



Галанин М.П., Лазарева С.А.

Локальная гладкость и
асимптотика решения
метода конечных
суперэлементов в угловых
точках разбиения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галанин М.П., Лазарева С.А. Локальная гладкость и асимптотика решения метода конечных суперэлементов в угловых точках разбиения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 49. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-49>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша

М.П. Галанин, С.А. Лазарева

**Локальная гладкость и асимптотика решения
метода конечных суперэлементов
в угловых точках разбиения**

Москва – 2008

Аннотация^(*)

В работе представлены результаты теоретических исследований характеристик метода конечных суперэлементов Федоренко (МКСЭ). Определены регулярность приближенного решения МКСЭ, его асимптотика в окрестности угловых точек разбиения области на подобласти-суперэлементы.

M. Galanin, S. Lazareva

Local regularity and asymptotic behavior of the finite superelement method solution near the corner points of decomposition

Abstract

In this paper characteristics of Fedorenko finite superelement method (FSEM) is theoretically investigated. Regularity of the approximate solution is given. Asymptotics near the corner points of decomposition on subdomains-superelements is examined.

Содержание

Введение	3
1. Принципы МКСЭ	4
2. Обозначения и определения.....	8
3. Локальная гладкость приближенного решения МКСЭ.....	14
4. Оценки решения по шкале $H^M(\Omega)$	23
Заключение	28
Список литературы	28

^(*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 06 - 01 - 00421).

Введение

Основанием для разработки и развития метода конечных суперэлементов Федоренко (МКСЭ) является проблема численного решения сложных вычислительных задач, содержащих резкие особенности, или “сингулярности”, решения. В этих случаях размеры расчетной области составляют значительную величину в сравнении с областью проявления особенностей.

Данная работа является продолжением исследований [3 – 12] по выявлению качественных характеристик МКСЭ. В ней определены регулярность приближенного решения МКСЭ, установлена его асимптотика в окрестностях угловых точек разбиения области на подобласти-суперэлементы (СЭ). Работа выполнена на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Для достижения поставленной цели использованы теория весовых пространств Соболева и Кондратьева, теория эллиптических задач в областях с угловыми точками, свойства регулярности решений вариационных задач в негладких областях. Работа направлена на поиск оптимальных аппроксимаций метода и способов его применения.

МКСЭ позволяет решать задачи, содержащие мелкие “сингулярности” в расчётной области в пространстве слабых решений, обладая при этом погрешностями, оцениваемыми через ограничения этого решения на гладкие части суперэлементных границ. Это не требует использования сеток, сгущающихся в окрестностях “сингулярностей”, и связано с выбором особых аппроксимирующих пространств. Однако поведение приближений МКСЭ в пространствах сильных и гладких решений также представляет интерес.

При решении задачи рассматриваемая проблема возникает естественным образом. Как правило, искомое решение при достаточно гладкой границе области и подходящих граничных условиях обладает производными (например, суммируемыми с квадратом) до порядка $M \geq 1$. Вторым распространенным вариантом является гладкое, обладающее производными высокого порядка, решение в окрестностях границ разбиения области на подобласти-суперэлементы.

Производные представляют важные (а часто и определяющие) физические характеристики поставленной задачи. Например, такими характеристиками могут быть скорости и ускорения в механике, гидродинамике; напряжения, деформации и скорость их роста в теории упругости; напряженности и силы в теории поля; мощность тепловых источников и потоки газа в теории переноса теплоты и др. Полученные в работе результаты позволяют определить поведение погрешностей приближения производных решения первого и более высокого порядков.

Связующим звеном такого исследования является определение гладкости приближений МКСЭ, их асимптотического поведения в окрестностях углов декомпозиции. Помимо того, определение возможной гладкости приближенного решения в пределах СЭ и во всей области и нахождение его асимптотики представляют самостоятельный интерес.

1. Принципы МКСЭ

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) предложен в работах Федоренко и его коллег [1–2] и входит в класс численных методов, основанных на декомпозиции области в сочетании с выбором особой аппроксимации решения. Функции, с помощью разложения по которым разыскивается приближенное решение МКСЭ, являются решениями исходной системы уравнений в части области со специальными условиями на ее границе и, следовательно, заведомо содержат в себе ряд характеристик решения рассматриваемой задачи. Для авторов метода и данной работы главный интерес представляют задачи, характеризующиеся наличием ряда резких особенностей, проявляющихся на малых по сравнению с основной областью пространственных подобластях. Такие особенности могут представлять собой “сингулярности” решения, порожденные резкими неоднородностями геометрии области либо физической или математической модели. В работах [1–12] эффективность МКСЭ подтверждена примерами решения задач разнообразного физического происхождения.

Все дальнейшие рассмотрения мы проведем на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерной области $\Omega \subset R^2$. Область Ω представляет собой квадрат с исключенными из него кругами, радиус которых мал по сравнению с размерами Ω (рис. 1). Полагаем, что в окрестностях таких мелких отверстий сосредоточены все резкие “сингулярности” решения.

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = g \text{ на } \partial\Omega, \quad (2)$$

где u – искомая функция, $\partial\Omega$ – граница расчетной области, g – некоторая известная функция на $\partial\Omega$.

Как и в обычном методе конечных элементов (МКЭ) для численного решения задачи разобьем расчетную область на некоторое число подобластей, называемых *суперэлементами*. Каждое предполагаемое место сосредоточения особенности (отверстие, неоднородность и т.п.) при этом должно быть заключено строго внутри одного СЭ. На рис. 2 показан пример равномерного разбиения области Ω на квадратные СЭ Ω_k с границей S_k , $k = 1, \dots, K_E$, где K_E – общее число подобластей-суперэлементов. Функции, разложением по которым разыскивается приближенное решение, для краткости будем называть базисными. Они являются финитными, их носители связаны с СЭ. При этом задание аппроксимаций в МКСЭ связано не со всей двумерной подобластью Ω_k , а только с её одномерной границей.

Рассмотрим аппроксимации МКСЭ в одном СЭ Ω_k , где k - некоторое фиксированное число. На его одномерной границе S_k зададим набор функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$, $x \in S_k$, которые назовем *граничными базисными функциями*. В узлах СЭ P_j и на границе его отверстия P_0 они равны

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Узлы СЭ P_j расположены только на его ребрах и в углах (рис. 3). Символ P_0 , имеющий нулевой индекс, обозначает не один узел, а

всю границу отверстия. В том случае, если СЭ Ω_k не содержит отверстия, полагаем, что $\varphi_0 \equiv 0$ на всей S_k .

Ранее в [6; 9] предложены и исследованы различные варианты продолжения этих функций с узлов P_j на ребра СЭ. Варианты заключаются в представлении базисных граничных функций на каждом из ребер границы некоторым “стандартным” интерполянтom [19]: полиномиальным, кусочно-линейным, сплайном и т.д. Одна из таких функций $\varphi_i(x)$ при кусочно-линейной зависимости представлена на рис. 4, а при полиномиальной зависимости второго порядка на ребрах границы СЭ – на рис. 5.

Граничные базисные функции заданы для всех узлов и СЭ в области Ω . Предполагается, что функции $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$, определенные на одном и том же ребре соседних СЭ Ω_k и Ω_m , на нем совпадают, т.е.

$$\varphi_i(x) = \varphi_j(x), \quad x \in S_k \cap S_m,$$

для всех $S_k \cap S_m \neq \emptyset$ и всех соседних СЭ $\Omega_k, \Omega_m \quad \forall k, m$. Кроме того, на внешней границе $\partial\Omega$ необходимо удовлетворить главное граничное условие (2):

$$\varphi_i(P_j) = g(P_j), \quad \forall P_j \in \partial\Omega, \quad j = 0, \dots, n.$$

Каждая построенная граничная базисная функция $\varphi_i(x)$ однозначно определяет функцию $\Phi_i(x)$ в СЭ Ω_k . Она является решением задачи Дирихле следующего вида:

$$-\Delta\Phi_i = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \tag{4}$$

$$\Phi_i = \varphi_i \quad \text{на } S_k. \tag{5}$$

Функции $\Phi_i(x)$, $x \in \Omega_k$, задают *базисные функции МКСЭ* в СЭ Ω_k . Базисные функции единообразно задаются в каждом из СЭ Ω_k , $k = 1, \dots, K_E$, области расчета Ω . Пример базисной функции $\Phi_i(x)$ показан на рис. 6. Он соответствует граничной базисной функции φ_i , заданной полиномом второго порядка (рис. 5). Представляет интерес дальнейшее рассмотрение вариантов МКСЭ при полиномиальной или сплайновой интерполяции.

Заметим, что сингулярности решения задачи в окрестностях отверстий учтены посредством базисной функции с нулевым индексом $\Phi_0(x)$ в каждом из СЭ. Остальные функции $\Phi_i(x)$, $i \neq 0$, при наличии отверстия в СЭ Ω_k обращаются в ноль на его границе согласно (3). Если в СЭ отверстия нет, то $\Phi_0(x) \equiv 0$.

