ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 100 за 2008 г.

Лазарева С.А.

Теоретические оценки погрешностей приближения производных для МКСЭ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лазарева С.А. Теоретические оценки погрешностей приближения производных для МКСЭ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 100. 35 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-100**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша

С.А. Лазарева

Теоретические оценки погрешностей приближения производных для МКСЭ

Москва – 2008

Аннотация[*]

В работе получены теоретические оценки погрешностей приближения производных с помощью метода конечных суперэлементов Федоренко в пространствах Соболева. Производные решения представляют часто определяющие физические характеристики разрешаемых задач. Все приведенные здесь результаты распространяются на общий класс линейных эллиптических проблем.

Svetlana Lazareva

E-Mail: LazarevaS@gmail.com

Theoretical error estimates of the approximation of derivatives with the FSEM

Abstract

Theoretical error estimates of the derivatives approximation with Fedorenko finite superelement method in Sobolev spaces are given. Solution derivatives are often present the essential physics of the resolving problem. All the results given here can be extended over a general class of linear elliptic problems.

Содержание

1 Принципы МКСЭ 4

2 Обозначения и определения 7

3 Аппроксимация МКСЭ производных решения в $H^1(\Omega)$ 11

4 Список литературы 36

(*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 06 - 01 - 00421).

Введение

Разработка метода конечных суперэлементов Федоренко (МКСЭ) инициирована проблемой численного расчёта “сложных” задач. Такие задачи содержат сингулярности решения, неоднородности сплошной среды, резкие особенности геометрии расчетной области. При этом размеры областей проявления таких особенностей значительно меньше размеров расчетной области. Развиваемые в работе методы позволяют моделировать физические процессы, опираясь на теоретические зависимости погрешностей расчета МКСЭ и характерные свойства его аппроксимаций.

Работа является продолжением исследований [1–9] по выявлению теоретических свойств приближений МКСЭ. В ней выведены априорные оценки погрешностей приближений производных. Получены условия, при которых метод обладает сходимостью. Результатом является решение вопросов об аппроксимации, сходимости и априорных оценках приближения как решения, так и его производных любого порядка.

В работе рассмотрена задача Дирихле для уравнения Лапласа, но результаты могут быть распространены на общий класс линейных эллиптических задач. Они сохраняют свою справедливость и для произвольного непрерывного на границе интерполянта, определяющего возможные варианты метода.

Данное исследование существенно использует предыдущие результаты этого цикла работ, связанные с априорными оценками погрешностей МКСЭ и локальной регулярностью решения МКСЭ в окрестностях угловых точек разбиения [1; 7–9]. Для достижения поставленных целей использованы теория весовых пространств Соболева и Кондратьева, теория эллиптических задач в областях с угловыми точками, теория интерполяции пространств функций и задачи определения насыщаемости. Помимо этого можно отметить свойства регулярности решений вариационных задач на негладких областях и известные подходы метода конечных элементов.

Представленная работа направлена на поиск “оптимального” выбора аппроксимаций метода и алгоритмов его применений. Поставленная проблема возникает естественным образом при решении описанного класса задач. Как правило, искомое решение при достаточно гладкой границе области и подходящих функциях граничных условий обладает производными (скажем, суммируемыми с квадратом) до порядка $M \geq 1$. Второй вариант – это гладкое, обладающее производными высокого порядка, решение в окрестностях границы разбиения области на подобласти-суперэлементы.

Производные представляют важные (а часто и определяющие) физические характеристики поставленной задачи. Например, скорости и ускорения в механике, гидродинамике; напряжения, деформации и скорость их роста в теории упругости; напряженности и силы в теории поля; мощности тепловых воздействий, потоки газа в теории теплопроводности и др.

1 Принципы МКСЭ

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) впервые предложен в работах Федоренко и его коллег [3–4]. Он входит в класс численных методов, основанных на декомпозиции области. В работах [1–9] эффективность МКСЭ подтверждена примерами решения разнообразных физических проблем.

Рассмотрим простую задачу Дирихле для дифференциального уравнения Лапласа в двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Расчетная область представляет собой квадрат с исключенными из него кругами, радиус которых мал по сравнению с размерами Ω. Полагаем, что в окрестностях таких мелких отверстий сосредоточены все резкие “сингулярности” решения.

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{2}$$

где u – искомая функция, $\partial\Omega$ – граница расчетной области, и g – некоторая известная функция на $\partial\Omega$.

Подобно обычному методу конечных элементов (МКЭ) расчетная область разбита на некоторое число непересекающихся подобластей Ω_k, называемых *суперэлементами*. Каждое место сосредоточения особенности (отверстие, неоднородность и т.п.) заключено строго в одном из суперэлементов. Базисные функции МКСЭ финитны, их носители связаны с суперэлементами. При этом изначальное задание аппроксимаций в МКСЭ связано не со всей такой двумерной подобластью Ω_k, а только с её одномерной границей S_k. Обозначим через K_E общее число суперэлементов и $k = 1,\dots,K_E$.

Рассмотрим аппроксимации МКСЭ в одном суперэлементе Ω_k, где k есть некоторое фиксированное число. На всей его одномерной границе S_k зададимся набором функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$, $x \in S_k$, которые называем *граничными базисными функциями*. Они принимают следующие значения

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0,\dots,n, \tag{3}$$

в узлах суперэлемента P_j, $j = 1,\dots,n$, и на границе его отверстия P_0, где δ_{ij} – символ Кронекера. Узлы суперэлемента P_j расположены только на его ребрах и в углах. Символ P_0, имеющий нулевой индекс, обозначает не один узел, а всю границу отверстия. В том случае, если суперэлемент Ω_k не содержит отверстия, полагаем, что $\varphi_0 \equiv 0$ на всей S_k.

Исследованы различные варианты продолжения этих функций с узлов P_j на ребра суперэлемента [6]. На каждом из ребер границы они представлены некоторым “стандартным” интерполянтом [11]: полиномиальным, кусочно-линейным, сплайн и т.д.

Граничные базисные функции заданы для всех узлов и всех суперэлементов в области расчета Ω. Предполагается, что функции $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$, определенные на одном и том же ребре соседних суперэлементов Ω_k и Ω_m, совпадают, то есть:

$$\varphi_i(x) = \varphi_j(x), \quad x \in S_k \bigcap S_m,$$

для всех $S_k \bigcap S_m \neq 0$ и всех соседних суперэлементов Ω_k, Ω_m $\forall k,m$.

Каждая построенная граничная базисная функция $\varphi_i(x)$ однозначно определяет функцию $\Phi_i(x)$ в суперэлементе Ω_k. Она является решением задачи Дирихле следующего вида:

$$-\Delta\Phi_i = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \tag{4}$$

$$\Phi_i = \varphi_i \quad \text{на } S_k. \tag{5}$$

Функции $\Phi_i(x)$, $x \in \Omega_k$, задают *базисные функции МКСЭ* в области рассматриваемого нами суперэлемента Ω_k. Базисные функции единообразно задаются в каждом из суперэлементов Ω_k, $k = 1,...,K_E$, в области расчета Ω. Представляет дальнейший интерес рассмотрение вариантов МКСЭ именно при полиномиальной либо сплайновой граничной интерполяции.

Заметим, что сингулярности задачи в окрестностях отверстий учтены посредством базисной функции с нулевым индексом $\Phi_0(x)$ в каждом из суперэлементов. Остальные функции $\Phi_i(x)$, $i \neq 0$, при наличии отверстия в суперэлементе Ω_k обращаются в ноль на его границе согласно (3). Если в суперэлементе отверстия нет, то $\Phi_0(x) \equiv 0$.

Решение задачи внутри каждого отдельного суперэлемента будем искать при помощи построенного базиса:

$$\overline{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x), \quad x \in \Omega_k. \tag{6}$$

Таким образом определено *приближенное решение МКСЭ* $\overline{u}(x)$ во всей расчетной области $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$. Решение $\overline{u}(x)$ должно удовлетворять главному граничному условию на границе $\partial\Omega$ согласно (2):

$$\overline{u}(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Неизвестные значения a_i определены с помощью обычной схемы метода Бубнова-Галеркина при выборе функций $\Phi_i(x)$ в качестве базисных и пробных [1–9].

Ранее установлено влияние начального выбора варианта аппроксимации на границе разбиения на результирующую точность расчетов метода, получены теоретические (априорные) оценки погрешностей метода в зависимости от способа приближения [1; 7; 8]. Невыясненным является факт сходимости либо расходимости ошибок производных сильного решения произвольного порядка. Такое исследование изначально затруднено особым “нестандартным” видом получаемого приближенного решения МКСЭ и его ограничениями по гладкости [9].

2 Обозначения и определения

Исследование проведем в предположении достаточной гладкости функции g, фигурирующей в граничном условии, и границы области $\partial\Omega$ для того, чтобы искомое решение принадлежало $H^R(\Omega)$ [10; 15]. Обозначим через $\bar{u}$ приближенное решение МКСЭ, соответствующее точному решению задачи u.

Как правило, суперэлемент Ω_k является многоугольником, необходимо учитывать тот факт, что S_k принадлежит классу C^0 непрерывности. При этом мы можем рассматривать лишь тот случай, когда S_k – многоугольная граница либо граница, состоящая из конечного числа гладких кривых, то есть: $S_k = \bigcup_l I_{kl}$, $l = 1,\ldots,L$, где L – число сторон I_{kl} (или гладких частей границы) суперэлемента Ω_k. Положим, что все вершины углов границы суперэлемента направлены во внешность области, то есть раствор углов не превышает π. Рассмотрим варианты МКСЭ, связанные с полиномиальной либо сплайн- интерполяцией на границах суперэлементов. При сплайн-интерполяции I_{kl} будут обозначать те отрезки разбиения суперэлементных границ, на каждом из которых интерполянт представляет собой полином (соответственно, L – их число). Положим $S = \bigcup_k S_k$ – совокупность всех суперэлементных границ.

Пространство всех полиномов порядка не выше ν на отрезке I_{kl} обозначаем через $\mathrm{P}_\nu(I_{kl})$. На границе S вводим пространство $\mathrm{P}_\nu(S)=\prod\limits_{k,l}\mathrm{P}_\nu(I_{kl})$ как множество всех полиномов порядка не выше ν на каждой из её частей I_{kl}. Обозначим символом $\mathrm{P}_\nu^N(S)$ *пространство всех сплайнов* порядка не выше ν, построенных на разбиении S на $(N-1)$ отрезок длины $|I_{kl}|/\nu$. При этом $(N-1)=L\nu K_E$. Полиномиальная интерполяция служит частным случаем интерполяции сплайнами (где $(N-1)/\nu$ – число отрезков I_{kl} на S), потому при её рассмотрении вариант полиномиальной граничной интерполяции МКСЭ отдельным образом выделять не будем.

