



Тучин А.Г.

Проектирование  
квазисинхронных орбит КА  
вокруг Фобоса для решения  
задачи посадки на его  
поверхность

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Тучин А.Г. Проектирование квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 15. 30 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-15>

**Российская Академия Наук**

Ордена Ленина

**Институт прикладной математики**

**им. М.В. Келдыша**

Тучин А.Г.

**Проектирование квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса  
для решения задачи посадки на его поверхность**

Москва  
2008

## Аннотация

Тучин А.Г.

### **Проектирование квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса для решения задачи посадки на его поверхность**

Рассмотрена задача проектирования квазисинхронных орбит КА вокруг Фобоса. Квазисинхронные орбиты — это далекие по отношению к сфере Хилла квазиспутниковые орбиты с обратным направлением вращения в ограниченной задаче трех тел. Орбита должна проходить через заданную точку в заданный момент времени и обладать свойством минимальной удаленности от поверхности Фобоса при каждом прохождении над районом предполагаемой посадки. Уравнения динамики представлены в форме, описывающей орбиту в виде композиции движений по двум эллипсам: внутреннему и внешнему. Центр внешнего эллипса находится на внутреннем эллипсе. Получена формула, связывающая полуоси внутреннего и внешнего эллипсов. Она использована при построении начального приближения численно проектируемой орбиты, что позволило значительно упростить и ускорить процесс расчета. Приведены полученные в результате вычислений таблицы начальных условий.

A.D. Tuchin

### **The design of spacecraft quasi-synchronous orbits around Phobos for landing on its surface**

The design of spacecraft quasi-synchronous orbits around Phobos is considered. Quasi-synchronous orbits are retrograde quasi-satellite orbits outlying from Hill sphere in the plane elliptic restricted three-body problem. The orbit should pass through the preset point at the prescribed instant of time and at minimum distance from Phobos surface every time it passes over assumed region of landing. The dynamical equations are presented in form describing the orbit as composition of motions along two ellipses: inner and outer. The formula describing the relation between semiaxes of inner and outer ellipses is derived. This formula has been used for an evaluation of the initial approach to the numerically designed orbit. Thus computing process was greatly simplified and accelerated. The tables containing evaluated initial conditions are reported.

## Введение

Обеспечение успешной посадки КА на поверхность Фобоса предполагает решение следующей задачи проектирования квазисинхронной орбиты (КСО) КА вокруг Фобоса. Выбирается точка на поверхности Фобоса и время, в которое проектируемая КСО должна пройти над этой точкой. Точка на поверхности выбирается специалистами в области геологии и учёными, обеспечивающими эксперименты после посадки КА на поверхность Фобоса. Время, в которое КСО должна проходить над заданной точкой поверхности, выбирается из условий освещенности и радиосвязи со станциями слежения [1].

Движение по КСО может быть описано как облёт Фобоса по дрейфующему эллипсу [2-5]. Большая полуось эллипса ориентирована вдоль орбитального движения Фобоса. КА обегает эллипс в направлении, обратном к орбитальному движению Фобоса, с периодом, близким к периоду обращения Фобоса вокруг Марса. Дрейф эллипса также проходит вдоль оси, ориентированной по орбитальному движению Фобоса.

Для обеспечения успешной посадки нужна такая КСО, дрейф которой был бы минимален. Это позволит при необходимости, если процесс посадки не был начат, начать его в одном из следующих прохождений над районом посадки, повторить посадку, произвести телевизионную съёмку района посадки, выполнить измерения высоты до поверхности Фобоса при его облёте. Подобные КСО КА вокруг Фобоса для удалений от его поверхности на расстояния 50, 55 и 60 км были найдены в [1]. Кольцеобразные области, в которых находятся КСО, имеют ширину: 5.3, 6.7 и 8.3 км для начальных удалений 50, 55 и 60 км соответственно. Облёт КА вокруг Фобоса на таких орбитах происходит быстрее по отношению к периоду обращения Фобоса вокруг Марса. Средняя относительная разность угловых скоростей находится в диапазонах: 0.215–0.234, 0.182–0.199 и 0.154–0.170 для КСО с удалениями 50, 55 и 60 км соответственно.

При поиске КСО в качестве упрощённой модели движения использовалась плоская эллиптическая задача Хилла в безразмерных переменных.

В настоящей статье предложен более быстродействующий, по сравнению с [1], алгоритм поиска КСО в рамках упрощённой модели. Быстродействие алгоритма достигнуто за счёт использования начального приближения, формируемого из эволюционных уравнений.

При получении эволюционных уравнений исходные уравнения плоской эллиптической задачи Хилла были преобразованы к системе уравнений, связывающих четыре переменные: полуоси двух эллипсов (внутреннего и внешнего), фазу движения по внешнему эллипсу и разность фаз движения по внешнему и внутреннему эллипсам. Центр внешнего эллипса находится на внутреннем эллипсе. Движение по внутреннему эллипсу происходит против часовой стрелки, а по внешнему – по часовой стрелке. Разность фаз движения по внутреннему и внешнему эллипсам близка к  $\pi$ . Ищутся такие начальные

условия, при которых движение КА и центра эллипса происходит в узких кольцеобразных областях. Усреднение системы дифференциальных уравнений в указанных выше переменных позволяет получить уравнение, связывающее средние значения полуосей внутреннего и внешнего эллипсов.

Алгоритм формирования начального приближения по заданному положению КА относительно Фобоса и значению истинной аномалии Фобоса, соответствующей заданному моменту времени, позволяет получить значения четырёх указанных переменных, обеспечивающих характеристики движения, близкие к искомым. При формировании начального приближения используется уравнение, связывающее средние значения полуосей внутреннего и внешнего эллипсов, и то, что среднее значение разности фаз движения по внешнему и внутреннему эллипсам должно быть близко к  $\pi$ .

Сформированное приближение используется численным алгоритмом, определяющим начальные условия. Численный алгоритм построен на основе комбинированного применения методов градиентного спуска и золотого сечения.

В статье приведены полученные в результате вычислений таблицы начальных условий для максимальных удалений от поверхности Фобоса в диапазоне от 50 до 200 км.

При разработке алгоритма были использованы идеи и методы, изложенные в работах [5–10]. Задачи баллистико-навигационного проектирования в проекте «Фобос-Грунт» представлены в работах [11–15].

### 1. Упрощенные уравнения движения

Рассмотрена система дифференциальных уравнений, приближённо описывающая движение КА относительно Фобоса в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= 2v + \rho \left( 3x - \frac{x}{r^3} \right), \\ \dot{v} &= -2u - \rho \frac{y}{r^3}, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho = \frac{1}{1 + e \cos v}, \quad v - \text{истинная аномалия Фобоса.}$$

Точка означает дифференцирование по истинной аномалии. При  $e = 0$  система имеет интеграл Якоби:  $u^2 + v^2 - 3x^2 - \frac{2}{r}$ .

Безразмерные переменные  $x$  и  $y$  связаны с положением КА относительно Фобоса в км  $X$ ,  $Y$  следующими соотношениями:

$$X = \rho \cdot k_H \cdot x, \quad Y = \rho \cdot k_H \cdot y, \quad \text{где } k_H = P \cdot \sqrt[3]{\frac{\mu_{Ph}}{\mu_{Ph} + \mu_M}} \approx 25.287.$$

Здесь,

- $P$  – параметр орбиты Фобоса,  
 $\mu_{Ph}, \mu_M$  – гравитационные постоянные Фобоса и Марса.

Невозмущенное движение  $\left(\frac{1}{r^3} \square 1\right)$  с нулевым эксцентриситетом  $e$

описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= 2v + 3x, \\ \dot{v} &= -2u. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (2) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x &= 2k_3 + k_1 \cos \nu + k_2 \sin \nu, \\ y &= -3k_3 \nu + k_4 - 2k_1 \sin \nu + 2k_2 \cos \nu, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – постоянные.

Решение уравнения (1) можно рассматривать как движение по эллипсу, центр которого имеет координаты:  $X = 2k_3$  и  $Y = -3k_3 \nu + k_4 = -\frac{3}{2} X \nu + k_4$ .

Используя координаты центра эллипса, выражение (3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{1}{2} A \cos(\nu - \varphi), \\ y &= Y - A \sin(\nu - \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где

- $A = 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  – большая полуось оскулирующего эллипса,  
 $\varphi$  – разность фаз между движением КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса, определяемая из условия:  $\sin \varphi = \frac{k_1}{2A}$ ,  
 $\cos \varphi = \frac{k_2}{2A}$ .

Используя (4), найдем, что  $u = -\frac{1}{2} A \sin(\nu - \varphi)$ ,  $v = -\frac{3}{2} X - A \cos(\nu - \varphi)$ . (5)

Соотношения (4) и (5) описывают замену переменных в уравнении (1), в результате которой происходит переход от переменных  $x, y, u, v$  к новым переменным  $X, Y, A, \varphi$ . Полученная в результате система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \rho \frac{2A \sin(\nu - \varphi) - 2Y}{r^3}, \\ \dot{Y} &= -\frac{3}{2} X + \rho \frac{2X + A \cos(\nu - \varphi)}{r^3} + (6X + 3A \cos(\nu - \varphi))(1 - \rho), \\ \dot{A} &= \rho \frac{2X \sin(\nu - \varphi) + 4Y \cos(\nu - \varphi) - 3A \sin(\nu - \varphi) \cos(\nu - \varphi)}{r^3} + \\ &+ (6X + 3A \cos(\nu - \varphi))(1 - \rho) \sin(\nu - \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{\varphi} = \rho \frac{4Y \sin(\nu - \varphi) - 2X \cos(\nu - \varphi) - 3A \sin^2(\nu - \varphi) - A}{Ar^3} - \frac{(6X + 3A \cos(\nu - \varphi))(1 - \rho) \cos(\nu - \varphi)}{A},$$

где  $r = \sqrt{\frac{3}{4}A^2 \sin^2(\nu - \varphi) + AX \cos(\nu - \varphi) - 2AY \sin(\nu - \varphi) + \frac{1}{4}A^2 + X^2 + Y^2}$ .