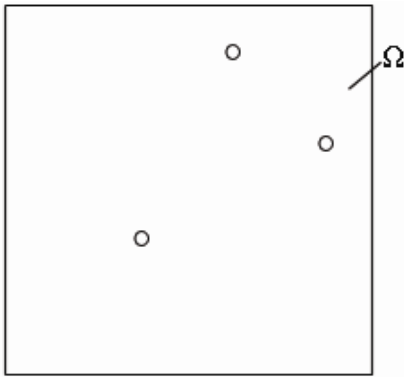


рис. 1

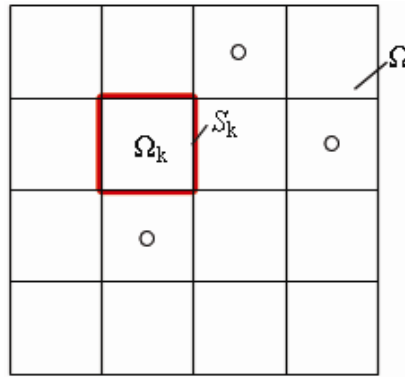


рис. 2

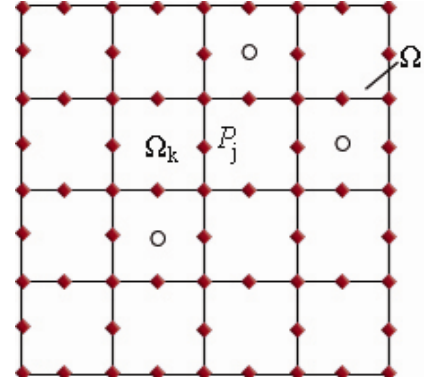


рис. 3

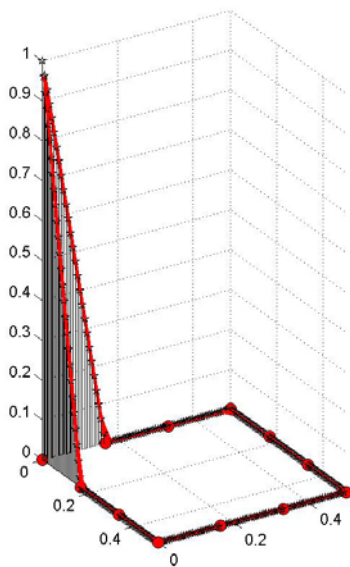


рис. 4

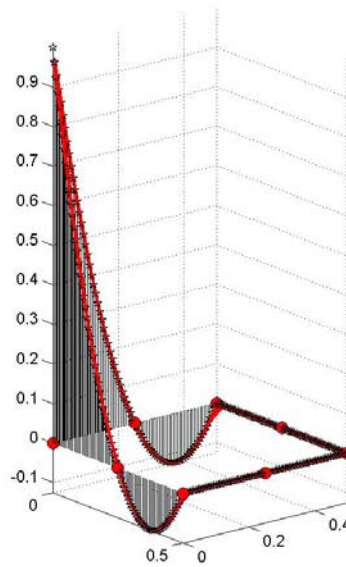


рис. 5

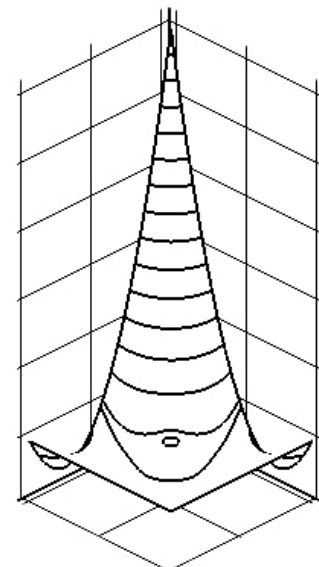


рис. 6

При помощи построенного базиса решение исходной задачи внутри каждого отдельного СЭ разыскивается в следующем виде:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x), \quad x \in \Omega_k. \quad (6)$$

Таким образом определяется *приближенное решение МКСЭ* $\bar{u}(x)$ во всей расчетной области $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$. При этом неизвестные значения a_i находятся с

помощью обычного метода Бубнова-Галеркина при выборе функций $\Phi_i(x)$ в качестве базисных и пробных [3–12].

В классическом случае эллиптических уравнений второго порядка при должных оговорках относительно гладкости границы, коэффициентов и граничных функций слабые решения принадлежат пространству Соболева $H^1(\Omega)$. Следы этих решений на границе $S = \bigcup_k S_k$ суперэлементного разбиения области принадлежат пространству Соболева $H^{1/2}(S)$ с полуцелым показателем гладкости [16; 18]. Выбор функции, аппроксимирующей след решения на границе разбиения в норме пространства $H^{1/2}(S)$, и применение МКСЭ приведут к приближенному решению, аппроксимирующему в $H^1(\Omega)$ точное решение.

В предыдущих работах исследовано влияние выбора метода аппроксимации на границе разбиения на результирующую точность расчетов метода. Получены теоретические (априорные) оценки погрешностей метода в зависимости от способа приближения [10–12]. Неясным остался вопрос о сходимости или расходимости ошибок производных сильного решения разного порядка. Такое исследование изначально затруднено особым “нестандартным” видом получаемого приближенного решения МКСЭ и его ограничениями по гладкости.

Данная работа посвящена теоретическому анализу МКСЭ Федоренко. В ней рассмотрена регулярность приближенного решения, получена его асимптотика в углах суперэлементного разбиения. Она представляет как отдельный интерес, так и служит для получения оценок погрешности производных различного порядка. Результаты получены на примере задачи (1) – (2).

2. Обозначения и определения

Будем предполагать наличие такой гладкости функции g в (2) и границы области $\partial\Omega$, которые достаточны для того, чтобы искомое решение принадлежало $H^R(\Omega)$ [16; 23]. Сохраним далее введенные обозначения: Ω – расчетная область (рис. 2), S_k – граница СЭ Ω_k , $S = \bigcup_k S_k$ – совокупность всех суперэле-

ментных границ, K_E – общее число СЭ в области, u – искомое и \bar{u} – приближенное решение МКСЭ.

Как правило, СЭ Ω_k является многоугольником, так что необходимо учитывать тот факт, что S_k принадлежит классу C^0 непрерывности. Будем рассматривать лишь случай, когда S_k – граница многоугольника либо граница, состоящая из конечного числа гладких кривых. В таком случае $S_k = \bigcup_l I_{kl}$, $l = 1, \dots, L$, где L – число сторон I_{kl} (или гладких частей границы) СЭ Ω_k . Полагаем, что все вершины углов границы СЭ направлены во внешность области, то есть раствор углов не превышает π . Рассмотрим варианты МКСЭ, использующие полиномиальную либо сплайн-интерполяцию на границах СЭ. В случае сплайн-интерполяции I_{kl} обозначают те отрезки разбиения суперэлементных границ, на каждом из которых интерполянт представляет собой полином (L – их число).

Определим объекты нашего рассмотрения.

Пространство всех полиномов порядка не выше ν на отрезке I_{kl} обозначим через $P_\nu(I_{kl})$. Введем $P_\nu(S) = \prod_{k,l} P_\nu(I_{kl})$ – пространство заданных на границе S полиномов порядка не выше ν на каждой из частей I_{kl} границы. Обозначим символом $P_\nu^N(S)$ *пространство всех сплайнов* порядка не выше ν , построенных на разбиении S на $(N-1)$ отрезков длины $|I_{kl}|/\nu$. При этом $(N-1) = L\nu K_E$. Полиномиальная интерполяция служит частным случаем интерполяции сплайнами, в которой $(N-1)/\nu$ – число отрезков I_{kl} на S , поэтому при её рассмотрении вариант полиномиальной граничной интерполяции МКСЭ отдельным образом не выделяется.

Аппроксимирующее пространство $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ МКСЭ – линейная оболочка, образованная всеми базисными функциями МКСЭ с граничной интерполяцией посредством сплайнов $P_\nu^N(S)$, т.е.

$$\bar{V}_\nu^N(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : -\Delta v = 0 \text{ в каждом из } \Omega_k \text{ и } \gamma_S^0 v = v|_S \in P_\nu^N(S) \right\}. \quad (7)$$

Здесь *след функции на S* определен равенством $\gamma_S^0 v = \left\{ \gamma_{S_k}^0 v \right\}_{k=1}^{K_E}$. Оператор взятия следа $\gamma_{S_k}^0$, заданный на $C^\infty(\bar{\Omega}_k)$ соотношением

$$\left(\gamma_{S_k}^0 u \right)(x) = \left(u|_{S_k} \right)(x), \quad x \in S_k, \quad (8)$$

непрерывно действует из пространства $H^1(\Omega_k)$ в $H^{1/2}(S_k)$ для всех $k = 1 \dots K_E$. При этом существует непрерывный оператор, обратный к $\gamma_{S_k}^0$ и действующий из $H^{1/2}(S_k)$ в $H^1(\Omega_k)$. Такой общий случай действия оператора $\gamma_{S_k}^0$ справедлив как для гладкой, так и для многоугольной или просто липшицевой границы S_k [16; 31]. Отметим, что определение $\bar{V}_v^N(\Omega)$ содержит условие

$$\gamma_S^0 v = \gamma_{S_k}^0 v = \gamma_{S_m}^0 v \quad \text{почти всюду на } S_k \cap S_m, \quad (9)$$

для всех $S_k \cap S_m \neq \emptyset$ и всех соседних СЭ $\Omega_k, \Omega_m \quad \forall k, m$. Это соотношение, очевидно, не всегда выполнено для пространства слабых решений задачи $H^1(\Omega)$ (см., например, [36]). Аппроксимирующее пространство МКСЭ содержит его как “главное условие”, накладываемое на все базисные функции. Соотношение (9) не включено в (7) для сохранения более компактной записи. Иногда, если это не вызовет недоразумений, мы будем использовать также символ γ^0 без обозначения множества, на котором определена область значений оператора взятия следа.