Аппроксимирующее пространство $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ *МКСЭ* – это линейная оболочка, образованная всеми базисными функциями МКСЭ с граничной интерполяцией посредством сплайнов $\mathrm{P}_\nu^N(S)$. То есть:

$$\bar{V}_\nu^N(\Omega)=\left\{v\in H^1(\Omega):\ -\Delta v=0 \text{ в каждом из } \Omega_k \text{ и } \gamma_{\mathrm{S}}^0 v=v\big|_S\in \mathrm{P}_\nu^N(S)\right\}. \quad (7)$$

Здесь *след функции на S* определен равенством $\gamma_{\mathrm{S}}^0 v=\left\{\gamma_{S_k}^0 v\right\}_{k=1}^{K_E}$. Оператор взятия следа $\gamma_{S_k}^0$, заданный на $C^\infty(\bar{\Omega}_k)$ соотношением

$$\left(\gamma_{S_k}^0 u\right)(x)=\left(u\big|_{S_k}\right)(x),\quad x\in S_k, \quad (8)$$

непрерывно действует из пространства $H^1(\Omega_k)$ в $H^{1/2}(S_k)$ для всех $k=1\ldots K_E$. При этом существует непрерывный оператор, обратный к $\gamma_{S_k}^0$ и действующий из $H^{1/2}(S_k)$ в $H^1(\Omega_k)$. Такой общий случай действия оператора $\gamma_{S_k}^0$ справедлив как для гладкой, так и для многоугольной или просто липшицевой границы S_k [10; 20]. Причем определение $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ содержит условие:

$$\gamma_{\mathrm{S}}^0 v=\gamma_{\mathrm{S_k}}^0 v=\gamma_{\mathrm{S_m}}^0 v \ \text{ почти всюду на } S_k\cap S_m, \quad (9)$$

для всех $S_k \bigcap S_m \neq 0$ и всех соседних суперэлементов Ω_k, Ω_m Аппроксимирующее пространство МКСЭ содержит его как “главное условие”, накладываемое на все базисные функции. Соотношение (9) не включено в (7) для сохранения более компактной записи. Иногда, если это не вызовет недоразумений, используем также просто символ γ^0, не обозначая при этом множество, на котором определена область значений оператора следа.

Аналогичным образом определено и *аппроксимирующее пространство* $\overline{V}_\nu(\Omega)$ *МКСЭ*, представляющее собой линейную оболочку, образованную базисными функциями МКСЭ с граничной интерполяцией посредством полиномов $\mathrm{P}_\nu(S)$ порядка не выше ν.

В определение аппроксимирующего пространства не входят условия совместности функций в узлах P_j суперэлемента:

$$\left(\gamma^0 v\Big|_{I_{kl}}\right)(P_j) = \left(\gamma^0 v\Big|_{I_{kt}}\right)(P_j), \quad j = 1, ..., n, \tag{10}$$

на соседних отрезках $I_{kl} \bigcap I_{kt} = P_j \neq 0$ границы S $\forall l, t = 1, ..., n$, $\forall k = 1, ..., K_E$. Условие (10), как правило, входит в схему МКСЭ, поскольку введено в определение граничных базисных функций $\varphi_i(x)$, см. (3). Оно связано с заданием базисных функций МКСЭ, как решений задач (4) – (5), и заданием интерполянта $\varphi_i(x)$ для них, непрерывного на всей границе $S_k = \bigcup_l I_{kl}$. Линейная оболочка таких базисных функций МКСЭ согласно определению и составляет аппроксимирующее пространство. Тем не менее, условие (10) можно ввести без ограничения общности метода, если непрерывность искомой функции в окрестностях узлов суперэлемента заведомо известна, а все особенности задач заключены строго внутри суперэлементов. В частности, всегда для сильного решения $u \in H^s(\Omega)$, $s \geq 2$.

Отметим, что в определении (7) использован оператор Лапласа, определяющий гармоническую функцию в суперэлементе. Под *гармоничностью* некоторого слабого решения $u \in H^1(\Omega)$ в произвольной области Ω понимаем его удовлетворение уравнению Лапласа в следующей обобщенной постановке:

$$\left(-\Delta u, v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(\nabla u, \nabla v\right)_{L_2(\Omega)} - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{11}$$

Далее как для слабого, так и для сильного решения продолжаем формально пользоваться кратким обозначением: $-\Delta u = 0$.

Характерным свойством аппроксимации слабых решений МКСЭ является возможность рассмотрения задачи (1) – (2) не просто в энергетическом пространстве $H^1(\Omega)$, а в некотором его подпространстве, обозначаемом здесь $\mathsf{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Это пространство $H^1(\Omega)$, снабженное дополнительным свойством гармоничности входящих в него функций в каждом из суперэлементов Ω_k по-отдельности:

$$\mathsf{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega): \; -\Delta v(x) = 0, \; x \in \Omega_k, \text{ для всех } \Omega_k, \; k = 1,...,K_E \right\}.$$

Аппроксимирующее пространство МКСЭ (7) является подпространством данного пространства. Определение $\mathsf{H}^1(\Omega)$ включает в себя условие (9):

$$\gamma^0_{\mathrm{S}} v = \gamma^0_{\mathrm{S_k}} v = \gamma^0_{\mathrm{S_m}} v \quad \text{почти всюду на } S_k \bigcap S_m, \tag{12}$$

для всех $S_k \bigcap S_m \neq 0$ и всех соседних суперэлементов Ω_k, Ω_m $\forall k, m$. Перепишем его эквивалентно также в виде:

$$\begin{aligned} \mathsf{H}^1(\Omega) = \Big\{ v: \; \gamma^0 v \in H^{1/2}(S), \; -\Delta v(x) = 0, \; x \in \Omega_k, \text{ для всех } \Omega_k, \text{ что} \\ \gamma^0_{\mathrm{S}} v = \gamma^0_{\mathrm{S_k}} v = \gamma^0_{\mathrm{S_m}} v \text{ почти всюду на } S_k \bigcap S_m \neq 0, \; k, m = 1,...,K_E \Big\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Нам понадобятся следующие пространства:

$$\mathsf{H}^R(\Omega) = \left\{ v: \; \gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S), \; -\Delta v(x) = 0, \; x \in \Omega_k, \text{ для всех } \Omega_k, \; k = 1,...,K_E \right\}, \tag{14}$$

для любых $R \in \mathbb{N}$, $R \geq 1$. При $R = 1$ подразумевается определение (13) пространства $\mathsf{H}^1(\Omega)$. В определение $\mathsf{H}^R(\Omega)$ включаем и условие (12). Рост показателя R характеризуется увеличением гладкости функций

$\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S) = \prod_{k,l} H^{R-1/2}(I_{kl})$ из этого пространства на всех гладких частях суперэлементных границ. Поскольку для следа любой функции v из пространства $H^R(\Omega)$ справедливо включение $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S)$, то выполнено:

$$H^R(\Omega) \subseteq \mathsf{H}^R(\Omega). \tag{15}$$

Обратное вложение при $R \neq 1$ на границе класса C^0 не имеет места. Кроме того, любая функция $v \in \mathsf{H}^R(\Omega)$ однозначно определена своим следом $\gamma^0 v \in H^{R-1/2}(S)$ на S, напр., [21].

Введем ещё одно определение. *Оператор следа m-го порядка* γ^m в пространстве $C^\infty(\overline{\Omega}_k)$ задан соотношением

$$\left(\gamma^m u\right)(x) = \left(\left. \frac{\partial^m u}{\partial n^m} \right|_{S_k} \right)(x), \quad x \in S_k, \tag{16}$$

где n – внешняя единичная нормаль к границе S_k, $m \in \mathbb{N}$. Оператор γ^m действует из $H^R(\Omega_k)$ в $H^{R-m-1/2}(S_k)$ для $R-1 \geq m$, $R \in \mathbb{N}$, и допускает “обычное” расширение в слабом смысле, например, $\gamma^1 : H^{1/2}(S_k) \to H^{-1/2}(S_k)$ для $m = 1$.

3 Аппроксимация МКСЭ производных решения в *H*^{1}(Ω)

Мы можем показать разрешимость задачи Дирихле в пространстве $\mathsf{H}^1(\Omega)$ как следствие её разрешимости на прямом произведении $\prod_k H^1(\Omega_k)$. Это эквивалентно тому, что соответствующая задаче (1) – (2) билинейная форма $\left(\nabla u, \nabla v\right)_{L_2(\Omega)}$ коэрцитивна в $\mathsf{H}^1(\Omega)$ и задает в нём скалярное произведение [10]. Действительно, выражение $\left(\nabla u, \nabla v\right)_{L_2(\Omega_k)}$ даёт стандартное скалярное произведение в пространстве $H^1(\Omega_k)$, а форма $\left(\nabla u, \nabla v\right)_{L_2(\Omega)} = \sum_k \left(\nabla u, \nabla v\right)_{L_2(\Omega_k)}$ коэрцитивна на всём $\prod_k H^1(\Omega_k)$, где

$H^1(\Omega)=\prod_k H^1(\Omega_k)$. Поэтому она коэрцитивна на любом подпространстве произведения $\prod_k H^1(\Omega_k)$, в частности, и на $\mathsf{H}^1(\Omega)$.

Пусть теперь задача (1) – (2) обладает гладким решением $u \in H^R(\Omega)$, $R > 1$, и нас интересует аппроксимация первых производных $\nabla u \in H^{R-1}(\Omega)$, как и ранее, в норме пространства $H^1(\Omega)$. Мы знаем, что:

$$\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

поэтому нам нужны оценки погрешностей решения u в норме пространства $H^2(\Omega)$. Обобщая на произвольный порядок производных $(M-1)$, $1 < M < R$, $M \in \mathbb{N}$, далее будем исследовать поведение погрешностей решения u в нормах пространств $H^M(\Omega)$.

При гладкой границе $\partial\Omega$ форма $\left(\nabla u, \nabla v\right)_{L_2(\Omega_k)}$, соответствующая рассматриваемой задаче, коэрцитивна на любом подпространстве $H^1(\Omega)$, значит, и на гладких пространствах $H^R(\Omega)$ либо $\mathsf{H}^R(\Omega)$. В том случае, если бы аппроксиманты решения МКСЭ обладали свойством принадлежности подпространству $H^R(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, то схема МКСЭ привела бы к приближению решения класса $H^R(\Omega)$. Аппроксимационные пространства МКСЭ $\bar{V}_\nu^N(\Omega)$ принадлежат $\mathsf{H}^R(\Omega)$, и для $\mathsf{H}^R(\Omega)$ подобный результат очевиден. При этом в общем случае не справедлива принадлежность $\bar{u} \in H^R(\Omega)$, а также $\bar{u} \in H^R(\Omega_k)$. Для начала рассмотрим случай $M = 2$: определим сходимость либо расходимость градиента полученного решения и выведем априорные оценки погрешностей аппроксимаций при наличии этой сходимости.

3.1 Результаты предыдущих работ

Рассмотрим пример M = 2. Из гармоничности градиентов искомого и приближенного решений имеем:

$$\left\|\nabla(u-\bar{u})\right\|_{H^1(\Omega)} \le \sum_k \left\|\gamma^0\nabla(u-\bar{u})\right\|_{H^{1/2}(S_k)}, \tag{17}$$

где, вообще говоря, $\nabla(u-\bar{u}) \notin \mathrm{H}^1(\Omega)$, так как условие совместности для градиентов не выполнено. Работа [9] показывает, что $\bar{u} \in H^2(\Omega_k)$ в области суперэлемента Ω_k, если $\bar{u} \in \tilde{\mathrm{H}}^R(\Omega_k)$, поэтому здесь запись ошибки решения в норме пространства $H^2(\Omega)$ корректна.

Выпишем здесь некоторые результаты работы [9].

