



**Н. Ю. Золотых**  
**Оценки мощности**  
**минимального**  
**разрешающего**  
**множества пороговой**  
**функции**

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:**  
Золотых Н. Ю. Оценки мощности минимального разрешающего множества пороговой функции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – С. 159–168. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2008-159>

# ОЦЕНКИ МОЩНОСТИ МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕШАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА Пороговой функции многозначной логики

**Н. Ю. ЗОЛОТЫХ**

(НИЖНИЙ НОВГОРОД)

## Введение

Функция  $f$ , отображающая  $E_k^n = \{0, 1, \dots, k-1\}^n$  в  $\{0, 1\}$ , называется пороговой, если существует гиперплоскость, отделяющая множество точек области определения, в которых  $f$  равна нулю (множество «нулей» функции), от множества точек, в которых  $f$  равна единице (множество «единиц» функции).

В настоящей работе рассматриваются свойства разрешающего множества пороговой функции — такого множества точек области определения, значений функции в которых достаточно для ее однозначного восстановления на всей области. Разрешающее множество заданной функции  $f$  называется наименьшим, если среди всех разрешающих множеств этой функции оно имеет минимальную мощность. Разрешающее множество функции  $f$  называется минимальным (или тупиковым), если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для  $f$ . Очевидно, что наименьшее разрешающее множество является минимальным, а также известно, что для любой пороговой функции минимальное разрешающее множество единственно. Максимальная мощность минимального разрешающего множества, где максимум берется по всем пороговым функциям, заданным на  $E_k^n$ , называется длиной обучения. Понятие разрешающего множества впервые введено, по-видимому, В. К. Коробковым в работе [8] в контексте монотонных булевых функций.

Разрешающее множество естественным образом появляется в задаче расшифровки функции. Под расшифровкой заранее не известной пороговой функции  $f$ , определенной на множестве  $E_k^n$ , понимается процедура нахождения коэффициентов разделяющей гиперплоскости с помощью вопросов о значении функции в точке. Возможная стратегия расшифровки может заключаться в последовательном выдвижении и проверке гипотез [6, 17]. Для того, чтобы проверить на равенство две пороговые функции, достаточно сравнить их значения только в точках разрешающего множества одной из них, поэтому важно иметь эффективные алгоритмы построения разрешающего множества пороговой функции по коэффициентам разделяющей гиперплоскости. С другой стороны, легко видеть, что количество вопросов для расшифровки функции  $f$  не меньше мощности ее минимального множества, и, следовательно, в худшем случае количество вопросов не меньше длины обучения.

Длина обучения  $t(n, k)$  зависит от  $n$  экспоненциально, в частности,  $t(n, 2) = 2^n$ , поэтому представляет интерес поиск оценок для  $t(n, k)$ , когда  $n$  фиксировано. Известно, что

$$c'_n \log^{n-2} k \leq t(n, k) \leq c''_n \log^{n-1} k, \quad (1)$$

где  $c'_n, c''_n$  — некоторые положительные величины, зависящие только от  $n$ . Верхняя оценка в (1) получена в [16] на основе [10] и [15]. Нижняя оценка установлена в [7, 13]. Явные выражения для  $c'_n$  и  $c''_n$  в указанных работах не приводятся. В [5] доказано, что  $t(2, k) = 4$ , а в [4] установлено, что  $\sigma(3, k) = \Theta(\log k)$ . Средняя мощность минимального разрешающего множества изучается в [3, 14].

В настоящей работе мы уточняем оценки (1), доказывая (теорема 3), что

$$\frac{\left(\frac{1}{2} \log k - n - 3 - (n-1) \log(n-2)\right)^{n-2}}{4(n-1)3^{n-1}(n-2)^{n-2}((n-2)!)^2} \leq t(n, k) \leq 2n \log(2n)(1 + \log(k+1))^{n-1}.$$

В § 1 даны основные определения и обозначения. В § 2 приведены сведения о строении разрешающего множества пороговой функции. Эти сведения используются в § 3, где получены оценки длины обучения.