Аналогичным образом определено и *аппроксимирующее пространство $\bar{V}_v(\Omega)$ МКСЭ*, представляющее собой линейную оболочку, образованную базисными функциями МКСЭ с граничной интерполяцией посредством полиномов $P_v(S)$ порядка не выше v .

В определение аппроксимирующего пространства не входят условия совместности функций в узлах P_j СЭ вида:

$$\left(\gamma^0 v|_{I_{kl}} \right)(P_j) = \left(\gamma^0 v|_{I_{kt}} \right)(P_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

на соседних отрезках $I_{kl} \cap I_{kt} = P_j \neq 0$ границы $S \forall l, t = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, K_E$. Условие (10), как правило, в МКСЭ выполнено, поскольку введено в определение граничных базисных функций $\varphi_i(x)$ (см. (3)). Оно связано с расчетом базисных функций МКСЭ, являющихся решениями задач (4) – (5), и заданием интерполанта $\varphi_i(x)$ для них, непрерывного на всей границе $S_k = \bigcup_l I_{kl}$. Линейная оболочка таких базисных функций МКСЭ согласно определению и составляет аппроксимирующее пространство. Тем не менее, условие (10) можно ввести без ограничения общности метода, если непрерывность искомой функции в окрестностях узлов СЭ заведомо известна, а все особенности задач заключены строго внутри СЭ. В частности, всегда для сильного решения $u \in H^s(\Omega), s \geq 2$.

Отметим, что в определении (7) использован оператор Лапласа, определяющий гармоническую функцию в СЭ. Под *гармоничностью* некоторого слабого решения $u \in H^1(\Omega)$ в произвольной области Ω мы понимаем его удовлетворение уравнению Лапласа в следующей обобщенной постановке:

$$(-\Delta u, v)_{L_2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (11)$$

Далее как для слабого, так и для сильного решения продолжаем формально пользоваться кратким обозначением $-\Delta u = 0$.

Характерным свойством аппроксимации слабых решений МКСЭ является возможность рассмотрения задачи (1) – (2) не просто в энергетическом пространстве $H^1(\Omega)$, а в некотором его подпространстве, обозначаемом здесь $\mathcal{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Это пространство $\mathcal{H}^1(\Omega)$ снабжено дополнительным свойством гармоничности входящих в него функций в каждом из СЭ Ω_k по отдельности:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : -\Delta v(x) = 0, x \in \Omega_k, \text{ для всех } \Omega_k, k = 1, \dots, K_E \right\}.$$

Аппроксимирующее пространство МКСЭ (7) является подпространством данного пространства. Определение $\mathcal{H}^1(\Omega)$ включает в себя условие (9):

$$\gamma_S^0 v = \gamma_{S_k}^0 v = \gamma_{S_m}^0 v \text{ почти всюду на } S_k \cap S_m, \quad (12)$$

для всех $S_k \cap S_m \neq \emptyset$ и всех соседних СЭ $\Omega_k, \Omega_m \forall k, m$. Перепишем его эквивалентно также в виде:

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ v : \gamma^0 v \in H^{1/2}(S), -\Delta v(x) = 0, x \in \Omega_k, \text{ для всех } \Omega_k, \text{ что} \right. \\ \left. \gamma_{S^0}^0 v = \gamma_{S_k^0}^0 v = \gamma_{S_m^0}^0 v \text{ почти всюду на } S_k \cap S_m \neq \emptyset, k, m = 1, \dots, K_E \right\}. \quad (13)$$

Здесь и далее везде мы будем использовать оператор следа γ^0 , поэтому сделаем несколько замечаний о смысле данного определения.

Глобальное задание следа на границе S_k мы связываем с его стандартным определением. На пространстве $C^\infty(\Omega)$ оператор следа $\gamma_{S_k^0}^0$ задан формулой (8). Если бы граница S_k обладала бесконечной гладкостью, то было бы выполнено соотношение $\gamma^0 : H^s(\Omega_k) \rightarrow H^{s-1/2}(S_k)$ при любом значении $s > 1/2$. Для произвольной замкнутой липшицевой области Ω_k оператор следа γ^0 действует из пространства $H^s(\Omega_k)$ в $H^{s-1/2}(S_k)$, однозначно определен, ограничен и имеет ограниченный обратный только при выполнении условия $1/2 < s < 3/2$. При этом, если $s = 3/2$, то область значений шире, чем $H^{s-1/2}(S_k)$, см. [31; 30; 34; 15; 27]. В случае $s \geq 3/2$ для шкалы пространств Соболева в липшицевой области известно немного (то же и для более общего случая пространств Бесова), но, если $s > 3/2$, то γ^0 действует из $H^s(\Omega_k)$ в $H^1(S_k)$ [28; 14]. Кроме того, гармонические функции обладают дополнительной гладкостью, и имеет смысл рассмотрение случая пространств Бесова [29; 31].

Учитывая тот факт, что Ω_k – многоугольная область с границей, гладкой вне стратифицированных особенностей, далее возможно “улучшить” этот результат, вводя определение следа локально. Оператор следа $\gamma_{I_{kl}}^0$ определен только на каждой из L гладких частей (ребер) I_{kl} границы S_k , $l = 1, \dots, L$. *Локальное* определение следа γ^0 [26; 20] мы связываем именно с таким заданием, а именно: $\gamma_{S_k^0}^0 = \left(\gamma_{I_{kl}}^0 \right)_{l=1}^L$. Тогда локальный оператор $\gamma_{S_k^0}^0$ при $[s - 1/2] \geq 1$ непрерыв-

вен и действует из $H^s(\Omega_k)$ в $\prod_{l=1}^L H^{s-1/2}(I_{kl})$. Для следа на всей S : $\gamma_S^0 = (\gamma_{S_k}^0)_{k=1}^{K_E}$.

Обозначение γ^0 в зависимости от случая мы далее не меняем. Локальный след, очевидно, совпадает с глобальным, если последний корректно определен. При действии оператора γ^0 на функцию из пространства Соболева с произвольным показателем гладкости $s \geq 3/2$ считаем оператор следа локальным. Это необходимо учитывать, например, при использовании граничных интегральных уравнений и работе с ними. Локальные следы более высокого порядка также обладают общими свойствами на многоугольной границе, см., напр., [26]. В дальнейшем мы используем запись вида $\gamma^0 v \in H^s(S)$, которая является условным обозначением, и $H^s(S) = \prod_{k,l} H^s(I_{kl})$.

Нам понадобятся следующие пространства, обозначаемые через $\mathbf{H}^R(\Omega)$:

$$\mathbf{H}^R(\Omega) = \left\{ v: \gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S), -\Delta v(x) = 0, x \in \Omega_k, \text{ для всех } \Omega_k, k = 1, \dots, K_E \right\}, \quad (14)$$

для любых $R \in \mathbb{R}^1$, $R \geq 1$. При $R=1$ имеем определение (13) пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$. В определение $\mathbf{H}^R(\Omega)$ включено и условие (12). Рост показателя R характеризует увеличение гладкости функций $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S) = \prod_{k,l} H^{R-1/2}(I_{kl})$ из

этого пространства на всех гладких частях суперэлементных границ. Поскольку для следа любой функции v из пространства $\mathbf{H}^R(\Omega)$ справедливо включение $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S)$, то выполнено включение:

$$H^R(\Omega) \subseteq \mathbf{H}^R(\Omega). \quad (15)$$

Обратное вложение при $R \neq 1$ на границе класса C^0 не имеет места. Кроме того, любая функция $v \in \mathbf{H}^R(\Omega)$ однозначно определена своим следом $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S)$ на S (см. напр., [32]).

3. Локальная гладкость приближенного решения МКСЭ

Если при аппроксимации решения в пространстве $H^1(\Omega)$ для ошибки решения, очевидно, справедлива эквивалентность $(u - \bar{u}) \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow (u - \bar{u}) \in \prod_k H^1(\Omega_k) \Leftrightarrow (u - \bar{u}) \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, то в пространствах более высокой гладкости $H^M(\Omega)$, $M > 1$, и многоугольной границей разбиения S подобное несправедливо. Более того, показатель гладкости произвольной функции $u \in \mathcal{H}^R(\Omega)$ на Ω_k , имеющей гладкие следы на частях негладкой границы S_k , ограничен сверху [13]. Это относится к регулярности решения задачи Дирихле в отдельном СЭ Ω_k [32; 33; 24]. Ограничение по гладкости может оказаться достаточно жестким и связано с локальным поведением решения в суперэлементных углах. Показатель гладкости зависит как от гладкости правой части граничного условия на отдельных сторонах границы S_k , их совместности в вершинах углов, так и от величины раствора углов, кривизны их сторон и вида исходного уравнения.

