$), маркерами указаны измерения. В правой части изображены ломаные, абсциссы вершин которых — моменты измерений t_n , а ординаты — разности $\Delta \xi_i(t_n) = \xi_i^{(n)} - \xi_i(t_n)$ и $\Delta \eta_i(t_n) = \eta_i^{(n)} - \eta_i(t_n)$ ($i = 1, 2; n = 1, \dots, N$). Смысл имеют только вершины ломаных, а их звенья служат лишь для удобства визуализации. Из рисунков видно, что с увеличением длины обрабатываемого интервала систематическая составляющая в остатках $\Delta \xi_i(t_n)$ и $\Delta \eta_i(t_n)$ возрастает. Особенно четко систематическая составляющая проявляется вблизи концов интервалов (см. рис. 4, 6). Согласие математической модели с данными измерений характеризуется стандартным отклонением σ , значение которого приведено в подписях к рисункам. На рис. 3, 5 и 7 приведены графики стандартных отклонений $\sigma_{x'_i}(t)$ и $\sigma_{x''_i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$), характеризующие точность определения движения концов стержня — точек

B_1 и B_2 . Как видно из этих графиков, точнее всего движение определяется в средней части отрезка; вблизи концов точность снижается.

Анализ стандартных отклонений оценки $\alpha = \alpha_*$ вместе с анализом собственных векторов матрицы B (см. п. 3), отвечающих ее нескольким минимальным собственным числам, позволяет понять характер неопределенности, которая возникает при определении α . Анализ основан на формуле

$$B^{-1} = \sum_{k=1}^{16} \left(\frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right) \left(\frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right)^T,$$

где c_k и u_k — собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы B . Из этой формулы следует, что наибольшие стандартные отклонения имеют те определяемые параметры, которым отвечают наибольшие компоненты векторов $u_k/\sqrt{c_k}$.

В качестве примера такого анализа исследуем точность определения движения стержня на интервале времени 5 сек. (рис. 2, 3). Минимизация функционала $\Psi(\alpha)$ привела к следующим результатам:

$$\begin{array}{lll} u_1(t_1) = 0.0056, & v_1(t_1) = -0.077, & v_2(t_1) = -0.15, \\ \dot{u}_1(t_1) = -0.26, & \dot{v}_1(t_1) = -0.51, & \dot{v}_2(t_1) = -0.0027, \\ \mu_1 = 0.0066, & \mu_2 = 0.013, & \mu_3 = 0.011, \\ b_1 = 0.019, & b_2 = 0.081, & b_3 = -0.11, \\ \varphi_1 = 0.042, & \varphi_2 = -0.034, & \varphi_3 = 0.00086, \\ f = 853.7 & & \end{array}$$

Стандартные отклонения уточняемых величин в данном случае составляют

$$\begin{array}{lll} \sigma_{u_1(t_1)} = 8.59 \cdot 10^{-5} & \sigma_{v_1(t_1)} = 1.51 \cdot 10^{-4} & \sigma_{v_2(t_1)} = 1.56 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_{\dot{u}_1(t_1)} = 3.72 \cdot 10^{-4} & \sigma_{\dot{v}_1(t_1)} = 5.92 \cdot 10^{-4} & \sigma_{\dot{v}_2(t_1)} = 5.91 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_{\mu_1} = 9.03 \cdot 10^{-4} & \sigma_{\mu_2} = 6.21 \cdot 10^{-4} & \sigma_{\mu_3} = 5.07 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_{b_1} = 8.25 \cdot 10^{-3} & \sigma_{b_2} = 1.01 \cdot 10^{-2} & \sigma_{b_3} = 1.53 \cdot 10^{-1} \\ \sigma_{\varphi_1} = 4.37 \cdot 10^{-3} & \sigma_{\varphi_2} = 3.53 \cdot 10^{-3} & \sigma_{\varphi_3} = 2.31 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_f = 59.31 & & \end{array}$$

Углы здесь выражены в радианах, коэффициенты вязкого трения — в кг/с, начальные условия — в м и м/с. В приведенном примере наименее точно найдены координата b_3 точки O_1 и фокусное расстояние f .

Большие значения σ_f и σ_{b_3} объясняются так. Упорядоченные в порядке возрастания собственные числа матрицы B в рассматриваемом примере составляют $c_1 = 1.9 \cdot 10^{-5}$, $c_2 = 9.00 \cdot 10^2$, $c_3 = 3.25 \cdot 10^3$, $7.86 \cdot 10^4$, $9.79 \cdot 10^4$, $1.51 \cdot 10^5$, $4.49 \cdot 10^5$, $1.08 \cdot 10^6$, $1.45 \cdot 10^6$, $2.25 \cdot 10^6$, $2.99 \cdot 10^6$, $6.10 \cdot 10^6$, $7.44 \cdot 10^6$, $1.19 \cdot 10^7$, $1.45 \cdot 10^8$, $1.49 \cdot 10^8$; Для проводимого анализа интерес представляет только вектор

$$\frac{u_1}{\sqrt{c_1}} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.03, -0.03, 0.59, 0, 0, 0, 232.35)^T.$$

Компоненты этого вектора упорядочены так же, как указанные выше стандартные отклонения; нули означают, что модули соответствующих компонент меньше 0.01. Выписанный вектор дает наиболее значимый вклад в стандартные отклонения уточняемых величин. Он имеет две существенно отличных от нуля компоненты, одна из них, равная 0.59, отвечает параметру b_3 , другая, равная 232.35, — параметру f . Причина плохого одновременного уточнения этих параметров объясняется расположением камеры. Дело в том, что угол между главной оптической осью камеры O_2y_3 и осью O_1x_3 близок к нулю. Заметим, что величина $\chi = f/(h + b_3)$ уточняется с заметно меньшим стандартным отклонением. А именно, для ее стандартного отклонения σ_χ справедливо соотношение

$$\sigma_\chi^2 = a^T K_\alpha a = \sigma^2 \sum_{k=1}^{16} \left(\frac{u_k^T a}{\sqrt{c_k}} \right)^2 \approx \left(\sigma \frac{u_1^T a}{\sqrt{c_1}} \right)^2,$$

где вектор a задается видом дифференциала $d\chi = a^T d\alpha$ в точке α_* . Оказывается, $\chi = 387.17$, $\sigma_\chi = 0.4$, $\sigma_\chi/\chi = 0.001$.

Примеры прогнозирования движения стержня на интервал времени, прилегающий к интервалу обработки и имеющий одинаковую с ним длину, приведены на рис. 8 – 13. Эти рисунки устроены аналогично рис. 2 – 7. Интервалы обработки совпадают с интервалами, представленными на рис. 2, 4 и 6. Как и следовало ожидать, в конце интервала прогнозирования ошибка существенно возрастает. Однако во всех примерах она остается приемлемой — менее 1.1 мм по каждой координате точек B_1, B_2 .

5. Динамическая фильтрация. Алгоритм обработки данных измерений, описанный в п. 3, предусматривает совместную обработку всей совокупности измерений $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$. Однако на длительных интервалах времени становится заметен неслучайный характер ошибки обработки, являющийся следствием неадекватности математической модели движения стержня (см. рис. 6). Вследствие этого естественно перейти к рекуррентной обработке данных последовательными порциями. Порции должны иметь такую длину, при которых ошибка модели имеет случайный характер. В данном случае порция должна охватывать отрезок времени не более 15 с. (см. рис. 2, 4). Ниже описан один из возможных алгоритмов такого рода. Данные обрабатываются отдельными порциями фиксированной длины. При обработке второй и последующих порций учитываются результаты обработки предыдущих порций.

Определение движения выполняется следующим образом. Пусть имеется последовательность обработанных кадров, отвечающих $t_1 < t_2 < \dots$. Моменту t_k соответствует кадр с номером k . Измерения z_k с индексами $k = 1, 2, \dots, K_1$ составляют первую порцию данных, с индексами $k = K_1 + 1, K_1 + 2, \dots, K_2$ — вторую порцию, с индексами $k = K_{n-1} + 1, K_{n-1} + 2, \dots, K_n$ — n -ую порцию. При обработке каждой порции данных параметры камеры и модели считались фиксированными, определялись только начальные условия движения в точке t_1 . Иными словами, $\dim \alpha = 6$.

Первая порция данных обрабатывается обычным методом наименьших квадратов. Для этого рассматривается функционал

$$\Psi_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{K_1} \|z_k - F(t_k, \alpha)\|^2.$$

Его минимизация выполняется методом Левенберга – Марквардта (см. п. 3). Оценка $\alpha^{(1)}$ вектора α и ковариационная матрица P_1 этой оценки рассчитываются по формулам

$$\alpha^{(1)} = \left[\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_p^{(1)} \right]^T = \operatorname{argmin} \Psi_1(\alpha), \quad P_1 = \sigma^2 B_1^{-1}, \quad \sigma^2 = \frac{\Psi_1[\alpha^{(1)}]}{4K_1 - p},$$

где B_1 — вычисленная в точке $\alpha^{(1)}$ матрица системы нормальных уравнений, возникающих в процессе минимизации Ψ_1 .

При обработке второй порции данных минимизируется функционал

$$\Psi_2(\alpha) = \left[\alpha - \alpha^{(1)} \right]^T C_2 \left[\alpha - \alpha^{(1)} \right] + \sum_{k=K_1+1}^{K_2} \|z_k - F(t_k, \alpha)\|^2, \quad (9)$$

где $C_2 = qB_1$, q — параметр, $0 \leq q \leq 1$. Оценка $\alpha^{(2)}$ и ковариационная матрица P_2 этой оценки задаются формулами

$$\alpha^{(2)} = \operatorname{argmin} \Psi_2(\alpha), \quad P_2 = \sigma^2 B_2^{-1}, \quad \sigma^2 = \frac{\Psi_2[\alpha^{(2)}]}{4(K_2 - K_1) - 17}.$$

Здесь B_2 — вычисленная в точке $\alpha^{(1)}$ матрица системы нормальных уравнений, возникающих в процессе минимизации Ψ_2 .

Обработка третьей и последующих порций данных выполняется по той же схеме, что и обработка второй порции. Формулы обработки порции с номером n получаются из формул для обработки второй порции заменой индексов, выражающих номера порций: $1 \rightarrow n - 1$, $2 \rightarrow n$.

Описанный алгоритм обработки весьма похож на нелинейный калмановский фильтр [4]. В нелинейном фильтре Калмана матрица C_n рассчитывается по формуле $C_n = (P_{n-1} + D_n)^{-1}$, где D_n — ковариационная матрица

той части разности $\alpha^{(n)} - \alpha^{(n-1)}$, которая обусловлена ошибками математической модели при переходе от отрезка времени $t_{K_{n-2}+1} \leq t \leq t_{K_{n-1}}$ к отрезку $t_{K_{n-1}+1} \leq t \leq t_{K_n}$. Вид функционала $\Psi_n(\alpha)$ подразумевает, что ковариационная матрица ошибок в измерениях величин ξ_1, η_1, ξ_2 и η_2 равна единичной. Как нетрудно видеть, $C_n < B_{n-1}$, т.е. матрица $B_{n-1} - C_n$ положительно определена. Введение матрицы D_n обеспечивает уменьшение вклада оценки $\alpha^{(n-1)}$ в обновленную оценку $\alpha^{(n)}$. К сожалению, матрица D_n неизвестна, а ее оценки в рассматриваемом случае вряд ли можно считать адекватными. В такой ситуации естественно принять $C_n = qB_{n-1}$, $q < 1$. Описанный способ выбора C_n означает, что при обработке n -ой порции данных учитываются данные предыдущих порций, причем n -ой порции приписывается вес 1, $(n-1)$ -ой порции — вес q , $(n-2)$ -ой — вес q^2 и т.п.