Вычисляя производные от  $\frac{1}{r}$  по  $X, Y, A, \varphi$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{A \cos(\nu - \varphi) + 2X}{2r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{A \sin(\nu - \varphi) - 2Y}{2r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{4Y \sin(\nu - \varphi) - 3A \sin^2(\nu - \varphi) - 2X \cos(\nu - \varphi) - 2A}{4r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{3A^2 \sin(\nu - \varphi) \cos(\nu - \varphi) - 2AX \sin(\nu - \varphi) - 4AY \cos(\nu - \varphi)}{4r^3}. \end{aligned} \tag{7}$$

Упростим (6) с использованием (7):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= 2\rho \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{r} \right), \\ \dot{Y} &= -\frac{3}{2}X - 2\rho \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{r} \right) + (6X + 3A \cos(\nu - \varphi))(1 - \rho), \\ \dot{A} &= -\frac{4\rho}{A} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) + (6X + 3A \cos(\nu - \varphi)) \sin(\nu - \varphi) (1 - \rho), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\rho}{4A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{(6X + 3A \cos(\nu - \varphi)) \cos(\nu - \varphi) (1 - \rho)}{A}. \end{aligned} \tag{8}$$

Эволюционное движение системы (8) изучено в работе [3] для случая плоского кругового движения задачи Хилла ( $\rho = 1$ ) в условиях удаления тела нулевой массы от тела меньшей массы на расстояния, значительно превышающие радиус сферы Хилла. В этой работе получены эволюционные уравнения движения центра эллипса вдоль оси  $Y$ . Найдены два интеграла эволюционных уравнений. Первый интеграл – большая полуось орбиты. Второй интеграл – результат преобразования интеграла Якоби к новым координатам. Получено соотношение для периода либрации и его предельные значения для малых амплитуд либрации. Пространственный случай эволюционного движения в аналогичных условиях исследован в работе [4]. В этих работах с целью изучения эволюции вдоль оси  $Y$  при упрощении системы уравнений была исключена составляющая, описывающая эволюционное движение вдоль  $X$ . Тем самым отброшено множество

движений, представляющих практический интерес [1]. Поэтому, решая задачу построения системы эволюционных уравнений для поиска решений системы (1), обладающих заданным свойством, нужно специальным образом выбрать фазовые переменные.

Одним из основных элементов при построении системы эволюционных уравнений является представление интеграла  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv}{r}$  через выбранные фазовые параметры. Такие представления с использованием полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода найдены в работах [3-6].

Рассмотрим теперь уравнение (1) и представим движение вокруг Фобоса с использованием двух эллипсов. КА движется по эллипсу, полуоси которого равны  $A(v)$  и  $\frac{1}{2}A(v)$ . Разность фаз между движением КА вокруг Фобоса и Фобоса вокруг Марса составляет  $\varphi(v)$ . Центр эллипса, по которому движется КА, также движется по эллипсу, полуоси которого равны  $\kappa a(v)$  и  $a(v)$ ;  $\kappa$  – константа. Разность фаз между движением КА и движением центра эллипса составляет  $\xi$ . Такому представлению движения КА соответствует замена переменных:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(v - \varphi + \xi) + \frac{1}{2} A \cos(v - \varphi), \\ y &= -\kappa a \sin(v - \varphi + \xi) - A \sin(v - \varphi), \\ u &= -\frac{1}{2} A \sin(v - \varphi), \\ v &= -\frac{3}{2} a \cos(v - \varphi + \xi) - A \cos(v - \varphi). \end{aligned} \tag{9}$$

После выполнения замены переменных (9) уравнение (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{3}{4} \frac{a}{\kappa} \sin(2(v - \varphi + \xi)) + \\ &+ \frac{\rho}{r^3} \left( A \left( 2 \sin(v - \varphi) \cos(v - \varphi + \xi) - \frac{1}{\kappa} \cos(v - \varphi) \sin(v - \varphi + \xi) \right) \right) + \\ &+ \frac{\rho}{r^3} \left( a \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \sin(2(v - \varphi + \xi)) \right) - \\ &- \frac{3}{\kappa} \left( a \sin(2(v - \varphi + \xi)) + A \cos(v - \varphi) \sin(v - \varphi + \xi) \right) (1 - \rho), \end{aligned} \tag{10.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -1 + \frac{3}{2\kappa} \cos^2(v - \varphi + \xi) - \\ &- \frac{\rho}{r^3} \left( 1 + 2\kappa + 3 \sin^2(v - \varphi) + 2 \left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right) \cos^2(v - \varphi + \xi) \right) - \\ &- \frac{\rho}{r^3} \left( \left( 2\kappa \frac{a}{A} + \frac{A}{a} \right) \left( 2 \sin(v - \varphi + \xi) \sin(v - \varphi) + \frac{1}{\kappa} \cos(v - \varphi + \xi) \cos(v - \varphi) \right) \right) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -(1-\rho) \left( \frac{3}{\kappa} \left( 2\kappa \frac{a}{A} + \frac{A}{a} \right) \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + 3 \cos^2(\nu - \varphi) + \frac{6}{\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) \right), \\
\dot{A} = & \frac{\rho}{r^3} (2a \cos(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) - 4a\kappa \sin(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi)) - \\
& - \frac{\rho}{r^3} \left( \frac{3}{2} A \sin(2(\nu - \varphi)) \right) + \\
& + (6a \cos(\nu - \varphi + \xi) + 3A \cos(\nu - \varphi)) \sin(\nu - \varphi) (1 - \rho), \\
\dot{\varphi} = & \frac{\rho}{r^3} \left( -4\kappa \frac{a}{A} \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) - 2 \frac{a}{A} \cos(\nu - \varphi) \cos(\nu - \varphi + \xi) \right) - \\
& - \frac{\rho}{r^3} (3 \sin^2(\nu - \varphi) - 1) - \\
& - \left( 6 \frac{a}{A} \cos(\nu - \varphi + \xi) + 3 \cos(\nu - \varphi) \right) \cos(\nu - \varphi) (1 - \rho).
\end{aligned} \tag{10.2}$$

Интеграл Якоби, для системы (10.1, 10.2) при  $e = 0$ , ( $\rho = 1$ ), имеет вид:

$$\frac{1}{4} A^2 - \frac{3}{8} a^2 \cos(2(\nu - \varphi + \xi)) - \frac{3}{8} a^2 - \frac{2}{r}.$$

## 2. Предварительный численный анализ. Постановка задачи аналитических исследований

В результате численного интегрирования системы уравнений (10.1-10.2) по начальным условиям, найденным в работе [1], получены траектории, имеющие вид, показанный на рис. 1. Положение центра эллипса  $X, Y$  определяется формулами:

$$\begin{aligned}
X &= a \cos(\nu - \varphi + \xi), \\
Y &= -a\kappa \sin(\nu - \varphi + \xi).
\end{aligned} \tag{11}$$

Положение точки нулевой массы определяется формулами (4). Траектории, показанные на рис. 1, получены при  $\kappa = 2$  по следующим начальным условиям:  $\nu = 0$ ,  $a = 0.459800$ ,  $\xi = 3.141593$ ,  $A = 3.376023$ ,  $\varphi = 4.712389$ .

Как видно из рис. 1, при начальных условиях, найденных в [1], движение КА (точки нулевой массы) и центра эллипса происходит в узких кольцеобразных областях, внешней и внутренней. КА имеет обратное движение по отношению к движению Фобоса вокруг Марса, а центр эллипса – прямое. Внешнее кольцо – это кольцо, в которое попадает траектория КА. КА движется по перемещающемуся эллипсу, центр которого движется в противофазе по отношению к КА. Поэтому КА всегда находится в области пересечения перемещающегося эллипса и внешнего кольца. Большая полуось эллипса практически не меняется. Перемещение эллипса происходит за счёт движения его центра в пределах внутреннего кольца. При этом значения  $a$  и  $A$  близки к своим средним значениям, а значение  $\xi$  близко к  $\pi$ .

Рассмотрим  $a_m, \xi_m, A_m, \dot{a}_m, \dot{\xi}_m, \dot{A}_m$  – средние значения величин  $a, \xi, A$  и их производных  $\dot{a}, \dot{\xi}, \dot{A}$ :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} a d\nu, & A_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} A d\nu, & \xi_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} \xi d\nu, \\ \dot{a}_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} \dot{a} d\nu, & \dot{A}_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} \dot{A} d\nu, & \dot{\xi}_m &= \frac{1}{2\pi n} \int_{\nu_0}^{\nu_0+2\pi n} \dot{\xi} d\nu. \end{aligned} \quad (12)$$

В таблицах 2.1, 2.2, 2.3 приведены результаты расчётов величин  $a_m, \xi_m, A_m, \dot{a}_m, \dot{\xi}_m, \dot{A}_m$  для трех вариантов начальных условий (удаления начальной точки от поверхности Фобоса), найденных в [1]. Таблицы содержат по три строки. Первая строка соответствует удалению на 50 км, вторая – на 55 км, третья – на 60 км. Из этих таблиц видно, что с удалением орбиты от поверхности Фобоса среднее значение полуоси внешнего эллипса  $A_m$  возрастает, а внутреннего  $a_m$  убывает. Средние значения производных  $\dot{A}_m, \dot{a}_m$  близки к нулю. Среднее значение разности фаз  $\xi$  близко к  $\pi$ , а  $\dot{\xi}_m$  – среднее значение производной – к нулю.