3.1. Свойства гладкости приближенного решения МКСЭ

Пусть Λ – один из углов СЭ с границей $\partial\Lambda$ раствора α , $0 < \alpha < \pi$; P – его вершина; $Pr\theta$ – полярная система координат, связанная с Λ . В данном пункте мы рассмотрим преимущественно отдельный угол Λ , полученные таким образом результаты обобщаются на всю расчетную область.

Помимо самого приближенного решения \bar{u} исследуем также его интерполянт $\pi_v^N(u)$. Отметим, что все полученные здесь результаты для $\pi_v^N(u)$ справедливы и для приближенного решения \bar{u} , а коэффициенты в его разложении, указанные через интерполянт $\pi_v^N(u)$, должны быть заменены аналогичными, заданными через приближенное решение \bar{u} .

Интерполянт $\pi_v^N(u)$ МКСЭ в области СЭ Ω_k является решением задачи:

$$-\Delta \pi_v^N(u) = 0 \text{ в } \Omega_k, \quad (16)$$

$$\gamma^0 \pi_v^N(u) = \bar{\varphi} \text{ на } S_k, \quad (17)$$

где $\pi_v^N(u) \in \bar{V}_v^N(\Omega_k)$, $\bar{\varphi} = \gamma^0 \pi_v^N(u) \in P_v^N(S_k)$ – граничный сплайн-интерполянт решения. Дальнейшие выкладки мы проводим в предположении, что следы совместны для всех углов Λ в СЭ Ω_k так, что

$$\left(\gamma^0 \pi_v^N(u)\Big|_{\partial\Lambda^1}\right)(P) = \left(\gamma^0 \pi_v^N(u)\Big|_{\partial\Lambda^2}\right)(P),$$

и аналогично для приближенного решения:

$$\left(\gamma^0 \bar{u}\Big|_{\partial\Lambda^1}\right)(P) = \left(\gamma^0 \bar{u}\Big|_{\partial\Lambda^2}\right)(P), \quad (18)$$

где $\partial\Lambda^1$ и $\partial\Lambda^2$ – отдельные стороны угла Λ , составляющие его границу $\partial\Lambda$ и пересекающиеся в точке P .

Утверждение 1. Пусть граничные базисные функции МКСЭ в некоторой окрестности угла Λ СЭ Ω_k , на его границах $\partial\Lambda_1$ и $\partial\Lambda_2$, – полиномы порядка не выше ν . Интерполянт приближенного решения $\pi_v^N(u)$ МКСЭ в этой окрестности представим в виде:

$$\pi_v^N(u) = \begin{cases} \sum_{q=0}^{\nu} r^q \cdot (\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{b}_q \sin(q\theta)), & \text{если } \pi/\alpha \notin \{b \in Z, b \leq \nu\}, \\ \sum_{\substack{q=j\pi/\alpha \\ 0 \leq q \leq \nu}} \left[r^q \cdot (\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{c}_q \theta \cos(q\theta)) + r^q \ln r \cdot \bar{c}_q \sin(q\theta) \right] + \\ + \sum_{\substack{q \neq j\pi/\alpha \\ 0 \leq q \leq \nu}} r^q \cdot (\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{b}_q \sin(q\theta)), & \text{если } j\pi/\alpha \in \{b \in Z, b \leq \nu\}, \\ \text{при любом } j = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где

$$\bar{a}_q = A_q^2, \quad \bar{b}_q \cdot \sin(q\alpha) = (A_q^1 - A_q^2 \cos(q\alpha)), \quad \bar{c}_q = \frac{1}{\alpha} \left(A_q^1 - \frac{1}{\cos(q\alpha)} A_q^2 \right),$$

A_q^1 , A_q^2 – коэффициенты решения (граничного полинома $\bar{\varphi}$) на границах $\partial\Lambda_1$, $\partial\Lambda_2$ перед r^q , $q = 0, \dots, \nu$. Аналогичное утверждение справедливо и для приближенного решения \bar{u} .

Доказательство. Будем искать решение задачи (16) – (17) в угле Λ СЭ

как сумму решений $\pi_\nu^N(u) = \sum_{B=0}^\nu \bar{u}^B$ задач следующего вида:

$$-\Delta \bar{u}^B = 0 \text{ в } \Lambda, \quad (19)$$

$$\bar{u}^B = A_B \cdot r^B \text{ на } \partial\Lambda, \quad (20)$$

где A_B – константы, $B \in \{b \in \mathbb{Z}, b \leq \nu\} = 0, 1, 2, \dots, \nu$. При этом $\bar{\varphi}(r) = \sum_{B=0}^\nu A_B \cdot r^B$ на

$\partial\Lambda$. Согласно [17, с. 47] асимптотика этой задачи в угле Λ такова:

$$\bar{u}^B = \begin{cases} r^B \cdot (w_{0,B}(\theta) + w_{1,B}(\theta) \cdot \ln r), & \text{если } B = j\pi/\alpha, \\ r^B \cdot w_{2,B}(\theta), & \text{если } B \neq j\pi/\alpha, \text{ где } j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (21)$$

Здесь коэффициенты разложения по переменной r (функции $w_{1,B}(\theta)$, $w_{2,B}(\theta)$ и $w_{0,B}(\theta)$) бесконечно дифференцируемы по $\theta^{(*)}$.

Получим представление интерполянта приближенного решения:

$$\pi_\nu^N(u) = \begin{cases} \sum_{\substack{q=j\pi/\alpha \\ 0 \leq q \leq \nu}} [r^q \cdot w_{0,q}(\theta) + r^q \ln r \cdot w_{1,q}(\theta)] + \\ + \sum_{\substack{q \neq j\pi/\alpha \\ 0 \leq q \leq \nu}} r^q \cdot w_{2,q}(\theta), & \text{если } j\pi/\alpha \in \{b \in \square, b \leq \nu\}, \\ \sum_{q=0}^\nu r^q \cdot w_{2,q}(\theta), & \text{если } j\pi/\alpha \notin \{b \in \square, b \leq \nu\}, \text{ при любом } j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (22)$$

где $w_{i,q}(\theta) \in C^\infty(0, \alpha) \quad \forall i = 1, 2, 3$.

Уточним результат, рассмотрев константные коэффициенты разложений. Они представляют интерес для дальнейшего рассмотрения. Выбранные полиномиальные граничные значения бесконечно дифференцируемы в окрестности угла. Решение задачи (21) согласно результату [17, с. 50] может быть найдено в виде:

(*) Коэффициенты разложений имеют вид $\theta^k \cos(a\theta + b)$, $\theta^k \sin(a\theta + b)$ для любого линейного эллиптического уравнения [25].

$$\bar{u}^B = \begin{cases} r^B \cdot (\bar{a}_B \cos(B\theta) + \bar{c}_B \theta \cos(B\theta)) + r^B \ln r \cdot (\bar{c}_B \sin(B\theta)), & \text{если } B = j\pi / \alpha, \\ r^B \cdot (\bar{a}_B \cos(B\theta) + \bar{b}_B \sin(B\theta)), & \text{если } B \neq j\pi / \alpha, \text{ где } j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (23)$$

Находим коэффициенты \bar{a}_B , \bar{b}_B , \bar{c}_B , подставляя (23) в задачу (20). Тогда

$$\bar{a}_B = A_B^2, \quad \bar{b}_B \cdot \sin(B\alpha) = (A_B^1 - A_B^2 \cos(B\alpha)), \quad \bar{c}_B = \frac{1}{\alpha} \left(A_B^1 - \frac{1}{\cos(B\alpha)} A_B^2 \right), \quad (24)$$

где A_B^1 , A_B^2 – коэффициенты граничных значений A_B (20) для различных сторон угла $\partial\Lambda^1$ и $\partial\Lambda^2$ соответственно. Граница $\partial\Lambda^1$ соответствует значениям угла $\theta = \alpha$, и $\partial\Lambda^2$ – значению $\theta = 0$.