Пример работы описанного алгоритма определения движения стержня приведен на рис. 13, 14. Обработка данных измерений выполнялась на интервале времени 60 с. Порции данных формировались в течение 1 с и содержали по 15 моментов времени с измерениями: $K_n - K_{n-1} = 15$. Обработка проводилась при $q = 0.9$. Сравнение рис. 13, 14 с рис. 6, 7 показывает, что точность обработки измерений существенно повысилась.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00286).

Список литературы

- [1] Белоусов И.Р., Богуславский А.А., Емельянов С.Н. и др. Захват подвижного объекта роботом-манипулятором. Известия РАН, МТТ, 1998, № 4, с. 102-116.
- [2] Белоусов И.Р., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Захват подвижного объекта роботом-манипулятором, управляемым через Интернет. ДАН, 2002, т. 387, № 4, с. 478-481.
- [3] Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М., Статистика, 1979.
- [4] Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. М., Наука, 1976.

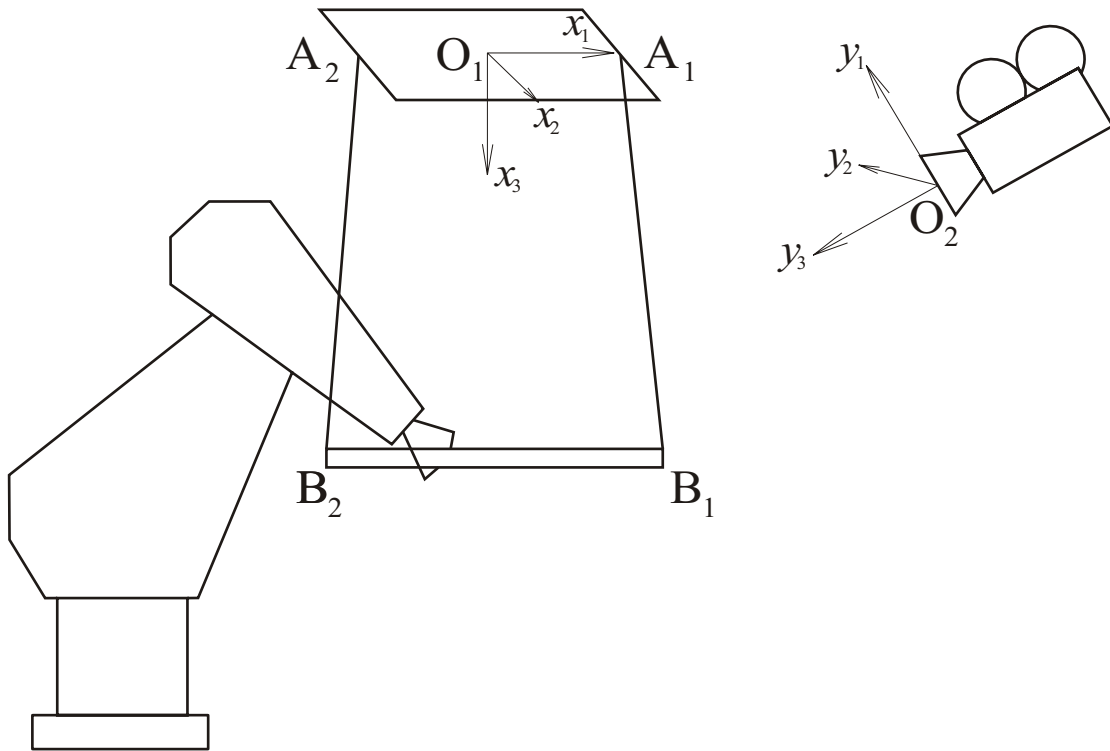
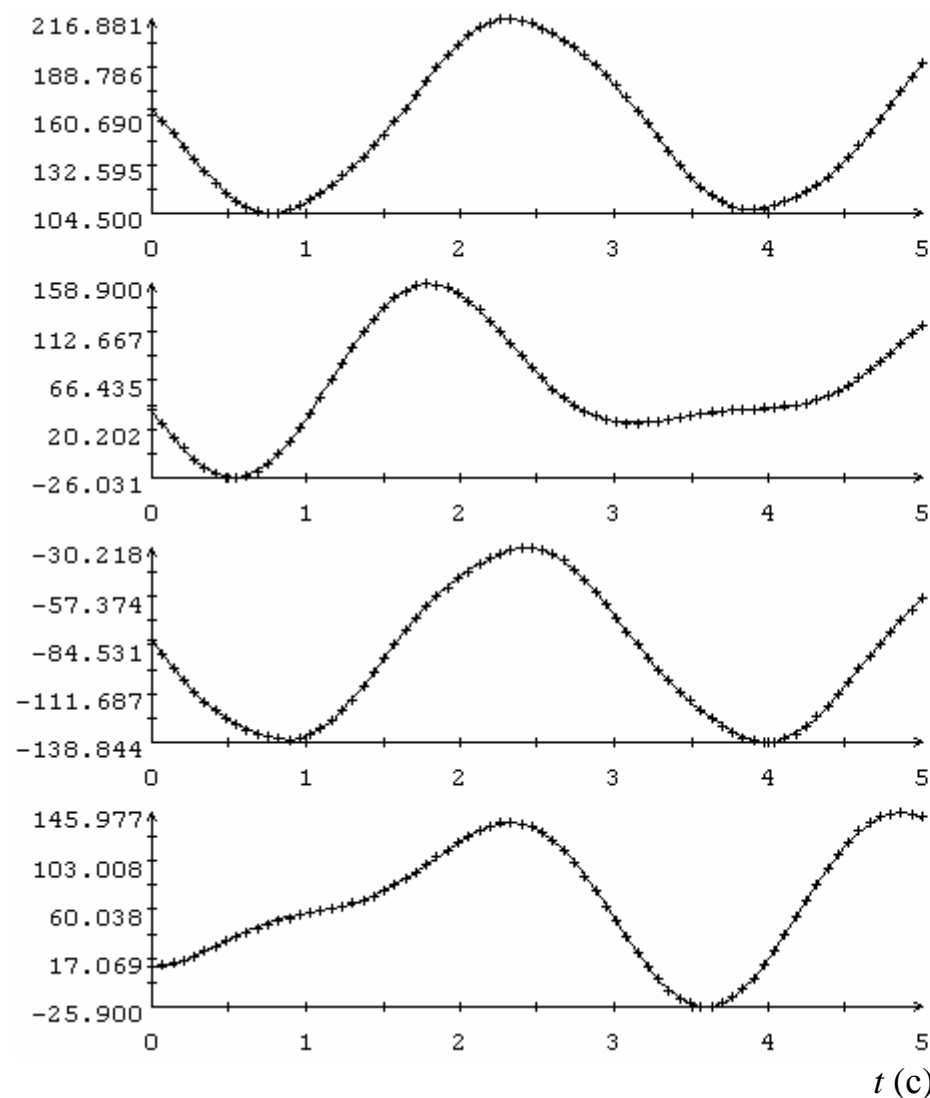


Рис. 1. Схема установки и используемые при решении задачи системы координат.

x_1, h_1, x_2, h_2 (пикс)



$\Delta x_1, \Delta h_1, \Delta x_2, \Delta h_2$ (пикс)

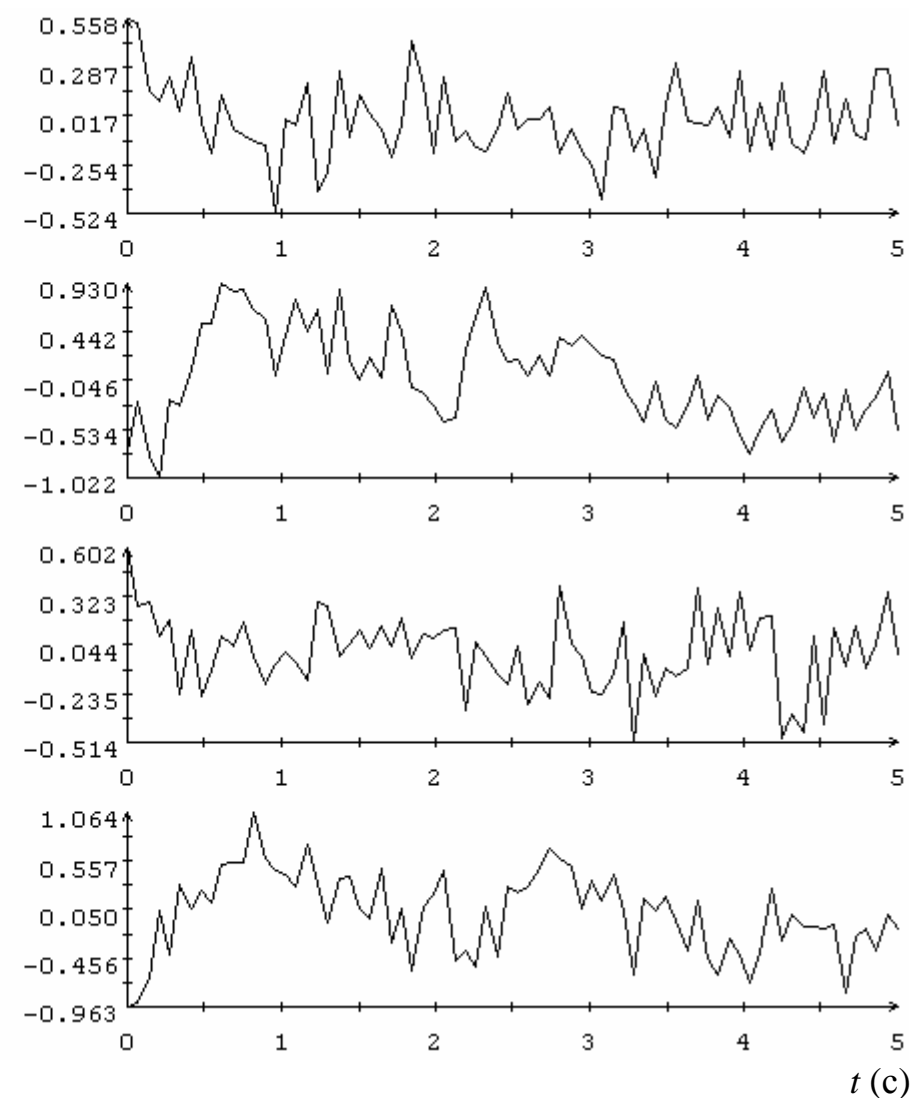


Рис. 2. Аппроксимация данных измерений (слева) и ошибка аппроксимации (справа) на интервале $0 \leq t \leq 5$ с ($s = 0.255$); слева маркерами обозначены данные измерений, сплошные кривые – графики функций (8).