Утверждение 1 *Пусть граничные базисные функции МКСЭ в некоторой окрестности угла Λ суперэлемента Ω_k, на его границах $\partial\Lambda_1$ и $\partial\Lambda_2$, – полиномы порядка не выше ν. Интерполянт приближенного решения $\pi_\nu^N(u)$ МКСЭ в этой окрестности представим в виде*:

$$\pi_\nu^N(u) = \begin{cases} \sum\limits_{q=0}^{\nu} r^q \cdot \left(\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{b}_q \sin(q\theta)\right), \text{ если } \pi/\alpha \notin \{b \in \mathbb{N},\ b \le \nu\}, \\ \sum\limits_{\substack{q=j\pi/\alpha \\ 0\le q\le\nu}} \left[r^q \cdot \left(\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{c}_q \theta\cos(q\theta)\right) + r^q \ln r \cdot \bar{c}_q \sin(q\theta)\right] + \\ + \sum\limits_{\substack{q\ne j\pi/\alpha \\ 0\le q\le\nu}} r^q \cdot \left(\bar{a}_q \cos(q\theta) + \bar{b}_q \sin(q\theta)\right), \text{ если } j\pi/\alpha \in \{b \in \mathbb{N},\ b \le \nu\}, \\ \text{при любом } j = 1,2,..., \end{cases}$$

где

$$\bar{a}_q = A_q^2,\ \ \bar{b}_q \cdot \sin(q\alpha) = \left(A_q^1 - A_q^2\cos(q\alpha)\right),\ \ \bar{c}_q = \frac{1}{\alpha}\left(A_q^1 - \frac{1}{\cos(q\alpha)}A_q^2\right),$$

A_q^1, A_q^2 *– коэффициенты решения (граничного полинома $\bar{\varphi}$) на границах $\partial\Lambda_1$, $\partial\Lambda_2$ перед r^q, $q = 0,...,\nu$. Аналогичное утверждение справедливо и для приближенного решения $\bar{u}$.*

Несложно показать, что на границе угла $\partial\Lambda$ справедливо равенство:

$$\left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\right|_I = \left.\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}\right|_I.$$

И при тех же условиях для $R > 2$ получим для нормальной производной [9]:

$$\left.\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}\right|_I = \begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{\nu} r^{q-1} \cdot \left(\overline{b}_q q \cos(q\theta) + \overline{a}_q q \sin(q\theta)\right), \ \theta = \{0, \alpha\}, \text{ если } \pi/\alpha \notin \{b \in \mathbb{N},\ b \le \nu\}, \\ \sum\limits_{\substack{q = j\pi/\alpha \\ 1 < q \le \nu}} \left[r^{q-1} \cdot \overline{c}_q \cos(q\theta) + r^{q-1} \ln r \cdot \overline{c}_q q \cos(q\theta) \right] + \\ + \sum\limits_{\substack{q \ne j\pi/\alpha \\ 1 \le q \le \nu}} r^{q-1} \cdot \left(\overline{b}_q q \cos(q\theta) + \overline{a}_q q \sin(q\theta)\right), \ \theta = \{0, \alpha\}, \text{ если } j\pi/\alpha \in \{b \in \mathbb{N},\ b \le \nu\}, \\ \text{при любом } j = 1, 2, ... \end{cases} \tag{18}$$

Произвольное решение уравнения Лапласа с граничными данными $\gamma^0 u$ в угле Λ суперэлемента Ω_k (в некоторой окрестности угловой точки P) разложимо в сумму гладкой и сингулярной частей [16; 17; 22]:

$$u(x) = u_{reg}(x) + u_{sing}(x), \quad x \in \Lambda; \tag{19}$$

$$u_{sing} = \sum_{q=0}^{Q} c_q r^{\lambda} \log^q r \cdot \varphi_q(\theta); \tag{20}$$

где u_{reg} обладает максимальной гладкостью, порожденной гладкостью функции $\gamma^0 u$ граничного условия, а наличие $u_{sing}(x)$ обусловлено видом области Λ. Здесь $Pr\theta$ – локальная система координат в угле Λ; набор параметров λ определен некоторыми характеристическими числами, связанными с уравнением, и может быть дополнен конечным числом положительных действительных параметров $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$; причем и в том, и в другом случае диапазон λ ограничен сверху гладкостью граничных данных; Q – конечное число; c_q – константы. Здесь рассматриваемое нами эллиптическое уравнение (1) не содержит членов порядка меньше максимального. Кроме того, границы I_{kl} суперэлементов в некоторой окрестности каждого из углов Λ считаем прямыми линиями.

Множество всех функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа в областях Ω_k со следами класса $H^{R-1/2}(S)$, $R > 1$, а также условиям (12) и условиям совместности в углах, обозначено через $\tilde{\mathrm{H}}^R(\Omega)$. Вообще говоря, пространство $\tilde{H}^R(\Lambda)$ в угле Λ содержит в себе набор весовых пространств “с неоднородной нормой” $W^l_{2,\beta}(\Lambda)$, см. [21], характеризующийся индексами β, $l \in \square$ определенного диапазона. Уточнение асимптотики выражения (19) – (20) со следами из $\gamma^0 u \in H^{R-1/2}(\partial\Lambda_i)$, $R > 1$, может быть выписано согласно [21, с. 284, 300]. А именно, в угле Λ справедливо:

$$u = p_{R-s-1}(u) + \sum_{(k\pi/\alpha)\in(-\beta+l-1;\, R-1)} r^{k\pi/\alpha}\varphi_k^{(1)}(\theta,\log r) + \sum_{k=0}^{R-2} r^k \varphi_k^{(2)}(\theta,\log r) +$$

$$+u_{reg}(r,\theta) + (Kh)(r) r^{R-1} p(\theta,\log r), \tag{21}$$

где $k \in \square$, $k\pi/\alpha \neq -\beta + l - 1$; $\beta \neq 0,1,2,...R-1$; $R > l - \beta$; $s-1 < \beta < s$ для некоторого $s \in \square$. Слагаемое $p_{R-s-1}(u)$ – полином от функции u порядка не выше $R-s-1$. Функции $\varphi_k^{(1)}(\theta,\log r)$, $\varphi_k^{(2)}(\theta,\log r)$, $p(\theta,\log r)$ – полиномы от переменной $\log r$ с коэффициентами (зависящими от θ) класса $C^\infty(\Lambda)$. Функция $u_{reg}(r,\theta) \in H^R(\Lambda)$ обладает максимальной гладкостью по отношению к заданному граничному условию $\gamma^0_{\partial\Lambda} u \in H^{R-1/2}(\partial\Lambda \setminus P)$. Функция $(Kh)(r)$ действует в пространство $W^l_{2,l-1/2}(\square_+)$ $\forall l \in \square$, $l > 1$. Из общих теорем вложения для данных весовых пространств (напр., [18]) здесь $W^l_{2,l-1/2}(\square_+) \subset W^t_{2,0}(\square_+) = H^t(\square_+)$ для $2t \le s - 1/2$. При этом для функции u при $\beta \le 0$: $u \in W^l_{2,\beta}(\Lambda) \subseteq W^l_{2,0}(\Lambda) = H^l(\Lambda)$.

Для пространства $\tilde{H}^R(\Omega)$ справедливо вложение:

$$\tilde{H}^R(\Lambda) \subseteq H^{[\pi/\alpha]}(\Lambda). \tag{22}$$

Напомним, что из общего определения выполнено вложение вида:

$$H^R(\Omega) \subseteq \tilde{H}^R(\Omega), \text{ и } R > 1. \tag{23}$$

3.2 Локальные априорные оценки для $M = 2$

Оценка ошибки приближения МКСЭ величиной наилучшего приближения $\varepsilon_v^N(\nabla u)$ такова [8]:

$$\left\|\nabla(u-\overline{u})\right\|_{H^1(\Omega)} \le C\varepsilon_\nu^N(\nabla u) = C \inf_{v\in\overline{V}_\nu^N(\Omega)}\left(\left\|\nabla(u-v)\right\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{24}$$

Тогда из (17) и свойств нормы:

$$\varepsilon_\nu^N(\nabla u) = \inf_{S_k} \inf_{v\in \mathrm{P}_\nu^N(S_k)}\left(\left\|\gamma^0\nabla(u-v)\right\|_{H^{1/2}(S_k)}\right).$$

Запишем с использованием стандартных преобразований:

$$\inf_{v\in \mathrm{P}_\nu^N(S_k)}\left\|\gamma^0\nabla(u-v)\right\|_{H^{1/2}(S_k)} \asymp \inf_{\psi\in \mathrm{P}_\nu^N(S_k)}\sum_{l=1}^{L}\left[\left\|\frac{d}{d\tau_l}\varphi-\frac{d}{d\tau_l}\psi\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})}+\left\|P_l\,\varphi-P_l\,\psi\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})}\right], \tag{25}$$

здесь и далее обозначено:

$$\varphi=\gamma^0 u;\;\; \psi=\gamma^0 v;$$

$$P\gamma^0 u = P_l\gamma^0 u=\gamma^1_{I_{kl}}u;\;\; P\gamma^0 v = P_l\gamma^0 v=\gamma^1_{I_{kl}}\psi;$$

где P – так называемый оператор Пуанкаре-Стеклова [2]. Норму погрешностей градиента будем обозначать через $\left\|u-\overline{u}\right\|_{2,\Omega}$:

$$\left\|u-\overline{u}\right\|_{2,\Omega}=\left\|\nabla(u-\overline{u})\right\|_{H^1(\Omega)} \asymp \sum_k\left\|\gamma^0\nabla(u-\overline{u})\right\|_{H^{1/2}(S_k)}. \tag{26}$$

Согласно (25) на отрезке I_{kl} нужно оценить величины норм: $\inf\limits_{\psi\in \mathrm{P}_\nu^N(S_k)}\left\|d\varphi/d\tau-d\psi/d\tau\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})}$ и $\inf\limits_{\psi\in \mathrm{P}_\nu^N(S_k)}\left\|P\varphi-P\psi\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})}$ для произвольного отрезка I_{kl}. Здесь у τ и P индекс l опускаем.

Оценка первой величины не составит труда, поскольку является следствием результатов работы [8]:

$$\varepsilon_{\nu_d}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{H^{1/2}(I_{kl})}=\inf_{\psi\in \mathrm{P}_\nu^N(I_{kl})}\left\|d\varphi/d\tau-d\psi/d\tau\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})}=\varepsilon_{\nu_d}\left(\varphi\right)_{H^{3/2}(I_{kl})}\le C\cdot\left|I_{kl}\right|^{\nu_d+1}\left|\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{H^{\nu_d+1}(I_{kl})},$$

$$\varepsilon_{\nu_d}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{H^{1/2}(I_{kl})}\le C\cdot\left|I_{kl}\right|^{\nu_d+1}\left|\varphi\right|_{H^{\nu_d+2}(I_{kl})},\ \text{для}\ \nu_d\le R-5/2, \tag{27}$$

где тангенциальная производная на отрезке $\dfrac{d}{d\tau}\overline{\varphi}\in \mathrm{P}_{\nu_d}(I_{kl})$ и $\nu_d=\nu-1$, так как $\varphi\in \mathrm{P}_\nu\ (I_{kl})$; константа $C=C(\pi_{\nu_d})$.