Отметим, что в первой сумме выражения (22) $q \neq 0$. Суммирование (23) по всем B дает разложение приближенного решения \bar{u} в области Λ (где символ B заменен на q):

$$\pi_\nu^N(u) = \begin{cases} \sum_{\substack{q=j\pi/\alpha \\ 0 < q \leq \nu}} \left[r^q \cdot (\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{c}_q \theta \cos(q\theta)) + r^q \ln r \cdot \bar{c}_q \sin(q\theta) \right] + \\ + \sum_{\substack{q \neq j\pi/\alpha \\ 0 \leq q \leq \nu}} r^q \cdot (\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{b}_q \sin(q\theta)), & \text{если } j\pi/\alpha \in \{b \in \square, b \leq \nu\}, \\ \sum_{q=0}^{\nu} r^q \cdot (\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{b}_q \sin(q\theta)), & \text{если } \pi/\alpha \notin \{b \in \square, b \leq \nu\}, \\ \text{при любом } j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (25)$$

с коэффициентами (24), $A_0^1 = A_0^2$, $c_0 = 0$. Выпишем слагаемое при $q = 0$:

$$r^q \cdot (\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{b}_q \sin(q\theta)) = \bar{a}_0 \quad (26)$$

в обоих случаях принадлежности π/α . #

Замечание. Из проведенного рассмотрения следует также: $\pi_\nu^N(u) = O(r^{\pi/\alpha} \ln r)$, $\bar{u} = O(r^{\pi/\alpha} \ln r)$ при $\pi/\alpha \in \{b \in Z, b \leq \nu\}$, $\pi/\alpha \leq \nu$; в противном случае решение $\pi_\nu^N(u)$ и \bar{u} ограничено.

Пример. Для угла квадратного СЭ значение $\alpha = \pi/2$. Приближенное решение МКСЭ \bar{u} , а также его интерполянт в некоторой окрестности углов СЭ представимы в виде следующей конечной суммы:

при линейной интерполяции граничного решения

$$\bar{u} = w_{2,0}(\theta) + r \cdot w_{2,1}(\theta);$$

при любой полиномиальной интерполяции порядка выше единицы:

$$\bar{u} = w_{2,0}(\theta) + \sum_{\substack{q=2,4,6,\dots \\ q \leq \nu}} \left[r^q \cdot w_{0,q}(\theta) + r^q \ln r \cdot w_{1,q}(\theta) \right] + \sum_{\substack{q=1,3,5,\dots \\ q \leq \nu}} r^q \cdot w_{2,q}(\theta). \#$$

Выражение (25) определяет гладкость интерполянта приближенного решения $\pi_\nu^N(u)$ МКСЭ в соболевских пространствах. Если $\pi/\alpha \in \{b \in Z, b \leq \nu\}$ и $\pi/\alpha \leq \nu$, то $\pi_\nu^N(u)$ нерегулярна по отношению к граничному условию так, что $\pi_\nu^N(u) \in H^{\pi/\alpha}(\Omega_k)$ для произвольных $\bar{a}_q, \bar{b}_q, \bar{c}_q$. В противном случае решение в угле Λ обладает бесконечной гладкостью, поэтому приближенное решение в СЭ Ω_k имеет максимальную гладкость по отношению к граничному условию на S_k . То же относится к приближенному решению \bar{u} МКСЭ.

Рассмотрим пространство $\mathbf{H}^R(\Omega)$. Согласно (14) в его определение включено условие (12). Мы вводим ещё одно важное предположение о совместности следов в узлах P_i СЭ, а именно: $\forall u \in \tilde{\mathbf{H}}^R(\Omega)$ считаем выполненным условие

$$\left(\gamma^0 u \Big|_{\partial\Lambda^1} \right) (P_i) = \left(\gamma^0 u \Big|_{\partial\Lambda^2} \right) (P_i) \quad \forall P_i. \quad (27)$$

Считаем также, что все углы СЭ направлены во внешность их области: $0 < \alpha < \pi$. Пространство $\mathbf{H}^R(\Omega)$, дополненное условием совместности следов (27), и условием $0 < \alpha < \pi$ на раствор углов, обозначим $\tilde{\mathbf{H}}^R(\Omega)$.

Утверждение 2. *Приближенное решение МКСЭ из пространства $\bar{u} \in \tilde{\mathbf{H}}^R(\Omega)$ принадлежит соболевскому пространству $\bar{u} \in H^2(\Omega_k)$ в пределах каждого СЭ Ω_k . То же верно для интерполянта $\pi_\nu^N(u)$.*

Доказательство. Предыдущие выкладки показывают, что $\bar{u} \in H^2(\Omega_k)$ в области СЭ Ω_k , если $\bar{u} \in \tilde{\mathbf{H}}^R(\Omega_k)$. Нерегулярный случай $\bar{u} = O(r^{\pi/\alpha} \ln r)$ при минимальном значении π/α из множества $\{b \in Z, b \leq \nu\}$ дает $\bar{u} = O(r^2 \ln r)$. Значит, выполнено $\bar{u} \in H^2(\Omega)$. Аналогично для $\pi_\nu^N(u)$. Заметим, что для дальнейших выкладок это не принципиально, но упрощает некоторые записи. #

3.2. Асимптотическое разложение функции класса $H^R(\Lambda)$

Приведем некоторые известные сведения об асимптотическом разложении некоторой функции в многоугольном СЭ. Совместно с пунктом 0 эта информация может быть употреблена для получения ряда оценок. Кроме того, она дает представление и о других возможных вариантах задания граничных базисных функций, не указанных ранее и характеризующихся любой гладкостью по шкале Соболева. Как мы уже отмечали, показатель гладкости такой функции в СЭ всегда ограничен сверху. Это связано с гладкостью C^0 его границы. Получим асимптотическое разложение в окрестностях угловых точек.

Произвольное решение уравнения Лапласа с граничными данными $\gamma^0 u$ в угле Λ СЭ Ω_k (в некоторой окрестности угловой точки P) разложимо в сумму гладкой и сингулярной частей [24; 25; 35]:

$$u(x) = u_{reg}(x) + u_{sing}(x), \quad x \in \Lambda, \quad (28)$$

$$u_{sing} = \sum_{q=0}^Q c_q r^\lambda \log^q r \cdot \varphi_q(\theta), \quad (29)$$

где u_{reg} обладает максимальной гладкостью, порожденной гладкостью функции $\gamma^0 u$ граничного условия, а наличие $u_{sing}(x)$ обусловлено видом области Λ . Здесь $Pr\theta$ – локальная система координат в угле Λ ; набор параметров λ определен некоторыми характеристическими числами, связанными с уравнением, и может быть дополнен конечным числом положительных действительных параметров $\lambda \in R, \lambda > 0$; причем и в том, и в другом случае диапазон λ ограничен сверху гладкостью граничных данных; Q – конечное число; c_q – константы. Рассматриваемое нами эллиптическое уравнение (1) не содержит членов порядка меньше максимального. Кроме того, границы I_{kl} СЭ в некоторой окрестности каждого из углов Λ считаем прямыми линиями.

Классическим способом определения регулярности решения линейного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами является метод

В.А. Кондратьева^(*), использующий преобразование Меллина [21] исходного уравнения в угле Λ в задачу на отрезке $(\lambda^2 + \partial^2 / \partial \theta^2) \hat{u}(\lambda, \theta) = 0$, $[0, \alpha] \subset \mathbb{R}^1$, \hat{u} – изображение. Выписанное уравнение на собственные значения λ можно получить и определенной заменой переменных, преобразовывающей задачу в угле в задачу на некоторой простой области, например, полосе [17], полупространстве [33] в случае уравнения Лапласа. Несложно определить его решение как решение задачи Штурма-Лиувилля. Оно имеет вид: $\hat{u}(\lambda, \theta) = \text{const} \cdot \sin(\lambda \theta)$, $\lambda = k\pi / \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$. Обратное преобразование Меллина даст разложение решения: $u = \sum_k c_k r^{k\pi/\alpha} \varphi_k(\theta)$, где $\lambda = k\pi / \alpha$ принадлежит конечному промежутку, $k = 1, 2, \dots$

В случае уравнения Лапласа коэффициенты λ разложения (29) включают в себя конечный ряд из полученных характеристических чисел $\lambda = k\pi / \alpha$ для $k = 1, 2, \dots$ [25; 32].

Наличие неоднородных граничных условий на $\partial\Lambda$ приводит к возникновению дополнительных слагаемых в таком разложении, гладкость которых измеряется в пространствах Соболева с весом r^β [35]. Для определения их полной асимптотики и регулярности в рамках шкалы “обыкновенных” пространств Соболева требуется дополнительное исследование. Например, полиномиальная правая часть в угле раствора $\alpha = \pi/2$ (см. пункт 0) приводит к разложению с порядком $O(r^2 \ln r)$. Величина $r^2 \ln r \in H^2(\Omega)$ регулярна при рассмотрении пространства с показателем гладкости $M = 2$, она регулярна также и для некоторых пространств Соболева с весом. При работе в шкале соболевских пространств $H^M(\Omega)$, $M > 2$, её уже необходимо учитывать как нерегулярную часть. Отметим, что шкала весовых пространств “с однородной нормой”, воз-

^(*) Кондратьев В.А. *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками* // Труды московского математического общества, т. 16, 1967, с. 209 – 292.

никающих при использовании метода Кондратьева, не имеет пересечений со шкалой пространств Соболева $H^M(\Omega)$ [32]. Мы ее не используем.