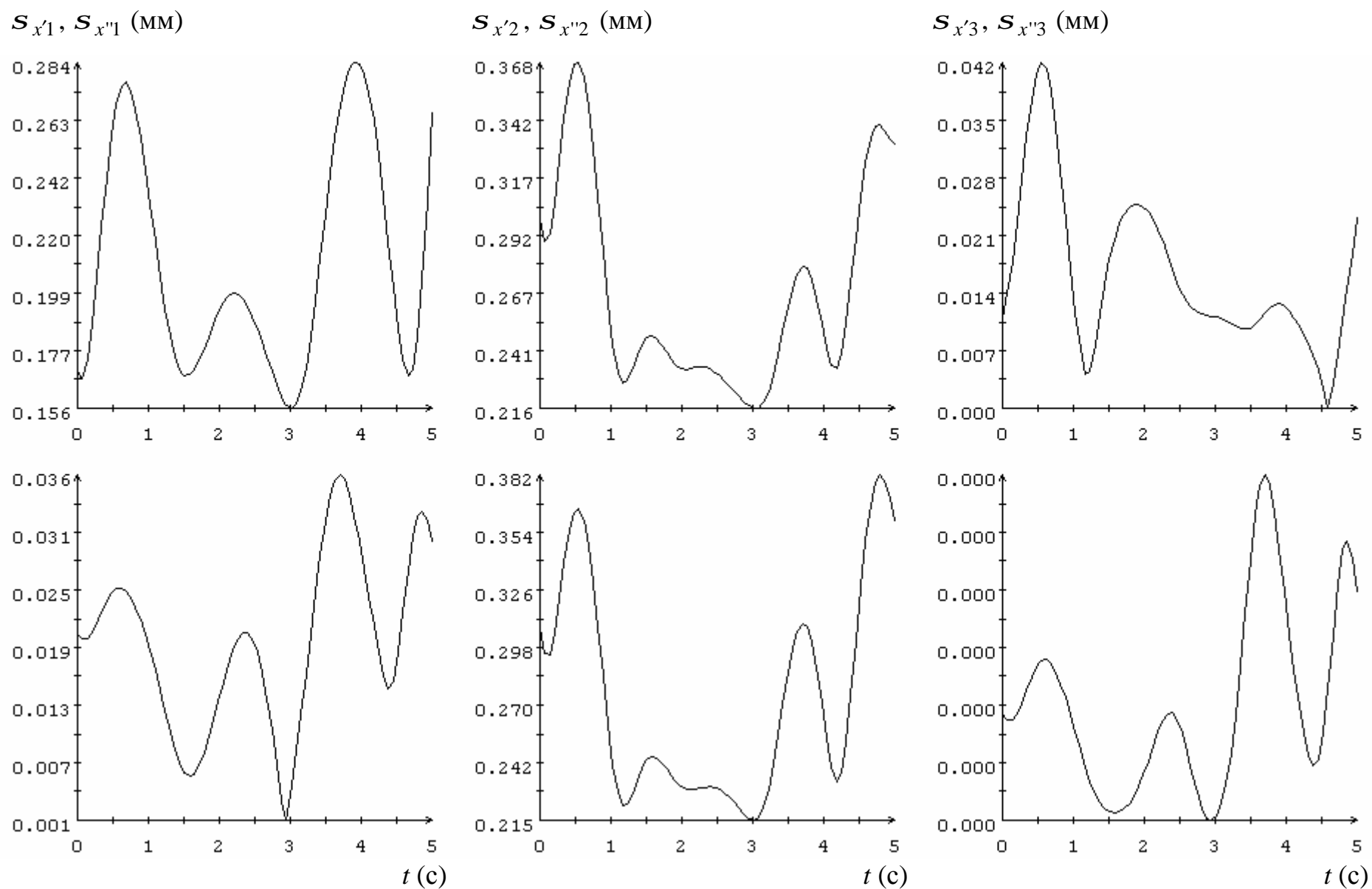
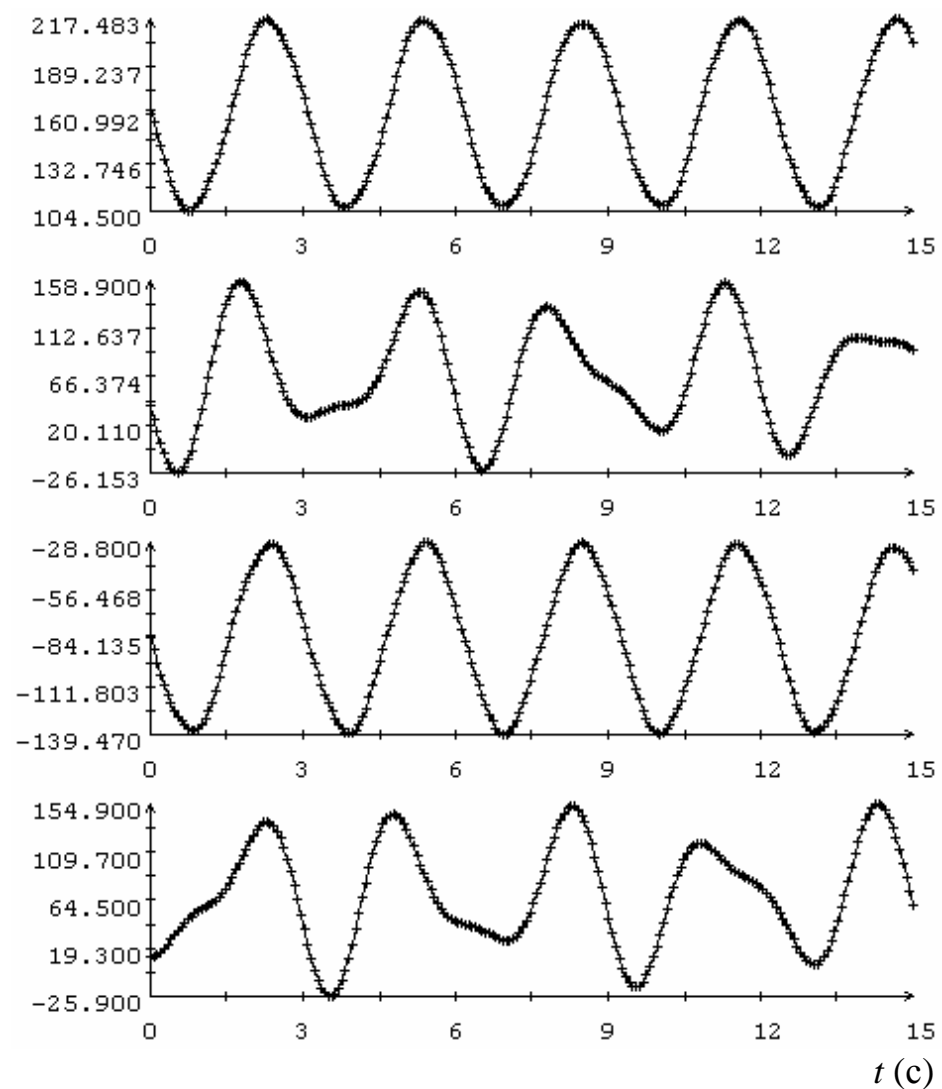


Рис. 3. Характеристики точности определения координат концов стержня на интервале $0 \leq t \leq 5$ с.

x_1, h_1, x_2, h_2 (ПКС)



$\Delta x_1, \Delta h_1, \Delta x_2, \Delta h_2$ (ПКС)

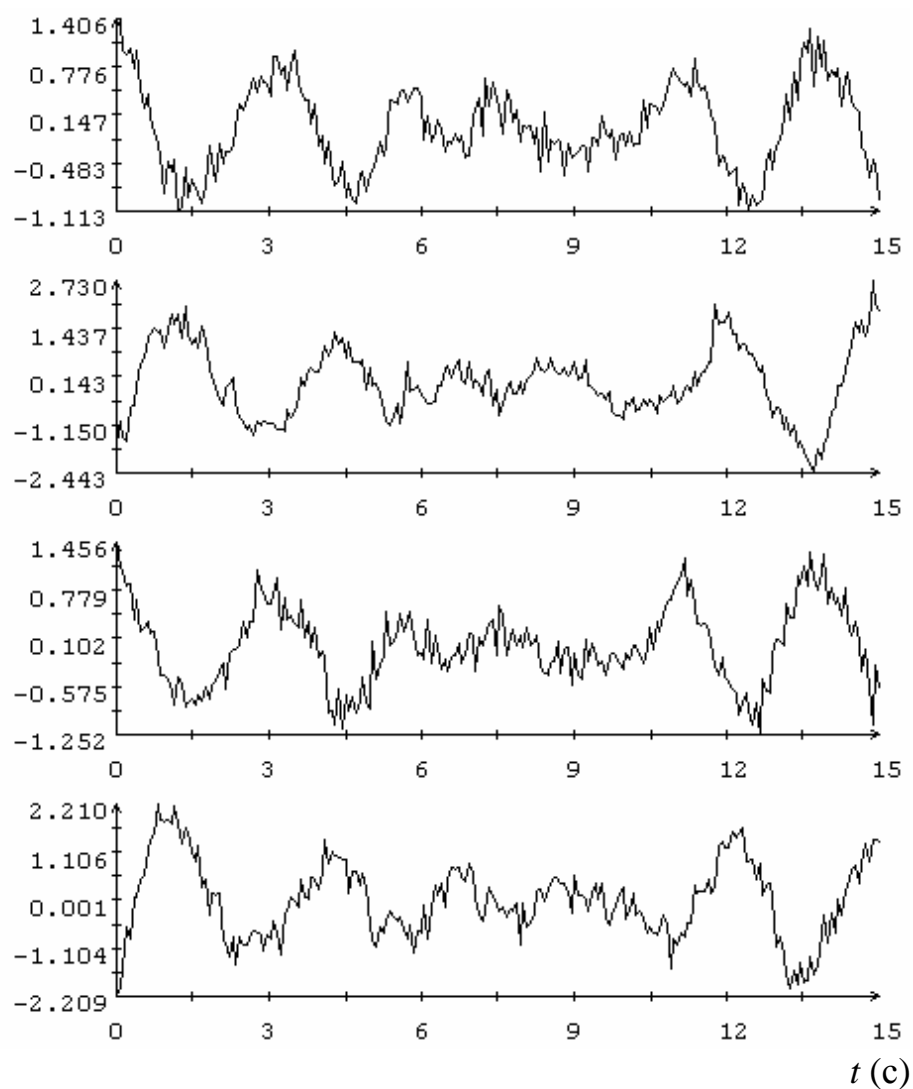


Рис. 4. Аппроксимация данных измерений (слева) и ошибка аппроксимации (справа) на интервале $0 \leq t \leq 15$ с ($s = 0.542$); слева маркерами обозначены данные измерений, сплошные кривые – графики функций (8).