Обозначим $r = R - 3/2$. Тогда [8] получаем:

$$\varepsilon_{\nu_d}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{H^{1/2}(I_{kl})} \le c_{1/2} M_r^{1/2} M_{r-1}^{1/2} \frac{1}{(\nu_d+1)^{r-1/2}} \left|I_{kl}\right|^r \left|\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{H^r(I_{kl})}, \text{ для } \nu_d \ge R - 5/2. \quad (28)$$

Имеем оценки погрешностей тангенциальных производных решения:

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\varphi - \frac{d}{d\tau}\overline{\varphi}\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})} \le C(\pi_{\nu-1}) \cdot \left|I_{kl}\right|^{\nu} \left|\varphi\right|_{H^{\nu+1}(I_{kl})} \quad \text{при } \nu \le R - 3/2;$$

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\varphi - \frac{d}{d\tau}\overline{\varphi}\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})} \le c_{1/2} M_{R-3/2}^{1/2} M_{R-5/2}^{1/2} \frac{1}{\nu^{R-5/2}} \left|I_{kl}\right|^{R-3/2} \left|\varphi\right|_{H^{R-1/2}(I_{kl})} \quad \text{при } \nu \ge R - 3/2.$$

Оценка второй величины $\inf\limits_{\psi \in \mathrm{P}_{\nu}^{N}(I_{kl})} \left\|P\varphi - P\psi\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})}$ в пространстве $H^{1/2}(I_{kl})$ другого сорта, поскольку в том случае, если $\psi \in \mathrm{P}_{\nu}^{N}(I_{kl})$, то нормальная производная $P\psi = \dfrac{\partial v}{\partial n}$ функции $v \in \overline{V}_{\nu}^{N}(\Omega)$ в общем случае уже не принадлежит пространству полиномов на I_{kl} (как это справедливо, например, для "обычного" МКЭ и соответствующих ему оценок). Элемент $P\psi$ не принадлежит и какому-либо пространству, изоморфному $\mathrm{P}_{\nu_p}^{N}(I_{kl})$ с некоторым ν_p, он обладает собственными свойствами регулярности на отрезке I_{kl}.

Далее мы получим оценки погрешностей МКСЭ локально, в окрестностях углов Λ суперэлементного разбиения. Используем непосредственно формулу (18). Через I продолжаем обозначать произвольную сторону $\partial\Lambda_i$ угла Λ.

Перепишем полученное ранее выражение (18):

$$\left.\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}\right|_I = \begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{\nu} r^{q-1} \cdot \left(\overline{b}_q q \cos(q\theta) + \overline{a}_q q \sin(q\theta) \right),\ \theta = \{0, \alpha\},\ \text{если } \pi / \alpha \notin \left\{ b \in \mathbb{N},\ b \le \nu \right\}, \\ \sum\limits_{\substack{q = j\pi/\alpha \\ 1 < q \le \nu}} \left[r^{q-1} \cdot \overline{c}_q \cos(q\theta) + r^{q-1} \ln r \cdot \overline{c}_q q \cos(q\theta) \right] + \\ + \sum\limits_{\substack{q \ne j\pi/\alpha \\ 1 \le q \le \nu}} r^{q-1} \cdot \left(\overline{b}_q q \cos(q\theta) + \overline{a}_q q \sin(q\theta) \right),\ \theta = \{0, \alpha\},\ \text{если } j\pi / \alpha \in \left\{ b \in \mathbb{N},\ b \le \nu \right\}, \\ \text{при любом } j = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

(29)

То же соотношение справедливо для любой функции $\left.\partial \psi / \partial n\right|_I$ такой, что $\psi \in \overline{V}_\nu^N(\Lambda)$, где $\overline{a}_q$, $\overline{b}_q$, $\overline{c}_q$ – соответствующие ей коэффициенты разложения.

3.2.1 Случай 1

Первый случай относится к $\pi / \alpha \notin \left\{ b \in \mathbb{N},\ b \le \nu \right\}$ и соответствует одному из следующих условий:

- радианная мера углов α / π не принадлежит множеству всех приведенных рациональных дробей;
- $\pi > \alpha \cdot \nu$, где $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, а α / π – рациональная приведенная дробь. В частности, всегда для $\nu = 0$ или $\nu = 1$. При этом, если суперэлемент является многоугольником (а нас интересуют все углы α_i в нём), данный набор ограничен минимально возможным раствором угла $\overline{\omega}$ таким, что суперэлемент не может содержать углов с бо́льшей мерой, чем $\overline{\omega}$. Это возможно только при $\overline{\omega} = \pi / 3$. И в таком случае необходимо: $\nu < 3$. В частности, для $\nu = 2$ условие выполнено при $\alpha < \pi / 2$.

Вывод оценок

Из (29) при $\pi / \alpha \notin \left\{ b \in \mathbb{N},\ b \le \nu \right\}$ для нормальной производной на $I = \partial \Lambda_i$ имеем соотношение:

$$\left.\frac{\partial \overline{u}}{\partial n}\right|_I = \sum_{q=1}^{\nu} r^{q-1} \cdot \left(\overline{b}_q q \cos(q\theta) + \overline{a}_q q \sin(q\theta) \right),\ \theta = \{0, \alpha\},$$

поэтому $\partial\overline{u}/\partial n\big|_I \in \mathrm{P}_{\nu_p}(\partial\Lambda) = \mathrm{P}_{\nu-1}(\partial\Lambda)$, $\nu_p = \nu - 1$. Аналогично для любой $\psi \in \overline{V}_\nu^N(\Lambda)$. Отсюда, согласно схеме предыдущих работ справедливо:

$$\left\|P\varphi - P\overline{\varphi}\right\|_{H^{1/2}(I)} \le \inf_{\psi\in \mathrm{P}_\nu^N(S_k)} \left\|P\varphi - P\psi\right\|_{H^{1/2}(I)} \le$$

$$\le C(\pi_{\nu-1})\cdot\left|I\right|^{\nu}\left|P\varphi\right|_{H^{\nu}(I)} \quad \text{при } \nu \le R - 3/2\,; \tag{30}$$

$$\left\|P\varphi - P\overline{\varphi}\right\|_{H^{1/2}(I)} \le \inf_{\psi\in \mathrm{P}_\nu^N(S_k)} \left\|P\varphi - P\psi\right\|_{H^{1/2}(I)} \le$$

$$\le c_{1/2} M_{R-3/2}^{1/2} M_{R-5/2}^{1/2} \frac{1}{\nu^{R-5/2}} \left|I\right|^{R-3/2} \left|P\varphi\right|_{H^{R-3/2}(I)} \quad \text{при } \nu \ge R - 3/2\,. \tag{31}$$

3.2.2 Случай 2

Второй случай относится к варианту $\pi/\alpha \in \{b \in \square,\ b \le \nu\}$, что соответствует условию:

- все углы α/π представимы приведенными рациональными дробями, при этом $\pi \le \alpha\cdot\nu$, где $\nu = 2,3,4...$ В случае многоугольного суперэлемента и $\nu \ge 3$ для одного из углов в области это неравенство выполнено всегда. Если $\nu = 2$, то $\alpha = \pi/2$.

Из (29) для $\pi/\alpha \in \{b \in \square,\ b \le \nu\}$, или же, что то же самое, $j\pi/\alpha \in \{b \in \square,\ b \le \nu\}$ при некотором $j = 1,2,\ldots$, для нормальной производной на $I = \partial\Lambda_i$ имеем представление:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\right|_I &= \sum_{\substack{q=j\pi/\alpha\\ 1<q\le\nu}} \left[r^{q-1}\cdot\overline{c}_q\cos(q\theta) + r^{q-1}\ln r\cdot\overline{c}_q q\cos(q\theta)\right] + \\ &+ \sum_{\substack{q\ne j\pi/\alpha\\ 1\le q\le\nu}} r^{q-1}\cdot\left(\overline{b}_q q\cos(q\theta) + \overline{a}_q q\sin(q\theta)\right),\ \theta = \{0,\alpha\},\ j\pi/\alpha \in \square.\end{aligned} \tag{32}$$

Поэтому

$$\left.\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\right|_I = O\left(r^{\pi/\alpha-1}\ln r\right) \in H^{\pi/\alpha-1}(I),\ \pi/\alpha \in \square\ ,\ \pi/\nu \le \alpha < \pi\,.$$

Так как величина $0 < \alpha/\pi < 1$ – приведенная рациональная дробь, принадлежность $\partial\overline{u}/\partial n\big|_I \in H^{1/2}(I)$ имеет место. Аналогично для $\psi \in \overline{V}_\nu^N(\Lambda)$.

Множество, которому принадлежит нормальная производная приближенного решения $\gamma^1\overline{u} = \partial\overline{u}/\partial n\big|_I$, уже не является подпространством пространства $H^{R-3/2}(I)$ для произвольного R. Оценку ошибки производной $\|P\varphi - P\overline{\varphi}\|_{H^{1/2}(I)}$ полунормой решения $P\varphi$ с показателем гладкости $H^{\pi/\alpha-1}(I)$ можно предположить максимально возможной. В действительности не выполнена и она, поскольку $P\overline{\varphi} = \gamma^1\overline{u}\big|_I$ не принадлежит ядру полунормы как этого пространства, так и пространства $H^s(I)$ для некоторого $s \geq 1/2$. Докажем, что МКСЭ не обладает сходимостью к нулю в пространстве $H^2(\Omega)$ на классах $H^R(\Omega)$ по энергетической норме в случае 2 условий на ν и α.

При этом мы выведем оценку погрешности, которая возникает при попытке приближения гладкой функции класса $H^R(\Omega)$ решением $\overline{u}$ МКСЭ. Для случая 2 оно содержит сингулярную часть. Можем предположить, что единственным возможным условием улучшения оценки является обнуление некоторого числа коэффициентов $\overline{c}_q$ в представлении (32). Покажем это непосредственно в соответствии с результатами работ [1; 7–9].

Вывод оценок. Доказательство отсутствия сходимости погрешности градиента решения к нулю

Априорные оценки погрешностей

В суперэлементе Ω_k выполнено вложение $\overline{V}_\nu(\Omega_k) \subset \mathsf{H}^R(\Omega_k)$. Функции $\overline{u} \in \overline{V}_\nu(\Omega_k)$ и $v \in \mathsf{H}^R(\Omega_k)$ однозначно определяют элементы $\gamma^1\overline{u} = \partial\overline{u}/\partial n\big|_I$, $\gamma^1 v = \partial v/\partial n\big|_I$ на всех гладких частях I границы S_k. Пусть $\mathsf{H}^{R,(1)}(I)$ – пространство образов оператора γ_I^1, действующего на множестве $\mathsf{H}^R(\Omega_k)$. Тогда $\gamma^1\overline{u} \in \mathsf{H}^{R,(1)}(I)$. Отметим также, что $\mathsf{H}^{R,(1)}(I) \not\subset \mathsf{H}^{R-1}(I)$ [**].

