



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 48 за 2008 г.



Мирер С.А., Прилепский И.В.

Оптимальные параметры
гравитационной системы
спутник-стабилизатор

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Мирер С.А., Прилепский И.В. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 48. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-48>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

С.А. Мирер, И.В. Прилепский

**Оптимальные параметры гравитационной системы
спутник-стабилизатор**

Москва - 2008

С.А. Мирер, И.В. Прилепский. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2008, 28 страниц, 16 рисунков, библиография: 10 наименований.

Исследуется динамика системы спутник-стабилизатор. Предполагается, что в шарнире, соединяющем два тела, имеется вязкое трение, но отсутствует упругость. Рассматривается движение в плоскости круговой орбиты и определяются параметры, при которых собственные колебания около устойчивого положения равновесия в орбитальной системе координат затухают максимально быстро. Скорость протекания переходных процессов оценивается величиной степени устойчивости линеаризованных уравнений движения. В результате оптимизации по безразмерному коэффициенту демпфирования пространство параметров системы разбивается на области, в каждой из которых максимум степени устойчивости достигается на определенной конфигурации корней характеристического уравнения. Показано, что глобальный максимум достигается в двух точках пространства параметров. При этом одно из тел системы вырождается в пластину, а характеристическое уравнение имеет четыре равных вещественных корня.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Португальского фонда науки и техники (Программа PTDC 2006).

Ключевые слова: спутник, гравитационная система ориентации, демпфирование, оптимальные параметры.

S.A. Mirer, I.V. Prilepsky. Optimal parameters of a gravitational system satellite-stabilizer. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2008, 28 Pages, 16 Figures, 10 References.

Dynamics of a gravitational system satellite-stabilizer is studied. It is assumed that there exists viscous friction in the hinge connecting the system components but there is no spring resistance. The plane motion in a circular orbit is analyzed; the parameters that provide the most rapid damping of the natural oscillations in the vicinity of the equilibrium are determined. To estimate the duration of the transitional processes, the degree of stability of the linearized equations of motion is used. As a result of optimization with respect to dimensionless damping coefficient, the space of the system's parameters is divided into several domains. In each of these domains, the maximum degree of stability takes place on a specific configuration of characteristic equation roots. It is shown that the global optimum is achieved in the two points of the parameter space. Here one of the system's bodies degenerates into a plate, and the characteristic equation has four equal real roots.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research, the Portuguese Foundation for Science and Technology and the Program for Research in All Scientific Domains (PTDC 2006).

Key words: satellite, gravitational system, damping, optimal parameters.

Введение

Принцип работы пассивных систем ориентации спутников основан на взаимодействии с внешними силовыми полями (например, с гравитационным или магнитным полем Земли) или использовании гироскопических свойств вращающихся тел. При синтезе системы и выборе значений ее параметров необходимо обеспечить не только устойчивость требуемого положения равновесия, например, в орбитальной системе координат, но и гарантировать достаточно эффективное демпфирование собственных колебаний спутника, возникающих в результате ошибок выведения и действия возмущений. В гравитационных системах для гашения колебаний в окрестности устойчивого положения равновесия используется относительное движение компонентов системы, при котором энергия колебаний рассеивается за счет трения в шарнире [1]. Впервые такая схема была предложена Д.Е. Охочимским в 1956 г. При другом способе введения демпфирования на спутнике устанавливаются двухстепенные гироскопы в вязкоупругой подвеске [2]; собственные колебания спутника вызывают прецессию роторов гироскопов и, таким образом, также приводят к диссипации энергии.

Одним из основных критериев качества пассивных систем ориентации является быстродействие, т.е. скорость демпфирования собственных колебаний спутника. В свою очередь, для оценки скорости демпфирования часто используется величина степени устойчивости ξ [3] - взятой с обратным знаком действительной части ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений движения спутника. Большой круг работ посвящён поиску таких значений параметров систем ориентации, при которых достигается максимум ξ . При этом, поскольку характеристические уравнения исследовавшихся систем имеют, как правило, высокий порядок, оптимизация в основном проводилась численно.

Однако следует отметить, что все используемые численные методы на финальной стадии оптимизации теряют свою эффективность, что связано с неаналитичностью степени устойчивости в экстремуме. Неаналитический характер обусловлен тем, что при подходе к экстремуму корни характеристического уравнения стремятся подравнять свои вещественные части. Последний факт был обнаружен в ходе численной оптимизации целого ряда пассивных и полупассивных систем ориентации спутников и был положен в основу специального алгоритма поиска оптимальных параметров таких систем [4].

Напомним некоторые результаты исследования пассивных систем ориентации, демонстрирующие отмеченную тенденцию выравнивания вещественных

частей корней характеристического уравнения в окрестности экстремума степени устойчивости:

- В [5] рассматривалась система спутник-стабилизатор с демпфирующей пружиной, допускающей поступательные перемещения стабилизатора относительно спутника. Оказалось, что максимум степени устойчивости достигается в точке, где все корни характеристического уравнения восьмого порядка имеют одинаковую вещественную часть.
- В [6] исследовался спутник с двумя стабилизаторами, присоединенными при помощи одностепенных шарниров. При оптимальных параметрах действительные части всех корней характеристического уравнения десятого порядка совпадают.
- В [7] определены оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа. Максимальная степень устойчивости такой системы достигается в точке, где все четыре корня характеристического уравнения вещественны и равны.
- В [2] рассматривался спутник, стабилизируемый вращением, с гиродемпфером нутационных колебаний. Показано, что при достаточно большой величине кинетического момента ротора гироскопа максимум степени устойчивости достигается при таких значениях параметров, когда все корни характеристического уравнения вещественны и равны.

Наряду с численными исследованиями задач данного класса предпринимались попытки аналитической оптимизации степени устойчивости. В [8] рассматривались характеристические уравнения третьего и четвертого порядка специального вида:

$$a_o(x)p^4 + k_1a_1(x)p^3 + [k_2a_1(x) + a_2(x)]p^2 + k_1a_3(x) + [k_2a_3(x) + a_4(x)] = 0, \quad (1)$$

$$k_1a_1(x)p^3 + [k_2a_1(x) + a_2(x)]p^2 + k_1a_3(x)p + [k_2a_3(x) + a_4(x)] = 0, \quad (2)$$

$$a_o(x)p^3 + k_1a_1(x)p^2 + a_2(x)p + k_1a_3(x) = 0. \quad (3)$$

Их отличает характер зависимости коэффициентов уравнений от двух выделенных параметров - k_1, k_2 (для системы спутник-стабилизатор (рис. 1) это коэффициенты вязкого трения и упругости в шарнире); $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - остальные параметры системы. Необходимость исследования уравнений (1)-(3) обусловлена тем, что для ряда систем ориентации (см., например, [2, 7, 10-12]) именно такой вид принимают характеристические уравнения. В [8] решена за-

дача оптимизации степени устойчивости по k_1, k_2 для уравнений (1)-(3). Здесь же с использованием полученных результатов проведена аналитическая оптимизация одной частной конфигурации системы спутник-стабилизатор по всем параметрам.