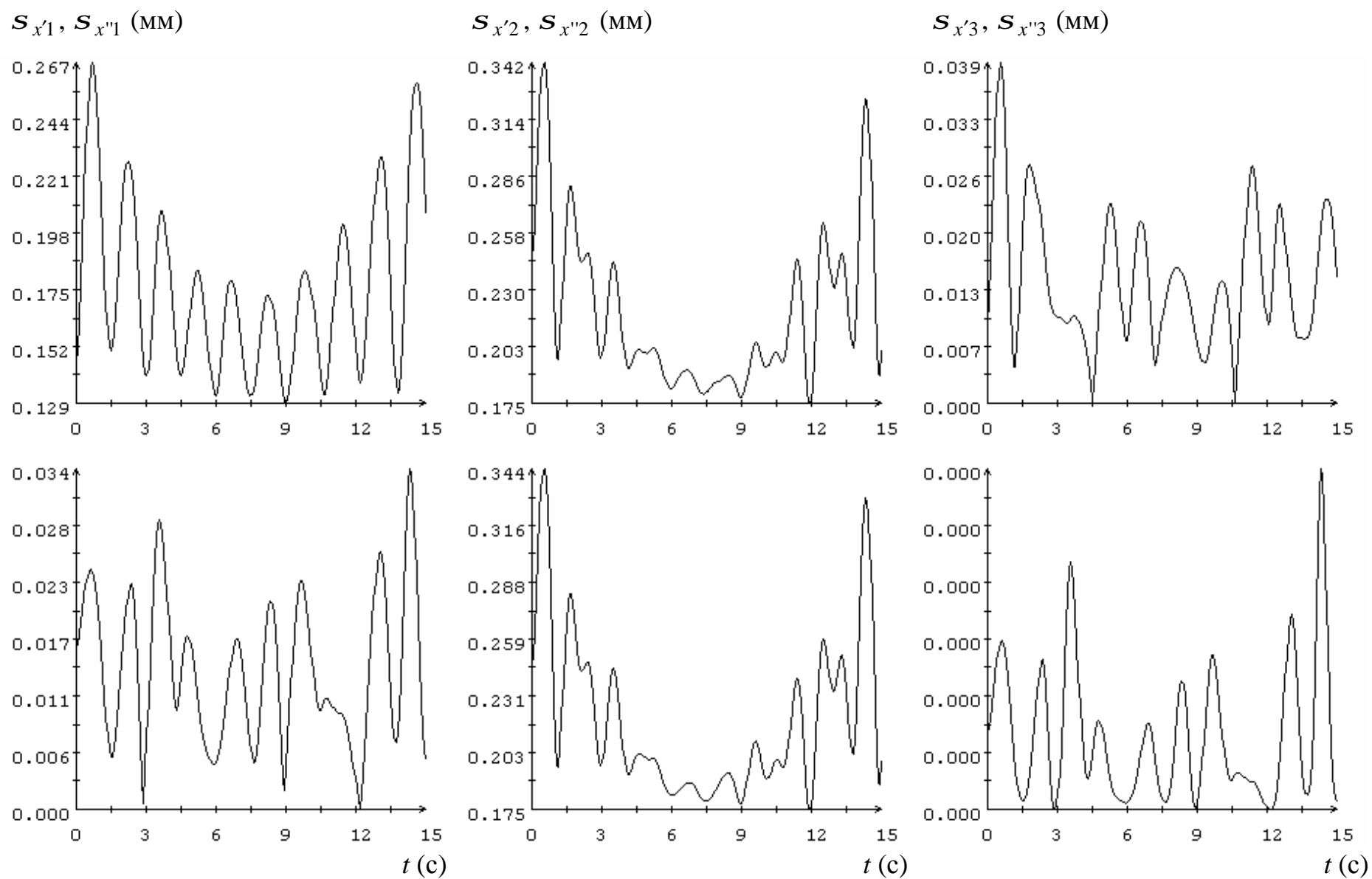
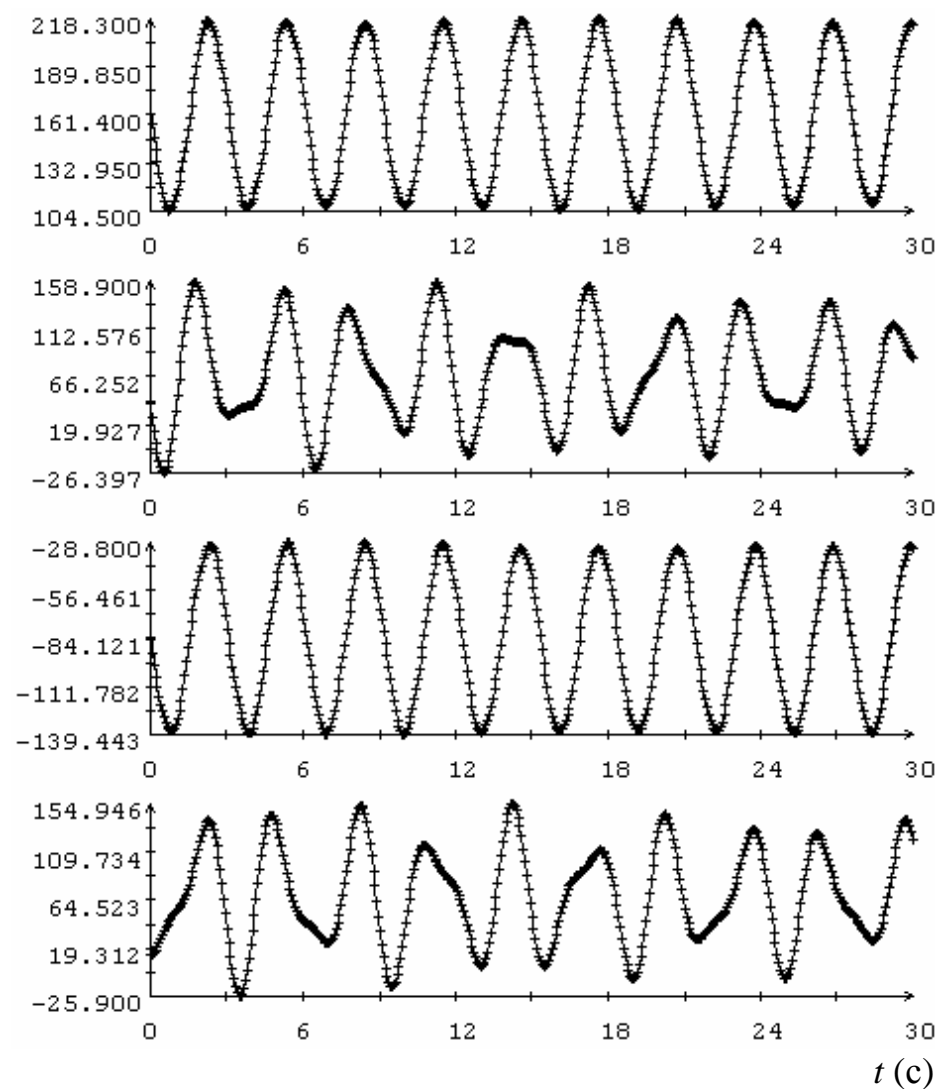


Рис. 5. Характеристики точности определения координат концов стержня на интервале $0 \leq t \leq 15$ с.

x_1, h_1, x_2, h_2 (ПИКС)



$\Delta x_1, \Delta h_1, \Delta x_2, \Delta h_2$ (ПИКС)

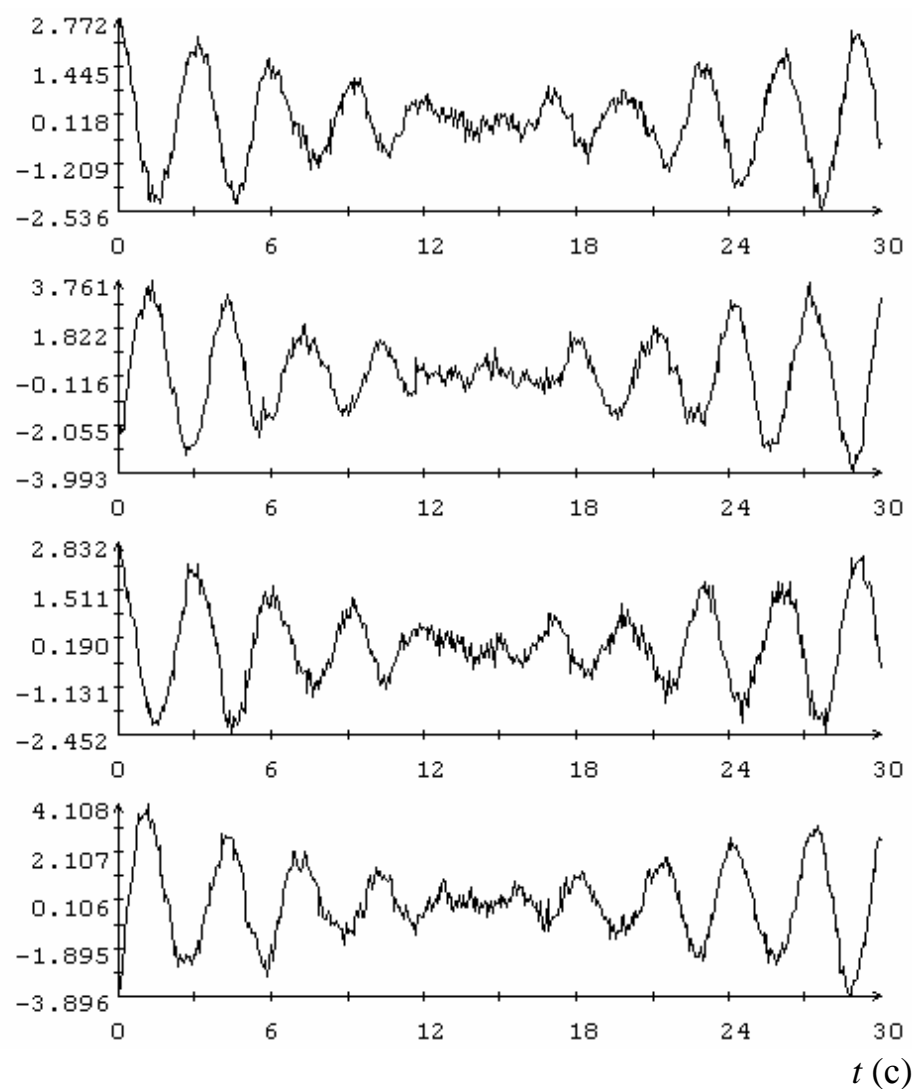


Рис. 6. Аппроксимация данных измерений (слева) и ошибка аппроксимации (справа) на интервале $0 \leq t \leq 30$ с ($s = 0.949$); слева маркерами обозначены данные измерений, сплошные кривые – графики функций (8).