Нормируем пространство $\mathsf{H}^{R,(1)}(I)$. Оно состоит из множества функций $\gamma^1 v\big|_I = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\bigg|_I$, где v определено (19) или же в соответствии с (21). Таким образом:

$$\gamma^1 v\big|_I = \gamma^1 v_{\text{reg}}\big|_I + \gamma^1 v_{\text{sing}}\big|_I, \text{ где } \gamma^1 v_{\text{reg}}\big|_I \in H^{R-3/2}(I) \text{ и}$$

$$\gamma^1 v_{\text{sing}}\big|_I = \sum_{q=0}^{Q} c_q r^{\lambda-1} \log^q r \frac{d\varphi_q(\theta)}{d\theta}\bigg|_I ,$$

при тех же параметрах, что и в (19)– (20). Вводим следующую нормировку[*]:

$$\left\|\gamma^1 v\right\|_{\mathsf{H}^{R,(1)}(I)} = \left\|\left(\gamma^1 v\right)_{reg}\right\|_{H^{R-3/2}(I)} + \left\|\left(\gamma^1 v\right)_{\text{sing}}\right\| = \left\|\left(\gamma^1 v\right)_{reg}\right\|_{H^{R-3/2}(I)} + \sum_q \left|c_q\right|, \qquad (33)$$

$$\left\|\left(\gamma^1 v\right)_{\text{sing}}\right\| = \sum_q \left|c_q\right|,$$

где c_q – коэффициенты сингулярной части $\gamma^1 v$, соответствующие разложению (32).

Запишем оценку погрешностей для производной решения $\gamma^1 u$. Согласно [8] для интерполянта:

$$\left\|\gamma^1 u - \gamma^1\overline{u}\right\|_{H^{1/2}(I)} \le C \cdot \left\|\gamma^1 u - \gamma^1 \pi_\nu(u)\right\|_{H^{1/2}(I)} . \qquad (34)$$

[**] То есть, например, в МКЭ роль $\mathsf{H}^R(I)$ выполняет $H^R(\Omega_k)$, где $\nabla u \in H^{R-1}(\Omega_k)$ и $H^{R-1}(\Omega_k) \subset H^R(\Omega_k)$. Это играет существенную роль во всех рассуждениях.

[*] Нормировка $\|u\| = \|u_{\text{reg}}\| + \|u_{\text{sing}}\|$ есть следствие представления (19) как нормы в пространстве решений, представленного в виде прямой суммы подпространства регулярной части $H^R(\Omega_k)$ и подпространства сингулярной части разложения [Трг]. Она эквивалентна также норме, полученной при помощи теоремы Пифагора, то есть: $\|u\|' = \sqrt{\|u_{\text{reg}}\|^2 + \|u_{\text{sing}}\|^2}$. Здесь мы можем положить $\|u_{\text{sing}}\| \square \sum_q |c_q|$ (см., напр., [Dg.adn]), а все слагаемые в сингулярной части нашего разложения независимы.

Из вложения $\mathsf{H}^{R}(\Lambda)\subset H^{[\pi/\alpha]}(\Lambda)$ [8] следует, что $\mathsf{H}^{R,(1)}(I)\subset H^{[\pi/\alpha]-3/2}(I)$. Для того, чтобы $H^{[\pi/\alpha]-3/2}(I)\subseteq H^{1/2}(I)$, потребуется условие $\alpha\leq\pi/2$, которое соответствует случаю 2. Поэтому получим:

$$\left\|\gamma^{1}u-\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right\|_{H^{1/2}(I)}\leq c\left\|\gamma^{1}u-\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right\|_{\mathsf{H}^{R,(1)}(I)}\ \square$$

$$\square\ \left\|\left(\gamma^{1}u\right)_{\mathrm{reg}}-\left(\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right)_{reg}\right\|_{H^{R-3/2}(I)}+\square\left(\gamma^{1}u\right)_{\mathrm{sing}}-\left(\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right)_{\mathrm{sing}}\square. \tag{35}$$

Так как для истинного решения справедлива принадлежность $\gamma^{1}u\in H^{R-3/2}(I)$, то в результате из (33) и (34), (35) имеем оценку

$$\left\|\gamma^{1}u-\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right\|_{H^{1/2}(I)}\leq C'\left(\left\|\gamma^{1}u-\left(\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right)_{reg}\right\|_{H^{R-3/2}(I)}+\sum_{q=1}^{\min\{\nu,R-1\}}\left|\overline{c}_{q}\right|\right), \tag{36}$$

где через $\overline{c}_{q}$ обозначены коэффициенты разложения (32) сингулярной части интерполянта $\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)$; индекс $q=j\pi/\alpha\in\square$, $j=1,2,\ldots$, пробегает значения в соответствии с видом сингулярной части при показателе гладкости $R-3/2$ соотношения (32); $C'=\mathrm{const}$. Здесь учтено, что $r^{q}\ln r\in H^{q}(I)$.

Положим $R\leq 2$. Тогда $\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\in H^{R-3/2}(I)$. Для бóльших R оценка ошибки аппроксимации приобретает дополнительные константные слагаемые вида: $\sum_{q=1}^{R-1}\left|\overline{c}_{q}\right|$ для $R-3/2\leq\nu$; или же $\sum_{q=1}^{\nu}\left|\overline{c}_{q}\right|$ для $R-3/2\geq\nu$. Напомним, что для случая 2 приемлем диапазон $\nu\geq 2$. Аппроксимация решения регулярной частью аппроксиманта даст (см. (32), где $\left(\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right)_{reg}\in\mathrm{P}_{\nu-1}(I)$):

$$\left\|\gamma^{1}u-\left(\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right)_{reg}\right\|_{H^{R-3/2}(I)}\leq\mathrm{const}\cdot|I|^{\nu}\,|P\varphi|_{H^{\nu}(I)}\ \text{ при }\ \nu\leq R-3/2; \tag{37}$$

$$\left\|\gamma^{1}u-\left(\gamma^{1}\pi_{\nu}(u)\right)_{reg}\right\|_{H^{R-3/2}(I)}\leq\mathrm{const}\frac{1}{\nu^{R-5/2}}|I|^{R-3/2}\,|P\varphi|_{H^{R-3/2}(I)}\ \text{ при }\ \nu\geq R-3/2; \tag{38}$$

согласно схеме работы [8], где, как и ранее, $\left.\gamma^{1}u\right|_{I}=P\varphi$.

С уменьшением $|I|$ составляющее слагаемое полученной верхней оценки $\sum_{q=1}^{\min\{\nu,R-1\}} \left|\overline{c}_q\right|$ остается постоянным. Выдвинем предположение, что полученный результат действительно характеризует поведение погрешности метода (26) в пространстве $H^2(\Omega)$. А именно: МКСЭ не обладает сходимостью к нулю на классах $H^R(\Omega)$. Существует некоторая ненулевая неустранимая константная погрешность метода, определяемая выбором аппроксимационного пространства при $|I| \to 0$.

Доказательство для случая ν ≤ R – 3 / 2

Подтвердим отсутствие сходимости оценкой снизу величины $\delta_{\nu,2} H^R(\Omega) = \sup\limits_{u \in H^R(\Omega)} \left\| u - \pi_\nu u \right\|_{2,\Omega}$. Для некоторой функции $w \in H^R(\Omega)$ запишем:

$$\left\| w - \pi_\nu w \right\|_{2,\Omega} \square \left\| d\gamma^0 w / d\tau - d\gamma^0 \pi_\nu w / d\tau \right\|_{H^{1/2}(S)} + \left\| \gamma^1 w - \gamma^1 \pi_\nu w \right\|_{H^{1/2}(S)},$$

из вложения (23). Учтя неравенство (35), запишем:

$$\text{const} \cdot \left\| w - \pi_\nu w \right\|_{2,\Omega} \geq \left\| d\gamma^0 w / d\tau - d\gamma^0 \pi_\nu w / d\tau \right\|_{H^{1/2}(S)} + \left\| \gamma^1 w - \gamma^1 \pi_\nu w \right\|_{\mathcal{H}^{2,(1)}(S)}.$$

Погрешность метода не ниже оценки снизу элемента $\gamma^1 w \in H^{R-3/2}(I)$ на *I*:

$$\left\| \gamma^1 w - \gamma^1 \pi_\nu w \right\|_{\mathcal{H}^{2,(1)}(I)} = \left\| \gamma^1 w - \left(\gamma^1 \pi_\nu w \right)_{reg,2} \right\|_{H^{1/2}(I)} + \sum_q \left| \overline{c}_q \right|.$$

Пусть $\gamma^0 w = \sin\left(\pi \nu r / \left| I_{kl} \right| \right) \in C^\infty(I_{kl}) \subset H^{R-1/2}(I_{kl})$. Для него выполнено $\gamma^0 w(P_i) = 0 \quad \forall P_i \in \Omega$. Поэтому полиномиальный интерполянт на границе $\gamma^0 \pi_\nu w = 0$, а, значит, $\pi_\nu w = 0$ из принципа максимума. Тогда $\gamma^1 \pi_\nu w = 0$, а погрешность записывается в виде: $\left\| \gamma^1 w - \gamma^1 \pi_\nu w \right\|_{\mathcal{H}^{2,(1)}(I_{kl})} = \left\| \gamma^1 w \right\|_{H^{1/2}(I_{kl})}$.

На $\left| I_{kl} \right|$ справедливо, что $\gamma^0 w = O(\pi \nu r / \left| I_{kl} \right|)$, и норма погрешности главного члена разложения в соответствии с работой [9], (29):

$$\left\|\gamma^1 w\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})} = \left\| \frac{\pi\nu}{|I_{kl}|}\left(\bar{b}_1\cos\theta + \bar{a}_1\sin\theta\right)\Big|_{\theta=\{0,\alpha\}} \right\|_{H^{1/2}(I_{kl})},$$

откуда:

$$\left\|\gamma^1 w\right\|_{H^{1/2}(I_{kl})} = \frac{\pi\nu}{|I_{kl}|}\left(\bar{b}_1\cos\theta + \bar{a}_1\sin\theta\right)\Big|_{\theta=\{0,\alpha\}} \|1\|_{H^{1/2}(I_{kl})} \approx \frac{\pi\nu}{|I_{kl}|}|I_{kl}|\cdot C(\{0,\alpha\}) = \pi\nu\cdot C_\alpha, \tag{39}$$

где $\|1\|_{H^1(I)} = \|1\|_{\left(H^{1/2}(I),H^2(I)\right)_{1/3}} \le c_{1/3}\|1\|^{2/3}_{H^{1/2}(I)}\|1\|^{1/3}_{H^2(I)}$ [19; 13], следовательно, $\|1\|_{H^1(I)}\Big/\left(c_{1/3}\|1\|^{1/3}_{H^2(I)}\right) \le \|1\|^{2/3}_{H^{1/2}(I)} \Rightarrow |I|\Big/\left(c_{1/3}|I|^{1/3}\right) \le \|1\|^{2/3}_{H^{1/2}(I)} \Rightarrow |I| \le c^{3/2}_{1/3}\|1\|_{H^{1/2}(I)}$, $c_{1/3} = \text{const}$. Здесь $C_\alpha = \text{const}$ и зависит только от α.

Значит, постоянная $\left\|\gamma^1 w\right\|_{H^{1/2}(I)} \approx \pi\nu\cdot C_\alpha = C_{\alpha,\nu}$ – не зависит от $|I|$ и оценивает ошибку $\|w-\pi_\nu w\|_{2,\Omega}$ снизу. Величина такой оценки растет с ростом ν и не меняется с изменением $|I|$. Для полученного здесь результата всегда выполнено соотношение $\nu < R - 3/2$.