Нас интересует множество функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа в областях Ω_k , условиям (12) и (27) со следами класса $H^{R-1/2}(S)$, $R > 1$. Ранее оно было обозначено через $\tilde{H}^R(\Omega)$. Вообще говоря, пространство $\tilde{H}^R(\Lambda)$ в угле Λ содержит в себе набор весовых пространств “с неоднородной нормой” $W_{2,\beta}^l(\Lambda)$, см. [32], характеризующийся индексами β , $l \in Z$ определенного диапазона. Уточнение асимптотики выражения (28) – (29) со следами из $\gamma^0 u \in H^{R-1/2}(\partial\Lambda_i)$, $R > 1$, может быть выписано согласно [32, p.p. 284, 300]. А именно, в угле Λ справедливо представление:

$$u = p_{R-s-1}(u) + \sum_{(k\pi/\alpha) \in (-\beta+l-1; R-1)} r^{k\pi/\alpha} \varphi_k^{(1)}(\theta, \log r) + \sum_{k=0}^{R-2} r^k \varphi_k^{(2)}(\theta, \log r) + u_{reg}(r, \theta) + (Kh)(r)r^{R-1}p(\theta, \log r), \quad (30)$$

где $k \in Z$, $k\pi/\alpha \neq -\beta+l-1$; $\beta \neq 0, 1, 2, \dots, R-1$; $R > l - \beta$; $s-1 < \beta < s$ для некоторого $s \in R$. Слагаемое $p_{R-s-1}(u)$ является полиномом от функции u порядка не выше $R-s-1$. Функции $\varphi_k^{(1)}(\theta, \log r)$, $\varphi_k^{(2)}(\theta, \log r)$, $p(\theta, \log r)$ – полиномы от переменной $\log r$ с коэффициентами (зависящими от θ) класса $C^\infty(\Lambda)$. Функция $u_{reg}(r, \theta) \in H^R(\Lambda)$ обладает максимальной гладкостью по отношению к заданному граничному условию $\gamma_{\partial\Lambda}^0 u \in H^{R-1/2}(\partial\Lambda \setminus P)$. Функция $(Kh)(r)$ действует в пространство $W_{2,l-1/2}^l(R_+) \forall l \in R$, $l > 1$. Из общих теорем вложения для данных весовых пространств (напр., [26]) следует, что $W_{2,l-1/2}^l(R_+) \subset W_{2,0}^l(R_+) = H^l(R_+)$ для $2t \leq s-1/2$. При этом для функции u при $\beta \leq 0$ справедливо условие $u \in W_{2,\beta}^l(\Lambda) \subseteq W_{2,0}^l(\Lambda) = H^l(\Lambda)$.

Такое разложение достаточно громоздко, но содержит все необходимые нам факты, связанные с асимптотикой $u \in \tilde{H}^R(\Lambda)$ в угле СЭ. Подчеркнем, что

вид разложения (30) является общим, его коэффициенты могут зависеть от раствора угла [33], величины R , граничных условий [37] и т.п.

Заметим, что для $R \geq 3$, асимптотика содержит слагаемое $r\varphi_1^{(2)}(\theta, \log r) = O(r \log r)$, его гладкость не выше $u \in H^1(\Lambda)$. Для $R < 3$ в общем случае для решения справедливо соотношение $u = O(r^{\pi/\alpha} \log r)$. При этом $u \in H^{[\pi/\alpha]}(\Lambda)$, где $[\cdot]$ – обозначение целой части числа. Если $R = 2$, то первая сумма содержит слагаемые только в случае угла $\alpha > \pi$.

Отсюда для пространства $\tilde{H}^R(\Omega)$ следует вложение

$$\tilde{H}^R(\Lambda) \subseteq H^{[\pi/\alpha]}(\Lambda). \quad (31)$$

Напомним, что из общего определения выполнено вложение вида

$$H^R(\Omega) \subseteq \tilde{H}^R(\Omega), \quad R > 1. \quad (32)$$

Отметим, что достаточно хорошо известны результаты и оценки, связанные с сильным решением задачи Дирихле $u \in H^2(\Omega)$ в многоугольной области Ω_k (см. [22; 23]). При этом достаточно легко заметить, что все соотношения в данных работах полностью согласуются с выписанным разложением (30). Мы не используем данные результаты, поскольку нас интересует весь диапазон возможной гладкости. Используем асимптотику (30) либо её более общий вид (29). Последующие рассуждения относятся к уточнению таких оценок, что не представляется возможным, оставаясь лишь в рамках шкалы $H^R(\Omega)$.

Введем ещё одно определение. *Оператор следа m -го порядка γ^m* в пространстве $C^\infty(\bar{\Omega}_k)$ задан соотношением

$$(\gamma^m u)(x) = \left(\frac{\partial^m u}{\partial n^m} \Big|_{S_k} \right) (x), \quad x \in S_k, \quad (33)$$

где n – внешняя единичная нормаль к границе S_k , $m \in \mathbb{Z}$. Оператор γ^m действует из $H^R(\Omega_k)$ в $H^{R-m-1/2}(S_k)$ для $R-1 \geq m$, и допускает “обычное” расширение в слабом смысле, например, $\gamma^1: H^{1/2}(S_k) \rightarrow H^{-1/2}(S_k)$ для $m = 1$.

4. Оценки решения по шкале $H^M(\Omega)$

Пусть задача (1) – (2) обладает гладким решением $u \in H^R(\Omega)$, $R > 1$. Рассмотрим вопрос об аппроксимации первых производных $\nabla u \in H^{R-1}(\Omega)$, как и ранее, в норме пространства $H^1(\Omega)$. Из того факта, что

$$\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

следует, что нам нужны оценки погрешностей решения u в норме пространства $H^2(\Omega)$. Обобщая на произвольный порядок производных $(M-1)$, $1 < M < R$, $M \in Z$, можно исследовать поведение погрешностей решения u в нормах пространств $H^M(\Omega)$ и, следовательно, определяя свойства МКСЭ о приближении производных порядка $(M-1)$ в норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$.

Рассмотрим пример $M = 2$. Из гармоничности градиентов искомого и приближенного решений имеем

$$\|\nabla(u - \bar{u})\|_{H^1(\Omega)} \square \sum_k \|\gamma^0 \nabla(u - \bar{u})\|_{H^{1/2}(S_k)}, \quad (34)$$

где, вообще говоря, $\nabla(u - \bar{u}) \notin H^1(\Omega)$, так как условие совместности для градиентов не выполнено. Пункт 0 показывает, что $\bar{u} \in H^2(\Omega_k)$ в области СЭ Ω_k , если $\bar{u} \in \tilde{H}^R(\Omega_k)$, поэтому запись ошибки решения в норме $H^2(\Omega)$ корректна.

Запишем с использованием стандартных преобразований:

$$\|\gamma^0 \nabla(u - \bar{u})\|_{H^{1/2}(S_k)} \square \sum_{l=1}^L \left[\|d\gamma^0 u / d\tau_l - d\gamma^0 \bar{u} / d\tau_l\|_{H^{1/2}(I_{kl})} + \|\gamma_l^1 u - \gamma_l^1 \bar{u}\|_{H^{1/2}(I_{kl})} \right], \quad (35)$$

где $d/d\tau_l$ – производная по направлению касательного вектора τ_l на отрезке I_{kl} ; γ_l^1 – след первого порядка $\gamma_{I_{kl}}^1$ на I_{kl} , см. (33).

Если бы выражение для ошибки $(\gamma_l^1 u - \gamma_l^1 \bar{u})$ допускало принадлежность классу $H^r(I)$, $r = R - 1/2$, $r > 1/2$, на отдельном отрезке I_{kl} , то стала бы возможной запись неравенства $\|\gamma_l^1 u - \gamma_l^1 \bar{u}\|_{H^{1/2}(I_{kl})} \leq C \cdot \|\gamma_l^1 u - \gamma_l^1 \bar{u}\|_{H^r(I_{kl})}$ как следствие непрерывного вложения соответствующих пространств. Тогда слагаемые под знаком нормы в правой части выражения (35) оценивались бы согласно “стан-

дартным” выкладкам [10–12]. Заметим, что здесь нас интересуют не только априорные оценки погрешностей производных, но и сама сходимость производных приближенного решения МКСЭ к точному решению.

Ясно, что $\gamma_i^1 u \in H^{R-3/2}(I_{kl})$. Для следа первого порядка (нормальной производной) приближенного решения $\gamma_i^1 \bar{u}$ на отрезке I_{kl} нет точного аналитического выражения, оно известно лишь для следа $\gamma^0 \bar{u}$. Можно определить регулярность $\gamma_i^1 \bar{u}$ лишь в окрестности узлов P_i , благодаря пункту 0.

Рассмотрим далее угол Λ , поэтому через I будем обозначать произвольную его сторону $\partial\Lambda_i$; как и ранее, P – вершина угла Λ .