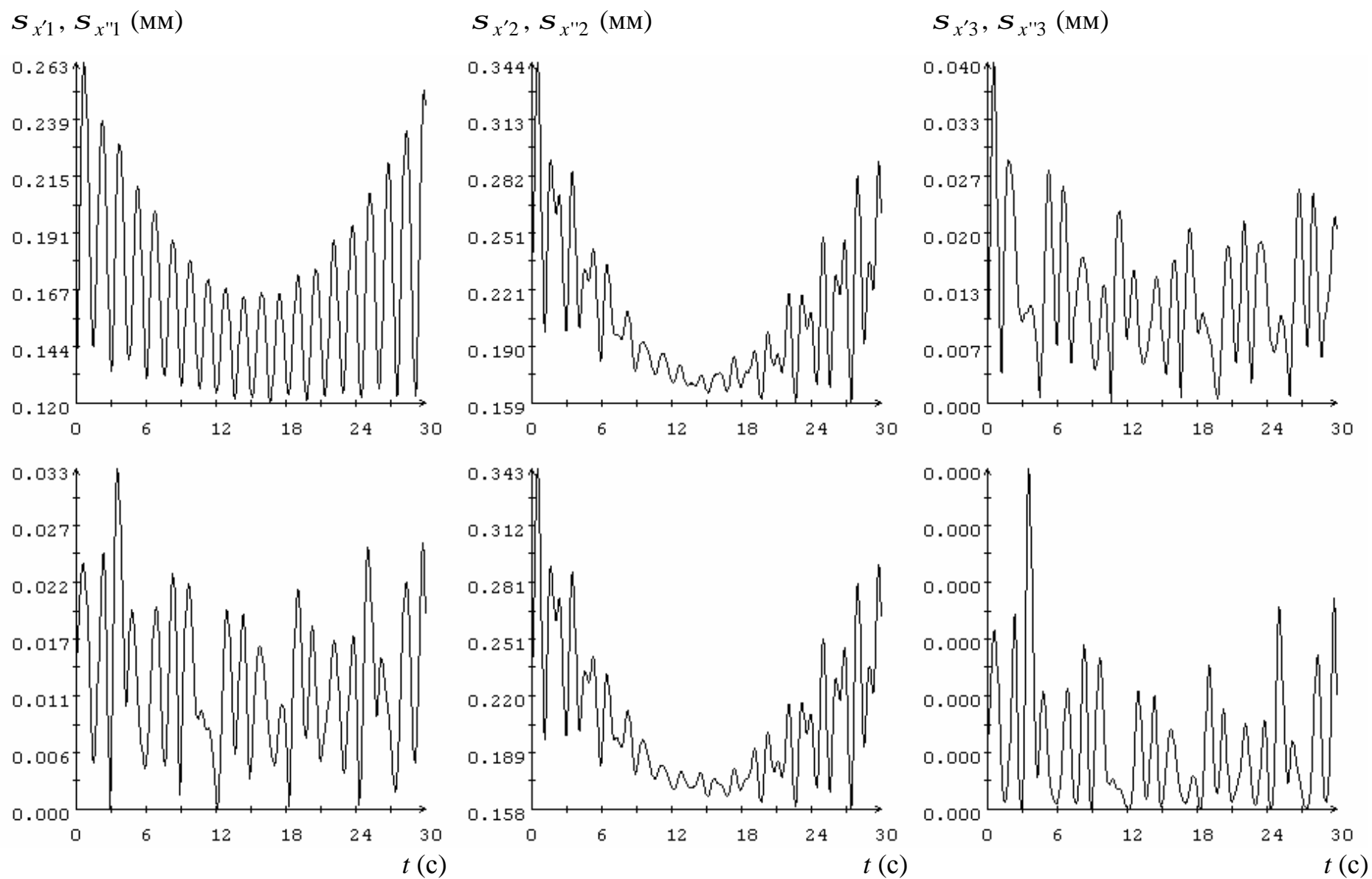
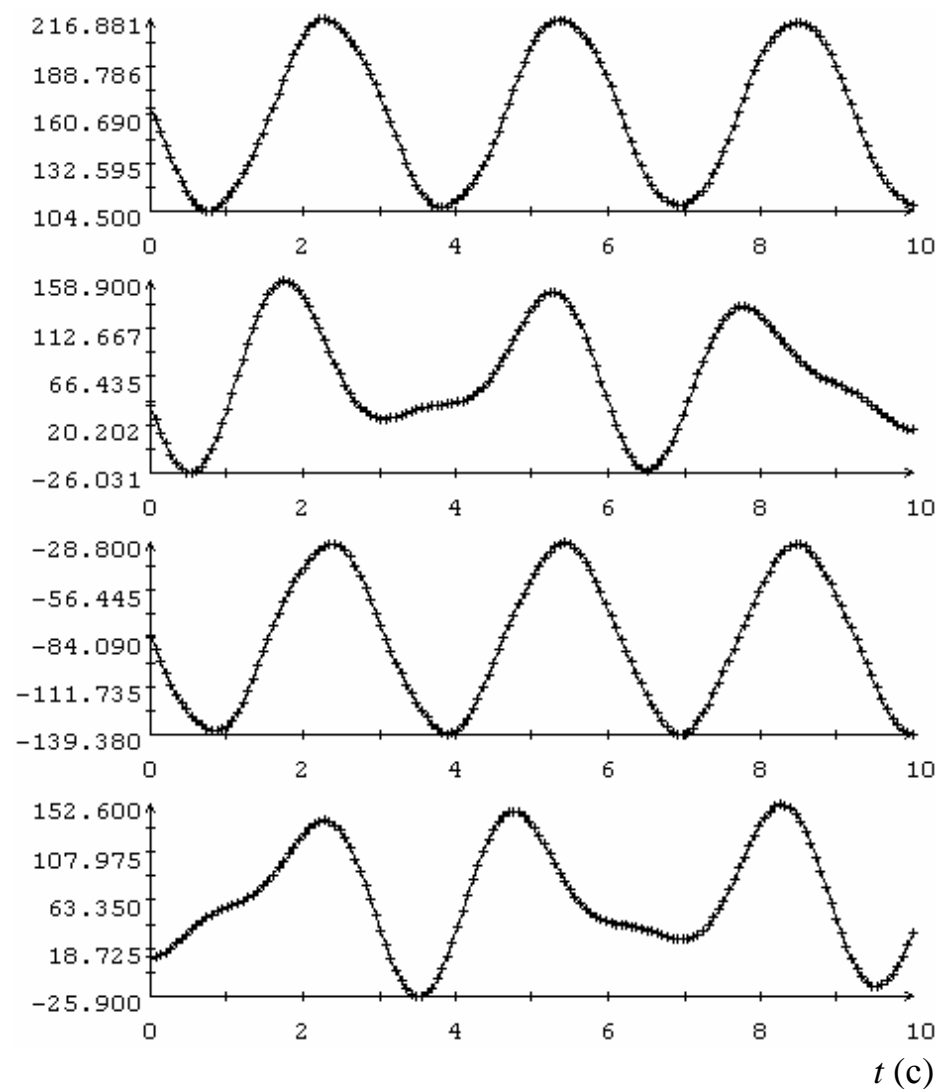


Рис. 7. Характеристики точности определения координат концов стержня на интервале $0 \leq t \leq 30$ с.

x_1, h_1, x_2, h_2 (ПИКС)



$\Delta x_1, \Delta h_1, \Delta x_2, \Delta h_2$ (ПИКС)

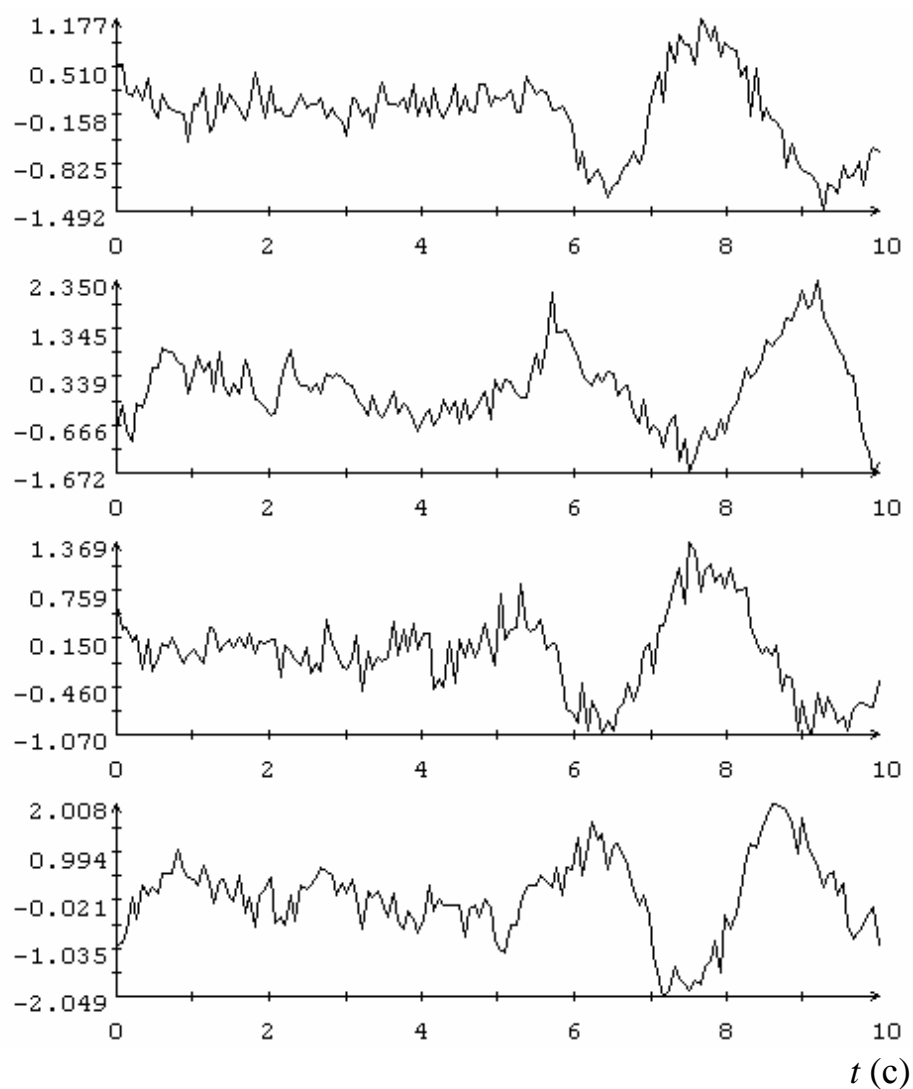


Рис. 8. Обработка данных измерений на интервале $0 \leq t \leq 5$ с и прогноз движения стержня на промежуток времени $5 < t \leq 10$ с; слева маркерами обозначены данные измерений, сплошные кривые – графики функций (8).

