

**О. Ю. Богоявленская,
А. Д. Манита,
С. П. Прохоренков**

**Вероятностная модель
маршрутизатора в
сетях TCP/IP**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Богоявленская О. Ю., Манита А. Д., Прохоренков С. П.
Вероятностная модель маршрутизатора в сетях
TCP/IP // Математические вопросы кибернетики.
Вып. 17. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — С. 235–246. URL:
<http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2008-235>

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ МАРШРУТИЗАТОРА В СЕТЯХ TCP/IP*)

О. Ю. БОГОЯВЛЕНСКАЯ, А. Д. МАНИТА, С. П. ПРОХОРЕНКОВ

(ПЕТРОЗАВОДСК)

(МОСКВА)

(МОСКВА)

§ 1. Введение

Работа посвящена изучению алгоритма «аддитивный прирост — мультипликативное уменьшение» (AIMD — Additive Increase Multiplicative Decrease), который используется для распределенного управления доступом к ресурсам инфраструктуры (маршрутизаторы и каналы связи) современных сетей передачи данных. В частности, этот алгоритм используется протоколом Transmission Control Protocol (TCP) и контролирует, таким образом, более 95% потоков данных сети Интернет. Алгоритм реализуется источниками данных и имеет две основные цели: захват свободных ресурсов сети для повышения собственной производительности и, в то же время, предотвращение перегрузки элементов инфраструктуры, которая приведет к резкому падению производительности и нарушению целостности всей системы. Помимо этого распределенное управление должно обеспечивать неприоритетное разделение и эффективное использование ресурсов сети.

При этом, в условиях отсутствия централизованного управления разделением ресурсов, источник не имеет сведений ни об объеме свободных ресурсов сети, ни о производительности других источников и строит управление на основании косвенных сигналов о потере данных в очередях маршрутизаторов. В соответствии с названными целями источник данных под управлением алгоритма AIMD линейно увеличивает скорость отправки данных, а получив сведения об их потере, умножает текущее значение скорости на коэффициент α ($0 < \alpha < 1$).

Различные аспекты производительности [11] алгоритма AIMD являются объектом интенсивных исследований в течение последних 15 лет. Подавляющее большинство работ посвящено анализу пропускной способности, демонстрируемой одним источником для различных классов потоков потерь данных (см., например, [1, 7, 12, 13, 16, 17]). Ряд работ также исследует функционирование двух и более источников в локальной сети специального вида. В частности, в работах [5, 8] получен ряд качественных свойств системы, состоящей из одного маршрутизатора и множества AIMD источников. В работе [14] построена диффузионная аппроксимация сети известной конфигурации в условиях высокой нагрузки.

*) Работа второго автора поддержана грантами РФФИ 06-01-00662 и 08-01-90431, работа третьего из авторов — грантом РФФИ 06-01-00662.

В настоящей работе построена математическая модель системы, описывающей взаимодействие нескольких источников данных, находящихся под управлением AIMD версии TCP NewReno (современный стандарт Интернет [6]), и разделяющих некоторый общий сетевой ресурс. Направляясь на общий маршрутизатор, различные потоки данных конкурируют между собой с целью получения более широкого «окна» (количества пакетов, передаваемых потоком в единицу времени). Конкуренция возникает по причине того, что суммарная пропускная способность маршрутизатора ограничена некоторой величиной K . На практике часто реализуются ситуации, когда перед попаданием в буфер маршрутизатора пакеты данных могут накапливаться в специальной очереди. В настоящей статье изучаются только модели TCP NewReno с нулевой очередью при буфере. Введены новые метрики доступности ресурса и суммарной эффективности источников. В двумерном случае получен ряд основных характеристик системы в явном виде.

План работы состоит в следующем. В § 2 мы вводим дискретную модель алгоритма AIMD, а в § 3 близкую ей непрерывную математическую модель. В последующих параграфах мы изучаем инвариантную вероятностную меру, соответствующую непрерывной модели, и вычисляем показатели эффективности модели.

§ 2. Динамика дискретной стохастической модели

Далее предполагается, что имеются N клиентов, состояние которых характеризуется «окнами» w_i , $i = 1, \dots, N$. Окна совместно используют буфер сервера (маршрутизатора), емкость которого равна $K > 0$.

Пространство состояний. Определим многомерный скачкообразный случайный процесс $w(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t))$ с непрерывным временем t , $t \in \mathbb{R}_+$, описывающий эволюцию окон. Пространством состояний является дискретное множество

$$S = \left\{ w = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{Z}_+^N : w_i \geq 0, \sum_{i=1}^N w_i \leq K \right\}.$$

Обозначим также $\partial S = \left\{ w \in S : \sum_{i=1}^N w_i = K \right\}$ и $S^\circ = S \setminus \partial S$.