Найдена такая функция w, что:

$$C_{\alpha,\nu} \le \text{const}\cdot\|w-\pi_\nu w\|_{2,\Omega}.$$

Поэтому:

$$C_{\alpha,\nu} \le \|w-\pi_\nu w\|_{2,\Omega} \le \delta_{\nu,2}H^R(\Omega) = \sup_{u\in H^R(\Omega)}\|u-\pi_\nu u\|_{2,\Omega}$$

для погрешности метода на классе $H^R(\Omega)$.

Доказательство **для случая ν ≥ R – 3 / 2**

Рассмотрим вариант $\nu \ge R - 3/2$ в окрестности угла Λ. Предположим, что мы нашли такую функцию $w\in H^R(\Omega)$, что $\gamma^0 w(P_i) = 0$ в области Ω, и на области Λ выполнено $\nu \ge R - 3/2$ для функции w. Раскладываем ее в ряд Тейлора с приемлемым числом членов и некоторым остаточным. Тогда по аналогии с предыдущим результатом из работ [8, 9] и представления (29) получим, что:

$$\left\|\gamma^1 w-\gamma^1\pi_\nu w\right\|_{\mathrm{H}^{2,(1)}(I)}=\left\|\gamma^1 w\right\|_{H^{1/2}(I)}=\sum_{q=1}^{(\pi/\alpha-1)}\left[C_q\cdot\left\|r^{q-1}\right\|_{H^{1/2}(I)}\right]+C_{\pi/\alpha}\cdot\left\|r^{\pi/\alpha-1}\ln r\right\|_{H^{1/2}(I)}+\ldots, \tag{40}$$

где $C_q=C_q(\theta)$ – некоторые константы.

Как и ранее, интерполяцией между $H^{1/2}(I)$ и $H^2(I)$, принимая $H^1(I)=\left(H^{1/2}(I),H^2(I)\right)_{1/3}$ [19; 13], для нормы с полуцелым показателем имеем следующее выражение:

$$\left\|r^{q-1}\right\|_{H^{1/2}(I)}\geq c_{1/3}^{-3/2}\frac{\left\|r^{q-1}\right\|_{H^1(I)}^{3/2}}{\left\|r^{q-1}\right\|_{H^2(I)}^{1/2}}=c_{1/3}^{-3/2}\frac{\left[|I|^{q-1}+|I|^{q-2}\right]^{3/2}}{\left[|I|^{q-1}+|I|^{q-3}\right]^{1/2}}=ж_q, \tag{41}$$

где обозначаем выражение для нижней оценки через $ж_q$. Норма

$$\left\|r^{q-1}\ln r\right\|_{H^{1/2}(I)}\geq c_{1/3}^{-3/2}\frac{\left\|r^{q-1}\ln r\right\|_{H^1(I)}^{3/2}}{\left\|r^{q-1}\ln r\right\|_{H^2(I)}^{1/2}}\sim ж_q\left(c_{0,q}+c_{1,q}\ln|I|+c_{2,q}\ln^2|I|\right)=ж'_q \tag{42}$$

ведет себя аналогичным образом при $|I|\to 0$. А именно, для $ж_q$ и $ж'_q$ легко показать, что:

$$ж_q\to 0 \text{ при } q>1 \text{ и } ж_q\to\infty \text{ при } q\leq 1;$$

$$ж'_q\to 0 \text{ при } q>1 \text{ и } ж'_q\to\infty \text{ при } q\leq 1;$$

$$ж_q\sim ж'_q\sim |I|^{q-1} \text{ при } |I|\to 0.$$

Известно [21; 18], что пространство, в котором лежит след $\gamma^0 w\in H^{R-1/2}(I)$ представимо в виде прямой суммы подпространств: $H^{R-1/2}(I)=V_0^{R-1/2}(I)\oplus P^{(R)}(I)$, где $P^{(R)}(I)$ – множество “квазиполиномов”, зависящее от показателя гладкости *R*, см. [21]. Мы несколько упростим выкладки, положив, что $\gamma^0 w\in H^{R-1/2-\varepsilon}(I)$ для некоторого малого $\varepsilon>0$ так, что $R-\varepsilon\notin\square$. При этом ясно, что для любой функции $\gamma^0 w\in H^{R-1/2}(I)$ выполнено $\left\|\gamma^0 w\right\|_{H^{R-1/2-\varepsilon}(I)}\leq\mathrm{const}\cdot\left\|\gamma^0 w\right\|_{H^{R-1/2}(I)}$. Выпишем необходимое утверждение.

Утверждение 2 [18; 21] *Пусть* $s \in \square$, $s > 1/2$ *и* $s - 1/2 \notin \square$. *Для любого числа k:* $0 \le k \le [s-1/2]$, *оператор* $\gamma^{k,i}$: $\gamma^{k,i}\varphi = (d\varphi / dx)(P_i)$, $i = 1,2$, *непрерывен на* $H^s(I)$, *и справедливо соотношение:*

$$V_0^s(I) = \left\{ \varphi \in H^s(I):\ \forall k \in \mathrm{Z},\ 0 \le k \le [s-1/2],\ \gamma^{k,i}\varphi(P_i) = 0,\ i = 1,2 \right\},$$

где сегмент $I = (P_1, P_2)$ *такой, что функция* φ *имеет следы в точках* P_1, P_2; $x \in I$. *Более того,* $V_0^s(I)$ *есть замыкание множества бесконечно дифференцируемых функций* $C^\infty(I)$ *в пространстве* $H^s(I)$. *Если* $s \le 2$, *то* $C^\infty(I)$ *плотно в* $H^s(I)$ *и пространства* $V_0^s(I)$ *и* $H^s(I)$ *совпадают.*

Пространство $H^s(I)$, $s \in \square$, $s > 1/2$, $s - 1/2 \notin \square$, *разлагается в прямую сумму подпространств* $V_0^s(I)$ *и* $\mathrm{P}_{2[s-1/2]+1}(I)$:

$$H^s(I) = V_0^s(I) \oplus \mathrm{P}_{2[s-1/2]+1}(I). \tag{43}$$

Замечание 1 Разложение (43) хотя и является не единственным (как следствие фундаментальных понятий линейной алгебры), но является классическим, для целых значений показателя гладкости на отрезке см. [12].

Разложим пространство $H^{R-1/2-\varepsilon}(I_{kl})$ Разложение проведем на всем отрезке I_{kl}, где определен полином, а не только в окрестности нашего угла Λ:

$$H^{R-1/2-\varepsilon}(I_{kl}) = V_0^{R-1/2-\varepsilon}(I_{kl}) \oplus \mathrm{P}_{2[R-1-\varepsilon]+1}(I_{kl}), \text{ где}$$

$$V_0^{R-1/2-\varepsilon}(I_{kl}) = \left\{ \varphi \in H^{R-1/2-\varepsilon}(I_{kl}):\ \forall k \in \mathrm{Z},\ 0 \le k \le [R-1-\varepsilon],\ \gamma^{k,i}\varphi(P_i) = 0,\ i = 1,2 \right\}$$

и P_i, $i = 1,2$, обозначают узлы на концах I_{kl}. В соответствии с разложением для следа на стороне I_{kl}:

$$\gamma^0 w = \gamma^0 w_V + \gamma^0 w_\mathrm{P} \in H^{R-1/2}(I_{kl}),\ \ \gamma^0 w_V \in V_0^{R-1/2-\varepsilon}(I_{kl}),\ \gamma^0 w_\mathrm{P} \in \mathrm{P}_{2[R-1-\varepsilon]+1}(I_{kl}).$$

Откуда:

$$\gamma^0 w\Big|_{\{0,|I_{kl}|\}} = \gamma^0 w_V\Big|_{\{0,|I_{kl}|\}} + \gamma^0 w_\mathrm{P}\Big|_{\{0,|I_{kl}|\}} = \gamma^0 w_\mathrm{P}\Big|_{\{0,|I_{kl}|\}} \text{ для всех } [R-1-\varepsilon] \ge 0,$$

или $R \ge 2$ при $R \in \square$. И $\gamma^0 w_V\Big|_{\{0,|I_{kl}|\}}$ такая, что

$$\left.\frac{d^k\gamma^0 w_V}{dr^k}\right|_{\{0,|I_{kl}|\}}=0 \quad \forall k\le[R-1-\varepsilon]. \qquad (44)$$

Величины $\left.\dfrac{d^k\gamma^0 w}{dr^k}\right|_{r=0}$ входят в коэффициенты C_q разложения (40). Например, для C_1 имеет место следующее равенство (см. (29), (40)):

$$C_1=c_{1/3}^{-3/2}\left.\frac{d\gamma_I^0 w}{dr}\right|_{r=0}\cdot\left(\overline{b}_1\cos(\theta)+\overline{a}_1\sin(\theta)\right)\ne 0\,,\quad \theta=\{0,\alpha\}. \qquad (45)$$

И для произвольного C_q имеем:

$$C_q=c_q(\theta)\cdot\left.\frac{d^q\gamma_I^0 w}{dr^q}\right|_{r=0},$$

где $c_q(\theta)$ – некоторые зависящие от θ константы.

Если мы покажем, что $\left.\dfrac{d^k\gamma^0 w_{\mathrm{P}}}{dr^k}\right|_{r=0}=0$, то с учетом (44) получим, что:

$$C_q=0 \quad \forall q\le[R-1-\varepsilon]. \qquad (46)$$

Изначально выбор функции w был связан с требованием $\gamma^0 w(P_i)=0$, откуда также следует, что $\gamma^1\pi_\nu w=0$. Потребуем:

$$\gamma^0 w_{\mathrm{P}}\Big|_{r=|I_{kl}|/\nu,2|I_{kl}|/\nu,\ldots,|I_{kl}|}=0 \ \text{ для } r=|I_{kl}|/\nu,\ 2|I_{kl}|/\nu,\ldots,|I_{kl}|. \qquad (47)$$

Значение $r=0$ учтено в исходном разложении Тейлора (40): $\gamma^0 w\big|_{r=0}=0$. Тогда для $\nu\ge 2[R-1-\varepsilon]+1$ полином $\gamma^0 w_{\mathrm{P}}=0$. Условие $\nu\ge 2[R-1-\varepsilon]+1$ выполнено из справедливости неравенства $\nu\ge R-3/2$ для рассматриваемого случая. Отсюда получаем (46).