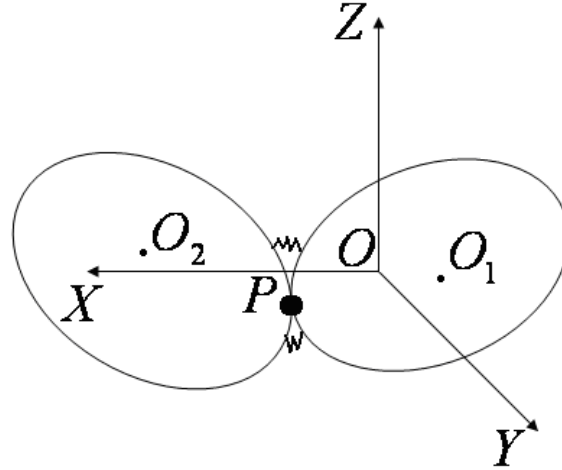


Рис. 1: Система спутник-стабилизатор

В [9] рассмотрено характеристическое уравнение чётного порядка. Показано, что для системы порядка $2n$, зависящей от $2n - 2$ параметров, локальный максимум степени устойчивости достигается при таких значениях параметров, когда характеристическое уравнение имеет n -кратный корень $-d \pm i\omega$.

Настоящая работа посвящена исследованию уравнения

$$a_0(x)p^4 + ka_1(x)p^3 + a_2(x)p^2 + ka_3(x)p + a_4(x) = 0. \quad (4)$$

Такой вид характеристическое уравнение принимает, например, в задаче о малых колебаниях системы спутник-стабилизатор в случае, когда пружина в шарнире отсутствует ($k_2 = 0$). Параметр k в (4) пропорционален коэффициенту вязкого трения в шарнире. Цель исследования состоит в определении оптимального значения коэффициента k , при котором достигается максимум степени устойчивости. Методически работа близка [8].

На первом этапе решается задача максимизации степени устойчивости по k : устанавливаются все конфигурации корней, на которых может достигаться оптимум; для каждой конфигурации определяются области в пространстве безразмерных параметров системы, где она является оптимальной, т.е. на ней достигается максимум степени устойчивости; получено значение максимальной по k степени устойчивости и определено оптимальное значение параметра k .

На втором этапе определяются оптимальные значения всех остальных безразмерных параметров системы спутник-стабилизатор. Показано, что оптимум достигается в двух точках пространства параметров. При этом в обоих случаях характеристическое уравнение имеет четыре равных вещественных корня.

Первый этап оптимизации

Положение равновесия системы является асимптотически устойчивым, если все корни уравнения (4) имеют отрицательные вещественные части. Это накладывает ограничения на коэффициенты $a_i(x)$, $i = \overline{0,4}$. В соответствии с критерием Рауса-Гурвица (полагаем $a_0 > 0$, $a_1 > 0$) имеем

$$k > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0. \quad (5)$$

Введем параметры $\kappa = \frac{a_0 a_3}{a_1 a_2}$, $\gamma = \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3}$. Тогда, в соответствии с (5),

$$\kappa > 0, \quad \gamma > 0, \quad \kappa + \gamma < 1. \quad (6)$$

Соответствующая область на рис. 2 выделена светло-серым цветом.

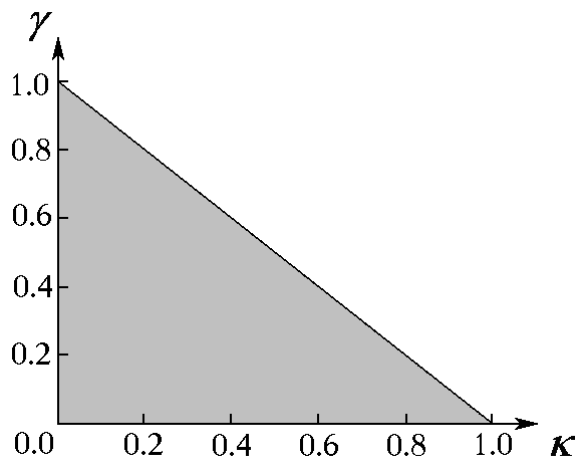


Рис. 2: Допустимая область изменения параметров κ , γ

Обозначим $f(p, k) = a_0(x)p^4 + ka_1(x)p^3 + a_2(x)p^2 + ka_3(x)p + a_4(x)$.

Известно, что комплекснозначные функции $p_i(k)$, $i = \overline{1,4}$, неявно определяемые уравнением (4), непрерывны. Они также дифференцируемы, за исключением, быть может, точек, где

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 4a_0 p^3 + 3ka_1 p^2 + 2a_2 p + ka_3 = 0,$$

что соответствует случаю, когда уравнение (4) имеет кратный корень. Аналогичные утверждения справедливы для $d_i(k) = -\operatorname{Re} p_i(k)$, $i = \overline{1, 4}$. Поскольку степень устойчивости определяется выражением $\xi(k) = \min \{d_i(k)\}$, то её экстремальное значение достигается в точке, где $\xi'(k) = 0$ (т.е. в точке, где $d_i'(k) = 0$ для некоторого i), либо в точке недифференцируемости $\xi(k)$, либо на границе интервала изменения k (при $k = 0$ или $+\infty$). При $k = 0$ уравнение (4) принимает вид $a_0 p^4 + a_2 p^2 + a_4 = 0$, откуда

$$p^2 = -\frac{a_2}{2a_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a_0 a_4}{a_2^2}} \right) = -\frac{a_2}{2a_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\kappa\gamma} \right).$$

Но, в силу (6), $1 > 1 - 4\kappa\gamma = (1 - 2\kappa)^2 + 4\kappa(1 - \kappa - \gamma) > (1 - 2\kappa)^2 > 0$, т.е. $p^2 < 0$. Следовательно, все корни чисто мнимые и $\xi = 0$. Если $k \rightarrow +\infty$, то легко показать, что один из корней уравнения (4) имеет вид $p = -a_4/ka_3 + o(1/k)$, и поэтому с ростом k $\xi(k) \rightarrow 0$. В свою очередь, точки недифференцируемости $\xi(k)$ лежат среди точек недифференцируемости $d_i(k)$ (соответствующих кратному корню уравнения (4)), а также точек, где кривые $d_i(k)$ пересекаются под ненулевым углом. Таким образом, максимальная по k степень устойчивости может достигаться в следующих случаях:

- совпадают действительные части у двух пар комплексно сопряжённых корней: $p_{1,2} = -d \pm i\omega_1$, $p_{3,4} = -d \pm i\omega_2$, $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$;
- совпадают действительные части у двух вещественных корней (кратный вещественный корень, $p_1 = p_2 = -d$);
- совпадают вещественные части у пары комплексно сопряжённых корней и одного вещественного корня: $p_{1,2} = -d \pm i\omega$, $p_3 = -d$;
- для действительной части одного из корней выполнено условие экстремальности: $d_i'(k) = 0$.