Случайные потоки. С каждым j , $j \in \{1, \dots, N\}$, свяжем последовательность случайных моментов времени $\tau_j = \{\tau_{j,k}\}$

$$0 < \tau_{j,1} < \tau_{j,2} < \dots \quad (1)$$

относительно которой мы будем предполагать, что $(\tau_{j,k+1} - \tau_{j,k}, k \in \mathbb{N})$ — набор независимых случайных величин, имеющих одну и ту же функцию распределения

$$F_j(s) := P(\tau_{j,k+1} - \tau_{j,k} \leq s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Последовательность вида (1) принято называть потоком однородных событий (см. [2]). Будем предполагать, что

- а) потоки τ_1, \dots, τ_N независимы между собой;
- б) все функции распределения $F_j(s)$, $j = 1, \dots, N$, непрерывны;
- в) у распределений F_j существуют первые и вторые моменты:

$$a_j := E(\tau_{j,k+1} - \tau_{j,k}) = \int_{\mathbb{R}} x dF_j(x) = \int_0^{\infty} (1 - F_j(x)) dx, \quad (2)$$

$$b_j := \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_j(x) < \infty. \quad (3)$$

Из предположений а) и б) вытекает, что с вероятностью 1 никакие две случайные величины $\tau_{j,k}$ и $\tau_{j,k'}$ не совпадают между собой. Рассмотрим суммарный поток моментов времени $\tau^* = \bigcup_{j=1}^N \tau_j = \{\tau_{j,k}, k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, N\}$, элементы которого мы можем переобозначить и перенумеровать в порядке возрастания

$$0 < \tau_1^* < \tau_2^* < \dots$$

Скачки. Случайный процесс $w(t)$, который мы определяем в настоящем параграфе, является скачкообразным. Точнее говоря, изменения (скачки) в процессе $w(t)$ возможны лишь в случайные моменты времени, принадлежащие потоку τ^* , и характер этих изменений различен для ситуаций, когда текущее состояние w является «внутренней точкой» множества S , т. е. $w \in S^\circ$, и когда текущее состояние лежит на границе $w \in \partial S$. А именно, любой момент времени τ_q^* имеет вид $\tau_q^* = \tau_{j_0, k_0}$ для некоторых $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ и $k_0 \in \mathbb{N}$. Тогда скачкообразные переходы описываются следующими правилами:

1) если $w(\tau_q^*) \in S^\circ$, то состояние клиента j_0 увеличивается на 1:

$$w_{j_0}(\tau_q^* + 0) = w_{j_0}(\tau_q^*) + 1;$$

2) если $w(\tau_q^*) \in \partial S$, то состояние клиента j_0 сокращается в α^{-1} раз:

$$w_{j_0}(\tau_q^* + 0) = [\alpha w_{j_0}(\tau_q^*)],$$

где α , $0 < \alpha < 1$, — некоторое заданное число. И в первом, и во втором случаях состояния других клиентов остаются неизменными: $w_m(\tau_q^* + 0) = w_m(\tau_q^*) \quad \forall m \neq j_0$. П. 1) относится к ситуации, когда маршрутизатор имеет свободные пропускные мощности и, поэтому, клиенты пытаются расширить размер своих окон w_j . П. 2) соответствует ситуации, когда буфер переполняется и пакеты теряются.

О п р е д е л е н и е 1. Случайный процесс $w(t)$, определенный выше, мы будем называть *дискретной моделью маршрутизатора* и обозначать $DM(\alpha; F_1, \dots, F_N)$.

О п р е д е л е н и е 2. *Симметричной дискретной моделью* мы будем называть модель вида $DM(\alpha; F, \dots, F)$, т. е. модель, в которой параметры функционирования клиентов одинаковы. Таковую модель мы будем обозначать $SDM(\alpha; F)$.

В терминах приложений, в нашей вероятностной модели мы считаем RTT (round-trip-time — время кругового оборота) случайным. Отметим, что в отличие от работ [5, 12], где рассматривались экспоненциально распределенные RTT, мы допускаем произвольные функции распределения F_j , предполагая лишь существование математических ожиданий и дисперсий у соответствующих распределений. Отметим, что многомерный случайный процесс $w(t)$, $t \geq 0$, вообще говоря, не является марковским. Марковость может иметь место только в случае экспоненциальных распределений F_j , но мы не будем себя ограничивать такими жесткими предположениями.