Из приведенных выше рассмотрений следует постановка задачи для аналитических исследований. Нужно построить осредненную систему уравнений для исходной системы (10.1) и (10.2) и найти ее решения, обладающие свойствами:  $\dot{A}_m = 0, \dot{a}_m = 0, \xi_m = \pi, \dot{\xi}_m = 0$ .

Далее, используя найденное аналитическим способом решение и разбросы мгновенных значений относительно средних, можно сканированием в достаточно узкой области найти искомое решение системы (10.1), (10.2), обладающее свойством попадания орбиты в узкую кольцеобразную область вокруг Фобоса (тела меньшей массы).

**Таблица 2.1.** Диапазоны изменения средних и мгновенных значений полуоси внешнего эллипса и ее производной

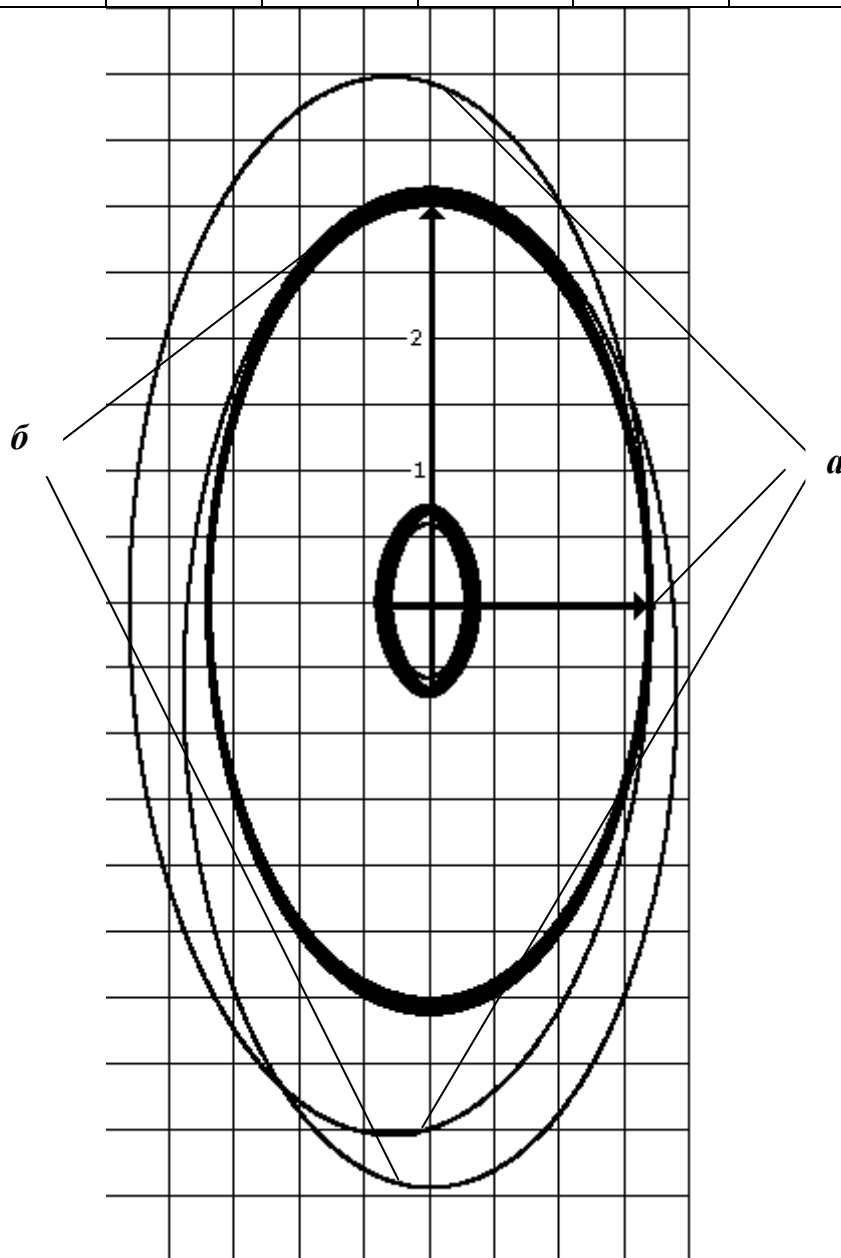
	$\min A_m$	$\max A_m$	$\min A$	$\max A$	$\min \dot{A}_m$	$\max \dot{A}_m$	$\min \dot{A}$	$\max \dot{A}$
1	3.5224	3.5687	3.3286	3.8763	0.0000	0.0006	-0.6894	0.6894
2	3.6130	3.6720	3.4318	3.9590	0.0000	0.0007	-0.6237	0.6237
3	3.7150	3.7867	3.5444	4.0555	0.0000	0.0005	-0.5681	0.5681

**Таблица 2.2.** Диапазоны изменения средних и мгновенных значений полуоси и производной внутреннего эллипса и ее производной

	$\min a_m$	$\max a_m$	$\min a$	$\max a$	$\min \dot{a}_m$	$\max \dot{a}_m$	$\min \dot{a}$	$\max \dot{a}$
1	0.4416	0.4656	0.3929	0.5310	-0.0001	0.0000	-0.1570	0.1572
2	0.3984	0.4217	0.3464	0.4850	-0.0001	0.0001	-0.1501	0.1502
3	0.3607	0.3832	0.3054	0.4450	-0.0001	0.0000	-0.1460	0.1459

**Таблица 2.3.** Диапазоны изменения средних и мгновенных значений разности фаз в движении по внутреннему и внешнему эллипсам и производной разности фаз

	$\min \xi_m$	$\max \xi_m$	$\min \xi$	$\max \xi$	$\min \dot{\xi}_m$	$\max \dot{\xi}_m$	$\min \dot{\xi}$	$\max \dot{\xi}$
1	3.1413	3.1416	2.8364	3.4468	-0.0003	0.0004	-0.4886	0.7620
2	3.1413	3.1416	2.8041	3.4793	-0.0004	0.0004	-0.4947	0.8404
3	3.1412	3.1416	2.7703	3.5127	-0.0005	0.0004	-0.5007	0.9262



**Рис. 1.** Траектории движения точки нулевой массы (КА) и центра перемещающегося эллипса. Мгновенные положения эллипсов, по которым движется КА, показаны для двух моментов времени, когда  $\nu + \varphi = 0$  (а) и  $\nu + \varphi = \frac{3\pi}{2}$  (б). Центры этих эллипсов находятся в точках внутреннего кольца, из которых начинаются стрелки.

### 3. Подготовка системы (10.1), (10.2) к усреднению

Используя зависимость  $r$  от  $a, \xi, A, \varphi$ , преобразуем систему (10.1), (10.2).

$$r^2 = \frac{3}{4}A^2 \sin^2(\nu - \varphi) + Aa \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + 2Aa\kappa \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) + \frac{A^2}{4} + a^2 \cos^2(\nu - \varphi + \xi) + a^2\kappa^2 \sin^2(\nu - \varphi + \xi) \quad (13)$$

Вычислим производные  $r^2$  по  $a, \xi, A, \varphi$ .

$$\frac{\partial r^2}{\partial a} = a\kappa \left( \frac{A}{a\kappa} \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + 2 \frac{A}{a} \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) \right) + a\kappa \left( 2\kappa + \left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right) \cos^2(\nu - \varphi + \xi) \right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial \xi} = a\kappa A \left( 2 \cos(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) - \frac{1}{\kappa} \sin(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) \right) + a\kappa \left( \left( a\kappa - \frac{a}{\kappa} \right) \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial A} = \frac{A}{2} \left( 3 \sin^2(\nu - \varphi) + 2 \frac{a}{A} \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + \frac{4a\kappa}{A} \sin(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) + 1 \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial \varphi} = \frac{A}{2} \left( 2a \cos(\nu - \varphi + \xi) \sin(\nu - \varphi) - 4a\kappa \sin(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) \right) - \frac{A}{2} \left( \frac{3}{2} A \sin(2(\nu - \varphi)) + \frac{\partial r^2}{\partial \xi} \right). \quad (17)$$

В каждом из 4-х уравнений (10.1) и (10.2) выделим сумму членов в скобках, которые умножаются на  $\frac{\rho}{r^3}$ . Заметим, что эта сумма в уравнении для  $\dot{a}$  равна  $\frac{1}{\kappa a} \frac{\partial r^2}{\partial \xi}$ , в уравнении для  $\dot{\xi}$  —  $-\left( \frac{2}{A} \frac{\partial r^2}{\partial A} + \frac{1}{a\kappa} \frac{\partial r^2}{\partial a} \right)$ , в уравнении для  $\dot{A}$  —  $\frac{2}{A} \left( \frac{\partial r^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial r^2}{\partial \xi} \right)$ , в уравнении для  $\dot{\varphi}$  —  $-\frac{2}{A} \frac{\partial r^2}{\partial A}$ . Используя это, преобразуем систему (10.1) и (10.2) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{3a}{4\kappa} \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) - \frac{2\rho}{a\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) - \\ &\quad - \left( \frac{3a}{\kappa} \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) + \frac{3A}{\kappa} \cos(\nu - \varphi) \sin(\nu - \varphi + \xi) \right) (1 - \rho), \\ \dot{\xi} &= -1 + \frac{3}{2\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) + \rho \left( \frac{4}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{a\kappa} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) \right) - \\ &\quad - \left( \frac{6a}{A} \cos(\nu - \varphi + \xi) \cos(\nu - \varphi) + 3 \cos^2(\nu - \varphi) + \frac{6}{\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) \right) (1 - \rho) \end{aligned} \quad (18.1)$$

$$+ \frac{3A}{a\kappa} \cos(\nu - \varphi) \cos(\nu - \varphi + \xi)(1 - \rho),$$

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -\frac{4\rho}{A} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) \right) + \\ & + (6a \cos(\nu - \varphi + \xi) + 3A \cos(\nu - \varphi)) \sin(\nu - \varphi)(1 - \rho), \end{aligned} \quad (18.2)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{4\rho}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) - \left( \frac{6a}{A} \cos(\nu - \varphi + \xi) + 3 \cos(\nu - \varphi) \right) \cos(\nu - \varphi)(1 - \rho).$$

Правильность тождественных преобразований системы (10.1), (10.2) к виду (18.1), (18.2) подтверждена численной проверкой, при которой одновременно интегрировались указанные выше системы уравнений и сопоставлялись полученные результаты.