Из требования (47) для функции v вытекает также, что:

$$\gamma^0 w\Big|_{r=|I_{kl}|/\nu,2|I_{kl}|/\nu,\ldots,|I_{kl}|}=\gamma^0 w_V\Big|_{r=|I_{kl}|/\nu,2|I_{kl}|/\nu,\ldots,|I_{kl}|}=0 \ \text{ для } r=|I_{kl}|/\nu,\ 2|I_{kl}|/\nu,\ldots,|I_{kl}|. \qquad (48)$$

Воспользуемся изначальным тейлоровским разложением этой функции. Разложение полиномиально вплоть до остаточного члена, поэтому в соответствии с (48) в окрестности точки $r=0$ главный член порядка $O(r)$ ведет себя как

$$\gamma^0 w \sim \sin\left(\pi\nu r / |I_{kl}|\right) \sim \left(\pi\nu / |I_{kl}|\right) \cdot r \text{ для } r \to 0 \text{ и } |I_{kl}| \to 0 .$$

Производные $d\gamma^0 w / dr$ – также величины порядка $O(r)$. Более того, из утверждения 2 следует, что для весового пространства для всех производных функции $\gamma^0 w_V \in V_0^{R-1/2-\varepsilon}(I_{kl})$ вплоть до порядка $[R-1-\varepsilon]$ выполнено $d\gamma^0 w(P_i) / dr = 0$, поэтому для них характерно то же поведение. Из представления Тейлора получаем следующую асимптотическую эквивалентность:

$$\frac{d^k \gamma^0 w}{dr^k} \sim \left(\pi\nu / |I_{kl}|\right)^{k-1} \text{ для } r \to 0 \text{ и } |I_{kl}| \to 0 .$$

Учтем выражения (41), (42) на малой окрестности границы угла, за которую мы можем взять отрезок $|I_{kl}|/\nu$. Для (40) получаем:

$$\left\|\gamma^1 w\right\|_{H^{1/2}(I)} \geq \sum_{q=1}^{(\pi/\alpha-1)} \left[c_q(\theta) \cdot \left(\pi\nu / |I_{kl}|\right)^{q-1} \cdot ж_q \right] + c_{\pi/\alpha}(\theta) \cdot \left(\pi\nu / |I_{kl}|\right)^{q-1} \cdot ж'_q + \ldots \geq$$

$$\geq \sum_{q=1}^{(\pi/\alpha-1)} \left[c_q(\theta) \cdot \left(\pi\nu / |I_{kl}|\right)^{q-1} \cdot \left(|I_{kl}|/\nu\right)^{q-1} \right] + c_{\pi/\alpha}(\theta) \cdot \left(\pi\nu / |I_{kl}|\right)^{q-1} \cdot \left(|I_{kl}|/\nu\right)^{q-1} + \ldots =$$

$$= \sum_{q=1}^{(\pi/\alpha-1)} \left[c_q(\theta) \cdot \pi^{q-1} \right] + c_{\pi/\alpha}(\theta) \cdot \pi^{q-1} + \ldots = C(\alpha) + \ldots, \quad \theta = \{0, \alpha\} .$$

где число членов конечно и определено показателем *R*. В результате:

$$\left\|\gamma^1 w - \gamma^1 \pi_\nu w\right\|_{H^{2,(1)}(I)} = \left\|\gamma^1 w\right\|_{H^{1/2}(I)} \geq C_{\alpha,R} = \text{const} > 0 ,$$

где $C_{R,\alpha}$ зависит только от *R* и *α*.

Итак, если найдена такая функция w, что

$$C_{\alpha,R} \leq \text{const} \cdot \left\|w - \pi_\nu w\right\|_{2,\Omega} ,$$

то
$$C_{\alpha,R} \leq \left\|w - \pi_\nu w\right\|_{2,\Omega} \leq \delta_{\nu,2} H^R(\Omega) = \sup_{u \in H^R(\Omega)} \left\|u - \pi_\nu u\right\|_{2,\Omega}$$

для погрешности метода на классах $H^R(\Omega)$.

#

Выпишем также условия обнуления $\overline{c}_q$, при которых (36) возможно улучшить. Для интерполянта приближенного решения из [9](*):

$$\overline{c}_q = \frac{1}{\alpha}\left(A_q^1 - \frac{1}{\cos(q\alpha)} A_q^2 \right) = 0,\;\; q = j\pi/\alpha,\;\; q = 1,...,\min\{\nu, R-3/2\}, \quad (49)$$

где $j = 1,2,...$

Минусом при попытках обнуления $\overline{c}_q$ (49) является зависимость от угла разбиения α.

3.2.3 Априорные оценки МКСЭ и условия сходимости производных

Сведем полученные результаты для априорных оценок погрешностей МКСЭ в пространстве $H^2(\Omega)$. Ими характеризуется поведение погрешности приближения производных решения первого порядка в норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$.

Утверждение 3 *Пусть вариант МКСЭ соответствует полиномиальной аппроксимации порядка не выше* ν *на границах* $\partial\Lambda$ *в окрестности угла* Λ *суперэлементного разбиения раствора* $0 < \alpha < \pi$. *Тогда априорные оценки погрешностей МКСЭ в пространстве* $H^2(\Lambda)$ *в этом угле имеют следующий вид.*

I. *Если* $\pi/\alpha \notin \{b \in \square,\ b \le \nu\}$ (*случай 1*). *Для многоугольного суперэлемента это эквивалентно выполнению:* α *не принадлежит множеству рациональных приведенных дробей, или же для рационального дробного раствора* α *выполнено* $\nu = 0,1$, *или* $\nu = 2$ *при* $\alpha < \pi/2$. *Тогда*

1. *при* $\nu \le R - 3/2$ *из* (27), (30):

$$\|u - \overline{u}\|_{2,\Lambda} \le C_\nu \cdot |I|^\nu \left[|\varphi|_{H^{\nu+1}(\partial\Lambda)} + |P\varphi|_{H^\nu(\partial\Lambda)} \right], \quad (50)$$

(*) Величины A_q^1, A_q^2 играют роль производных приближенного решения. Пусть $\alpha = \pi/2$, $\nu = 2$. Например, чтобы обнулить коэффициент $\overline{c}_2$, потребуется $A_2^1 = -A_2^2$, то есть $d^2\gamma^0\pi_\nu u/dr^2\big|_{r\in\partial\Lambda_1} = -d^2\gamma^0\pi_\nu u/dr^2\big|_{r\in\partial\Lambda_2}$ на границе.

где C_ν определена константами неравенств вложения и константой $C(\pi_{\nu-1})$ и зависит только от ν.

2. *при $\nu \ge R-3/2$ из* (28), (31):

$$\left\|u-\overline{u}\right\|_{2,\Lambda} \le cM_{R-3/2}^{1/2}M_{R-5/2}^{1/2}\frac{\left|I\right|^{R-3/2}}{\nu^{R-5/2}}\left[\left|\varphi\right|_{H^{R-1/2}(\partial\Lambda)}+\left|P\varphi\right|_{H^{R-3/2}(\partial\Lambda)}\right], \qquad (51)$$

где c определена константами неравенств вложения и постоянной $c_{1/2}$, $M_{R-3/2}$ и $M_{R-5/2}$ зависят только от R.

II. *Если $\pi/\alpha \in \{b \in \mathbb{N},\ b \le \nu\}$ (случай 2). Для многоугольного суперэлемента это эквивалентно условию представимости α в виде приведенной рациональной дроби при $\nu \ge 3$, либо $\nu = 2$ и $\alpha = \pi/2$. Тогда*

1. *при $\nu \le R-3/2$ из* (27), (36), (37):

$$\left\|u-\overline{u}\right\|_{2,\Lambda} \le \left|I\right|^{\nu}\left[C_\nu\left|\varphi\right|_{H^{\nu+1}(\partial\Lambda)}+C''\left|P\varphi\right|_{H^{\nu}(\partial\Lambda)}\right]+C'''\sum_{\partial\Lambda_i}\sum_{q=1}^{\nu}\left|\overline{c}_q\right|, \qquad (52)$$

где константы зависят только от ν. Величина оценки погрешности сингулярной части возрастает с увеличением ν.

Погрешность МКСЭ на классе $H^R(\Omega)$ в пространстве $H^2(\Omega)$, то есть величина $\delta_{\nu,2}H^R(\Omega)=\sup\limits_{u\in H^R(\Omega)}\left\|u-\pi_\nu u\right\|_{2,\Omega}$, не обладает сходимостью к нулю при $|I|\to 0$. Существует некоторая константная погрешность, и справедливо:

$$C_{\nu,\alpha} \le \delta_{\nu,2}H^R(\Omega)=\sup_{u\in H^R(\Omega)}\left\|u-\pi_\nu u\right\|_{2,\Omega}.$$

2. *при $\nu \ge R-3/2$ из* (28), (36), (38):

$$\left\|u-\overline{u}\right\|_{2,\Lambda} \le \frac{\left|I\right|^{R-3/2}}{\nu^{R-5/2}}\left[C'_R\left|\varphi\right|_{H^{R-1/2}(\partial\Lambda)}+C''_R\left|P\varphi\right|_{H^{R-3/2}(\partial\Lambda)}\right]+C'''_R\sum_{\partial\Lambda_i}\sum_{q=1}^{R-3/2}\left|\overline{c}_q\right|, \quad (53)$$

и константы зависят от показателя гладкости R.

Погрешность МКСЭ на классе $H^R(\Omega)$ в пространстве $H^2(\Omega)$ не обладает сходимостью к нулю при $|I|\to 0$. Существует некоторая константная погрешность, и справедливо:

$$C_{R,\alpha} \le \delta_{\nu,2} H^R(\Omega) = \sup_{u\in H^R(\Omega)} \left\| u - \pi_\nu u \right\|_{2,\Omega}.$$

Утверждение 4 *Для сходимости погрешности метода к нулю в пространстве* $H^2(\Lambda)$ *при* $\pi/\alpha \in \{b \in \square,\ b \le \nu\}$ (*в случае 2*) *необходимо и достаточно выполнения условий*:

$$A_q^1 \cos(q\alpha) - A_q^2 = 0,\ \ \forall q = j\pi/\alpha,\ \ q = 1,\dots,\min\{\nu, R-3/2\},$$

$j = 1,2,\dots$ *Соответствующие оценки совпадают с* (50)*,* (51)*.*

Утверждение 5 *Пусть Pxy – система координат* (*в общем случае не прямоугольная*) *такая, что ось Px направлена по одной стороне угла* ($\partial\Lambda_2$) *и ось Py – по другой его стороне* ($\partial\Lambda_1$)*. Для сходимости погрешности метода к нулю в пространстве* $H^2(\Lambda)$ *при условии* $\pi/\alpha \in \{b \in \square,\ b \le \nu\}$ *необходимо и достаточно, чтобы след граничного интерполянта* $\overline{\varphi}$ *на сторонах угла* $\partial\Lambda_i$*,* $i = 1,2$*, был следом некоторого гармонического полинома* $p_H(x,y)$ *в координатах Oxy в этом угле.*

\# Покажем здесь, что условия утверждения 4 эквивалентны тому, что $\overline{\varphi}\big|_{\partial\Lambda_i} = \gamma^0 \pi_\nu^N(u)\big|_{\partial\Lambda_i}$ есть след некоторого полинома $p_H(x,y)$, определенного в области угла Λ и гармонического в указанных координатах *Oxy*.

Прямое доказательство. Пусть выполнены условия утверждения 4. Поскольку $q = j\pi/\alpha$, то, очевидно, верно равенство $\cos(j\pi) = (-1)^j$. То есть эквивалентный вид утверждения таков:

$$A_q^1(-1)^j - A_q^2 = 0,\ \ \forall j:\ q = j\pi/\alpha = 1,\dots,\min\{\nu, R-3/2\},\ j = 1,2,\dots \qquad (54)$$

Покажем, что $\forall\, \nu \le R - 3/2$ найдется некоторый гармонический полином $p_\nu(x,y)$ в координатах *Oxy* в окрестности вершины угла Λ и такой, что $p_\nu(x,0) = \overline{\varphi}\big|_{\partial\Lambda_1}$ и $p_\nu(0,y) = \overline{\varphi}\big|_{\partial\Lambda_2}$ – полиномы, удовлетворяющие условию (54).