## § 1. Основные определения и обозначения

Пусть  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$  и  $f: E_k^n \rightarrow \{0, 1\}$ . Обозначим

$$M_\nu(f) = \{x \in E_k^n : f(x) = \nu\} \quad (\nu = 0, 1).$$

Функция  $f$  называется *пороговой*, если существуют числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , такие, что

$$M_0(f) = \{x \in E_k^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0\}.$$

Неравенство  $\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0$  называется *пороговым*. Множество всех пороговых функций, заданных на гиперкубе  $E_k^n$ , обозначим  $F(n, k)$ .

*Разрешающим множеством* функции  $f$  из  $F(n, k)$  называется такое  $T$ ,  $T \subseteq E_k^n$ , что для произвольной функции  $g$  из  $F(n, k) \setminus \{f\}$  найдется точка  $z$  из  $T$ , такая, что  $f(z) \neq g(z)$ . Разрешающее множество функции  $f$  называется *минимальным*, или *тупиковым*, если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для функции  $f$ . Известно, что для любой пороговой функции  $f$  минимальное разрешающее множество единственно (доказательство приведено в § 2). Минимальное разрешающее множество функции  $f$  обозначим  $T(f)$ . *Длиной обучения* называется величина

$$t(n, k) = \max_{f \in F(n, k)} |T(f)|.$$

Обозначим через  $N_\nu(f)$  множество вершин выпуклой оболочки точек из  $M_\nu(f)$  ( $\nu = 0, 1$ ).

## § 2. Строение обучающего множества пороговой функции

В данном параграфе изложим основные результаты [7, 13], касающиеся строения обучающего множества пороговой функции. Далее эти результаты будут использоваться в § 3. С каждой функцией  $f$  из  $F(n, k)$  свяжем конус  $K(f)$  разделяющих функционалов  $(a_0, \dots, a_{n+1})$ , описываемый следующей системой линейных неравенств (см. [10]):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0 & \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in M_0(f), \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq a_0 + a_{n+1} & \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in M_1(f), \\ a_{n+1} \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Легко видеть, что любое решение  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  этой системы при  $a_{n+1} > 0$  определяет некоторое пороговое неравенство функции  $f$ . Верно и обратное: коэффициенты  $(a_0, \dots, a_n)$  любого порогового неравенства функции  $f$  из  $F(n, k)$  удовлетворяют системе (2) при некотором  $a_{n+1} > 0$ .

*Лемма 1.* Конус  $K(f)$  любой функции  $f \in F(n, k)$  не содержит ненулевых подпространств, т. е. конус острый.

*Доказательство.* Достаточно проверить, что если  $a = (a_0, \dots, a_{n+1})$  принадлежит  $K(f)$  и  $-a \in K(f)$ , то  $a = 0$ . Действительно, из (2) получаем, что в этом случае  $a_{n+1} = 0$ , и, следовательно,

$$E_k^n \subseteq \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{j=1}^n a_j x_j = a_0\}.$$

Так как размерность  $E_k^n$  равна  $n$ , то  $a = 0$ .

*Лемма 2.* Размерность конуса  $K(f)$  для любой функции  $f$  из  $F(n, k)$  равна  $n+2$ , т. е. конус телесный.

*Доказательство.* Небольшим изменением коэффициентов  $a_0, \dots, a_n$  порогового неравенства можно добиться строгого отделения гиперплоскостью множеств  $M_0(f)$  и  $M_1(f)$ . Таким образом, для произвольной функции  $f$  из  $F(n, k)$  существует вектор  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  из  $K(f)$ , строго удовлетворяющий всем неравенствам системы (2). Следовательно,  $K(f)$  имеет полную размерность.

Из теории линейных неравенств (см., например, [9]), пользуясь леммами 1, 2, теперь получаем следующее (ср. [10]).

*Лемма 3.* 1) Конус  $K(f)$  имеет единственное с точностью до положительного множителя минимальное порождающее множество

$$\{a^{(j)} = (a_0^{(j)}, \dots, a_{n+1}^{(j)}), j = 1, 2, \dots, s\}. \quad (3)$$

2) Существуют определяемые единственным образом такие множества  $T_\nu(f) \subseteq M_\nu(f)$  ( $\nu = 0, 1$ ), что система (2) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0 & \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in T_0(f), \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq a_0 + a_{n+1} & \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in T_1(f), \\ a_{n+1} \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Никакая подсистема системы (4) не эквивалентна исходной системе.