#### 4. Частный случай плоского кругового движения задачи Хилла ( $\rho=1$ )

В случае плоской круговой задачи система (18.1), (18.2) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{3a}{4\kappa} \sin(2(\nu - \varphi + \xi)) - \frac{2}{a\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right), \\ \dot{\xi} &= -1 + \frac{3}{2\kappa} \cos^2(\nu - \varphi + \xi) + \left( \frac{4}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{a\kappa} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) \right), \\ \dot{A} &= -\frac{4}{A} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) \right), \\ \dot{\varphi} &= \frac{4}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Усредним систему (19) на интервале от 0 до  $2\pi$ . Обозначим среднее значение  $\frac{1}{r}$ , умноженное на  $2\pi$ , как  $I$ , т.е.  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\nu}{r}$ , а средние значения переменных как

$a_m, \xi_m, A_m, \varphi_m$ . Эти средние значения удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_m &= -\frac{1}{\pi a_m \kappa} \frac{\partial I}{\partial \xi}, \\ \dot{\xi}_m &= -1 + \frac{3}{4\kappa} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{A} \frac{\partial I}{\partial A} + \frac{1}{a_m \kappa} \frac{\partial I}{\partial a} \right), \\ \dot{A}_m &= -\frac{2}{\pi A_m} \left( \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \frac{\partial I}{\partial \xi} \right), \\ \dot{\varphi}_m &= \frac{2}{\pi A_m} \frac{\partial I}{\partial A}. \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, что  $I$  не зависит от фазы  $\varphi$ . Поэтому  $\frac{\partial I}{\partial \varphi} = 0$ . Отсюда следует, что

справедливо равенство:  $\kappa a_m \dot{a}_m = \frac{1}{2} A_m \dot{A}_m$ . Поэтому  $A_m^2 - 2\kappa a_m^2$  — интеграл

системы (20). Интеграл Якоби для усреднённой системы (20) имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} A_m^2 - \frac{3\pi}{4} a_m^2 - 2I.$$

### 5. Вычисление значения интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{d\nu}{r}$

Введем обозначения:  $s = \nu - \varphi$ ,  $w_1 = \sin \xi$ ,  $w_2 = \cos \xi$ . Используя эти обозначения, преобразуем (13) к виду:

$$r^2 = c_0 + c_1 \cos 2s + c_2 \sin 2s, \quad (21)$$

где

$$c_0 = \frac{5}{8} A^2 + \frac{1}{2} a^2 (1 + \kappa^2) + Aa \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) w_2,$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{4} A^2 - Aa(2\kappa - 1)w_2 + a^2(1 - \kappa^2)(w_2^2 - w_1^2) \right),$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} (Aa(1 - 2\kappa)w_1 + 2a^2(1 - \kappa^2)w_1w_2).$$

Обозначим  $d = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Пусть  $\eta$  определяется как  $\cos \eta = \frac{c_1}{d}$ ,  $\sin \eta = \frac{c_2}{d}$ , тогда

(21) преобразуется к виду:

$$r^2 = c_0 + d \cos(2s - \eta), \quad (22)$$

где  $c_0 > d$ , т. к. в рассматриваемом множестве решений  $r > 0$ .

Рассмотрим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{r} = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{\sqrt{c_0 + d \cos(2s - \eta)}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{ds}{\sqrt{c_0 + d \cos 2s}}. \quad (23)$$

Т.к.  $c_0 > d$ , для  $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$  применима формула 2.571 пункт 4 из [16], которая

позволяет представить неопределенный интеграл  $\int \frac{ds}{\sqrt{c_0 + d \cos 2s}}$  через

неполный эллиптический интеграл первого рода:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{c_0 + d \cos 2s}} = \frac{2}{\sqrt{c_0 + d}} F \left( s, \sqrt{\frac{2d}{c_0 + d}} \right), \quad (24)$$

где  $F(s, k)$  — эллиптический интеграл первого рода,  $k = \sqrt{\frac{2d}{c_0 + d}}$  — модуль

интеграла.

Используя (24), преобразуем (23) к виду:

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{r} = \frac{4}{\sqrt{c_0 + d}} K \left( \sqrt{\frac{2d}{c_0 + d}} \right), \quad (25)$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

## 6. Вычисление производных $\frac{\partial I}{\partial A}$ , $\frac{\partial I}{\partial a}$ , $\frac{\partial I}{\partial \xi}$

Представим  $\frac{\partial I}{\partial A}$ ,  $\frac{\partial I}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial I}{\partial \xi}$  в виде:

$$\frac{\partial I}{\partial A} = \frac{\partial I}{\partial c_0} \frac{\partial c_0}{\partial A} + \frac{\partial I}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial A}, \quad \frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial c_0} \frac{\partial c_0}{\partial a} + \frac{\partial I}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial a}, \quad \frac{\partial I}{\partial \xi} = \frac{\partial I}{\partial c_0} \frac{\partial c_0}{\partial \xi} + \frac{\partial I}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \xi}. \quad (26)$$

Используя формулу 8.123 п. 2 [16] дифференцирования полного эллиптического интеграла по его модулю и представление производной через полные эллиптические интегралы первого и второго рода, получим:

$$\frac{\partial I}{\partial c_0} = -\frac{2}{\sqrt{c_0 + d(c_0 - d)}} E(k), \quad \frac{\partial I}{\partial d} = \frac{2(c_0 E(k) - (c_0 - d)K(k))}{\sqrt{c_0 + dd(c_0 - d)}}. \quad (27)$$

Далее вычислим производные  $c_0$  и  $d$  по  $a$ ,  $\xi$  и  $A$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_0}{\partial a} &= a(1 + \kappa^2) + A\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \cos \xi, & \frac{\partial c_0}{\partial \xi} &= -Aa\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \sin \xi, & \frac{\partial c_0}{\partial A} &= \frac{5}{4}A + a\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \cos \xi, \\ \frac{\partial d}{\partial a} &= \frac{1}{a}\left(d + \frac{1}{2}a^2(1 - \kappa^2) \cos(2\xi + \eta)\right) + \frac{3}{8} \frac{A^2 c_1}{da}, & \frac{\partial d}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2}a^2(1 - \kappa^2) \sin(2\xi + \eta) - \frac{3}{8} \frac{A^2 c_2}{d}, \\ \frac{\partial d}{\partial A} &= \frac{1}{A}\left(d - \frac{1}{2}a^2(1 - \kappa^2) \cos(2\xi + \eta)\right) + \frac{3}{8} \frac{Ac_1}{d}. \end{aligned} \quad (28)$$

## 7. Усредненные уравнения движения

Усредняя систему (18.1) и (18.2) и используя приближение  $\rho = 1 - e \cos \nu + o(e^2)$ , получим:

$$\begin{aligned} \dot{a}_m &= -\frac{1}{a_m \kappa \pi} \frac{\partial I}{\partial \xi_m}, \\ \dot{\xi}_m &= -1 + \frac{3}{4\kappa} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{4}{A_m} \frac{\partial I}{\partial A_m} + \frac{2}{a_m \kappa} \frac{\partial I}{\partial a_m} \right), \\ \dot{A}_m &= -\frac{2}{A_m \pi} \frac{\partial I}{\partial \xi_m}, \\ \dot{\phi}_m &= \frac{2}{A_m \pi} \frac{\partial I}{\partial A_m}. \end{aligned} \quad (29)$$

Система (29) имеет интеграл:  $\kappa a_m^2 - \frac{A_m^2}{2}$ .

Усредненная система (29) совпадает с усредненной системой (20) для нулевого эксцентриситета.

## 8. Условие для поиска начального приближения начальных условий.

### Выбор параметра $\kappa$

Условие для поиска начального приближения параметров КСО, обладающих искомым свойством, позволяет получить уравнение для  $\xi_m$  из

системы (29). Потребуем, чтобы  $\xi_m = \pi$ ,  $\dot{\xi}_m = 0$ . Тогда условие превращается в уравнение, связывающее  $a_m$  и  $A_m$ :

$$g(a_m, A_m) = 0, \quad (30)$$

где 
$$g(a_m, A_m) = -1 + \frac{3}{4\kappa} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{4}{A_m} \frac{\partial I}{\partial A_m} + \frac{2}{a_m \kappa} \frac{\partial I}{\partial a_m} \right). \quad (31)$$

Используя (26), представим функцию  $g(a_m, A_m)$  в виде:

$$g(a_m, A_m) = -1 + \frac{3}{4\kappa} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial I}{\partial c_0} f_1 + \frac{\partial I}{\partial d} f_2 \right), \quad (32)$$

где 
$$f_1 = \frac{4}{A_m} \frac{\partial c_0}{\partial A_m} + \frac{2}{\kappa a_m} \frac{\partial I}{\partial a_m}, \quad f_2 = \frac{4}{A_m} \frac{\partial d}{\partial A_m} + \frac{2}{\kappa a_m} \frac{\partial d}{\partial a_m}.$$

Заметим, что при  $\xi_m = \pi$  и  $\kappa = 2$  величину  $c_1$  можно было представить полным квадратом:  $c_1 = -\frac{3}{8}(A_m - 2a_m)^2$ . Тогда модуль эллиптического интеграла становится равным  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , а функция  $g(a_m, A_m)$  принимает вид:

$$g(a_m, A_m) = \frac{-5\pi a A^2 + 10a^2 A + 32K \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{8\pi(A - 2a)aA}. \quad (33)$$

Для определения зависимости  $a(A)$  нужно решить квадратное уравнение:

$$10Aa^2 - 5A^2a + \frac{32}{\pi} K \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0. \quad (34)$$

Корни этого уравнения вычисляются по формуле:

$$a_{1,2} = \frac{5\pi A^2 \pm \sqrt{25\pi^2 A^4 - 1280\pi AK \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}}{20\pi A} \quad (35)$$

и имеют действительные значения при выполнении условия:

$$A \geq \sqrt[3]{\frac{256K \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{5\pi}} = 3.275600288.$$

Расчеты показали, что движение по КСО можно получить только при использовании меньшего корня, т.е. при знаке "-" в (35) перед радикалом.