Проанализируем далее каждую из перечисленных возможностей.

1. Две пары комплексно сопряжённых корней с одинаковыми вещественными частями

Пусть при $k = k_0$ корни уравнения (4) имеют вид $p_{1,2} = -d \pm i\omega_1$, $p_{3,4} = -d \pm i\omega_2$ (для определенности, $\omega_1^2 \geq \omega_2^2$). Представляя его в виде

$$a_0 \left[(p+d)^2 + \omega_1^2 \right] \left[(p+d)^2 + \omega_2^2 \right] = 0 \quad (7)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p в (4) и (7), получаем

$$\begin{aligned} 4a_0d &= k_0a_1, & a_0(6d^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) &= a_2, \\ 2a_0d(2d^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) &= k_0a_3, & a_0(d^2 + \omega_1^2)(d^2 + \omega_2^2) &= a_4, \end{aligned} \quad (8)$$

откуда

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a_2(1-2\kappa)/4a_0}, & k_0^2 &= 4a_0a_2(1-2\kappa)/a_1^2, \\ \omega_{1,2}^2 &= \frac{a_2}{4a_0} \left(6\kappa - 1 \pm 4\sqrt{\kappa(\kappa-\gamma)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Принимая во внимание неотрицательность k_0^2 и $\omega_{1,2}^2$, получаем условия

$$\kappa < 0.5, \quad \gamma \leq \kappa, \quad \gamma > (10\kappa - 1)(1 - 2\kappa)/16\kappa, \quad (10)$$

при которых такая конфигурация корней возможна (темно-серая область на рис. 3).

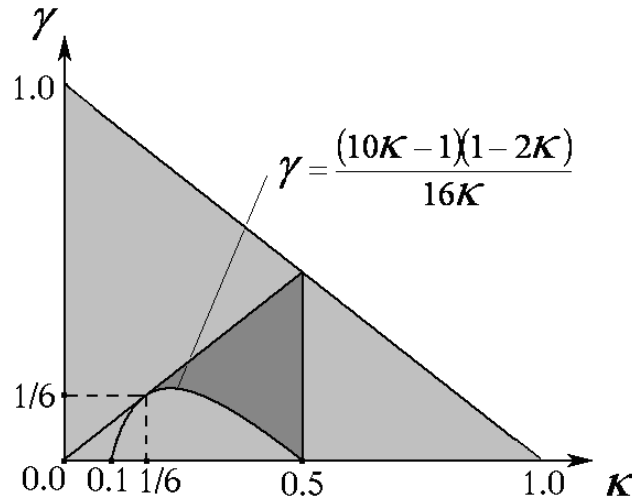


Рис. 3

Теперь определим область, в которой k_0 действительно является оптимальным. Для этого перепишем (4) в виде

$$a_0 \left[(p+d)^2 + \omega_1^2 \right] \left[(p+d)^2 + \omega_2^2 \right] + (k - k_0)(a_1p^3 + a_3p) = 0$$

и сделаем подстановку $s = p + d$. Тогда получим

$$b_0s^4 + b_1s^3 + b_2s^2 + b_3s + b_4 = 0,$$

где

$$b_0 = a_0 > 0, \quad b_1 = a_1(k - k_0), \quad b_2 = a_0(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 3(k - k_0)a_1d,$$

$$b_3 = (k - k_0)(3a_1d^2 + a_3), \quad b_4 = a_0\omega_1^2\omega_2^2 - (k - k_0)(a_1d^2 + a_3)d.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости имеют вид

$$b_1 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_4 > 0, \quad b_1b_2b_3 - b_0b_3^2 - b_1^2b_4 > 0.$$

Из первого условия следует $k - k_0 > 0$, а четвертое условие приводится к виду

$$k - k_0 < \frac{a_2^2}{a_0d(8a_1d^2 + 2a_3)} [(3\kappa - 1)(1 - \kappa) - \gamma\kappa].$$

Отсюда следует, что при $\gamma\kappa > (3\kappa - 1)(1 - \kappa)$ (область I на рис. 4) $k - k_0 < 0$. Таким образом, в области I при $k \neq k_0$ характеристическое уравнение имеет корни, лежащие правее прямой $\text{Re } p = -d$. Таким образом, при $k = k_0$ действительно достигается максимум степени устойчивости и $\xi_{\max} = \sqrt{a_2(1 - 2\kappa)/4a_0}$.

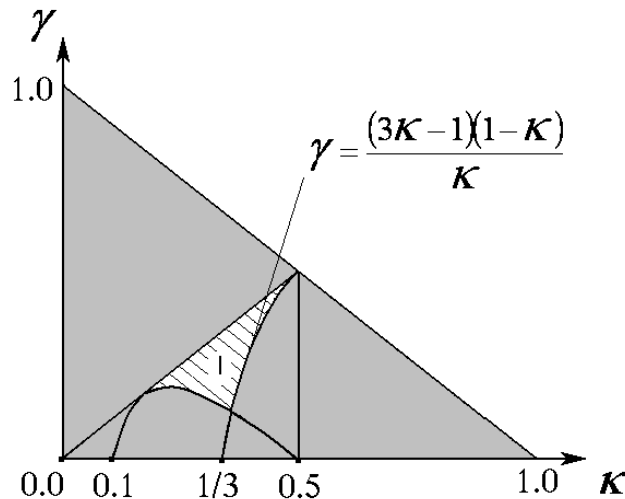


Рис. 4

2. Кратные корни

Проанализируем случай кратных вещественных корней $p_1 = p_2 = -d$, при этом другие два корня (p_3 и p_4) могут быть вещественными или комплексно сопряженными. Случай кратных комплексно сопряжённых корней ($p_{1,2} = p_{3,4} = -d \pm i\omega$) отдельно не исследуется, поскольку при $\omega_1^2 = \omega_2^2$ он сводится к уже рассмотренному в предыдущем разделе случаю (такая конфигурация корней имеет место на границе $\gamma = \kappa$ темно-серой области на рис. 3).

Кратный корень $p = -d$ удовлетворяет уравнению (4) и уравнению

$$-4a_0d^3 + 3ka_1d^2 - 2a_2d + ka_3 = 0. \quad (11)$$

Выражая из (11) $k = \frac{2d(2a_0d^2 + a_2)}{3a_1d^2 + a_3}$ и вводя обозначение $\chi = d^2 \frac{a_0}{a_2}$, преобразуем (4) к виду

$$h(\chi) = \chi^3 + (3\kappa - 1)\chi^2 + (\kappa - 3\gamma\kappa)\chi - \gamma\kappa^2 = 0. \quad (12)$$

Заметим, что уравнение (12) всегда имеет хотя бы один положительный корень.