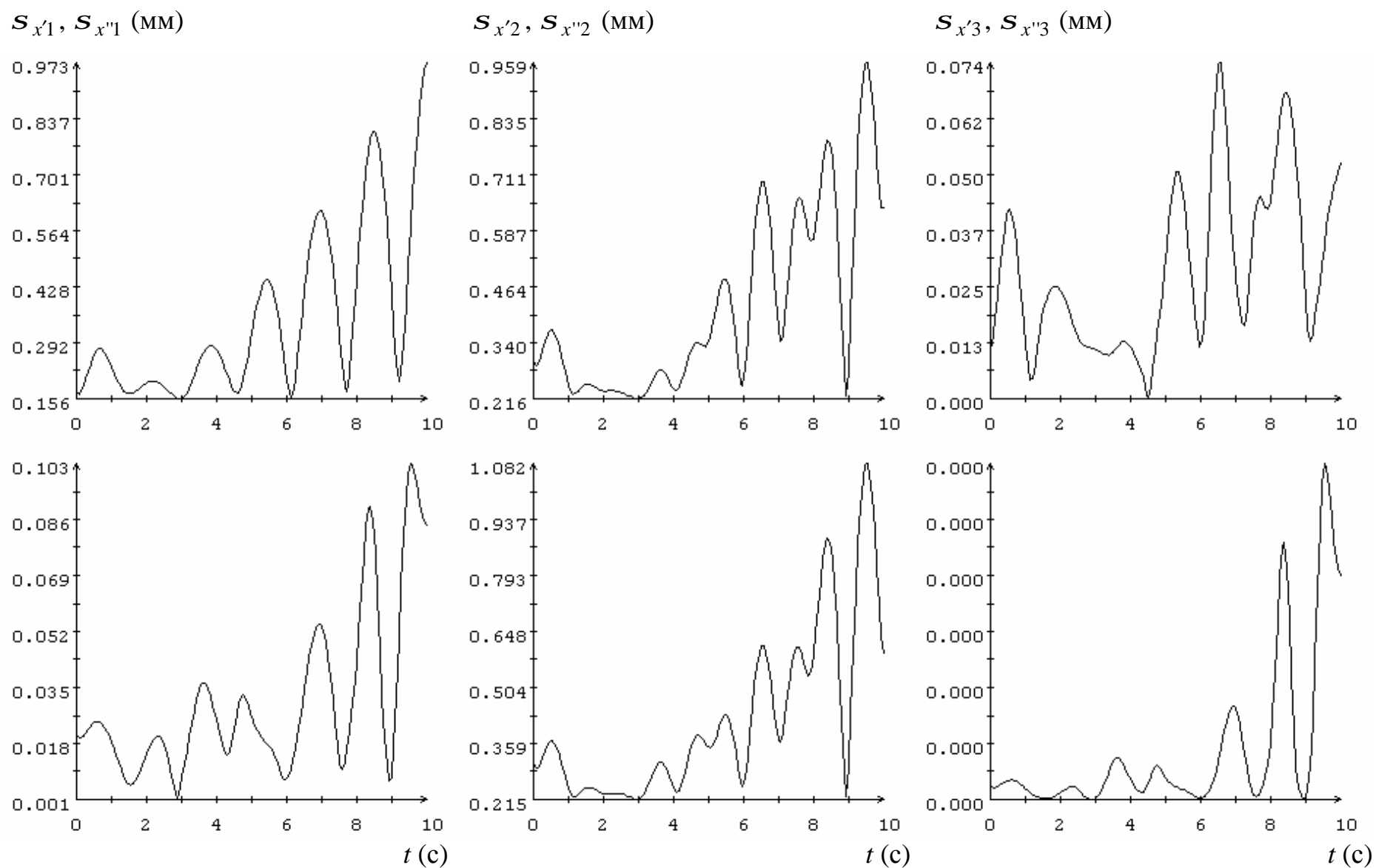
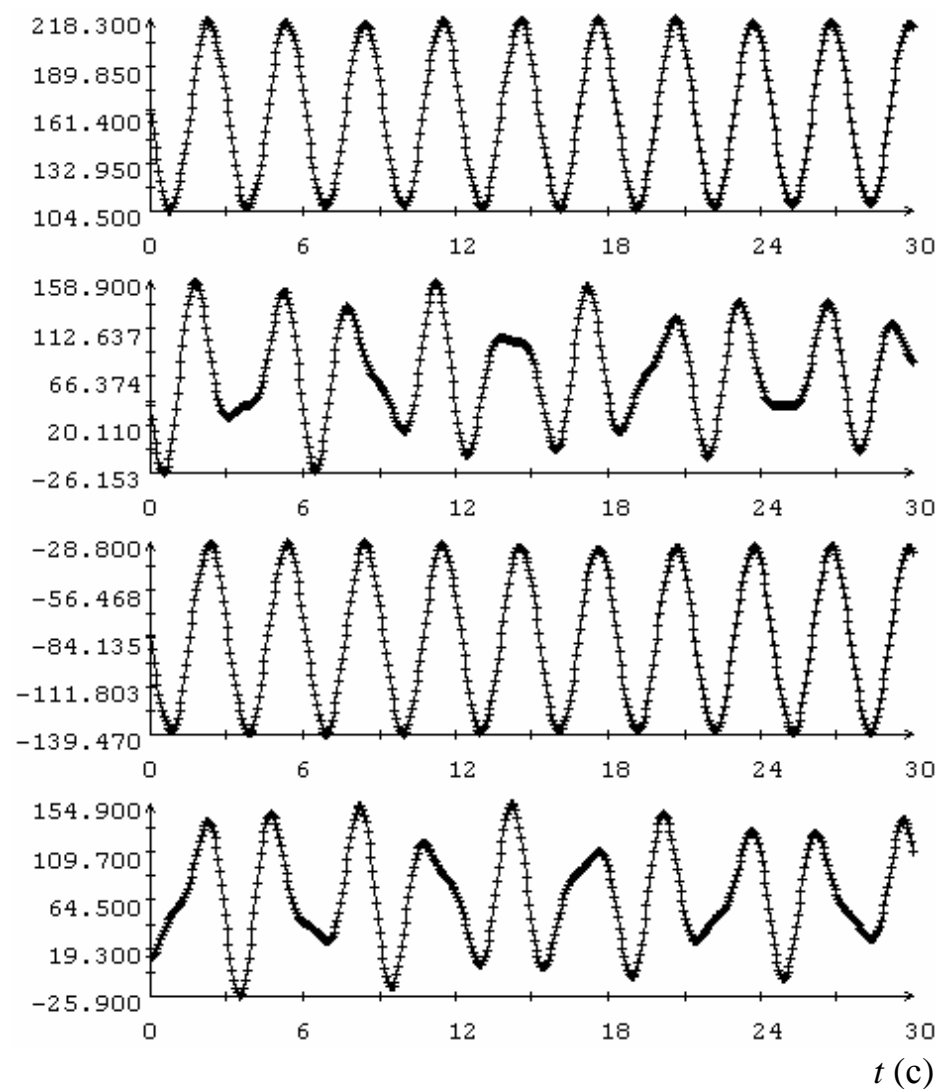


Рис. 9. Характеристика точности определения координат концов стержня на интервале $0 \leq t \leq 5$ с и прогноза движения стержня на промежуток времени $5 < t \leq 10$ с.

x_1, h_1, x_2, h_2 (ПКС)



$\Delta x_1, \Delta h_1, \Delta x_2, \Delta h_2$ (ПКС)

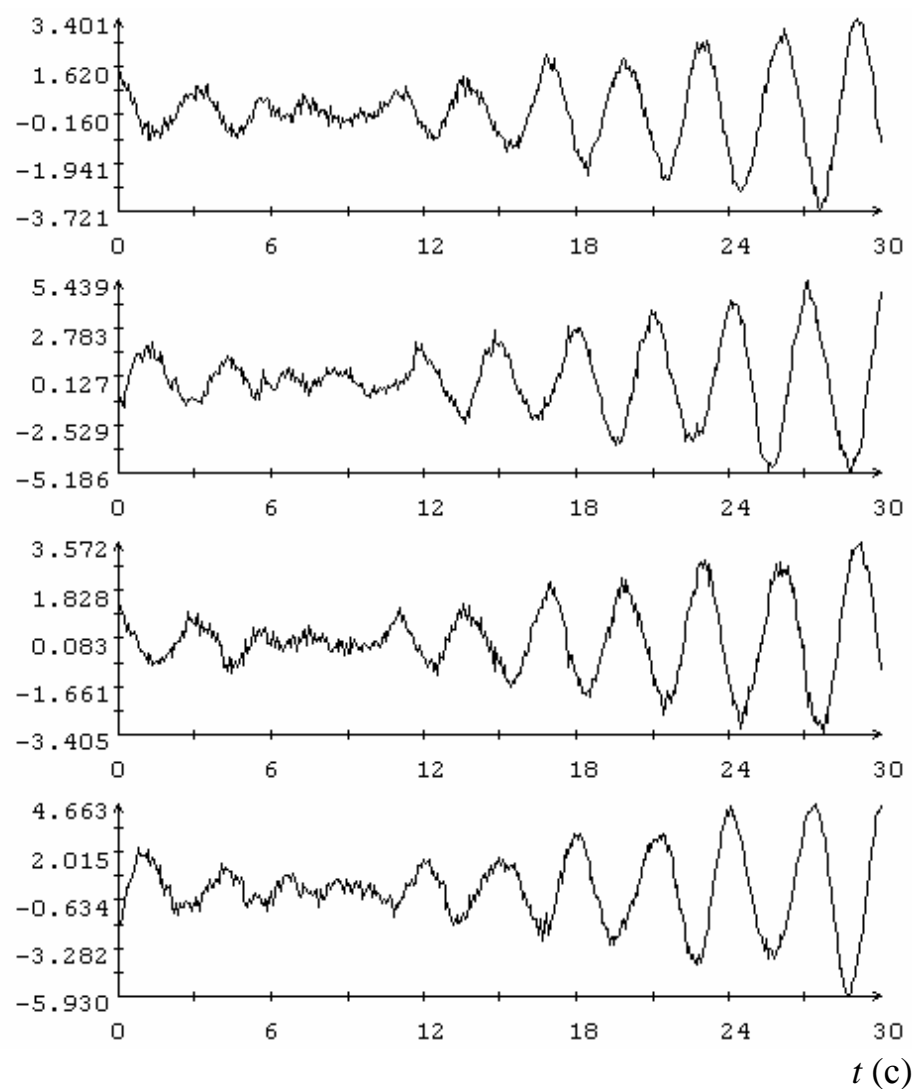


Рис. 10. Обработка данных измерений на интервале $0 \leq t \leq 15$ с и прогноз движения стержня на промежуток времени $15 < t \leq 30$ с; слева маркерами обозначены данные измерений, сплошные кривые – графики функций (8).