## 9. Алгоритм формирования начального приближения

Компоненты вектора положения  $x_0, y_0$  связаны с параметрами  $a$  и  $A$  следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\nu - \varphi + \xi) & \frac{1}{2} \cos(\nu - \varphi) \\ -2 \sin(\nu - \varphi + \xi) & -\sin(\nu - \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix}. \quad (36)$$



Решая эту систему линейных уравнений при  $\xi \neq \pi$  относительно переменных  $a$  и  $A$ , получим:

$$\begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \xi} \begin{pmatrix} -\sin(\nu - \varphi) & -\frac{1}{2} \cos(\nu - \varphi) \\ 2 \sin(\nu - \varphi + \xi) & \cos(\nu - \varphi + \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (37)$$

При  $\xi = \pi$  система (36) имеет решение, если выполняется условие:  $\sin(\nu - \varphi) = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}}$ ,  $\cos(\nu - \varphi) = -\frac{2x_0}{\sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}}$ . В этом случае  $a$  и  $A$  определяются из решения уравнения:  $2a(A) - A = \sqrt{y_0^2 + 4x_0^2}$ .

Пусть теперь известно, что КСО должна пройти через точку с координатами  $x_0, y_0$  в момент времени, в который истинная аномалия Фобоса равна  $\nu$ . Тогда, при заданных  $\varphi$  и  $\xi$ , определяем  $a$  и  $A$ .

Определение начального приближения при поиске начальных условий КСО с искомыми свойствами определяется сканированием по  $\varphi$  и  $\xi$ . Сканирование выполняется в два прохода. На первом проходе сканирование по  $\varphi$  выполняется на интервале от 0 до  $2\pi$  с шагом  $\frac{\pi}{180}$ . На втором проходе сканирование выполняется на интервале  $\left[ \varphi_0 - \frac{\pi}{120}, \varphi_0 + \frac{\pi}{120} \right]$ , где  $\varphi_0$  - точка, в которой была достигнута минимальная ширина кольца на первом проходе. Шаг сканирования на втором проходе составляет  $\frac{1}{100}$  от длины интервала перебора. Интервал сканирования по  $\xi$  на первом и втором проходах одинаковый: от  $\pi - \Delta\xi$  до  $\pi + \Delta\xi$ , где  $\Delta\xi = 0.3$ . Шаг сканирования составляет  $\frac{1}{100}$  от размера интервала сканирования.

На каждом шаге сканирования определяются  $a$  и  $A$ . Если  $A > 0$ ,  $a(A) > 0$  и  $|a - a(A)| < \Delta a$ , формируется начальное приближение и вычисляется ширина кольца.

Указанный алгоритм за время расчета  $\sim 15$  минут на Pentium 4 позволяет определить начальное приближение с высокой точностью.

## 10. Вычислительная процедура поиска минимума

Вычислительная процедура поиска минимума построена на основе комбинированного применения метода градиентного спуска и метода золотого сечения. Сначала применяется градиентный спуск, а затем метод золотого сечения. Алгоритм градиентного спуска дополнен возможностями выхода из локального минимума и идентификации попадания в овраг по одной из переменных.

При использовании градиентного спуска КСО исследуется на небольшом интервале времени, который соответствует интервалу истинной аномалии от  $\nu_0$  до  $\nu_0 + 2\pi N$ , где  $N = 100$ . Локальный минимум, найденный

методом градиентного спуска, уточнялся методом золотого сечения для большего значения  $N=10000$ .

Вычислительные эксперименты показали, что искомые КСО являются почти периодическими (квазипериодическими) с ошибкой не превосходящей  $10^{-4}$  по каждой канонической полярной переменной. Квазипериод не превосходит 10000 оборотов Фобоса вокруг Марса.

Рассмотрим алгоритм градиентного спуска. Как и в [1] будем рассматривать задачу в следующей постановке. Задано начальное положение КА:  $x_0=0$ ,  $y_0=-a$  в момент времени, в который истинная аномалия Фобоса равна  $\nu_0$ . Рассмотрим множество КСО, проходящих через заданную точку, при различных значениях вектора скорости. Для каждой такой КСО определим множество точек пересечения с отрицательной частью оси  $y$  и максимальное удаление  $\Delta$  точек этого множества от начальной точки. Найдём вектор начальной скорости, для которого минимально значение максимального удаления  $\Delta$ . Численные эксперименты показали, что при использовании градиентного спуска для поиска КСО с минимальным значением  $\Delta$  целесообразно использовать уравнения в канонических полярных переменных:  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= P_1, & \dot{Q}_2 &= \frac{P_2}{Q_1^2} - 1, \\ \dot{P}_1 &= \frac{P_2^2}{Q_1^3} - Q_1 + \rho(\nu) \left( 3Q_1 \cos^2 Q_2 - \frac{1}{Q_1^2} \right), \\ \dot{P}_2 &= -\frac{3}{2} \rho(\nu) Q_1^2 \sin 2Q_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Начальное положение задается условием:

$$Q_1(\nu_0) = Q_{01}, \quad Q_2(\nu_0) = -\frac{\pi}{2}. \quad (39)$$

Определим функцию  $\Delta(P_{10}, P_{20})$ , которая каждой паре  $P_{10}, P_{20}$  начальных значений обобщенных скоростей ставит в соответствие максимальную по абсолютной величине разность между значениями  $Q_1(\nu)$  и  $Q_{01}$  в точках, удовлетворяющих условию  $Q_2(\nu) = -\frac{\pi}{2}$  на интервале:  $\nu \in [\nu_0, \nu_0 + 2\pi N]$ , где  $N > 0$  – заданная целая константа:

$$\Delta(P_{10}, P_{20}) = \max \left\{ |Q_1(\nu) - Q_{01}| : Q_2(\nu) = -\frac{\pi}{2}, \nu \in [\nu_0, \nu_0 + 2\pi N] \right\}. \quad (40)$$

Поиск минимума функции  $\Delta(P_{10}, P_{20})$  выполним методом градиентного спуска. Начальные значения обобщенных скоростей определим алгоритмом формирования начального приближения. Производные вычислим разностным методом:

$$\Delta_{P_1} = \frac{\partial}{\partial P_{10}} \Delta(P_{10}, P_{20}) = \frac{1}{2h} (\Delta(P_{10} + h, P_{20}) - \Delta(P_{10} - h, P_{20})),$$

$$\Delta_{P_2} = \frac{\partial}{\partial P_{20}} \Delta(P_{10}, P_{20}) = \frac{1}{2h} (\Delta(P_{10}, P_{20} + h) - \Delta(P_{10}, P_{20} - h)), \quad (41)$$

где  $h = 4 \cdot 10^{-5}$ .

При вычислении производных должны проверяться условия попадания в локальный минимум или овраг. Если одновременно выполнены условия:

$$\begin{aligned} \Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10} + h, P_{20}), \quad \Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10}, P_{20} + h), \\ \Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10} - h, P_{20}), \quad \Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10}, P_{20} - h), \end{aligned} \quad (42)$$

точка  $(P_{10}, P_{20})$  попала в локальный экстремум.

При попадании текущей точки в локальный экстремум вычисляются значения функции в следующих четырех точках:  $\Delta(P_{01} + h_{P_1}, P_{02})$ ,  $\Delta(P_{01} - h_{P_1}, P_{02})$ ,  $\Delta(P_{01}, P_{02} + h_{P_2})$ ,  $\Delta(P_{01}, P_{02} - h_{P_2})$ , где  $h_{P_1} = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $h_{P_2} = 3 \cdot 10^{-2}$ . Если минимальное значение из этих четырех значений меньше, чем  $\Delta(P_{01}, P_{02})$ , происходит переход в соответствующую точку.

Если все четыре значения больше, чем  $\Delta(P_{01}, P_{02})$ , считается, что текущий локальный экстремум и есть искомый глобальный экстремум, а значения  $P_{01}, P_{02}$  — искомые значения.

Если одновременно выполняются условия:  $\Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10} + h, P_{20})$  и  $\Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10} - h, P_{20})$ , текущая точка попала в овраг по переменной  $P_{10}$ . В этом случае при переходе к следующей точке должны использоваться только производные по переменной  $P_{20}$ , значение  $\Delta_{P_1}$  обнуляется.

При одновременном выполнении условий:  $\Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10}, P_{20} + h)$  и  $\Delta(P_{10}, P_{20}) < \Delta(P_{10}, P_{20} - h)$  точка попадает в овраг по переменной  $P_{20}$ . В этом случае обнуляется значение  $\Delta_{P_2}$ . Одновременное попадание в овраг по переменным  $P_{10}$  и  $P_{20}$  означает, что текущая точка попадает в локальный экстремум. Этот случай уже рассмотрен выше.

Вычисляется величина:  $m = \sqrt{\Delta_{P_1}^2 + \Delta_{P_2}^2}$ . Если эта величина меньше, чем  $\varepsilon_{\text{grad}} = 10^{-12}$ , считается, что достигнут минимум по малому модулю градиента, а значения  $P_{01}, P_{02}$  — искомые.