Определим, при каких условиях максимальная степень устойчивости достигается на кратном корне. Для этого перепишем уравнение (4) в виде

$$a_0(p+d)^2(p-p_3)(p-p_4) + (k-k_0)(a_1p^3 + a_3p) = 0.$$

Здесь k_0 - значение k , соответствующее кратному корню. Если $d < -\operatorname{Re} p_3$ и $d < -\operatorname{Re} p_4$, то при $k = k_0$ степень устойчивости равна d . Если сделать замену $s = p + d$, то в получившемся уравнении коэффициент $(k - k_0)(3a_1d^2 + a_3)$ при s в первой степени, и свободный член $-(k - k_0)d(a_1d^2 + a_3)$ оказываются противоположных знаков, т.е. нарушаются необходимые и достаточные условия устойчивости. Таким образом, показано, что ξ_{\max} достигается на кратном корне, если $-\operatorname{Re} p_3 > d$, $-\operatorname{Re} p_4 > d$.

При поиске области на плоскости (κ, γ) , где эти условия выполнены, удобно разделить всю допустимую область изменения параметров (κ, γ) на две подобласти: в одной уравнение (4) может иметь кратные корни при трёх значениях параметра k (т.е. (12) имеет три положительных корня), в другой – только при одном значении k (т.е. (12) имеет один положительный корень); на границе, разделяющей эти области, уравнение (12) имеет два положительных корня. Для нахождения границы необходимо разрешить систему двух уравнений – уравнения (12) и уравнения $h'(\chi) = 0$, имеющего вид

$$3\chi^2 + (6\kappa - 2)\chi + (\kappa - 3\gamma\kappa) = 0. \quad (13)$$

Исключая из (12), (13) χ , получаем

$$-9\kappa^2(\gamma + \kappa - 1)[108\kappa\gamma^2 + (108\kappa^2 - 108\kappa + 9)\gamma + 9\kappa - 1] = 0. \quad (14)$$

В допустимой области $\kappa > 0$, $\kappa + \gamma < 1$, поэтому (14) эквивалентно

$$108\kappa\gamma^2 + (108\kappa^2 - 108\kappa + 9)\gamma + 9\kappa - 1 = 0,$$

откуда

$$\gamma_{\pm} = \frac{-36\kappa^2 + 36\kappa - 3 \pm (1-6\kappa)\sqrt{3(1-6\kappa)(3-2\kappa)}}{72\kappa}, \quad \kappa < \frac{1}{6}. \quad (15)$$

Заметим, что на кривых (15) кратные корни (χ) действительно положительны, поскольку коэффициент при χ в уравнении (13) отрицателен, а свободный член положителен.

Можно показать, что условие $-\operatorname{Re} p_3 > d$, $-\operatorname{Re} p_4 > d$ выполнено всюду в области существования трёх положительных корней уравнения (12), включая её границы (рис. 5, область между кривыми γ_+ и γ_-), а также в области $\gamma < (10\kappa - 1)(1 - 2\kappa)/16\kappa$, где (12) имеет один положительный корень. На рис. 5 вертикальной штриховкой показана вся область, где оптимум достигается на кратном корне, наклонной – где оптимум достигается в случае двух пар комплексно сопряжённых корней с одинаковой вещественной частью. Остается еще проанализировать случаи 3-х корней с одинаковой вещественной частью и экстремума вида $d_i'(k) = 0$.

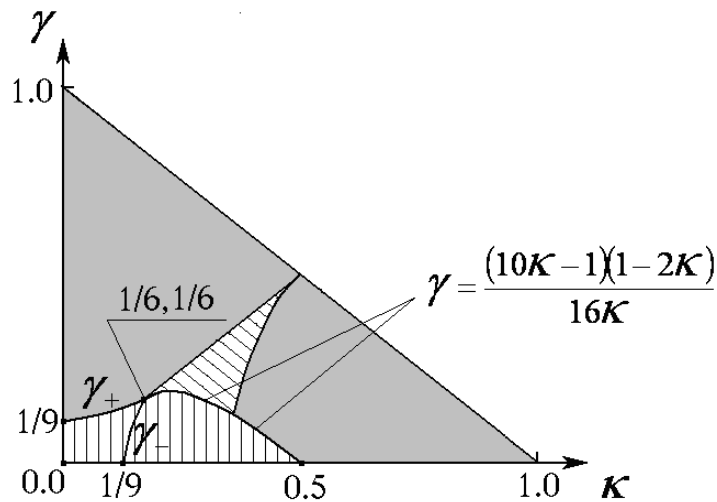


Рис. 5

3. Три корня с одинаковой вещественной частью

Обозначим корни характеристического уравнения $p_{1,2} = -d \pm i\omega$, $p_3 = -d$, $p_4 = -d_1$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$a_0(p^2 + 2dp + d^2 + \omega^2)(p + d)(p + d_1) = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях p , получаем

$$3d + d_1 = \frac{ka_1}{a_0}, \quad 2d^2 + 3dd_1 + d^2 + \omega^2 = \frac{a_2}{a_0},$$

$$(d + d_1)(d^2 + \omega^2) + 2d^2d_1 = \frac{ka_3}{a_0}, \quad (d^2 + \omega^2)dd_1 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Вводя обозначение $\chi = a_0d^2/a_2$, после преобразований получаем

$$8\chi^4 + (26\kappa - 8)\chi^3 + (21\kappa^2 - 11\kappa + 2 - 9\gamma\kappa)\chi^2 - \kappa(-3\kappa + 1 + 14\gamma\kappa - 5\gamma)\chi + \gamma\kappa^2(3\gamma - 1 + \kappa) = 0, \quad (16)$$

а также

$$\omega^2 = \frac{a_2}{a_0} \frac{3\chi^2 + (6\kappa - 2)\chi + \kappa - 3\gamma\kappa}{\chi + \kappa} = \frac{a_2}{a_0} \psi. \quad (17)$$

Нас интересуют положительные корни (16), для которых $\omega^2 > 0$. Найдём сначала кривую, на которой $\omega^2 = 0$. Выразив из этого условия

$$\chi = \left(1 - 3\kappa \pm \sqrt{1 - 9\kappa + 9\kappa^2 + 9\gamma\kappa}\right) / 3$$

и подставив в (16), получим уравнение

$$(\gamma + \kappa - 1)^2 [108\kappa\gamma^2 + (108\kappa^2 - 108\kappa + 9)\gamma + 9\kappa - 1] = 0,$$

эквивалентное (14). Следовательно, $\omega^2 = 0$ на кривых (15); $\omega^2 > 0$ имеет место вне ограниченной этими кривыми области, т.е. в области, где уравнение (4) имеет кратные вещественные корни при одном значении k .