Несложно показать, что на границе угла $\partial\Lambda$ справедливо равенство:

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right|_I = \frac{1}{r} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right|_I.$$

Тогда из разложения (25) для интересующего диапазона $R > 2$ получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right|_I &= \sum_{q=1}^{\nu} r^{q-1} \cdot (\bar{b}_q q \cos(q\theta) + \bar{a}_q q \sin(q\theta)), \quad \theta = \{0, \alpha\}, \text{ если } \pi/\alpha \notin \{b \in \square, b \leq \nu\}; \\ \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right|_I &= \sum_{\substack{q=j\pi/\alpha \\ 1 \leq q \leq \nu}} \left[r^{q-1} \cdot (-\bar{a}_q q \sin(q\theta) - \bar{c}_q q \theta \sin(q\theta) + \bar{c}_q \cos(q\theta)) + r^{q-1} \ln r \cdot \bar{c}_q q \cos(q\theta) \right] + \\ &+ \sum_{\substack{q \neq j\pi/\alpha \\ 1 \leq q \leq \nu}} r^{q-1} \cdot (\bar{b}_q q \cos(q\theta) + \bar{a}_q q \sin(q\theta)), \quad \theta = \{0, \alpha\}, \text{ если } j\pi/\alpha \in \{b \in \square, b \leq \nu\}, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отметим, что первым слагаемым, характерным для каждого из разложений и имеющим минимальный показатель r (либо $\ln r$) является величина $r^{q-1} \cdot (\bar{b}_q q \cos(q\theta) + \bar{a}_q q \sin(q\theta)) = (\bar{b}_1 \cos(\theta) + \bar{a}_1 \sin(\theta))$ при $q = 1$, зависящая от переменной θ . Здесь также $j\pi/\alpha \neq 1$, поскольку $0 < \alpha < \pi$.

Перепишем полученные выражения, подставляя $\theta = \{0, \alpha\}$ во вторую сумму^(*):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Big|_I = \begin{cases} \sum_{q=1}^{\nu} r^{q-1} \cdot (\bar{b}_q q \cos(q\theta) + \bar{a}_q q \sin(q\theta)), \theta = \{0, \alpha\}, \text{ если } \pi/\alpha \notin \{b \in \mathbb{Z}, b \leq \nu\}, \\ \sum_{\substack{q=j\pi/\alpha \\ 1 < q \leq \nu}} \left[r^{q-1} \cdot \bar{c}_q \cos(q\theta) + r^{q-1} \ln r \cdot \bar{c}_q q \cos(q\theta) \right] + \\ + \sum_{\substack{q \neq j\pi/\alpha \\ 1 \leq q \leq \nu}} r^{q-1} \cdot (\bar{b}_q q \cos(q\theta) + \bar{a}_q q \sin(q\theta)), \theta = \{0, \alpha\}, \text{ если } j\pi/\alpha \in \{b \in \mathbb{Z}, b \leq \nu\}, \\ \text{при любом } j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Отсюда ясно, что в окрестности вершины P произвольного угла СЭ Λ раствора α справедливы соотношения: $\partial \bar{u} / \partial n|_I = O(r^{[\pi/\alpha]-1} \ln r)$ и $\partial \bar{u} / \partial n|_I \in H^{[\pi/\alpha]-1}(I)$ для $\pi/\alpha \in \{b \in \mathbb{Z}, b \leq \nu\}$ или производная $\partial \bar{u} / \partial n|_I$ регулярна, если $\pi/\alpha \notin \{b \in \mathbb{Z}, b \leq \nu\}$.

Более того, свойства гладкости $\gamma^1 \bar{u} = \partial \bar{u} / \partial n|_I$ можно определить, воспользовавшись следующими результатами.

Утверждение 3 [26]. Элемент $\{G^1, G^2\} = \{(g^{0,1}, g^{1,1}), (g^{0,2}, g^{1,2})\}$ из пространства $H^{s-1/2}(\Lambda) \times H^{s-3/2}(\Lambda)$ является образом некоторой функции $u \in H^s(\Lambda)$ в угле Λ раствора α с вершиной P в результате действия согласно (33) оператора $\{\gamma^0, \gamma^1\}$, тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$g^{0,1}(P) = g^{0,2}(P), \quad (36)$$

$$\cos \alpha \cdot \frac{d}{d\tau_1} g^{0,1}(P) - \sin \alpha \cdot g^{1,1}(P) = \frac{d}{d\tau_2} g^{0,2}(P), \quad (37)$$

$$\sin \alpha \cdot \frac{d}{d\tau_1} g^{0,1}(P) + \cos \alpha \cdot g^{1,1}(P) = -g^{1,2}(P), \quad (38)$$

^(*) В случае $\bar{u}|_I$ и разложения (25) перед логарифмом стоит $\sin(j\pi\theta/\alpha)$ вместо $\cos(j\pi\theta/\alpha)$ для $\theta = \{0, \alpha\}$, и $\bar{u} \in P_\nu(\partial\Lambda_i)$, как это и предполагалось граничным условием. Здесь ситуация обратная.

$$\cos \alpha \cdot \frac{d^2}{d\tau_1^2} g^{0,1}(P) - \sin \alpha \cdot \frac{d}{d\tau_1} g^{1,1}(P) = \cos \alpha \cdot \frac{d^2}{d\tau_2^2} g^{0,2}(P) - \sin \alpha \cdot \frac{d}{d\tau_2} g^{1,2}(P) \quad (39)$$

и для $n = s - 1$, $0 \leq n \leq 2$, выполнено некоторое интегральное условие, где $d/d\tau_i$ – существующие конечные производные по отношению к касательным векторам τ_i для границы Λ_i , $i = 1, 2$.

В том случае, когда $\alpha = \pi/2$, условия (36) – (39) принимают вид:

$$g^{0,1}(P) = g^{0,2}(P), \quad (40)$$

$$-g^{1,1}(P) = \frac{d}{d\tau_2} g^{0,2}(P), \quad (41)$$

$$\frac{d}{d\tau_1} g^{0,1}(P) = -g^{1,2}(P), \quad (42)$$

$$\frac{d}{d\tau_1} g^{1,1}(P) = \frac{d}{d\tau_2} g^{1,2}(P) \quad (43)$$

и для $n = s - 1$, $0 \leq n \leq 2$,

$$\int_0^1 \left| \frac{d^{n-m}}{d\tau_1} g^{m,1}(P - t\tau_1) - (-1)^m \frac{d^m}{d\tau_2} g^{n-m,2}(P + t\tau_2) \right|^2 \frac{dt}{t} < +\infty, \text{ при } 0 \leq m, n - m \leq 1. \quad (44)$$

Отметим, что число условий совместности ограничено, несмотря на увеличение показателя s . Это связано с тем, что мы исследуем лишь величины $\gamma^0 u$ и $\gamma^1 u$; это число таким образом связано непосредственно с порядком рассматриваемой нормы M .

Вариант $\alpha = \pi/2$ выписан для примера вследствие простоты записи. Не составляет труда перенести результаты на общий случай. Для квадратного СЭ Ω_k с узлами P_i и сторонами I_{kl} , $l = 1, \dots, 4$, $L = 4$, справедливо утверждение.

Утверждение 4 [26]. Пусть $s \in \mathbb{Z}$ и $s > 1$. Элемент $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, $G_l = (g^{0,l}, g^{1,l})$, $l = 1, \dots, 4$, из пространства $H^{s-1/2}(S_k) \times H^{s-3/2}(S_k)$ есть образ при отображении $\{\gamma^0, \gamma^1\}$ некоторой функции из пространства Соболева $H^s(\Omega_k)$ тогда и только тогда, когда для всех $l = 1, \dots, 4$ и для всех $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq n \leq 2$, $n < s - 1$, выполнено

$$\frac{d^{n-m}}{d\tau_l} g^{m,l}(P_l) = (-1)^m \frac{d^m}{d\tau_{l+1}} g^{n-m,l+1}(P_l), \quad \text{где } 0 \leq m, n-m \leq 1, \quad (45)$$

для $n = s-1$, $0 \leq n \leq 2$, выполнено

$$\int_0^1 \left| \frac{d^{n-m}}{d\tau_l} g^{m,l}(P_l - t\tau_l) - (-1)^m \frac{d^m}{d\tau_{l+1}} g^{n-m,l+1}(P_l + t\tau_{l+1}) \right|^2 \frac{dt}{t} < +\infty, \quad (46)$$

и принято обозначение $I_{k1} = I_{k5}$, τ_l – касательные вектора для границы I_{kl} .

Замечание Пространство $H^{s-1/2}(S_k) \times H^{s-3/2}(S_k)$, дополненное набором таких условий, не является замкнутым в $H^{s-1/2}(S_k) \times H^{s-3/2}(S_k)$ в стандартной норме. Оператор $\{\gamma^0, \gamma^1\}$ непрерывно действует из $H^s(\Omega_k)$ в такое модифицированное пространство и допускает непрерывный обратный при $s > 2$ в том случае, когда оно снабжено нормой с добавлением слагаемого, совпадающего с левой частью (44) или (46), см. также [26].#

Таким образом, для исследования свойств нормальной производной $\gamma^1 \bar{u}$ в соответствии с приведенными утверждениями нам нужны только значения $\gamma^1 \bar{u}(P_i)$ в вершинах P_i углов СЭ.