Дальше ищется значение шага  $h$ , при котором значение функции  $\Delta\left(P_{10} + \Delta_{P_1} \cdot \frac{h}{m}, P_{20} + \Delta_{P_2} \cdot \frac{h}{m}\right)$  меньше, чем  $\Delta(P_{10}, P_{20})$ . Для этого выполняется цикл по величине шага  $h$ , начиная со значения, использованного при численном нахождении производных. При каждом новом проходе цикла величина шага  $h$  уменьшается вдвое. Если найдено искомое значение шага  $h$ , происходит переход к новым значениям обобщённых скоростей  $P_{10}, P_{20}$  и повторение действий, начиная с вычисления производных.

Если величина шага  $h$  стала меньше, чем  $10^{-6}$ , считается, что искомый минимум найден, а значения  $P_{01}, P_{02}$  — искомые значения обобщённых скоростей.

Особенность использования метода золотого сечения [17] состоит в том, что он применяется к функции двух переменных  $P_1$  и  $P_2$ . Сначала фиксируется  $P_1$  и поиск выполняется по переменной  $P_2$ . После того, как минимум найден, фиксируется  $P_2$  и выполняется поиск по  $P_1$ . Затем выполняется поиск по  $P_2$  и т. д. Другой особенностью применения метода золотого сечения является то, что поиск начинается из точки текущего найденного минимума. Для того чтобы попасть в условия поиска по методу золотого сечения, границы интервала поиска задаются асимметрично относительно текущего минимума. Если  $\xi_c$  — точка, с которой начинается поиск, то поиск минимума выполняется в интервале:  $\left[ \xi_c - r_0, \xi_c + r_0 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$ , где  $r_0$  — радиус поиска. При поиске минимума методом золотого сечения использованы следующие значения параметров: интервал поиска 0.1 и 0.4 по  $P_1$  и  $P_2$  соответственно, порог прекращения поиска 0.001 (одинаковый по  $P_1$  и  $P_2$ ).

## 11. Результаты расчетов

Значения начальных удалений от точки  $A$ , средняя ширина кольца, средняя разность относительных угловых скоростей и квазипериод приведены в таблице 11.1.

**Таблица 11.1.** Параметры КСО

Начальное удаление $Q_{10}$	Средняя ширина кольца	Средняя разность относит. угловых скоростей	Квазипериод
2.456423	0.10 – 0.11	0.215 – 0.235	65 – 787
2.654142	0.11 – 0.12	0.182 – 0.200	5 – 568
2.851861	0.13	0.155 – 0.171	19 – 547
3.0	0.13 – 0.14	0.137 – 0.153	7 – 866
3.5	0.16 – 0.17	0.095 – 0.107	19 – 870
4.0	0.19 – 0.20	0.067 – 0.077	14 – 915
4.5	0.20 – 0.25	0.049 – 0.057	18 – 756
5.0	0.24 – 0.25	0.037 – 0.043	26 – 968
5.5	0.27 – 0.29	0.028 – 0.033	31 – 1403
6.0	0.29 – 0.33	0.022 – 0.026	39 – 1223
6.5	0.32 – 0.34	0.017 – 0.021	49 – 1670
7.0	0.34 – 0.37	0.014 – 0.017	61 – 1014
7.5	0.36 – 0.39	0.011 – 0.014	74 – 2137
8.0	0.39 – 0.42	0.009 – 0.011	89 – 2122

В таблицах 11.2–11.15 приведены значения обобщенных скоростей на начальный момент для начальных удалений от 2.456423 до 8. Значения приводятся с учетом свойства симметрии рассматриваемой системы. Система уравнений (1) обладает свойством симметрии: если  $(x(\nu), y(\nu))$  — решение

системы (1), то  $(-x(-\nu), y(-\nu))$  — тоже решение системы (1). В канонических полярных переменных:  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$  симметричные решения уравнения (1)  $Q_1^{(1)}(\nu), Q_2^{(1)}(\nu), P_1^{(1)}(\nu), P_2^{(1)}(\nu)$  и  $Q_1^{(2)}(\nu), Q_2^{(2)}(\nu), P_1^{(2)}(\nu), P_2^{(2)}(\nu)$  связаны соотношениями:  $Q_1^{(2)}(\nu) = Q_1^{(1)}(-\nu), Q_2^{(2)}(\nu) = \pi - Q_2^{(1)}(-\nu), P_1^{(2)}(\nu) = -P_1^{(1)}(-\nu), P_2^{(2)}(\nu) = P_2^{(1)}(-\nu)$ .

При поиске начальных условий рассматривается семейство КСО, проходящее через точку  $A$  с полярными координатами:  $Q_1 = Q_{10}, Q_2 = -\frac{\pi}{2}$  в момент времени, соответствующий значению истинной аномалии  $\nu_0$ . Для каждой КСО определяется множество точек пересечения с отрицательной частью оси  $Y$  и максимальное удаление точек этого множества от точки  $A$ . Для каждого начального значения истинной аномалии  $\nu_0$  ищется КСО, для которой максимальное удаление минимально. Начальные значения обобщенных скоростей обозначим:  $P_{01}(\nu_0)$  и  $P_{02}(\nu_0)$ .

Решению уравнения (1) с начальными условиями:  $Q_{01}, -\frac{\pi}{2}, P_{01}, P_{02}$  будет соответствовать симметричное решение с начальными условиями:  $Q_{01}, -\frac{\pi}{2}, -P_{01}, P_{02}$ . Очевидно, что максимальные удаления симметричных решений равны между собой. При этом в одном из симметричных решений истинная аномалия  $\nu$  растет, в другом убывает. Для периодических решений максимальное удаление от точки  $A$  не должно зависеть от направления движения по траектории (вперед или назад). Поэтому, если бы найденные симметричные решения были бы периодическими, максимальные удаления от точки  $A$  должны совпадать.

Найденные решения являются квазипериодическими. Поэтому найденные значения начальных обобщенных скоростей связаны приближённой зависимостью:  $P_{01}(\nu_0) \approx -P_{01}(-\nu_0), P_{02}(\nu_0) \approx P_{02}(-\nu_0)$ , а в таблицах, содержащих результаты расчетов, приведены одинаковые значения  $|P_{01}|$  и  $P_{02}$  для начальных значений истинной аномалии:  $\nu_0$  и  $2\pi - \nu_0$ .

На рис. 2 показаны найденные КСО для начальных удалений 3 и 8.

**Таблица 11.2.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 2.456423$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	1.888	
10	0.004	1.888	350
20	0.007	1.887	340
30	0.010	1.887	330
40	0.013	1.887	320
50	0.016	1.887	310
60	0.018	1.886	300
70	0.019	1.886	290
80	0.020	1.885	280
90	0.021	1.885	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.020	1.884	260
110	0.020	1.883	250
120	0.018	1.883	240
130	0.016	1.882	230
140	0.013	1.881	220
150	0.010	1.881	210
160	0.007	1.880	200
170	0.004	1.880	190
180	0.000	1.880	

**Таблица 11.3.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 2.654142$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	2.417	
10	0.004	2.417	350
20	0.007	2.417	340
30	0.011	2.417	330
40	0.014	2.416	320
50	0.017	2.415	310
60	0.019	2.415	300
70	0.021	2.414	290
80	0.022	2.412	280
90	0.022	2.411	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.022	2.410	260
110	0.021	2.409	250
120	0.019	2.408	240
130	0.017	2.406	230
140	0.014	2.405	220
150	0.011	2.404	210
160	0.008	2.404	200
170	0.004	2.403	190
180	0.000	2.403	

**Таблица 11.4.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 2.851861$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	2.990	
10	0.004	2.990	350
20	0.008	2.989	340
30	0.012	2.989	330
40	0.015	2.988	320
50	0.018	2.987	310
60	0.020	2.985	300
70	0.022	2.984	290
80	0.023	2.982	280
90	0.024	2.980	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.023	2.978	260
110	0.022	2.976	250
120	0.021	2.975	240
130	0.018	2.973	230
140	0.015	2.971	220
150	0.012	2.970	210
160	0.008	2.969	200
170	0.004	2.968	190
180	0.000	2.968	

**Таблица 11.5.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 3.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	3.447	
10	0.004	3.447	350
20	0.008	3.446	340
30	0.012	3.445	330
40	0.016	3.444	320
50	0.019	3.442	310
60	0.021	3.440	300
70	0.023	3.438	290
80	0.024	3.436	280
90	0.025	3.434	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.024	3.431	260
110	0.023	3.429	250
120	0.022	3.426	240
130	0.019	3.424	230
140	0.016	3.422	220
150	0.013	3.420	210
160	0.009	3.419	200
170	0.004	3.418	190
180	0.000	3.418	

**Таблица 11.6.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 3.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	5.157	
10	0.005	5.157	350
20	0.010	5.156	340
30	0.014	5.154	330
40	0.018	5.152	320
50	0.021	5.149	310
60	0.024	5.145	300
70	0.027	5.141	290
80	0.028	5.136	280
90	0.028	5.131	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.028	5.127	260
110	0.027	5.122	250
120	0.025	5.117	240
130	0.022	5.113	230
140	0.019	5.109	220
150	0.015	5.106	210
160	0.010	5.104	200
170	0.005	5.102	190
180	0.000	5.101	

**Таблица 11.7.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 4.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	7.123	
10	0.005	7.123	350
20	0.011	7.121	340
30	0.016	7.117	330
40	0.020	7.113	320
50	0.024	7.108	310
60	0.027	7.102	300
70	0.030	7.095	290
80	0.032	7.087	280
90	0.032	7.080	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.032	7.072	260
110	0.030	7.064	250
120	0.028	7.057	240
130	0.025	7.050	230
140	0.021	7.044	220
150	0.016	7.039	210
160	0.011	7.035	200
170	0.006	7.033	190
180	0.000	7.032	