Далее, рассмотрим вопрос о числе положительных корней уравнения (16). Очевидно, (16) имеет положительный корень при $\gamma < (1 - \kappa)/3$. При этом на самой прямой $\gamma = (1 - \kappa)/3$ уравнение (16) принимает вид $\chi P(\chi) = 0$, где

$$P(\chi) = 12\chi^3 + (39\kappa - 12)\chi^2 + (36\kappa^2 - 21\kappa + 3)\chi + \kappa(7\kappa^2 - 5\kappa + 1).$$

Результаты численного решения уравнения $P(\chi) = 0$ показывают, что положительных корней в допустимой области не существует. Кроме того, можно показать, что (16) не имеет кратных положительных корней в области, где $\omega^2 > 0$. Отсюда следует, что при $\gamma < (1 - \kappa)/3$ уравнение (16) имеет положительный корень, и притом единственный, а в оставшейся части области положительных корней нет. Таким образом, рассматриваемая конфигурация корней возможна в темно-серой области на рис. 6.

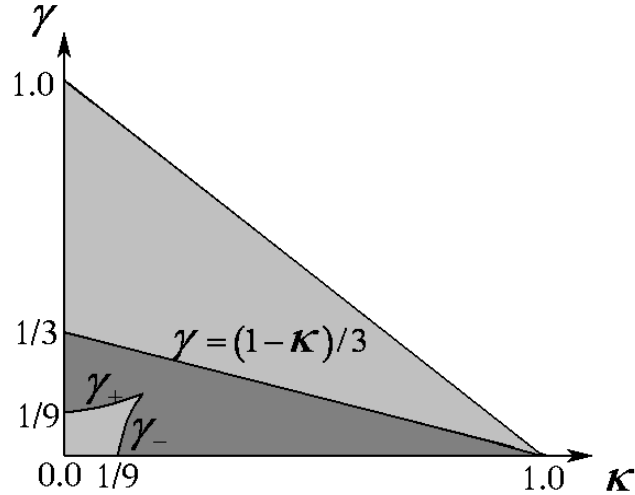


Рис. 6

Теперь определим область, где данная конфигурация корней является оптимальной. Перепишем уравнение (4) в виде

$$a_0(p^2 + 2dp + d^2 + \omega^2)(p + d)(p + d_1) + (k - k_0)(a_1p^3 + a_3p) = 0,$$

где k_0 - значение k , соответствующее рассматриваемой конфигурации корней.

Условие $d_1 > d$ эквивалентно $ka_1/a_0 - 4d > 0$. Подставляя $k = \frac{a_0d^4 + a_2d^2 + a_4}{a_1d^3 + a_3d}$,

преобразуем это неравенство к виду $-3\chi^2 + (1 - 4k)\chi + \gamma k > 0$. Исключая χ из $-3\chi^2 + (1 - 4k)\chi + \gamma k = 0$ и (16), приходим к соотношению

$$\gamma k(16\gamma k + 1 - 12k + 20k^2)(\gamma - 1 + k)^2 = 0,$$

откуда

$$\gamma = (10k - 1)(1 - 2k)/16k.$$

Условие $d_1 > d$ выполняется при $\gamma > (10k - 1)(1 - 2k)/16k$.

Сделаем замену $s = p + d$ и выпишем необходимые и достаточные условия устойчивости полученного в результате уравнения

$$\beta > \frac{3\chi^2 + (4k - 1)\chi - \gamma k}{\chi + k} = \beta_1, \quad (18.1)$$

$$\beta > \frac{3\chi^2 + (4k - 1)\chi - \gamma k}{\chi + k} \cdot \frac{3\chi^2 + (6k - 2)\chi + k - 3\gamma k}{(\chi + k)(3\chi + k)}, \quad (18.2)$$

$$\beta < 0, \quad (18.3)$$

$$\begin{aligned} \beta \cdot g_1(\beta) = & -2(\chi + \kappa)^3 (4\chi + \kappa) \beta^3 + (\chi + \kappa) \left[48\chi^3 + 2(56\kappa^2 - 23\kappa + 3 - 26\gamma\kappa) \chi^2 + \right. \\ & + \kappa(2\kappa^2 + 13\kappa - 3 - 74\gamma\kappa + 15\gamma) \chi - \kappa^2(\kappa^2 + \kappa - 9\gamma^2 + 4\gamma\kappa + 3\gamma) \left. \right] \beta^2 - \\ & - (3\chi^2 + 4\kappa\chi - \chi - \gamma\kappa) \left[24\chi^4 + (86\kappa - 32) \chi^3 + (70\kappa^2 - 44\kappa + 10 - 44\gamma\kappa) \chi^2 + \right. \\ & + \kappa(-10\kappa^2 + 23\kappa - 7 - 76\gamma\kappa + 27\gamma) \chi + \kappa^2(-\kappa + 1 + 18\gamma^2 + 4\gamma\kappa - 9\gamma) \left. \right] \beta > 0. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Здесь введено обозначение $\beta = (k - k_0) \frac{a_1}{\sqrt{a_0 a_2}} \sqrt{\chi}$.

С учётом $\beta < 0$, (18.4) эквивалентно

$$\begin{aligned} g_1 = & -2(\chi + \kappa)^3 (4\chi + \kappa) \beta^2 + (\chi + \kappa) \left[48\chi^3 + (112\kappa^2 - 46\kappa + 6 - 52\gamma\kappa) \chi^2 + \right. \\ & + \kappa(2\kappa^2 + 13\kappa - 3 - 74\gamma\kappa + 15\gamma) \chi - \kappa^2(\kappa^2 - \kappa - 9\gamma^2 + 4\gamma\kappa + 3\gamma) \left. \right] \beta - \\ & - (3\chi^2 + 4\kappa\chi - \chi - \gamma\kappa) \left[24\chi^4 + (86\kappa - 32) \chi^3 + 2(35\kappa^2 - 22\kappa + 5 - 22\gamma\kappa) \chi^2 - \right. \\ & - \kappa(10\kappa^2 - 23\kappa + 7 + 76\gamma\kappa - 27\gamma) \chi - \kappa^2(\kappa - 1 - 18\gamma^2 - 4\gamma\kappa + 9\gamma) \left. \right] < 0, \end{aligned} \quad (18.5)$$

где $-3\chi^2 - (4\kappa - 1)\chi + \gamma\kappa = (\chi + \kappa)(d_1 - d)a_0/a_2 > 0$. При этом

$$g_1(\beta_1) = (-3\chi^2 - 4\kappa\chi + \chi + \gamma\kappa)(-2\kappa\chi + 2\chi - \kappa + \kappa^2 + 3\gamma\kappa)^2 > 0.$$

Поскольку график $g_1(\beta)$ есть парабола, направленная ветвями вниз, условия устойчивости несовместны тогда и только тогда, когда $g_1(0) \geq 0$. Тем самым, для нахождения границы соответствующей области нужно решать совместно (16) и уравнение

$$\begin{aligned} & 24\chi^4 + (86\kappa - 32) \chi^3 + 2(35\kappa^2 - 22\kappa + 5 - 22\gamma\kappa) \chi^2 - \\ & - \kappa(10\kappa^2 - 23\kappa + 7 + 76\gamma\kappa - 27\gamma) \chi - \kappa^2(\kappa - 1 - 18\gamma^2 - 4\gamma\kappa + 9\gamma) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Исключая χ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & -2116\gamma^4 \kappa^2 + \kappa(364\kappa^2 + 2628\kappa - 31) \gamma^3 + (2980\kappa^4 - 2408\kappa^3 - 199\kappa^2 - \\ & - 233\kappa + 40) \gamma^2 + (500\kappa^5 - 940\kappa^4 + 227\kappa^3 + 214\kappa^2 + 7\kappa - 8) \gamma - \\ & - 9\kappa(5\kappa^3 - 11\kappa^2 + 7\kappa - 1) = 0. \end{aligned}$$

Его решения показаны на рис. 7 сплошными линиями (как и граница допустимой области); штриховыми линиями показаны границы области существования исследуемой конфигурации корней, а также кривая, где выполнено условие $d_1 = d$.