Для оценки производительности модели важное значение имеют предельные вероятности

$$\pi = (\pi_w, w \in S), \quad \pi_w = \lim_{t \rightarrow \infty} P(w(t) = w).$$

При сделанных нами предположениях существование этих предельных вероятностей для модели $DM(\alpha; F_1, \dots, F_N)$ можно установить, используя

конечность множества состояний S , и руководствуясь идеями, которые применяются при доказательстве аналогичного утверждения в теории полумарковских процессов. Однако, в рассматриваемой общности задача о нахождении в явном виде предельного распределения π является очень сложной и, по-видимому, не имеет удовлетворительного решения.

В следующем параграфе мы определим модель с непрерывным пространством состояний, которая получается из данной специальным предельным перемасштабированием пространства и времени. В литературе предельные переходы, основанные на подобном перемасштабировании, принято называть *скейлингами*. Динамические системы, получаемые после скейлингов, несут в себе существенную информацию об исходной модели, и часто допускают более глубокий анализ, приводящий к явным формулам (см., например, [15]).

§ 3. Жидкостная модель

3.1. Определение непрерывной модели. Перед тем, как определить модель, зафиксируем набор чисел $v_1 > 0, \dots, v_N > 0$, распределение вероятностей (p_j) на множестве $\{1, \dots, N\}$:

$$p_j > 0 \quad \forall j, \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1,$$

и, как и в предыдущем параграфе, некоторое число $0 < \alpha < 1$.

О п р е д е л е н и е 3. *Непрерывной моделью СМ* $(\alpha; v_1, \dots, v_N; p_1, \dots, p_N)$ назовем случайный процесс $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, с непрерывным пространством состояний

$$M = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^N x_i \leq K \right\},$$

и с кусочно непрерывными траекториями $x(t)$, удовлетворяющими следующим условиям:

$$1) \quad \frac{d}{dt} x_j(t) = v_j, \quad v_j > 0, \quad \text{для всех } j = 1, \dots, N, \quad \text{если } x(t) \in M^\circ,$$

$$M^\circ = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^N x_i < K \right\},$$

$$2) \quad \text{если в некоторый момент } t_0 \quad x(t_0) \in \partial M,$$

$$\partial M = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^N x_i = K \right\},$$

то состояние изменяется скачкообразно: с вероятностью p_j осуществляется мгновенный переход $x(t_0) = x \mapsto x(t_0 + 0) = \tilde{x}^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, где

$$\tilde{x}^{(j)} = (\tilde{x}_1^{(j)}, \dots, \tilde{x}_N^{(j)}), \quad \tilde{x}_m^{(j)} := \begin{cases} x_m, & m \neq j, \\ \alpha x_j, & m = j. \end{cases}$$

Заметим, что на $x(t)$ можно смотреть как на марковский процесс с некоторой вырожденной переходной функцией или же трактовать его как динамическую систему со случайным рассеянием на границе ∂M .

Обратим внимание на то, что пп. 1) и 2) определения 3 относятся к динамике и не накладывают никаких ограничений на распределение вектора $x(0)$, в качестве которого мы можем взять любую вероятностную меру μ_0 на множестве M . Напомним, что вероятностная мера μ на множестве M будет называться стационарным распределением марковского процесса $x(t)$, если для любого измеримого множества B вероятность $P(x(t) \in B)$ не зависит от $t \geq 0$. То есть, стационарное распределение μ , будучи выбранным в качестве начального, будет сохраняться динамикой во все последующие моменты времени. Нахождение стационарного распределения является важной задачей как в теоретическом, так и в практическом плане, так как она связана с оценкой производительности модели в установившемся режиме. В параграфе 4 мы обсудим, какие функционалы, вычисляемые по этой стационарной мере, представляют интерес с точки зрения производительности моделируемого TCP-маршрутизатора.

По аналогии с определением 2 введем также следующее понятие.

О п р е д е л е н и е 4. *Симметричной непрерывной моделью SCM* $(\alpha; v)$ мы будем называть модель вида $CM\left(\alpha; v, \dots, v; \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$.

В параграфе 5 мы изучим основные свойства стационарной меры μ для $SCM(\alpha; v)$ в двумерном случае ($N = 2$).

3.2. Предельный переход от дискретной к непрерывной модели.