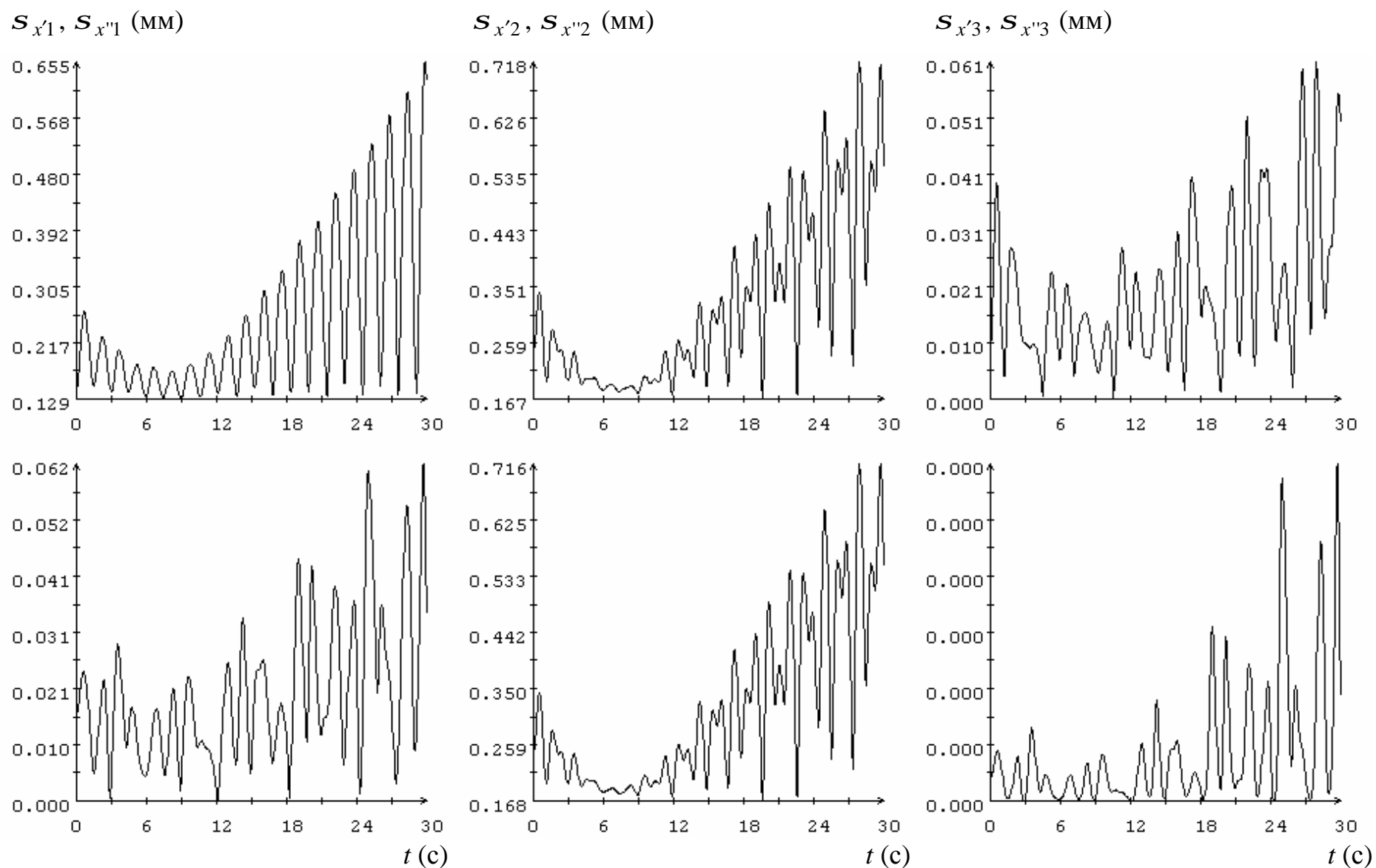
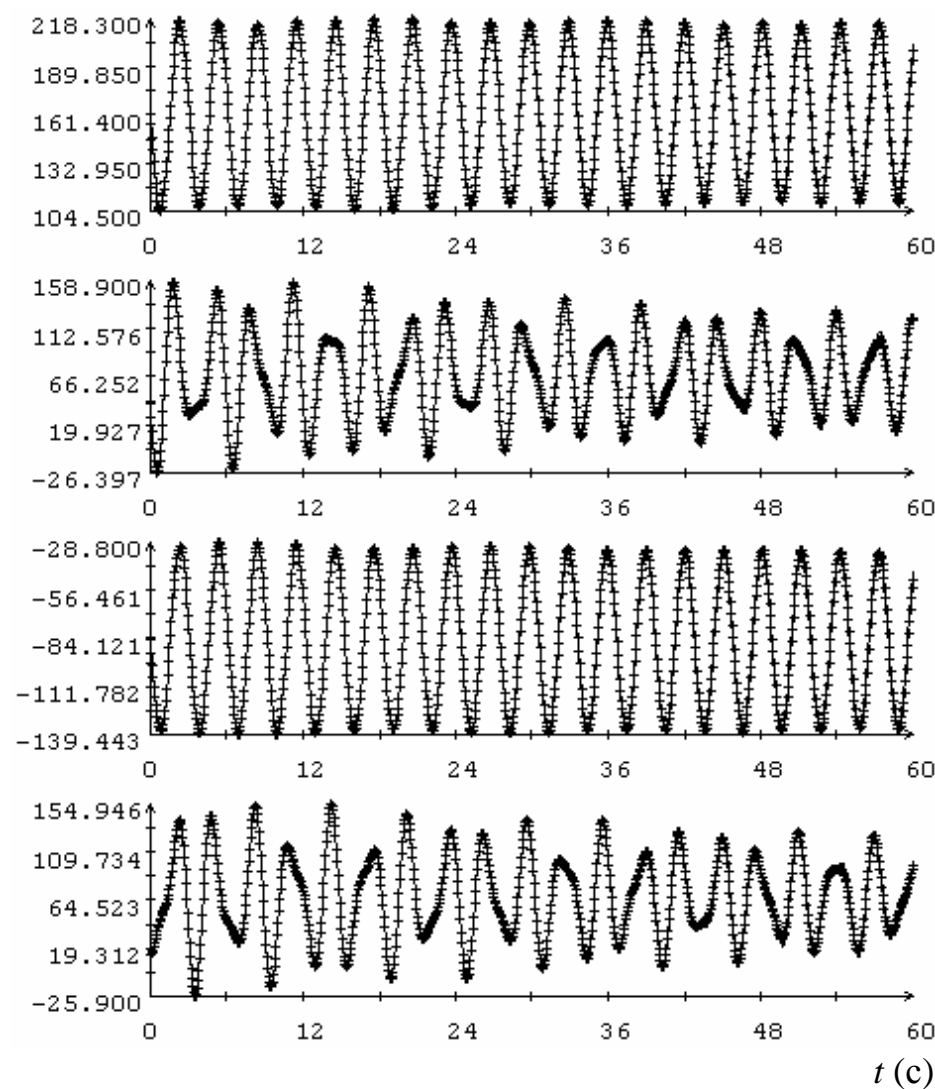


Рис. 11. Характеристика точности определения координат концов стержня на интервале $0 \leq t \leq 15$ с и прогноза движения стержня на промежуток времени $15 < t \leq 30$ с.

x_1, h_1, x_2, h_2 (ПКС)



$\Delta x_1, \Delta h_1, \Delta x_2, \Delta h_2$ (ПКС)

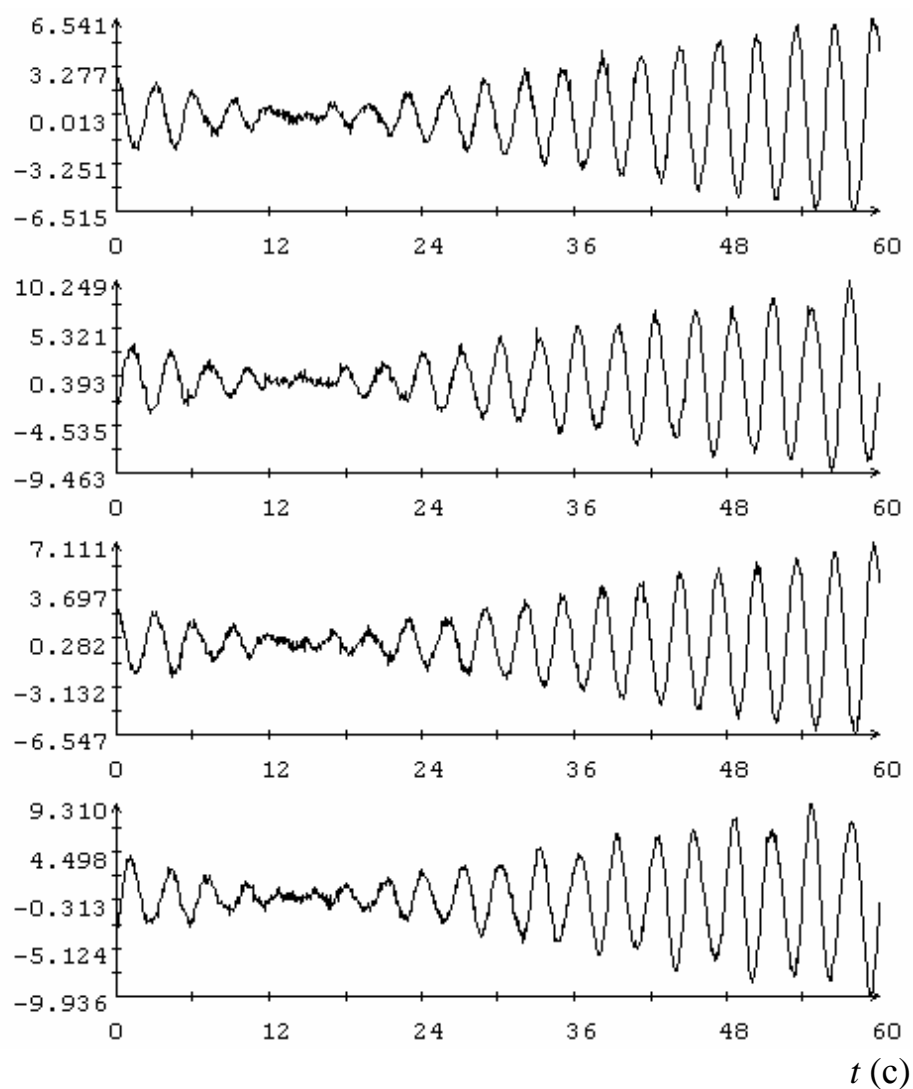


Рис. 12. Обработка данных измерений на интервале $0 \leq t \leq 30$ с и прогноз движения стержня на промежуток времени $30 < t \leq 60$ с; слева маркерами обозначены данные измерений, сплошные кривые – графики функций (8).