3) Для любого  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , принадлежащего  $T_0(f)$ , существует такое подмножество  $I$  множества  $\{1, 2, \dots, s\}$ , что  $|I| = n + 1$ , при этом подсистема векторов  $\{a^{(i)}, i \in I\}$  линейно независима и

$$\sum_{j=1}^n a_j^{(i)} x_j = a_0^{(i)} \quad (i \in I), \quad \sum_{i \in I} a_{n+1}^{(i)} > 0.$$

4) Для любого  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , принадлежащего  $T_1(f)$ , существует такое подмножество  $I$  множества  $\{1, 2, \dots, s\}$ , что  $|I| = n + 1$ , при этом подсистема векторов  $\{a^{(i)}, i \in I\}$  линейно независима и

$$\sum_{j=1}^n a_j^{(i)} x_j = a_0^{(i)} + a_{n+1}^{(i)} \quad (i \in I), \quad \sum_{i \in I} a_{n+1}^{(i)} > 0.$$

Пусть  $T_\nu$  — произвольное подмножество множества  $M_\nu(f)$  ( $\nu = 0, 1$ ). Рассмотрим следующую подсистему системы (2):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0 & \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in T_0, \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq a_0 + a_{n+1} & \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in T_1, \\ a_{n+1} \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

**Теорема 1** [7]. Пусть  $T_\nu \subseteq M_\nu(f)$  ( $\nu = 0, 1$ ). Для того, чтобы множество  $T = T_0 \cup T_1$  было обучающим для функции  $f$  из  $F(n, k)$ , необходимо и достаточно, чтобы система неравенств (5) была эквивалентна системе неравенств (4).

**Доказательство.** Поскольку достаточность условий очевидна, покажем их необходимость. Предположим, что нашлось решение  $b = (b_0, \dots, b_{n+1})$  системы (4), не принадлежащее конусу  $K(f)$ . По лемме 3 можем считать, что  $b_{n+1} > 0$ . Неравенство

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j \leq b_0$$

определяет некоторую функцию  $g$  из  $F(n, k)$ , а так как  $b \notin K(f)$ , то  $g \neq f$ . Однако  $g(x) = f(x)$  для всех  $x \in T$ . Следовательно,  $T$  не является обучающим множеством.

Из данной теоремы получаем два важных следствия.

**Следствие 1** [7]. Для любой  $f$  из  $F(n, k)$  множество  $T = T_0 \cup T_1$ , где  $T_\nu \subseteq M_\nu$  ( $\nu = 0, 1$ ), является минимальным обучающим тогда и только тогда, когда  $T_\nu = T_\nu(f)$  ( $\nu = 0, 1$ ).

Отсюда и из п. 2 леммы 4 вытекает

**Следствие 2** [7]. Для любой  $f$  из  $F(n, k)$  минимальное обучающее множество единственно.

Минимальное обучающее множество функции  $f$  обозначим через  $T(f)$ . Итак,  $T(f) = T_0(f) \cup T_1(f)$ .

**Следствие 3** [11]. Для любой  $f$  из  $F(n, k)$  справедливо включение

$$T(f) \subseteq N_0(f) \cup N_1(f).$$

Л е м м а 4. Пусть  $f \in F(n, k)$ .

1) Для любого  $y$  из  $T_0(f)$  существуют такие  $a_{n+1} > 0, a_0, \dots, a_n$ , что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j y_j &= a_0, \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &< a_0 \quad \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in M_0(f) \setminus \{y\}, \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\geq a_0 + a_{n+1} \quad \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in M_1(f). \end{aligned}$$

2) Для любого  $y$  из  $T_1(f)$  существуют такие  $a_{n+1} > 0, a_0, \dots, a_n$ , что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j y_j &= a_0 + a_{n+1}, \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &> a_0 + a_{n+1} \quad \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in M_1(f) \setminus \{y\}, \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq a_0 \quad \text{для всех } (x_1, \dots, x_n) \in M_0(f). \end{aligned}$$

Доказательство. Положим в п. 3 леммы 3

$$a_j = \sum_{i \in I} a_j^{(i)}, \quad a_{n+1} = \sum_{i \in I} a_{n+1}^{(i)}, \quad 0 < i \leq n. \quad (6)$$