Речь идет о том, чтобы ввести в дискретную модель некоторый масштабный множитель $n, n \in \mathbb{N}$, отвечающий за изменение временной и пространственной шкал. А именно, наряду со старыми координатами $(s, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}^N$ мы рассмотрим новые координаты $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, которые связаны между собой следующим образом

$$s = nt, \quad w = [nx] . \tag{4}$$

В дальнейшем мы устремим параметр n к бесконечности: $n \rightarrow \infty$.

Зафиксируем вещественные числа $K, \alpha, K > 0, 0 < \alpha < 1$, и функции распределения $F_j, j = 1, \dots, N$. Рассмотрим последовательность $w^{(n)} = w^{(n)}(s)$ дискретных моделей $DM(\alpha; F_1, \dots, F_N)$ с пространствами состояний

$$S^{(n)} = \left\{ w = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{Z}_+^N : w_i \geq 0, \sum_{i=1}^N w_i \leq [nK] \right\} , \tag{5}$$

и начальными условиями $w^{(n)}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{Z}_+^N$.

Т е о р е м а 1. *Существуют набор чисел $v_j, v_j > 0, j = 1, \dots, N$, и распределение вероятностей $p_j, j = 1, \dots, N$, оба зависящие от набора функций распределения $F_j, j = 1, \dots, N$, такие, что непрерывная модель $CM(\alpha; v_1, \dots, v_N; p_1, \dots, p_N)$ будет предельной для последовательности дискретных моделей $w^{(n)} = w^{(n)}(s)$ в скейлинге (4). Другими словами, для каждого фиксированного $t \geq 0$ имеет место сходимость по распределению*

$$\frac{1}{n} w^{(n)}(nt) \rightarrow x(t) \quad (n \rightarrow \infty),$$

где $x = x(t)$ — непрерывная модель $CM(\alpha; v_1, \dots, v_N; p_1, \dots, p_N)$ с начальным условием $x(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}_+^N$. При этом параметры v_j имеют простой вероятностный смысл: $v_j = a_j^{-1}$ (см. (2)).

Доказательство теоремы использует стандартную вероятностную технику, поэтому мы ограничимся наброском основных идей, опуская

некоторые детали. Изначально положим $v_j = a_j^{-1}$, $j = 1, \dots, N$, а распределение вероятностей p_j , $j = 1, \dots, N$, подберем позже. Так как траектория $x = x(t)$ непрерывной модели $CM(\alpha; v_1, \dots, v_N; p_1, \dots, p_N)$ состоит из кусочно линейных функций, то естественно рассмотреть отдельно те интервалы переменной t , которые не содержат моментов (случай А), в которые происходят скачки процесса $x(t)$, и сами моменты скачков, когда траектория попадает на границу области (случай Б). Рассуждения удобно вести индуктивно по порядковому номеру интервала без скачков и по порядковому номеру попадания на границу.

А. Обозначим $e_i = (0, \dots, 1_i, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{v} = (a_1^{-1}, \dots, a_N^{-1}) \in \mathbb{R}^N$. Выберем $t_1 < t_2$ — два момента времени таких, что

$$x(t) = x(t_1) + v(t - t_1)\mathbf{v} \text{ для всех } t \text{ из } [t_1, t_2], \quad x(t_2) \in M^\circ, \quad (6)$$

и зафиксируем их. Сделаем также индуктивное предположение о том, что $\frac{1}{n}w^{(n)}(nt_1) \rightarrow x(t_1)$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что каждый из потоков τ_j является стационарным потоком восстановления [2]. Для каждого j , $j = 1, \dots, N$, определим случайную величину

$$\nu_j^{[nt_1, nt]} = \# \{k : \tau_{j,k} \in [nt_1, nt]\}, \quad (7)$$

имеющую смысл числа точек восстановления процесса τ_j на интервале $[nt_1, nt]$. Свойства случайных величин (7) хорошо известны в теории восстановления (см. [2, § 2.7]). В частности, следствия из элементарной и узловой теорем восстановления в комбинации с неравенством Чебышева и предположениями (2), (3) позволяют доказать, что имеет место сходимость по вероятности

$$\frac{\nu_j^{[nt_1, nt]}}{n} \rightarrow (t - t_1)a_j^{-1}, \quad (8)$$

где, напомним, a_j — математическое ожидание длины интервала времени между последовательными событиями в потоке τ_j . Заметим, что

$$w^{(n)}(nt) = w^{(n)}(nt_1) + \sum_{j=1}^N \nu_j^{[nt_1, nt]} e_j, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (9)$$

в тех случаях, когда траектория $w^{(n)}(s)$, $s \in [nt_1, nt_2]$, не выходит на границу ∂S . Нетрудно показать, что для t_1 и t_2 , удовлетворяющих условию (6), вероятность выхода такой траектории на границу мала в следующем смысле

$$P \{ \exists s \in [nt_1, nt_2] : w^{(n)}(s) \in \partial S \} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

С учетом этого факта, а также (9) и (8), получаем сходимость

$$\frac{1}{n}w^{(n)}(nt) - \frac{1}{n}w^{(n)}(nt_1) \rightarrow x(t) - x(t_1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

на участке траектории (6).