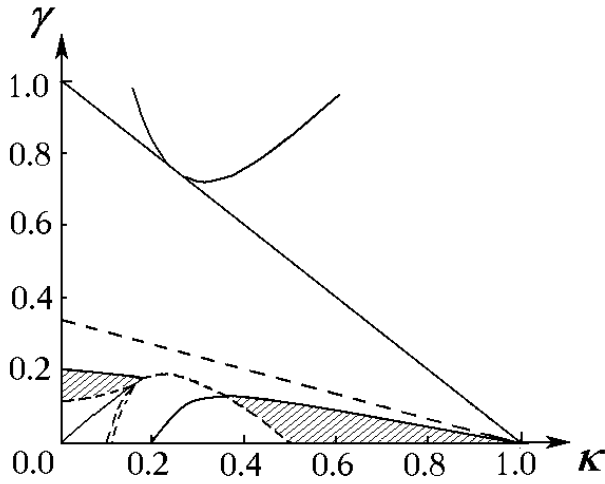


Рис. 7

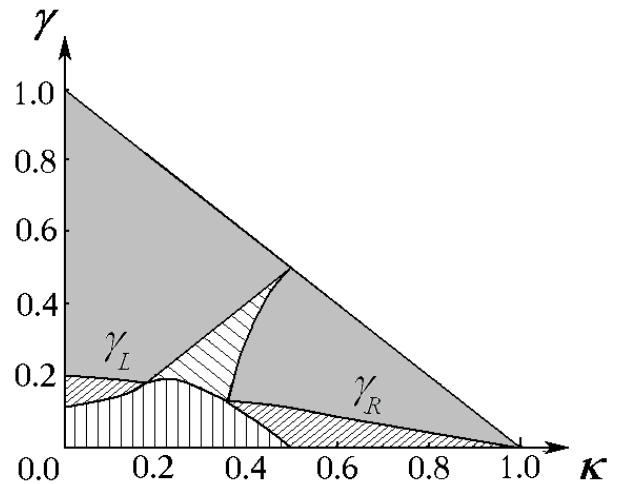


Рис. 8

Область, в которой рассматриваемая конфигурация корней является оптимальной, на рис. 7, 8 отмечена более плотной наклонной штриховкой. Левая и правая части верхней границы этой области обозначены γ_L и γ_R , соответственно.

4. Случай $d'(k)=0$

Предметом рассмотрения в данном разделе являются точки, в которых выполняется необходимое условие внутреннего экстремума $d'(k) = 0$, где $d(k)$ - действительная часть орня уравнения (4), взятая с обратным знаком. Покажем сначала, что это условие не может выполняться на вещественном корне $p = -d$.

Действительно, для вещественного корня уравнения (4) имеет место

$$a_0 d^4 - k a_1 d^3 + a_2 d^2 - k a_3 d + a_4 = 0. \quad (20)$$

Дифференцируя по k , получаем

$$d'(k) [4a_0 d^3 - 3k a_1 d^2 + 2a_2 d - k a_3] - d(a_1 d^2 + a_3) = 0.$$

Таким образом, $d'(k) = 0$ влечёт $d(a_1 d^2 + a_3) = 0$. Однако $a_1 d^2 + a_3 > 0$, а $d = 0$ противоречит предположению об устойчивости решения.

Поэтому далее будем рассматривать условие $d'(k) = 0$ только для пары комплексно сопряженных корней $-d \pm i\omega$. Перепишем уравнение (4) в виде

$$[p^2 + 2dp + d^2 + \omega^2] [p^2 - (p_3 + p_4)p + p_3 p_4] = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях p , получаем

$$\begin{aligned}
 2d - p_3 - p_4 &= \frac{ka_1}{a_0}, & 2d(-p_3 - p_4) + p_3p_4 + d^2 + \omega^2 &= \frac{a_2}{a_0}, \\
 (-p_3 - p_4)(d^2 + \omega^2) + 2dp_3p_4 &= \frac{ka_3}{a_0}, & p_3p_4(d^2 + \omega^2) &= \frac{a_4}{a_0}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Обозначим $\zeta = d^2 + \omega^2$, $\eta = p_3p_4$. Тогда из (21) находим

$$\begin{aligned}
 \zeta, \eta &= -d \left(\frac{ka_1}{a_0} - 2d \right) + \frac{a_2}{2a_0} \pm \sqrt{\left[\frac{a_2}{2a_0} - d \left(\frac{ka_1}{a_0} - 2d \right) \right]^2 - \frac{a_4}{a_0}}, \\
 \left(\frac{ka_1}{a_0} - 4d \right)^2 &\left\{ \left[\frac{a_2}{2a_0} - d \left(\frac{ka_1}{a_0} - 2d \right) \right]^2 - \frac{a_4}{a_0} \right\} = \left[\frac{ka_3}{a_0} - \frac{ka_1a_2}{a_0^2} - \frac{ka_1d}{a_0} \left(2d - \frac{ka_1}{a_0} \right) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Обозначая $\psi = \frac{2a_0d}{a_2} \left(2d - \frac{ka_1}{a_0} \right)$, получаем $k^2 = \frac{a_2^2}{a_1a_3} \frac{\psi(\psi^2 + 2\psi + 1 - 4\gamma\kappa)}{-\psi - 1 + \kappa + \gamma}$.

Переменная ψ изменяется в интервале от $x = \kappa + \gamma - 1$ до 0; квадратичный сомножитель в числителе обращается в нуль в точках $-1 \pm 2\sqrt{\gamma\kappa}$, лежащих вне этого интервала (поскольку $\kappa + \gamma \geq 2\sqrt{\gamma\kappa}$); d имеет вид

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{1}{4} \left(\frac{ka_1}{a_0} \pm \sqrt{\frac{k^2a_1^2}{a_0^2} + 4\frac{a_2}{a_0}\psi} \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a_2}{a_0\kappa}} \sqrt{\frac{-\psi}{\psi - x}} \left[\sqrt{\psi^2 + 2\psi + 1 - 4\gamma\kappa} + (\psi + 1 - 2\kappa) \operatorname{sign}(\kappa - \gamma) \right].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Ответ на вопрос, почему рассматриваются только зависимости $d(\psi)$, соответствующие зависимостям $p(\psi)$, остающимся комплексными при всех значениях ψ (т.е. $\operatorname{Im} p(\psi) \neq 0 \quad \forall \psi \in [x, 0]$; для таких ветвей выполнено условие $d(k = +\infty) = d(\psi = \kappa + \gamma - 1) = 0$), дают следующие два утверждения:

Утверждение 1: Луч $d = d_0$, $\omega > 0$ на комплексной плоскости пересекает кривые $p(k)$ (решения (4)) не более трёх раз.