**Таблица 11.8.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 4.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	9.338	
10	0.006	9.337	350
20	0.012	9.334	340
30	0.018	9.330	330
40	0.023	9.323	320
50	0.027	9.317	310
60	0.031	9.308	300
70	0.034	9.296	290
80	0.036	9.285	280
90	0.036	9.274	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.036	9.253	260
110	0.034	9.255	250
120	0.031	9.241	240
130	0.028	9.231	230
140	0.023	9.223	220
150	0.018	9.215	210
160	0.012	9.211	200
170	0.006	9.207	190
180	0.000	9.206	

**Таблица 11.9.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 5.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	11.800	
10	0.007	11.799	350
20	0.013	11.795	340
30	0.019	11.789	330
40	0.025	11.781	320
50	0.030	11.770	310
60	0.034	11.758	300
70	0.037	11.744	290
80	0.039	11.730	280
90	0.040	11.714	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.039	11.698	260
110	0.038	11.683	250
120	0.035	11.668	240
130	0.031	11.655	230
140	0.026	11.643	220
150	0.020	11.634	210
160	0.014	11.626	200
170	0.007	11.622	190
180	0.000	11.621	

**Таблица 11.10.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 5.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	14.508	
10	0.007	14.506	350
20	0.015	14.502	340
30	0.021	14.494	330
40	0.027	14.482	320
50	0.033	14.469	310
60	0.037	14.452	300
70	0.040	14.436	290
80	0.043	14.418	280
90	0.043	14.394	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.043	14.376	260
110	0.041	14.357	250
120	0.038	14.335	240
130	0.034	14.320	230
140	0.028	14.305	220
150	0.022	14.293	210
160	0.015	14.282	200
170	0.008	14.277	190
180	0.000	14.279	



**Таблица 11.11.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 6.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	17.463	
10	0.008	17.461	350
20	0.016	17.454	340
30	0.023	17.444	330
40	0.030	17.431	320
50	0.036	17.414	310
60	0.040	17.394	300
70	0.044	17.371	290
80	0.046	17.348	280
90	0.047	17.322	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.047	17.294	260
110	0.045	17.272	250
120	0.041	17.249	240
130	0.037	17.227	230
140	0.031	17.208	220
150	0.024	17.194	210
160	0.017	17.182	200
170	0.008	17.175	190
180	0.000	17.173	

**Таблица 11.12.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 6.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	20.663	
10	0.009	20.661	350
20	0.017	20.653	340
30	0.025	20.641	330
40	0.032	20.624	320
50	0.039	20.604	310
60	0.044	20.579	300
70	0.047	20.556	290
80	0.050	20.521	280
90	0.051	20.497	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.050	20.466	260
110	0.048	20.432	250
120	0.045	20.401	240
130	0.040	20.348	230
140	0.034	20.370	220
150	0.026	20.346	210
160	0.018	20.323	200
170	0.009	20.316	190
180	0.000	20.312	

**Таблица 11.13.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 7.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	24.113	
10	0.009	24.108	350
20	0.018	24.101	340
30	0.027	24.084	330
40	0.034	24.066	320
50	0.041	24.041	310
60	0.047	24.012	300
70	0.051	23.981	290
80	0.054	23.940	280
90	0.055	23.906	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.054	23.869	260
110	0.052	23.839	250
120	0.048	23.804	240
130	0.043	23.774	230
140	0.036	23.744	220
150	0.028	23.721	210
160	0.019	23.705	200
170	0.010	23.696	190
180	0.000	23.692	

**Таблица 11.14.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 7.5$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	27.808	
10	0.010	27.803	350
20	0.020	27.794	340
30	0.029	27.779	330
40	0.037	27.753	320
50	0.044	27.726	310
60	0.050	27.688	300
70	0.055	27.652	290
80	0.058	27.607	280
90	0.059	27.567	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.058	27.530	260
110	0.056	27.480	250
120	0.052	27.444	240
130	0.046	27.410	230
140	0.039	27.377	220
150	0.030	27.352	210
160	0.020	27.333	200
170	0.010	27.320	190
180	0.000	27.317	

**Таблица 11.15.** Значения обобщенных скоростей  $P_{01}$  и  $P_{02}$  для начального удаления  $Q_{10} = 8.0$

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
0	0.000	31.753	
10	0.011	31.747	350
20	0.021	31.736	340
30	0.031	31.717	330
40	0.039	31.688	320
50	0.047	31.656	310
60	0.053	31.618	300
70	0.058	31.570	290
80	0.061	31.526	280
90	0.063	31.476	270

$\nu_0$ , град	$ P_{01} $	$P_{02}$	$360 - \nu_0$ , град
100	0.062	31.430	260
110	0.059	31.380	250
120	0.055	31.335	240
130	0.049	31.292	230
140	0.041	31.252	220
150	0.032	31.227	210
160	0.022	31.205	200
170	0.011	31.192	190
180	0.000	31.184	

## 12. Алгоритм проектирования КСО

Исходными данными при проектировании являются следующие величины:  $h_{270}$  максимальное удаление КА от поверхности Фобоса на долготе  $270^\circ$ ,  $t$  момент времени и  $\lambda_L$  долгота, которую должен проходить КА в этот момент времени. Сначала по максимальному удалению  $h_{270}$  выбирается одна из таблиц 11.2 – 11.15. Для этого заданное максимальное удаление пересчитывается в безразмерную величину  $y$  по формуле:

$$y = \frac{h_{270} + r_{270}}{P_{Ph} \sqrt[3]{\frac{\mu_{Ph}}{\mu_{Ph} + \mu_M}}},$$

где

$h_{270}$  – заданное максимальное удаление КА в диапазоне от 50 до 200 км,

- $r_{270}$  – расстояние от центра Фобоса до точки на его экваторе с долготой  $270^\circ$ , (11.1 км),
- $p_{Ph}$  – параметр орбиты Фобоса, (9376.482 км) ,
- $\mu_{Ph}$  – гравитационная постоянная Фобоса,  $(0.84 \cdot 10^{-3} \text{ км}^3 / \text{сек}^2)$  ,
- $\mu_M$  – гравитационная постоянная Марса,  $(42828.287 \text{ км}^3 / \text{сек}^2)$  .

Далее выбирается таблица по найденной безразмерной величине  $y$  и значениям  $Q_{10}$  максимальных удалений, к которым эти таблицы относятся. Выбор выполняется из условия близости  $y$  к  $Q_{10}$  . Таблицы построены так, что диапазон удалений 50-60 км, номинального случая в проекте Фобос-Грунт, покрыт с шагом 5 км, а остальной диапазон 60-200 км, предназначенный для работы при отклонениях от номинального случая, – с шагом 12.5 км.

По заданному моменту времени  $t$  определяется  $v_i$  истинная аномалия Фобоса на этот момент времени. Эта величина используется для выбора строки со значениями обобщенных скоростей из выбранной таблицы. Для этого по начальным условиям, соответствующим строке таблицы, определим долготу  $\lambda(v_i)$ , которую проходит КА при истинной аномалии  $v_i$  . Следует отметить, что каждой строке таблицы соответствует пара начальных условий. Выбирается такая строка таблицы и формируются начальные условия, при которых минимальна величина  $|\lambda_t - \lambda(v_i)|$  .

По выбранным начальным условиям вычисляется вектор состояния КА в канонических полярных переменных на истинную аномалию  $v_i : Q_1, Q_2, P_1, P_2$  . На момент времени  $t$  по полной модели движения Фобоса в инерциальной системе координат, в которой выполняются проектные расчеты, вычисляются оскулирующие элементы его орбиты.

С использованием оскулирующих элементов орбиты Фобоса вектор состояния КА из канонических полярных переменных пересчитывается в орбитальную систему координат Фобоса, а затем в инерциальную систему координат.

Центр орбитальной системы координат совпадает с центром масс Фобоса. Ось  $X$  направлена по линии визирования Марс – Фобос. Ось  $Y$  ортогональна оси  $X$ , лежит в плоскости орбиты Фобоса и направлена в сторону его орбитального движения.

Проектные расчеты [11] выполняются в системе координат, центр которой совпадает с центром масс системы Марс-Фобос, плоскость  $XU$  совпадает с плоскостью среднего экватора Земли эпохи J2000, ось  $X$  направлена в точку весеннего равноденствия Земли этой эпохи, ось  $Z$  направлена ортогонально плоскости  $XU$  в сторону северного полюса, ось  $Y$  дополняет систему координат до правой.

Вектор состояния КА  $(\mathbf{R}_{\text{RNB}} \ \mathbf{V}_{\text{RNB}})^T$  в орбитальной системе координат Фобоса вычисляется по формулам:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\text{RNB}} \\ \mathbf{V}_{\text{RNB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_t p_{\text{Ph}} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \frac{c_{\text{Ph}} e_{\text{Ph}} \sin \nu_t \mathbf{E}_3}{p_{\text{Ph}}} & \frac{c_{\text{Ph}}}{\rho_t p_{\text{Ph}}} \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_N \\ \dot{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} Q_1 \cos Q_2 \\ Q_1 \sin Q_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}_N = \begin{pmatrix} P_1 \cos Q_2 - \frac{P_2}{Q_1^2} \sin Q_2 + Q_1 \sin Q_2 \\ P_1 \sin Q_2 + \frac{P_2}{Q_1^2} \cos Q_2 - Q_1 \cos Q_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$\mathbf{0}_3$  – нулевая матрица  $3 \times 3$ ,

$\mathbf{E}_3$  – единичная матрица  $3 \times 3$ ,

$\rho_t$  – переменная, вычисляемая по формуле:  $\rho_t = \frac{1}{1 + e_{\text{Ph}} \cos \nu_t}$ ,

$c_{\text{Ph}}$  – оскулирующий интеграл площадей орбиты Фобоса,

$p_{\text{Ph}}$  – оскулирующий параметр орбиты Фобоса,

$e_{\text{Ph}}$  – оскулирующий эксцентриситет орбиты Фобоса.