Б. Здесь мы рассмотрим распределения скачков, связанные с выходом на границу. Допустим, что в некоторый момент времени $s_0 \in \mathbb{R}^N$ дискретная модель $w^{(n)}(s)$ находится в некотором состоянии на границе ∂S . Зафиксируем j , $j \in \{1, \dots, N\}$. Если для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$ выполнено $\tau_{j,k_0} \leq s_0 < \tau_{j,k_0+1}$, то величина $\gamma_j(s_0) := \tau_{j,k_0+1} - s_0$ называется величиной перескока через уровень s_0 в потоке τ_j и имеет смысл времени с момента s_0 до следующего момента в потоке τ_j ([2, § 2.7]). Легко видеть, что ближайший за моментом s_0

скачок в процессе $w^{(n)}(s)$ произойдет в момент времени $s_0 + \min_j \gamma_j(s_0)$. Этот скачок будет заключаться в уменьшении $w_\iota \mapsto [\alpha w_\iota]$, где индекс $\iota = \iota(s_0)$ определяется единственным образом из условия

$$\gamma_\iota(s_0) = \min_j \gamma_j(s_0).$$

Распределение дискретной случайной величины ι , естественно, зависит от момента s_0 . Обозначим вероятности, образующие это распределение, следующим образом

$$p_m(s_0) = P \{ \iota(s_0) = m \}, \quad m = 1, \dots, N, \quad \sum_{m=1}^N p_m(s_0) = 1.$$

Доказательство теоремы можно будет считать завершенным, если мы покажем, что для всех m существуют пределы

$$p_m(s_0) \rightarrow p_m \quad (s_0 \rightarrow +\infty). \tag{10}$$

Мы не только докажем существование этих пределов, но и получим явные формулы, связывающие p_m с функциями F_j , $j = 1, \dots, N$. Введем обозначения для функций распределения случайных величин $\gamma_j(s_0)$

$$F_{\gamma_j}(t; s_0) = P \{ \gamma_j(s_0) \leq t \}$$

и заметим, что все случайные величины $\gamma_j(s_0)$, $j = 1, \dots, N$, независимы между собой. Тогда

$$\begin{aligned} P \{ \iota(s_0) = m \} &= P \{ \gamma_m < \min(\gamma_1, \dots, \widehat{\gamma}_m, \dots, \gamma_N) \} = \\ &= \int_0^\infty \prod_{j \neq m} P \{ \gamma_j(s_0) > y \} dF_{\gamma_m}(y; s_0) = \int_0^\infty \prod_{j \neq m} (1 - F_{\gamma_j}(y; s_0)) dF_{\gamma_m}(y; s_0). \end{aligned}$$

Известно [2], что существуют пределы при $s_0 \rightarrow \infty$

$$F_{\gamma_j}(y; s_0) \rightarrow F_{\gamma_j}(y; \infty) = \frac{\int_0^y (1 - F_j(z)) dz}{\int_0^\infty (1 - F_j(z)) dz}.$$

Следовательно,

$$P \{ \iota(s_0) = m \} \rightarrow \frac{\int_0^\infty (1 - F_m(y)) \prod_{j \neq m} (1 - F_{\gamma_j}(y; \infty)) dy}{\int_0^\infty (1 - F_m(z)) dz}. \tag{11}$$

Путем несложных преобразований можно привести правую часть к виду, содержащему только F_j , например,

$$p_m = \frac{\int_0^\infty (1 - F_m(y)) \left(\prod_{j \neq m} \int_y^\infty (1 - F_j(z)) dz \right) dy}{\prod_{j=1}^N a_j}, \quad m = 1, \dots, N.$$

Утверждение (10) доказано.

В качестве следствия теоремы имеем следующее утверждение для симметричных дискретных моделей. Для простоты мы будем считать, что все дискретные модели стартуют из нуля: $w^{(n)}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}_+^N$.