Для доказательства подставим в (4) $p = d_0 + i\omega$ и выделим действительную и мнимую части. Получим два уравнения:

$$\begin{aligned}
 a_0\omega^4 - (6a_0d_0^2 + 3ka_1d_0 + a_2)\omega + a_0d_0^4 + ka_1d_0^3 + a_2d_0^2 + ka_3d_0 + a_4 &= 0, \\
 -(4a_0d_0 + ka_1)\omega^3 + (4a_0d_0^3 + 3ka_1d_0^2 + 2a_2d_0 + ka_3)\omega &= 0.
 \end{aligned}$$

Из второго уравнения (с учётом $\omega > 0$) выражаем

$$\omega^2 = \frac{4a_0d_0^3 + 3ka_1d_0^2 + 2a_2d_0 + ka_3}{4a_0d_0 + ka_1}$$

и подставляем в первое уравнение. Обозначая $s = 2d_0\sqrt{a_0/a_2}$, $\bar{k} = ka_1/\sqrt{a_0a_2}$, приходим к кубическому по \bar{k} уравнению

$$s^6 + 3\bar{k}s^5 + (3\bar{k}^2 + 2)s^4 + (\bar{k}^3 + 4\bar{k})s^3 + [(\kappa + 2)\bar{k}^2 + 1 - 4\gamma\kappa]s^2 + [\kappa\bar{k}^3 + (1 - 4\gamma\kappa)\bar{k}]s + \kappa\bar{k}^2(1 - \kappa - \gamma) = 0,$$

что и доказывает утверждение.

Утверждение 2: Если условие $d'(k) = 0$ выполнено на ветви $p(k)$, содержащей кратный вещественный корень, то оптимум степени устойчивости в этой точке не достигается.

Предположим, что на ветви, содержащей кратный вещественный корень, $d'(k) = 0$. Заметим, что достаточно ограничиться подобластью, где конфигурация «кратный вещественный корень» достигается при единственном значении k (в противном случае оптимум всегда достигается на минимальном по модулю кратном корне, см. п. 2). Для того, чтобы условие $d'(k) = 0$ обеспечивало максимум степени устойчивости, необходимо, чтобы, во-первых, $d''(k) > 0$, а во-вторых, чтобы два остальных корня лежали левее этой точки (они лежат на «чисто комплексных» ветвях, точка C в верхней полуплоскости и симметричная точка в нижней, рис. 9).

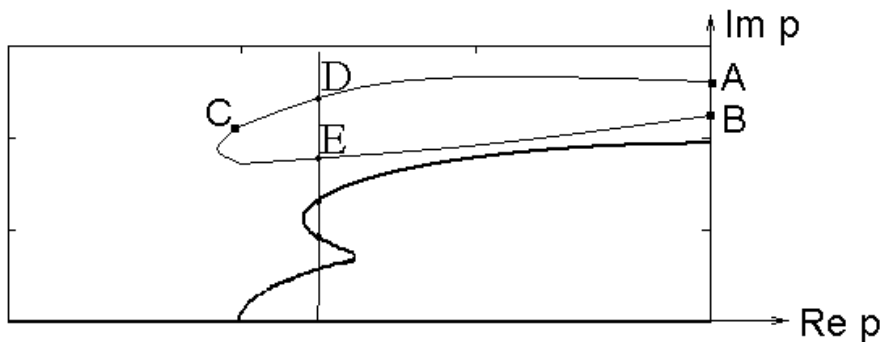


Рис. 9

Но тогда, очевидно, «чисто комплексная» ветвь (начинающаяся в А и заканчивающаяся в В) пересекает луч $d = d_0 + \varepsilon$, $\omega > 0$ в двух точках (D и E); в результате будет по меньшей мере 4 пересечения, что противоречит Утверждению 1.

Вернемся к поиску экстремума. Поскольку $k'(\psi) = \infty$ только при $k = 0$ и $k = +\infty$, т.е. на границе области определения, то условие $d'(k) = 0$ эквивалентно условию $d'(\psi) = 0$. Последнее, в свою очередь, сводится к уравнению

$$f(\psi) = 2\psi^3(x + y + 1) - x\psi^2(3x + 2y + 6) + 2x\psi(3x - 2xy - y^2) - x^2(2x - y^2 - 2xy) = 0, \quad (23)$$

где $y = 1 - 2\kappa$. Поскольку $f(0) = x^2(1 - 4\gamma\kappa) > 0$ в допустимой области ($1 - 4\gamma\kappa > 1 - 4\kappa + 4\kappa^2 \geq 0$), а $f(x) = -x^2(x + y)^2 < 0$, то на допустимом интервале существует от одного до трех экстремумов. В случае 3-х экстремумов рассматривается тот, для которого соответствующее d минимально; это правомерно, поскольку, в силу *Утверждения 2*, достаточно рассматривать «чисто комплексные» ветви; в силу *Утверждения 1* они имеют единственный экстремум (в противном случае, было бы по меньшей мере пять пересечений); в силу того же *Утверждения 1*, если экстремумов больше одного, то минимальный находится на «чисто комплексной» ветви (в противном случае было бы пять пересечений).

Найдём область оптимальности данной конфигурации. Представим (4) в виде

$$a_0(p^2 + 2dp + d^2 + \omega^2)[p^2 - (p_3 + p_4)p + p_3p_4] + (k - k_0)p(a_1p^2 + a_3) = 0,$$

где k_0 - значение k , соответствующее рассматриваемой конфигурации корней. Будем предполагать, что $-\text{Re } p_3 > d$, $-\text{Re } p_4 > d$. Сделаем замену $s = p + d$ и выпишем два из необходимых и достаточных условий устойчивости, а именно, условия $b_1 > 0$ и $b_1b_2b_3 - b_0b_3^2 - b_1^2b_4 > 0$ (здесь b_i обозначают коэффициенты полученного уравнения, $\hat{k} = k - k_0$). Имеем

$$\hat{k} > -\frac{a_0}{a_1}(-p_3 - p_4 - 2d) = \hat{k}_1 < 0, \quad (24)$$

$$g_2(\hat{k}) = \alpha_1\hat{k}^3 + \alpha_2\hat{k}^2 + \alpha_3\hat{k} > 0,$$

где

$$\alpha_1 = -8a_1d^3 - 2a_1^2a_3d < 0,$$

$$\alpha_3 = a_1\omega^4 + [-2da_1(-p_3 - p_4) + 2a_1d^2 - a_1p_3p_4 - a_3]\omega^2 + a_1d^4 + 3a_1d^2p_3p_4 - 2d^3a_1(-p_3 - p_4) - a_3d^2 + a_3p_3p_4. \quad (25)$$