Вектор состояния КА в инерциальной системе координат вычисляется по формулам:

$$\mathbf{R}_{\text{J2000}} = (\mathbf{C}_{\text{J2000}}^{\text{RNB}})^T \left[ \mathbf{R}_{\text{RNB}} + \begin{pmatrix} r_{\text{Ph}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$\mathbf{V}_{\text{J2000}} = (\mathbf{C}_{\text{J2000}}^{\text{RNB}})^T \left[ \mathbf{V}_{\text{RNB}} + \begin{pmatrix} \dot{r}_{\text{Ph}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left( \frac{d}{dt} \mathbf{C}_{\text{J2000}}^{\text{RNB}} \right) \mathbf{R}_{\text{J2000}} \right],$$

где

$r_{\text{Ph}}$  – расстояние от центра масс системы Марс-Фобос до центра масс Фобоса на момент времени  $t$ ,

$\dot{r}_{\text{Ph}}$  – радиальная скорость Фобоса на этот же момент времени.

Матрица  $\mathbf{C}_{\text{J2000}}^{\text{RNB}}$  и ее производная по времени вычисляются по формулам:

$$\mathbf{C}_{\text{J2000}}^{\text{RNB}} = \begin{pmatrix} \cos \nu_t & \sin \nu_t & 0 \\ -\sin \nu_t & \cos \nu_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ (\mathbf{M}_{\text{PQR}})^T \right],$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}_{\text{J2000}}^{\text{RNB}} = \frac{c_{\text{Ph}}}{r_{\text{Ph}}^2} \begin{pmatrix} -\sin \nu_t & \cos \nu_t & 0 \\ -\cos \nu_t & -\sin \nu_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[ (\mathbf{M}_{\text{PQR}})^T \right],$$

где  $\mathbf{M}_{\text{PQR}}$  – матрица, составленная из векторов Гаусса:  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ .

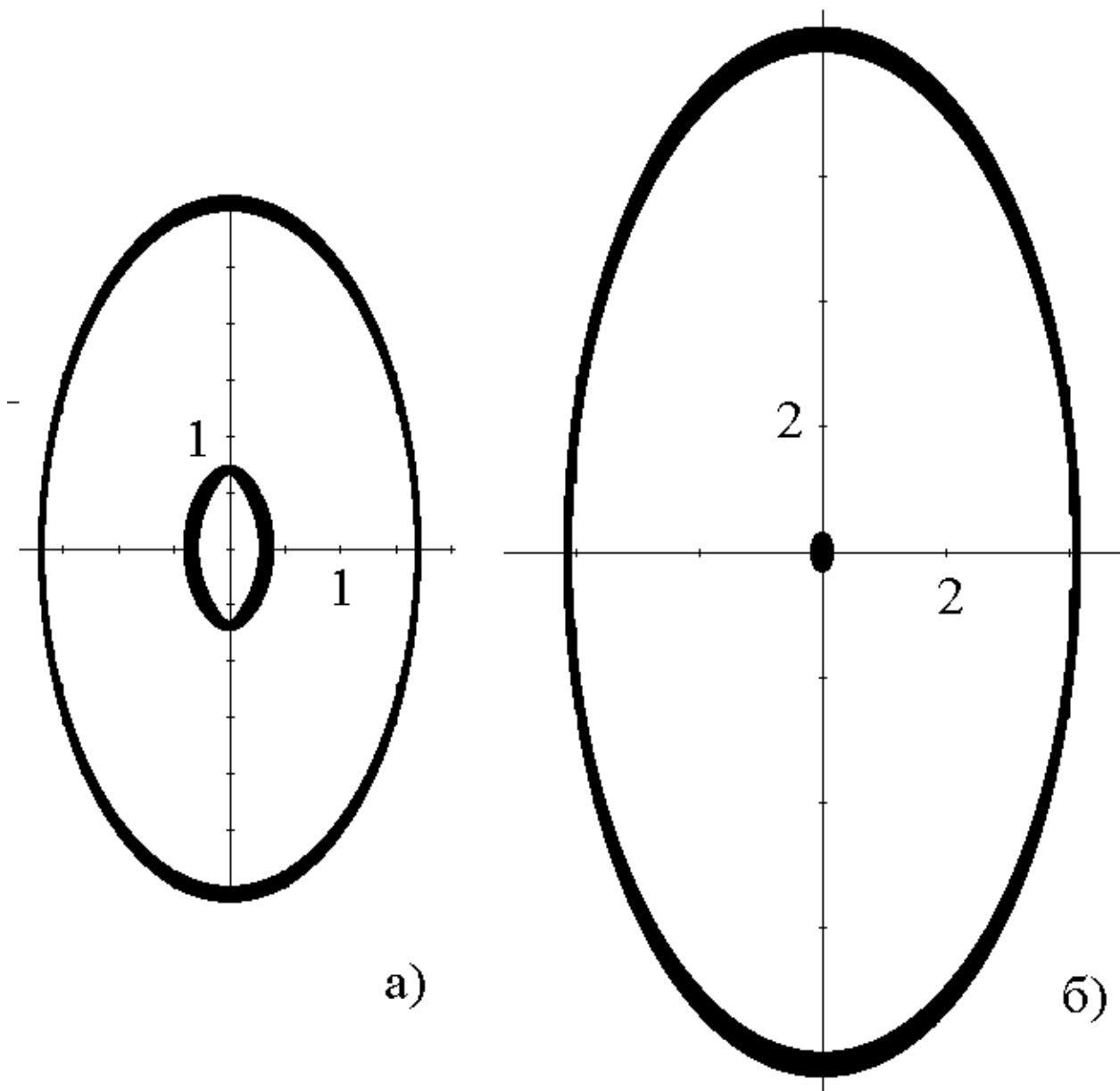
Векторы Гаусса вычисляются по формулам:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega \\ -\sin \omega \sin \Omega - \cos \omega \cos i \cos \Omega \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix},$$

где

- $i$  – оскулирующее наклонение орбиты Фобоса,
- $\Omega$  – оскулирующая долгота восходящего узла орбиты Фобоса,
- $\omega$  – оскулирующий аргумент перицентра орбиты Фобоса.

Алгоритм проектирования КСО позволяет получить начальные условия, которые обеспечивают прохождение над заданной долготой Фобоса в заданное время. Таблицы начальных условий покрывают интервал от 50 до 200 км.



**Рис. 2.** Движение по КСО и движение центра эллипса: а) – начальное удаление  $Q_{10} = 3$ , б) – начальное удаление  $Q_{10} = 8$

### Список литературы

1. Тучин А.Г. Квазисинхронные орбиты и их использование для сближения космического аппарата с Фобосом // Космич. исслед. 2007. Т. 45. № 2. С. 144-149.
2. Henon M. Numerical Exploration of the Restricted Problem // VI. Hill's Case: Non-Periodic Orbits. Astronomy and Astrophysics. 1970. V. 24. № 9. P. 24-36.
3. Benest D. Libration effects for retrograde satellites in the restricted three-body problem // Cel. Mech. 1976. V. 13. № 2. P. 203-215.

4. *Коган А.Ю.* Далекие спутниковые орбиты в ограниченной круговой задаче трех тел // Космич. исслед. 1988. Т. 26. № 6. С. 813-818.
5. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной // Письма в АЖ. 1994. Т. 20. № 3. С. 229-240.
6. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трех тел // Письма в АЖ. 1994. Т. 20. № 10. С. 781-795.
7. *Лидов М.Л.* Об одном семействе пространственных периодических орбит около Луны и планет // ДАН СССР. 1977. Т. 233. № 6. С. 1068-1071.
8. *Лидов М.Л., Рабинович В.Ю.* Исследование семейств пространственных периодических орбит задачи трех тел // Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 3.
9. *Лидов М.Л.* Метод построения семейств пространственных периодических орбит в задаче Хилла // Космич. исслед. 1982. Т. 20. № 6. С. 787-807.
10. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* Теория возмущений и анализ эволюции квазиспутниковых орбит в ограниченной задаче трех тел // Космич. исслед. 1993. Т. 31. № 2. С. 75-99.
11. *Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Степаньянц В.А., Тучин А.Г.* Баллистика, навигация и управление полетом космического аппарата в проекте «Фобос-Грунт» // Изв. РАН. Сер. ТиСУ. 2002. № 5.
12. *Шишов В.А.* Модель движения Фобоса и методика уточнения параметров в проекте «Фобос-Грунт». Препринт № 10. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2008.
13. *Akim E.L., Popov G.A., Tuchin A.G.* Mechanics and Motion Control of a Space Vehicle in the Project of Relict Substance Delivery on Earth (The Project "Phobos-Grunt") // Proc. 16th IFAC Symposium on automatic control in Aerospace. Preprints. Saint Petersburg. Russia. 2004. V. 1.
14. *Akim E.L., Botkin A.V., Stepaniants V.A., Shishov V.A., Ruzskiy E.G. and Tuchin A.G.* Orbit Selection, Navigation and Maneuvers before the Landing on the Phobos Surface for Phobos Sample Return Project // Proc. 17th International Symposium on Space Flight Dynamics. 16-20 June, 2003. Moscow. Russia. V. 1.
15. *Akim E.L., Stepaniants V.A., Shishov V.A., Ruzskiy E.G. and Tuchin A.G.* Ballistics, navigation and motion control of the SC on stages of the Phobos surface approaching and landing // Proc. 18th International Symposium on Space Flight Dynamics, 11-15 October, 2004. Munich. Germany.
16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
17. *Растрюгин Л.А.* Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974.