Теперь условия легко проверяются:

$$\sum_{j=1}^n a_j y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I} a_j^{(i)} y_j = \sum_{i \in I} a_0^{(i)} = a_0.$$

Для произвольного  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из  $M_0(f)$  имеем  $\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0$ , однако

$\sum_{j=1}^n a_j x_j \neq a_0$  по лемме 3. Действительно, рассмотрим равенства в (6) как систему уравнений относительно  $x_i$ . Из леммы 1 следует, что  $y$  — ее единственное решение. Следовательно, найдется такое  $i' \in I$ , что  $\sum_{j=1}^n a_j^{(i')} x_j < a_0^{(i')}$ .

Поэтому  $\sum_{j=1}^n a_j x_j < a_0$ . Для произвольного  $x = (x_1, \dots, x_n)$  из  $M_1(f)$  имеем

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I} a_j^{(i)} x_j \geq \sum_{i \in I} (a_0^{(i)} + a_{n+1}^{(i)}) \geq a_0 + a_{n+1}.$$

Аналогично доказывается и п. 2 леммы 4.

Предположим, что в (3) будет  $a_{n+1}^{(j)} > 0$  при  $j = 1, 2, \dots, \mu$  и  $a_{n+1}^{(j)} = 0$  при  $j = \mu + 1, \dots, s$ . Пусть  $a = (a_1, \dots, a_n)$  — целочисленный вектор,

$$M_0(f, a) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in E_k^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j = \max_{y \in M_0(f)} \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\},$$

$$M_1(f, a) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in E_k^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j = \min_{y \in M_1(f)} \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\}.$$

Обозначим через  $N_\nu(f, a)$  множество вершин выпуклой оболочки множества  $M_\nu(f, a)$  ( $\nu = 0, 1$ ). Из леммы 4 следует

Теорема 2 [7]. Для любой функции  $f$  из  $F(n, k)$

$$T(f) = \bigcup_{i=1}^{\mu} (N_0(f, a^{(i)}) \cup N_1(f, a^{(i)})) = \bigcup_a (N_0(f, a) \cup N_1(f, a)),$$

в последнем случае объединение берется по всем таким  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , что неравенство

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq \max_{y \in M_0(f)} \sum_{j=1}^n a_j y_j$$

является пороговым для функции  $f$ .

В качестве иллюстрации к теореме 2 рассмотрим пороговую функцию, определяемую неравенством  $20x_1 + 28x_2 + 35x_3 \leq 140$ . Запишем систему (4) в виде  $Qa \geq 0$ , где  $Q$  — матрица системы,  $a = (a_0, \dots, a_{n+1})^T$  рассматривается как вектор-столбец. Пусть  $B$  — матрица, составленная из координат векторов  $a^{(i)}$ ,  $S = QB$ . Матрицы  $B$ ,  $Q$ ,  $S$  расположим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} & B \\ Q & S \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc} & & & & 56 & 70 & 140 & 140 & 105 & 84 & 80 & 50 & 36 & 21 \\ & & & & 8 & 10 & 20 & 20 & 15 & 12 & 11 & 7 & 5 & 3 \\ & & & & 11 & 14 & 28 & 28 & 21 & 16 & 16 & 10 & 7 & 4 \\ & & & & 14 & 17 & 35 & 35 & 25 & 21 & 20 & 12 & 9 & 5 \\ & & & & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Имеем  $\mu = 3$ ,

$$\begin{aligned} N_0(f, a^{(1)}) &= \{p^{(1)}, p^{(3)}\}, & N_1(f, a^{(1)}) &= \{q^{(1)}, q^{(2)}\}, \\ N_0(f, a^{(2)}) &= \{p^{(1)}, p^{(2)}\}, & N_1(f, a^{(2)}) &= \{q^{(1)}, q^{(3)}\}, \\ N_0(f, a^{(3)}) &= \{p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}\}, & N_3(f, a^{(1)}) &= \{q^{(1)}\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= (7, 0, 0), & p^{(2)} &= (0, 5, 0), & p^{(3)} &= (0, 0, 4), \\ q^{(1)} &= (4, 1, 1), & q^{(2)} &= (3, 3, 0), & q^{(3)} &= (2, 0, 3), \\ a^{(1)} &= (56, 8, 11, 14, 1), & a^{(2)} &= (70, 10, 14, 17, 1), & a^{(3)} &= (140, 20, 28, 35, 140). \end{aligned}$$