Множество всех однородных полиномов $H_\nu(\Lambda) = \{p \in \mathrm{P}_\nu(\Lambda),\ \Delta p = 0 \text{ в } \Lambda\}$ в рациональной области $\Lambda \in \square^2$ есть линейная оболочка всех функций $\mathrm{Re}(x_1 \pm i x_2)^m$, $\mathrm{Im}(x_1 \pm i x_2)^m$, $m = 0,\dots,\nu$, в некоторой прямоугольной системе координат Px_1x_2 [14]. Отсюда в системе координат Pxy имеем следующий критерий: полином $p_\nu(x,y)\in H_\nu(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда он разложим по системе базисных функций $\mathrm{Re}(x\pm ye^{i\alpha})^m$, $\mathrm{Im}(x\pm ye^{i\alpha})^m$, $m=0,...,\nu$. Выражение получено заменой координат $Px_1x_2\to Pxy$, где для определенности оси Px_1 и Px берём совпадающими: $x_1=x+y\cos\alpha$ и $x_2=y\sin\alpha$.

Из простого разложения в бином Ньютона имеем:

$$(x\pm ye^{i\alpha})^m=\sum_{j=0}^{m}C_m^j x^{m-j}y^j e^{i\cdot j\alpha},$$

где C_m^j – биномиальные коэффициенты. Тогда $\forall p_\nu(x,y)\in H_\nu(\Lambda)$ справедливо разложение:

$$p_\nu(x,y)=b_0+\sum_{m=1}^{\nu}\left(b_{m1}\mathrm{Re}(x\pm ye^{i\alpha})^m\pm b_{m2}\mathrm{Im}(x\pm ye^{i\alpha})^m\right),$$

где b_{m1}, b_{m2}, b_0 – коэффициенты разложения полинома $p_\nu(x,y)$ перед его элементами $\mathrm{Re}(x\pm ye^{i\alpha})^m$, $\mathrm{Im}(x\pm ye^{i\alpha})^m$ и $\mathrm{Re}(x\pm ye^{i\alpha})^0=\mathrm{Im}(x\pm ye^{i\alpha})^0=\{1\}$ соответственно. Наличие знака “$\pm$”, очевидно, не существено.

Отсюда получим для следа $p_\nu(x,y)$:

$$\gamma^0_{\partial\Lambda_1}p_\nu(x,y)=p_\nu(x,0)=b_0+\sum_{m=1}^{\nu}\left(b_{m1}C_m^0x^m\right),$$

$$\gamma^0_{\partial\Lambda_2}p_\nu(x,y)=p_\nu(0,y)=b_0+\sum_{m=1}^{\nu}\left(b_{m1}\mathrm{Re}\left[C_m^my^me^{i\cdot m\alpha}\right]\pm b_{m2}\mathrm{Im}\left[C_m^my^me^{i\cdot m\alpha}\right]\right),$$

где $C_m^0=C_m^m=1$. Окончательно:

$$p_\nu(x,0)=b_0+\sum_{m=1}^{\nu}b_{m1}x^m, \tag{55}$$

$$p_\nu(0,y)=b_0+\sum_{m=1}^{\nu}\left(b_{m1}\cos(m\alpha)\pm b_{m2}\sin(m\alpha)\right)y^m. \tag{56}$$

Здесь $A_m^1=b_{m1}$, $A_m^2=b_{m1}\cos(m\alpha)\pm b_{m2}\sin(m\alpha)$, $A_0^1=A_0^2=b_0$. Из сопоставления коэффициентов получим, что $\forall\,\nu$ $(\nu\le R-3/2)$ выполнены соотношения:

$$A_m^2 = A_m^1 \cos(m\alpha) \pm b_{m2} \sin(m\alpha),\ m = 0,...,\nu. \tag{57}$$

Отсюда для $m = q = j\pi / \alpha$:

$$A_q^2 = A_q^1 \cos(j\pi) \pm b_{m2} \sin(j\pi) = A_q^1 (-1)^j,\ q = j\pi / \alpha = 0,...,\nu, \tag{58}$$

что соответствует выполнению условия (54) при $\nu \le R - 3/2$.

Обратное доказательство следует из произвольности коэффициента b_{m2} в соотношении (57) (при разложении различных полиномов p_ν). Коэффициент A_m^2 принимает произвольные значения, определяемые $A_m^1 = b_{m1}$ и b_{m2}, если $\sin(m\alpha) \ne 0$. Если $\sin(m\alpha) = 0$, то $A_m^2 = A_m^1 \cos(m\alpha)$. Откуда $m\alpha = j\pi$, $j = 1,2,...$, $m = 0,...,\nu$.

Из соотношений (55) и (56) видно также, что и остальные коэффициенты b_{m1}, b_{m2}, $m \ne j\pi / \alpha$, также произвольны. Поэтому при условии $b_0 = A_0^1 = A_0^2$ выражения $A_m^2 - A_m^1 \cos(m\alpha) = b_{m2} - b_{m1} \cos(m\alpha) = 0$, $m = j\pi / \alpha$, $j = 1,2,...$, $m = 0,...,\nu$, определяют гармонический полином в области Λ.

При условии $R \le \nu + 3/2$ соотношения при $m > \nu + 3/2$ возможно просто отбросить, поскольку они не повлияют на сходимость метода согласно выводам подраздела 3.2.2. #

3.3 Локальные оценки для M>2

При $M \in \mathbb{N}$, $M \ge 3$ норма ошибки $\|u - \overline{u}\|_{M,\Lambda}$ расходится, поэтому дальнейшее рассмотрение аппроксимации МКСЭ по энергии в шкале соболевских пространств с целочисленным индексом нецелесообразно. МКСЭ не обладает аппроксимационными свойствами в энергетической норме в шкале пространств Соболева при $M \ge 3$, $M \in \mathbb{N}$. Покажем это.

Оценка ошибки расчета в пространстве $H^M(\Lambda)$ для $M = 3$ может быть сведена к оценке величины:

$$\sum_k \left\| \gamma^0 \nabla^2 u - \gamma^0 \nabla^2 \overline{u} \right\|_{H^{1/2}(S_k)} \lesssim \sum_k \left[\left\| \frac{d^2 \gamma^0 u}{d\tau^2} - \frac{d^2 \gamma^0 \overline{u}}{d\tau^2} \right\|_{H^{1/2}(S_k)} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial n^2} \right\|_{H^{1/2}(S_k)} \right].$$

Для выражения $\partial^2\overline{u}/\partial n^2$ из (29) имеем:

$$
\left.\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial n^2}\right|_I = \begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{\nu} r^{q-2}\cdot\left(\overline{b}_q q\cos(q\theta)+\overline{a}_q q\sin(q\theta)\right),\ \theta=\{0,\alpha\},\ \text{если}\ \pi/\alpha\notin\{b\in\square,\ b\le\nu\}, \\ \sum\limits_{\substack{q=j\pi/\alpha\\ 1<q\le\nu}}\left[r^{q-2}\cdot\overline{c}_q\cos(q\theta)+r^{q-2}\ln r\cdot\overline{c}_q q\cos(q\theta)\right]+ \\ +\sum\limits_{\substack{q\ne j\pi/\alpha\\ 1\le q\le\nu}} r^{q-2}\cdot\left(\overline{b}_q q\cos(q\theta)+\overline{a}_q q\sin(q\theta)\right),\ \theta=\{0,\alpha\},\ \text{если}\ j\pi/\alpha\in\{b\in\square,\ b\le\nu\}, \\ \text{при любом}\ j=1,2,..., \end{cases}
$$

где при $q=1$ слагаемое не обнуляется. Поэтому оба случая содержат величину $c(\theta)\cdot 1/r\in L_2(I)$, которая не входит в пространство $H^{1/2}(I)$. Отсюда величина ошибки

$$
\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}-\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial n^2}\right\|_{H^{1/2}(S_k)}\to\infty \ \text{и}\ \left\|u-\overline{u}\right\|_{M,\Omega}\to\infty
$$

бесконечна, а аппроксимации степени градиента решения порядка более двух нет (случай $M>3$, очевидно, аналогичен либо следует из расхождения при показателе $M=3$).

4 Список литературы

[1] Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б. *Качественный анализ и численное исследование метода конечных суперэлементов Федоренко* // Тезисы всероссийской конференции по вычислительной математике "КВМ – 2007", 18 – 20 июня, 2007, Академгородок, Новосибирск, Россия, с. 23.

[2] Галанин М.П., Савенков Е.Б. К обоснованию метода конечных суперэлементов // *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, т. 43, n. 5, 2003, с. 711 – 727.

[3] Жуков В.Т, Новикова Н.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. *Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии* // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, n. 8, 2001. – 36 с.

[4] Федоренко Р.П. *Введение в вычислительную физику.* – МФТИ, Москва, 1994. – 528 с.

[5] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Numerical investigation of the Finite Superelement Method for the 3D elasticity problems // *Mathematical Modelling and Analysis*, v. 12, n. 1, 2007, p. 39 – 50.

[6] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Fedorenko Finite Superelement Method and its Applications // *Computational Methods in Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2007, p. 3– 24.

[7] Лазарева С.А. Аппроксимационные свойства метода конечных суперэлементов Федоренко // *Вычислительные технологии*, 2008, т. 13, n. 8 спец. вып., с. 75 – 81.

[8] Галанин М.П., Лазарева С.А. *Точность аппроксимаций метода конечных суперэлементов Федоренко в пространствах Соболева* // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2008, в печати. – 31 с.

[9] Галанин М.П., Лазарева С.А. *Локальная гладкость и асимптотика решения метода конечных суперэлементов в угловых точках разбиения* // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2008, в печати. – 31 с.

[10] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. Мир, Москва, 1971. – 371 с.

[11] Рябенький В.С. *Введение в вычислительную математику.* Физматлит, Москва, 1994. – 336 с.

[12] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Наука, Москва, 1988. – 336 с.

[13] Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*. – Мир, Москва, 1980. – 664 с.

[14] *Математическая энциклопедия.* В 5 т. Т.1: *Гармонический многочлен* / гл. ред. Виноградов И.М. – Советская Энциклопедия, Москва, 1977.

[15] Borsuk M., Kondratiev V. *Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains*. – Elsevier, North-Holland, 2006. – 538 p.

[16] Costabel M., Dauge M. Construction of corner singularities for Agmon-Douglis-Nirenberg elliptic systems // *Mathematische Nachrichten,* v. 162, n. 1, 1993, p. 209 – 237.

[17] Costabel M., Dauge M. Stable asymptotics for elliptic systems on plane domains with corners // *Communications in Partial Differential Equations,* v. 19, n. 9–10, 1994, p. 1677 – 1726.

[18] Bernardi Ch., Dauge M., Maday Y. *Polynomials in the Sobolev World* // Internal Report, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 2003. – 97 p.

[19] DeVore R.A. Nonlinear approximation // *Acta Numerica*, n. 7, 1998, p. 51 – 150.

[20] Jerison J., Kenig C.E. The inhomogeneous Dirichlet problem in lipschitz domains // *Journal of Functional Analysis*, n. 130, 1995, p. 161 – 219.

[21] Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*.– American Mathematical Society, 1997. – 414p.

[22] Sändig A.-M. *Regularity results for linear elliptic boundary value problems in polygons* // Lectures at the Charles university Prague, 2005. – 38 p.