Теорема 2. *Последовательность $w^{(n)} = w^{(n)}(s)$ симметричных дискретных моделей $SDM(\alpha; F)$ с пространствами состояний (5) сходится при $n \rightarrow \infty$ в скейлинге (4) к непрерывной симметрической модели $x = x(t)$ вида $SCM(\alpha, a^{-1})$, где $a = \int x dF(x)$, $x(0) = 0$.*

Заметим, что доказательство п. Б. в случае симметричных моделей несколько проще, так как из существования пределов p_m в силу симметрии модели будет немедленно вытекать, что $p_m = \frac{1}{N}$.

Предположение теорем 1 и 2 о том, что модели стартуют из нуля, не является необходимым. Его можно заменить, например, такой последовательностью начальных условий: $w^{(n)}(0) = [nx_0]$, где $x_0 \in M^\circ$. Тогда предельная непрерывная модель будет стартовать из точки $x(0) = x_0$.

Существует класс дискретных моделей, для которых вид предельных вероятностей p_m в (11) особенно просто выражается через исходные параметры. А именно, если все функции F_j соответствуют экспоненциальным распределениям

$$F_j(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda_j t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \lambda_j > 0,$$

то вычисления показывают, что

$$p_m = \frac{\lambda_m}{\sum_{j=1}^N \lambda_j}, \quad m = 1, \dots, N.$$

Отметим, что в этом случае дискретная модель $DM(\alpha; F_1, \dots, F_N)$ будет *марковской*. В то же время, по мнению ряда исследователей статистики сети Интернет, предположение об экспоненциальной распределенности RTT не является реалистичным.

§ 4. Об общих оценках производительности моделей

Среди перечня показателей (см. [11]), характеризующих качество (производительность) системы, обратим внимание на три: *responsiveness*, *smoothness* и *fairness*.

Под *responsiveness* понимают время до эффективной загрузки системы (до границы ∂S или ∂M), стартующей из произвольного начального состояния. На языке марковских моделей ему может соответствовать время сходимости к равновесию, т. е. время необходимое для приближения к стационарному распределению последовательности цепей Маркова, рассматриваемое как функция от «размера» этих цепей. Все определения см. [4].

Показатель *smoothness* (гладкость) обозначает величину осцилляций состояний относительно области эффективной загрузки (окрестности границы ∂S или ∂M) в установившемся режиме. На языке теории вероятностей речь идет о некотором математическом ожидании, вычисленном по стационарному распределению. Поэтому анализ стационарного распределения (в форме точных или асимптотических результатов) представляет значительный интерес (для сравнения см. [9, 10, 12]).

Fairness (справедливость) означает стремление к тому, чтобы в загруженном режиме все однотипные пользователи имели равный доступ к ресурсу, т. е. занимали приблизительно одинаковую часть буфера роутера. В работе [11] предлагается следующий показатель справедливости

$$F(x) = \frac{\left(\sum_i x_i\right)^2}{N \left(\sum_i x_i^2\right)}.$$

Как указано в [11] он обладает рядом достоинств, но, очевидно, что могут быть и другие кандидаты на эту роль. В п. 5.3 мы предложим альтернативные показатели, которые являются более удобными для двумерной задачи.

§ 5. Двумерная задача

Далее исследуются свойства *стационарного распределения* для *непрерывной симметрической модели* в случае $N = 2$.

Чтобы упростить последующие обозначения, положим $K = \sqrt{2}W$. Для наглядности множество $M = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq K, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ повернем на 135° по часовой стрелке и сдвинем влево на W . Получим картинку, представленную на рис. 1. Здесь в координатах (y, z) обозначены $A = (-W, 0)$, $B = (0, W)$, $C = (W, 0)$.

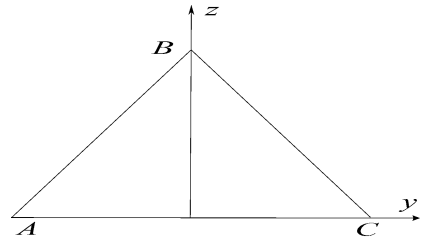


Рис. 1

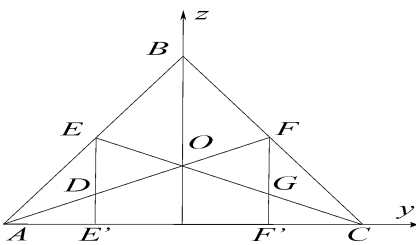


Рис. 2

$ADEOFGC$ (см. рис. 2). Здесь $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} = \alpha$.