По теореме 2,  $T_\nu(f) = \bigcup_{i=1}^3 N_\nu(f, a^{(i)})$  ( $\nu = 0, 1$ ). Для нашего примера в объединении достаточно оставить только два члена. Действительно,

$$T_0(f) = N_0(f, a^{(3)}) = N_0(f, a^{(1)}) \cup N_0(f, a^{(2)}), \quad T_1(f) = N_1(f, a^{(1)}) \cup N_1(f, a^{(2)}).$$

### § 3. Оценки длины обучения

**Теорема 3.** При любых  $n, k, n \geq 3, k \geq 2$ ,

$$\frac{\left(\frac{1}{2} \log k - n - 3 - (n-1) \log(n-2)\right)^{n-2}}{4(n-1)3^{n-1}(n-2)^{n-2}((n-2)!)^2} \leq t(n, k) \leq 2n \log(2n)(1 + \log(k+1))^{n-1}. \quad (7)$$

Верхняя оценка в (7) является прямым следствием полученной в [2] верхней оценки числа вершин многогранника задачи о рюкзаке. Обозначим  $N(a_0, \dots, a_n)$  множество вершин выпуклой оболочки решений системы

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0, \\ 0 \leq x_j \leq k-1, & x_j \text{ целое} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

**Лемма 5** [2]. При любых  $n, k, n \geq 1, k \geq 1$ , и любых  $a_0, \dots, a_n$

$$|N(a_0, \dots, a_n)| \leq n \log(2n)(1 + \log(k+1))^{n-1}.$$

Отсюда и из следствия 3 сразу получаем верхнюю оценку в (7).

Выведем нижнюю оценку. Для каждого целого  $\Delta, \Delta \geq 2$ , определим множество

$$\Phi(n, \Delta) = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) : 0 \leq a_j \leq \Delta - 1 \ (j = 0, \dots, n-1)\}.$$

Пусть  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \Phi(n, \Delta)$ . Обозначим через  $V(a_0, \dots, a_{n-1}, \Delta)$  множество вершин выпуклой оболочки множества решений системы

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + x_j \equiv a_0 \pmod{\Delta}, \quad x_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1 \dots n). \quad (8)$$

В [1] (см. также [2] и [12, раздел 3.5]) установлена верхняя оценка для среднего числа вершин

$$\varphi(n, \Delta) = \Delta^{-n} \sum_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \Phi(n, \Delta)} |V(a_0, \dots, a_{n-1}, \Delta)|.$$

**Л е м м а 6** [1]. *При любых целых  $n \geq 2$  и  $\Delta \geq 2$  справедливо неравенство*

$$\varphi(n, \Delta) \geq c_n (\log \Delta - n - 2 - n \log(n-1))^{n-1},$$

где  $c_n = \left(4n3^n(n-1)^{n-1}((n-1)!)^2\right)^{-1}$ .

Обозначим через  $\mathcal{N}(a_0, \dots, a_n)$  множество вершин выпуклой оболочки решений системы

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j = a_0, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \text{ целое} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Используя лемму 6, докажем следующее вспомогательное утверждение.

**Л е м м а 7.** *При любых целых  $n, k, n \geq 3$  и  $k \geq 2$ , найдутся  $a_0 \in \mathbf{Z}$  и  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  из  $\mathbf{Z}^n$  такие, что  $0 < a_j < k$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) и*

$$|\mathcal{N}(a_0, \dots, a_n)| \geq c_{n-1} \left(\frac{1}{2} \log k - n - 3 - (n-1) \log(n-2)\right)^{n-2},$$

где  $c_n$  — величина, определенная в лемме 6.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть

$$\Delta(\Delta - 1) \leq a_0 \leq \Delta^2 - 1, \quad 0 \leq a_j \leq \Delta - 1 \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