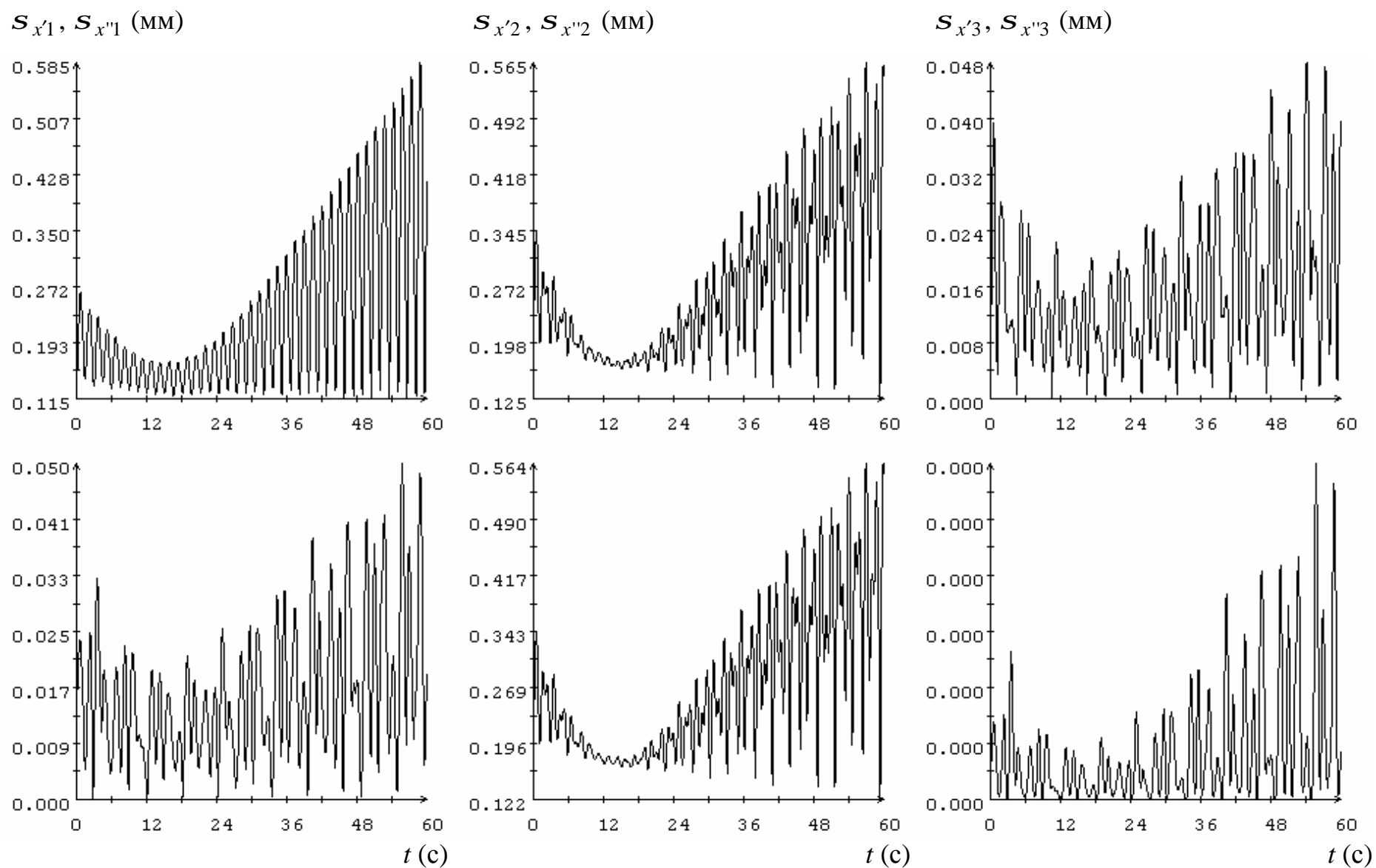
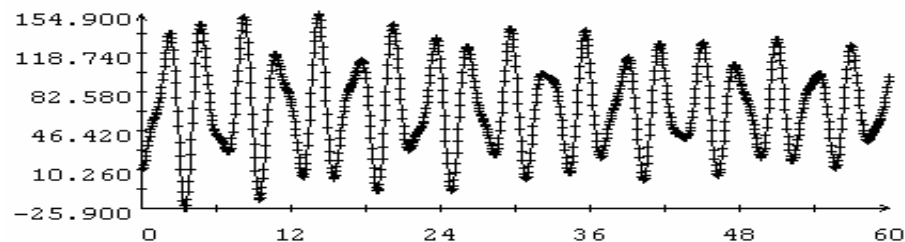
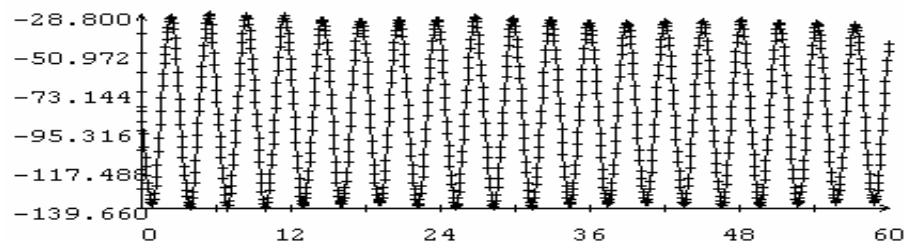
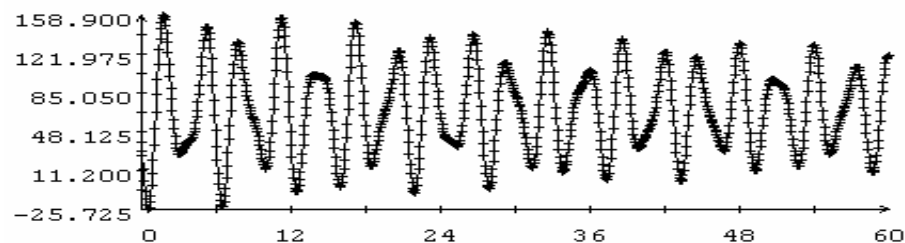
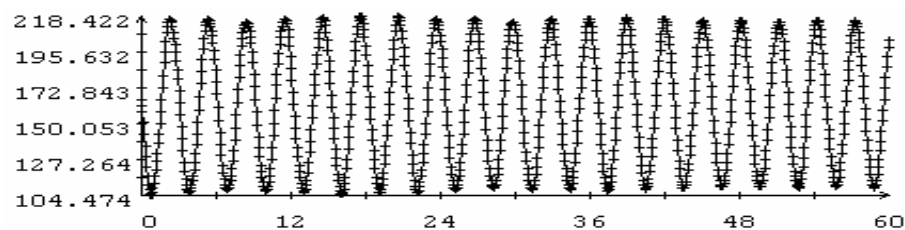


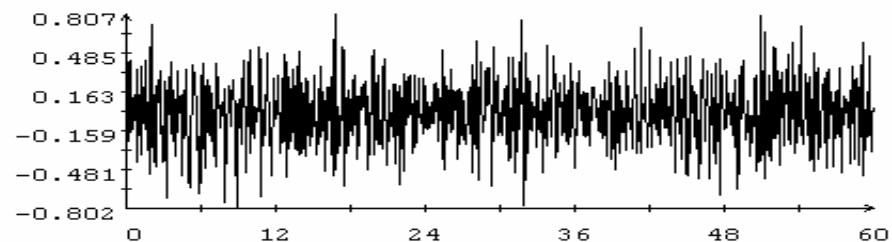
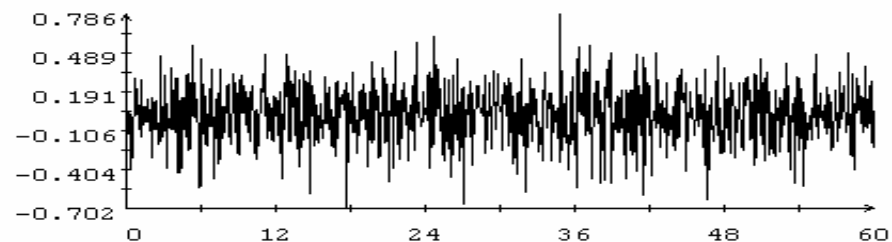
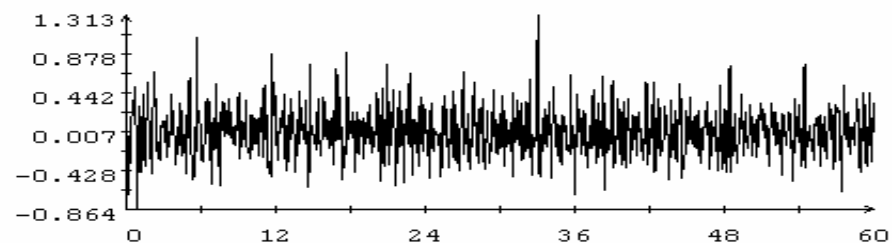
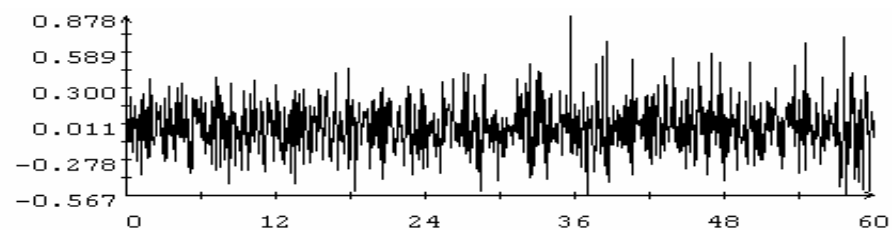
Рис. 13. Характеристика точности определения координат концов стержня на интервале $0 \leq t \leq 30$ с и прогноза движения стержня на промежуток времени $30 < t \leq 60$ с.

x_1, h_1, x_2, h_2 (ПКС)



t (с)

$\Delta x_1, \Delta h_1, \Delta x_2, \Delta h_2$ (ПКС)



t (с)

Рис. 14. Аппроксимация измерений методом динамической фильтрации (слева) и ошибки аппроксимации (справа) на интервале $0 \leq t \leq 60$ с; слева маркеры – данные измерений, сплошные кривые – графики функций (8).

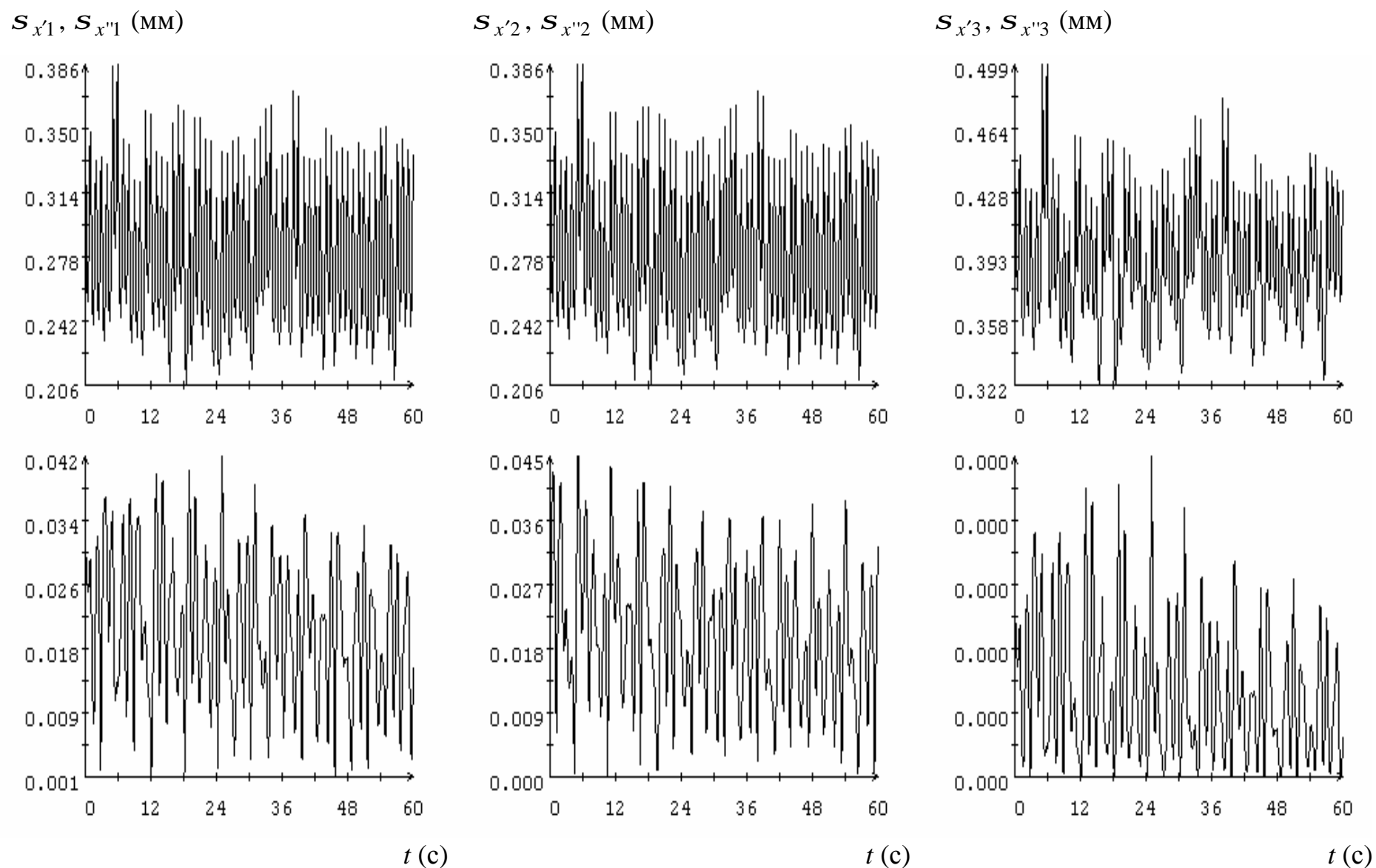


Рис. 15. Характеристики точности определения координат концов стержня на интервале $0 \leq t \leq 60$ с методом динамической фильтрации (обрабатываемые порции данных содержат по 15 моментов времени с измерениями).