Нетрудно доказать, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Существуют конечные меры $g_2(dy)$ и $g_1(dy)$ такие, что*

$$\mu(dy, dz) = \left(I\left((y, z) \in AOC\right) g_1(dy) + I\left((y, z) \in DEO \cup FGO\right) g_2(dy) \right) dz.$$

Структуру мер $g_2(dy)$ и $g_1(dy)$ помогают установить следующие две леммы. Первая из них показывает соотношение между $g_1(dy)$ и $g_2(dy)$. Для этого определим преобразования

$$I_+ : y \rightarrow \frac{1+\alpha}{2}y + \frac{\alpha-1}{2}W$$

Мы будем искать стационарную вероятностную меру для динамической системы $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ в классе распределений, симметричных относительно оси Oz . Обозначим искомую стационарную меру $\mu(dy, dz)$.

5.1. Уравнение для стационарной меры. Динамика такова, что носитель стационарной меры представляет собой собственное подмножество M , а именно внутренность многоугольника

и

$$I_- : y \rightarrow \frac{1+\alpha}{2}y - \frac{\alpha-1}{2}W,$$

определенные на $[-W, W]$.

Лемма 1. Мера $g_2(dy)$ выражается через $g_1(dy)$ следующим образом. Для $y \in [-\alpha W, 0]$ и для Δy такого, что $y + \Delta y \in [-\alpha W, 0]$, выполняется соотношение

$$g_2([y, y + \Delta y]) = \frac{1}{2}g_1(I_+^{-1}[y, y + \Delta y]).$$

Аналогично, для $y \in [0, \alpha W]$ и для Δy такого, что $y + \Delta y \in [0, \alpha W]$, выполняется соотношение

$$g_2([y, y + \Delta y]) = \frac{1}{2}g_1(I_-^{-1}[y, y + \Delta y]).$$

Следующая лемма задает уравнение для нахождения $g_1(dy)$. Для этого определим, что носителем меры $g_1(dy)$ является множество $[-W, W]$.

Лемма 2. Пусть $y \in [-W, W]$, и Δy таково, что $y + \Delta y \in [-W, W]$. Тогда

$$g_1([y, y + \Delta y]) = \frac{1}{2}g_1(I_+[y, y + \Delta y]) + \frac{1}{2}g_1(I_-[y, y + \Delta y]).$$

Рассмотрим меру $g(dy) = Cg_1(dy)$, где константа $C > 0$ выбрана таким образом, чтобы мера $g(dy)$, была вероятностной. Обозначим соответствующую ей функцию распределения $G(y)$. Для величины $G(y)$ можно сформулировать следующее важное утверждение.

Теорема 4. Функция распределения $G(y)$ удовлетворяет следующему соотношению.

$$G(y) = \frac{1}{2}G\left(\frac{2}{1+\alpha}y - \frac{(1-\alpha)W}{1+\alpha}\right) + \frac{1}{2}G\left(\frac{2}{1+\alpha}y + \frac{(1-\alpha)W}{1+\alpha}\right), \quad |y| \leq W, \\ G(y) = 0, \quad y < -W, \quad G(y) = 1, \quad y > W. \quad (12)$$

5.2. Бесконечные свертки Бернулли.

Теорема 5. Пусть функция распределения $G(y)$ удовлетворяет уравнению (12). Тогда характеристическая функция $\varphi_G(\lambda) = \int \exp(i\lambda y) G(dy)$, соответствующая функции распределения G , будет иметь вид

$$\varphi_G(\lambda) = \prod_{i \geq 0} \cos(b_2 b_1^i \lambda),$$

где

$$b_1 = \frac{1+\alpha}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad b_2 = \frac{(1-\alpha)W}{2} > 0.$$

Доказательство данного утверждения следует из теоремы 4, которую в терминах характеристических функций можно переписать в виде

$$\varphi_G(\lambda) = \cos(b_2 \lambda) \varphi_G(b_1 \lambda),$$

после чего, подставляя рекуррентно это выражение в себя, получаем требуемое утверждение.

Из этого утверждения вытекает, что искомое распределение относится к классу бесконечных свертков Бернулли [3]. Распределения из этого класса

имеют сложную природу, явное нахождение функций G не представляется возможным. Трудным является также вопрос о том, при каких значениях α стационарное распределение имеет плотность по отношению к мере Лебега, а при каких α стационарное распределение сингулярно по отношению к мере Лебега.

Но, благодаря явному виду характеристической функции, полученному в теореме 5, мы можем вычислить значения моментов $\int_{-W}^W x^k G(dx)$ распределения $G(y)$. Это обстоятельство является ключевым для получения показателей производительности.

5.3. Явно вычисляемые показатели качества моделей. Зная моменты распределения $G(y)$ и опираясь на теорему 3, путем некоторых вычислений мы приходим к следующему итоговому результату.