По теореме 3.35 из [12] имеем  $N' \subseteq N(a_0, \dots, a_{n-1}, \Delta)$ , где  $N'$  — множество вершин выпуклой оболочки целочисленных решений системы

$$a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + \Delta x_n = a_0, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Легко видеть, что  $N'$  взаимно однозначно отображается в множество вершин выпуклой оболочки неотрицательных решений сравнения

$$a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} \equiv a_0 \pmod{\Delta},$$

или ему эквивалентного

$$a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} \equiv a_0 - \Delta(\Delta - 1) \pmod{\Delta}. \quad (9)$$

Для завершения доказательства леммы осталось сравнить (9) с (8), положить  $k = \Delta^2$  и воспользоваться леммой 6.

Заметим, что доказательство леммы 7 построено на основе доказательства аналогичного результата из [1] о нижней оценке величины  $N(a_0, \dots, a_n)$ .

По теореме 2

$$T(f) = \bigcup_a (N_0(f, a) \cup N_1(f, a)),$$

где объединение берется по всем таким  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , что неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \max_{y \in M_0(f)} \sum_{i=1}^n a_i y_i$$

является пороговым для функции  $f$ . Пусть  $a_0, \dots, a_n$  — величины, существование которых утверждается в лемме 7. Рассмотрим пороговую функцию  $f$  с пороговым неравенством

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq a_0.$$

По теореме 2 имеем  $\mathcal{N}(a_0, \dots, a_n) \subseteq T_0(f)$ . Теперь нижняя оценка длины обучения следует из леммы 7.

Теорема доказана полностью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веселов С. И. Нижняя оценка среднего числа неприводимых и крайних точек в двух задачах дискретного программирования. — Деп. в ВИНТИ, 1984, № 619–84.
2. Веселов С. И., Чирков А. Ю. Оценки числа вершин целых полиэдров // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 14–31.
3. Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю. Верхняя оценка средней мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Нижний Новгород: изд-во ННГУ. — 2003. — С. 238–246.
4. Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю. О мощности разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Материалы XIV Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного педагогического университета. — 2003. — С. 20–21.
5. Золотых Н. Ю. О сложности расшифровки пороговых функций, зависящих от двух переменных // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». Часть I. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ. — 2001. — С. 74–79.
6. Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н. Расшифровка пороговых функций  $k$ -значной логики // Дискретный анализ и исследование операций. — 1995. — Т. 2, №3. — С. 18–23.
7. Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н. О нижней оценке расшифровки пороговых функций  $k$ -значной логики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 2. — С. 346–352.
8. Коробков В. К. Оценка числа монотонных функций алгебры логики и сложности алгоритма отыскания разрешающего множества для произвольной монотонной функции алгебры логики // ДАН СССР. — 1963. — Т. 150, № 4. — С. 744–747.
9. Черников С. Н. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
10. Шевченко В. Н. О некоторых функциях многозначной логики, связанных с целочисленным программированием // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. — Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР. — 1985. — Вып. 42. — С. 99–108.
11. Шевченко В. Н. О расшифровке пороговых функции многозначной логики // Комбинаторно-алгебраические методы в прикл. матем. — Горький: Горьковский гос. ун-т. — 1987. — С. 155–163.
12. Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995.
13. Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю. О сложности расшифровки пороговых функций  $k$ -значной логики // Доклады Академии наук. — 1998. — Т. 362, № 5. — С. 606–608.
14. Antony M., Brightwell G., Cohen D., Shawe-Taylor J. On exact specification by examples // Proc. 5th Ann. ACM Conf. Comput. Learning Theory. New York. — NY: ACM Press. — 1992. — P. 311–318.

15. Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C. On integer points in polyhedra // *Combinatorica*. — 1992. — V. 12, № 1. — P. 27–37.
16. Hegedüs T. Geometrical concept learning and convex polytopes // *Proc. 7th Ann. ACM Conf. Comput. Learning Theory*. New York. — NY: ACM Press. — 1994. — P. 228–236.
17. Hegedüs T. Generalized teaching dimensions and the query complexity of learning // *Proc. 8 annual conf. on Computational learning theory (COLT'95)*. — New York: ACM Press. — 1995. — P. 108–117.

Поступило в редакцию 14 VIII 2007