Из условий (40) – (43) утверждения 3 в некоторой окрестности угла Λ СЭ раствора $\alpha = \pi/2$ при $G_l = (\gamma_{\partial\Lambda_l}^0 \bar{u}, \gamma_{\partial\Lambda_l}^1 \bar{u})$, $l=1,2$, не выполнены условия (41) и (42) для $\pi/\alpha \in \{b \in \mathbb{Z}, b \leq \nu\}$, то есть $\nu \geq 2$. Действительно, согласно разложению (25) для \bar{u} и разложению $\partial \bar{u} / \partial n|_l$ для данного случая несложно проверить, что в вершине угла P :

$$-\gamma_{\partial\Lambda_1}^1 \bar{u}(P) \neq \frac{d}{d\tau_2} \gamma_{\partial\Lambda_2}^0 \bar{u}(P), \quad (47)$$

$$\frac{d}{d\tau_1} \gamma_{\partial\Lambda_1}^0 \bar{u}(P) \neq -\gamma_{\partial\Lambda_2}^1 \bar{u}(P). \quad (48)$$

Подобный же результат мы получим, исследуя целый СЭ Ω_k (см. утверждение 4) для произвольного раствора α . Следовательно, нормальная производная $\gamma_{\partial\Lambda_l}^1 \bar{u}$ не является образом локального оператора следа $\gamma_{\partial\Lambda_l}^1$, действующего

щего из $H^R(\Omega_k)$ в $H^{R-1/2}(S_k) \times H^{R-3/2}(S_k)$, а элемент $\gamma^1 \bar{u}$ не обладает гладкостью $H^{R-3/2}(S_k)$.

В дальнейшем необходимо дополнительное исследование полученных результатов, а “стандартная” схема не применима для получения верных априорных оценок МКСЭ и определения сходимости производных в энергетической норме пространства $H^1(\Omega)$. Последующие работы посвящены более точному определению свойств $\gamma^1 \bar{u}$ и погрешностей производных.

Заключение

В работе представлены результаты теоретических исследований МКСЭ Федоренко. Определены регулярность приближенного решения МКСЭ, его асимптотика в окрестностях угловых точек разбиения области на подобласти - суперэлементы. Исследование проведено на примере задачи Дирихле. Определение гладкости приближенного решения в пределах СЭ и во всей области и его асимптотического поведения в окрестностях “неестественного” разбиения исходной области на многоугольные СЭ представляет большой самостоятельный интерес. Помимо этого выполненная работа служит связующим звеном при переходе к определению теоретических оценок погрешностей производных приближенного решения.

Список литературы

- [1] Федоренко Р.П. *Введение в вычислительную физику*. – МФТИ, Москва, 1994. – 528с.
- [2] Жуков В.Т, Новикова Н.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. *Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии* // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, n. 8, 2001. – 36 с.
- [3] Галанин М.П., Савенков Е.Б. К обоснованию метода конечных суперэлементов // *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, т. 43, n. 5, 2003, с. 711 – 727.
- [4] Галанин М.П., Савенков Е.Б. *Метод конечных суперэлементов для задачи о скоростном скин-слое* // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, n. 3, 2004.
- [5] Galanin M., Savenkov E., Temis J. Finite Superelements Method for Elasticity Problems // *Mathematical Modelling and Analysis*, v. 10, n. 3, 2005, p. 237 – 246.

[6] Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б. Численное исследование метода конечных суперэлементов на примере решения задачи о скважине для уравнения Лапласа // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, п. 79, 2005.

[7] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Совместное использование метода конечных элементов и метода конечных суперэлементов // Журн. вычисл. мат. и мат. физики, т. 46, п. 2, 2006, с. 270 – 283.

[8] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Numerical investigation of the Finite Superelement Method for the 3D elasticity problems // *Mathematical Modelling and Analysis*, v. 12, n. 1, 2007, p. 39 – 50.

[9] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Fedorenko Finite Superelement Method and its Applications // *Computational Methods in Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2007, p. 3 – 24.

[10] Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б. Качественный анализ и численное исследование метода конечных суперэлементов Федоренко // Тезисы всероссийской конференции по вычислительной математике “КВМ – 2007”, 18 – 20 июня, 2007, Академгородок, Новосибирск, Россия, с. 23.

[11] Лазарева С.А. Априорные оценки погрешностей и гладкость приближенного решения МКСЭ Федоренко // Тезисы конференции “Студенческая научная весна – 2007”, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия.

[12] Лазарева С.А. Аппроксимационные свойства метода конечных суперэлементов Федоренко // *Вычислительные технологии*, 2008, в печати

[13]¹ Агранович М.С. *Обобщенные функции и соболевские пространства* // Лекции Независимого московского университета, 2005. – 60 с.

[14]² Агранович М.С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // *Успехи математических наук*, т. 57, вып. 5, 2002, с. 3 – 78.

[15]³ Агранович М.С. Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях // *Функциональный анализ и его приложения*, т. 40, вып. 4, 2006.

[16] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. Мир, Москва, 1971. – 371 с.

[17] Назаров С.А., Пламеневский Б.А. *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*. – Наука, Москва, 1991. – 336 с.

¹ Web access: <http://www.agranovich.nm.ru/>

² Web access: <http://www.agranovich.nm.ru/>

³ Web access: <http://www.agranovich.nm.ru/>

- [18] Обэн Ж.-П. *Приближенное решение эллиптических краевых задач*. Мир, Москва, 1977. – 383 с.
- [19] Рябенький В.С. *Введение в вычислительную математику*. Физматлит, Москва, 1994. – 336 с.
- [20] Васильчик М.Ю. Граничные свойства функций из пространства Соболева, определенных в плоской области с угловыми точками // *Сибирский математический журнал*, т. 36, п. 4, 1995, с. 787 – 804.
- [21] *Математическая энциклопедия*. В 5 т. Т.3: *Меллина преобразование* / гл. ред. Виноградов И.М. – Советская Энциклопедия, Москва, 1977.
- [22]⁴ Vacuta C., Bramble J.H., Xu J. Regularity estimates for elliptic boundary value problems with smooth data on polygonal domains // *Journal of Numerical Mathematics*, v. 11, n. 2, 2003, p. 75 – 94.
- [23] Borsuk M., Kondratiev V. *Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains*. – Elsevier, North-Holland, 2006. – 538 p.
- [24]⁵ Costabel M., Dauge M. Construction of corner singularities for Agmon-Douglis-Nirenberg elliptic systems//*Mathematische Nachrichten*, v.162,n.1,1993,p.209– 237
- [25]⁶ Costabel M., Dauge M. Stable asymptotics for elliptic systems on plane domains with corners // *Communications in Partial Differential Equations*, v. 19, n. 9–10, 1994, p. 1677 – 1726.
- [26]⁷ Bernardi Ch., Dauge M., Maday Y. *Polynomials in the Sobolev World* // Internal Report, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 2003.–97p.
- [27]⁸ Dahlke St., DeVore R.A. Besov Regularity for Elliptic Boundary Value Problems // *Communications in Partial Differential Equations*, n. 22, 1997, p. 1 – 16.
- [28]⁹ Ding Z. A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains // *Proceedings of American Mathematical Society*, v. 124, n. 2, 1996, p. 591 – 600.
- [29] DeVore R.A. Nonlinear approximation // *Acta Numerica*, n. 7, 1998, p.51 – 150.
- [30] Fabes E., Mendez O., Mitrea M. Boundary Layers on Sobolev-Besov Spaces and Poisson’s Equation for the Laplacian in Lipschitz Domains // *Journal of Functional Analysis*, n. 159, 1998, p. 323 – 368.
- [31] Jerison J., Kenig C.E. The inhomogeneous Dirichlet problem in lipschitz domains // *Journal of Functional Analysis*, n. 130, 1995, p. 161 – 219.

⁴ Web access: <http://www.math.psu.edu/ccma/reports.html>

⁵ Web access: <http://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/core/>

⁶ Web access: <http://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/core/>

⁷ Web access: <http://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/core/>

⁸ Web access: <http://citeseer.ist.psu.edu/dahlke95besov.html>

[32]¹⁰ Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*. – American Mathematical Society, 1997. – 414 p.

[33] Lehman R.Sh. Developments at an analytic corner of solutions of elliptic partial differential equations // *Journal of Mathematics and Mechanics*, v. 8, n. 5, 1959, p. 727 – 760.

[34] Mitrea M., Taylor M. Potential Theory on Lipschitz Domains in Riemannian Manifolds: Sobolev-Besov Space Results and the Poisson Problem // *Journal of Functional Analysis*, n. 176, 2000, p. 1 – 79.

[35]¹¹ Sändig A.-M. *Regularity results for linear elliptic boundary value problems in polygons* // Lectures at the Charles university Prague, 2005. – 38 p.

[36]¹² Showalter R.E. *Hilbert space methods for partial differential equations*. – Electronic Journal of Differential Equations: Monographs, n. 01, 1994 (Originally of 1977). – 214 p.

[37]¹³ Sweers G. Hopf's lemma and two dimensional domains with corners // *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, vol. 28, 1997, p. 383 – 419.

⁹ Web access: <http://www.ams.org/proc/1996-124-02/>

¹⁰ Web access: http://www.ams.org/online_bks/surv52/

¹¹ Web access: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

¹² Web access: <http://www.emis.ams.org/journals/EJDE/>

¹³ Web access: <http://aw.twi.tudelft.nl/~sweers/>