Теорема 6. Верны следующие равенства

$$\begin{aligned} E_{\mu}y &= 0, & E_{\mu}y^2 &= \frac{(1-\alpha)(\alpha^2+1)}{2(3+\alpha)}W^2. \\ E_{\mu}z &= \frac{(1-\alpha)W}{(3+\alpha)}, & E_{\mu}z^2 &= \frac{(1-\alpha)^2(3-\alpha)W^2}{2(3+\alpha)}. \end{aligned}$$

Отметим, что нет принципиальных трудностей в последовательном нахождении моментов более высокого порядка, но практического смысла в этом нет. В то же время, вычисленные в теореме 6 моменты дают альтернативные показатели качества изучаемых моделей: $E_{\mu}y^2$ характеризует справедливость (fairness), тогда как $E_{\mu}z$ может служить показателем гладкости (smoothness).

§ 6. Заключение

В работе проведено исследование фрагмента сети передачи данных, состоящего из N источников данных и маршрутизатора. Источники данных находятся под управлением алгоритма AIMD [6], который является основным алгоритмом распределенного управления ресурсами Интернет. Математическая модель системы сформулирована в виде N -мерного случайного процесса, не являющегося марковским. Доказано, что построенный процесс после перемасштабирования пространства и времени сходится к динамической системе в ограниченной области \mathbb{R}^N , которая имеет кусочно-линейные траектории и случайные скачки с границы во внутренность области.

Для предельной системы в случае $N = 2$ построена инвариантная мера, доказано, что связанное с ней распределение относится к классу бесконечных сверток Бернулли. Найдена характеристическая функция этого распределения и на ее основе получен ряд важных характеристик производительности системы. А именно, в работе найдены первый и второй моменты метрик справедливости разделения и эффективности использования маршрутизатора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богоявленская О. Ю. Анализ случайного потока, генерируемого транспортным протоколом с обратной связью, в сети передачи данных // Автоматика и телемеханика. — № 12. — 2003. — С. 60–68.
2. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1987.
3. Лукач Е. Характеристические функции. — М.: Наука, 1979.

4. Манита А. Д. Время сходимости к равновесию в цепях Маркова с большим числом состояний // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 1999. — Т. 5, вып. 4. — С. 1135–1157.
5. Adjih C., Jacquet P., Vvedenskaya N. Performance evaluation of a single queue under multi-user TCP/IP connections — version 2 // *Rapport de recherche de l'INRIA* — RR-4478. — Juin 2002.
6. Allman M., Paxson V., Stevens W. TCP Congestion Control // RFC2581.
7. Altman E., Avrachenkov K., Barakat C. A Stochastic model of TCP/IP with stationary random losses // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. — V. 13, № 2. — April, 2005. — P. 356–368.
8. Baccelli F., McDonald D. R., Reynier J. A mean-field model for multiple TCP connections through a buffer implementing RED // *Performance Evaluation*. — V. 49, № 1–4. — September, 2002. — P. 77–97
9. Bogoiavlenskaia O., Salo A. Analytical approximation for performance metrics of data communication distributed flow control // *PTAP-2006*.
10. Carlsson N., Hognas G. Asymptotic properties of a TCP model with time-outs // *Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B*. — V. 5, iss. 3. — 2005. — P. 534–564.
11. Chiu D. M., Jain R. Analysis of the increase and decrease algorithms for congestion avoidance in computer networks // *Computer Networks and ISDN Systems*. — 17. — 1989. — P. 1–14.
12. Dumas V., Guillemin F., Robert P. A Markovian analysis of AIMD algorithms // *Advances in Applied Probability*. — 34(1). — 2002. — P. 85–111.
13. Floyd S., Fall F. Promoting the use of end-to-end congestion control in the Internet // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. — August, 1999.
14. Kang W., Kelly F. P., Lee N. H., Williams R. J. Fluid and Brownian approximations for an internet congestion control model // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. — 2004.
15. Malyshev V. Networks and dynamical systems // *Adv. Appl. Prob.* — 25. — 1993. — P. 140–175.
16. Padhey J., Firoiu V., Towsley D., Kurose J. Modeling TCP throughput: A simple model and its empirical validation // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. — V. 8, № 2. — April, 2000. — P. 133–145.
17. Sikdar V., Kalyanaraman S, Vastola K. S. An integrated model for the latency and steady-state throughput of TCP connections // *Performance Evaluation*. — 46. — 2001. — P. 139–154.

Поступило в редакцию 28 VIII 2007