При этом оказывается, что

$$g_2(\hat{k}_1) = -\frac{a_0^3}{a_1^2}(-p_3 - p_4 - 2d)^2(a_3 - a_1\omega^2 + 3a_1d^2)^2 < 0.$$

Кроме того, дифференцируя выражения (21) по k , исключая производные

$$\frac{d(-p_3 - p_4)}{dk}, \frac{d(\omega^2)}{dk}, w = \frac{d(p_3 p_4)}{dk} \text{ и учитывая, что } d'(k) = 0, \text{ получаем}$$

$$\alpha_3 = 0.$$

Таким образом, имеем

$$g_2(\hat{k}) = \alpha_1 \hat{k}^3 + \alpha_2 \hat{k}^2, \alpha_1 < 0, \hat{k}_1 < 0, g_2(\hat{k}_1) < 0.$$

Это означает, что необходимые и достаточные условия устойчивости несовместны (см. рис. 10).

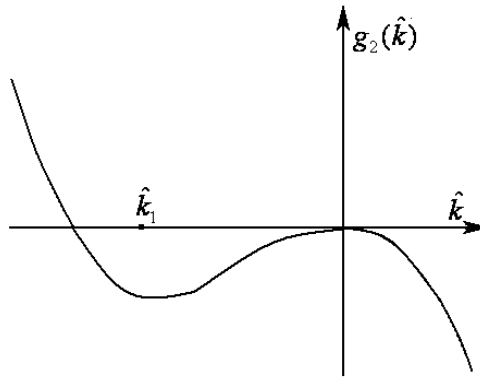


Рис. 10

Следовательно, оптимум достигается в точке внутреннего экстремума только при $-\text{Re } p_3 > d, -\text{Re } p_4 > d$. При этом, на границах с областью, где оптимальной является конфигурация «две пары комплексно сопряжённых корней с одинаковой вещественной частью», имеет место $d = -\text{Re } p_3 = -\text{Re } p_4$. На границах с областью, где оптимальной является конфигурация «три корня с одинаковой вещественной частью», имеет место $d = -\text{Re } p_3 < -\text{Re } p_4$. Во всех точках внутри области $-\text{Re } p_3 > d, -\text{Re } p_4 > d$.

5. Результаты первого этапа оптимизации

Подводя итог первого этапа оптимизации, сформулируем полученные результаты. Плоскость параметров (κ, γ) разбита на области, в каждой из которых максимум степени устойчивости достигается на определенной конфигурации корней (см. Таблицу, рис. 11).

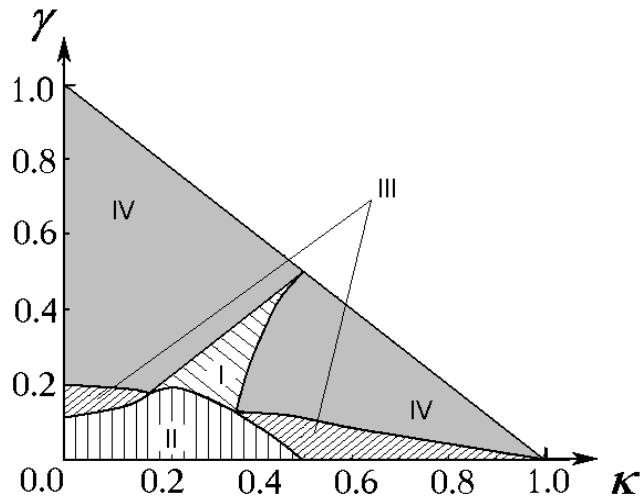


Рис. 11

Заметим, что в точках $(1/6, 1/6)$ и $(5/14, 9/70)$ сходятся все типы областей. В первом случае уравнение (4) имеет 4-х кратный вещественный корень, во втором вещественные части кратного корня и экстремума $d'(k) = 0$ совпадают.

Поскольку оптимальное значение степени устойчивости всегда можно представить в виде $g(\kappa, \gamma) \sqrt{a_2/a_0}$, интересно рассмотреть зависимости от κ степени устойчивости при фиксированном значении a_2/a_0 (положим его равным 1) и нескольких фиксированных значениях γ (рис. 12).

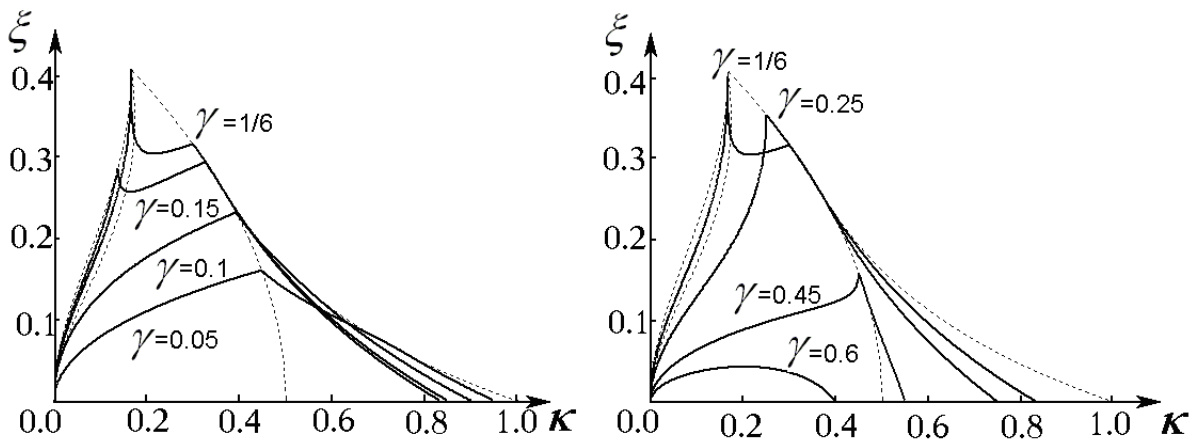


Рис. 12

Таблица

	область	конфигурация корней
I	$\gamma > \max \left\{ \frac{(10\kappa - 1)(1 - 2\kappa)}{16\kappa}, \frac{(3\kappa - 1)(1 - \kappa)}{\kappa} \right\}$ $\gamma < \kappa$	$p_{1,2} = -d \pm i\omega_1$ $p_{3,4} = -d \pm i\omega_2$
	$\xi_{\max} = \sqrt{a_2(1 - 2\kappa)/4a_0} ; k = 2\sqrt{a_0 a_2(1 - 2\kappa)}/a_1$	
II	$\gamma > 0, \gamma < \gamma_+ \quad (\kappa < 1/6)$ $\gamma < (10\kappa - 1)(1 - 2\kappa)/16\kappa \quad (\kappa \geq 1/6)$	$p_{1,2} = -d$ $-\operatorname{Re} p_3 > d, \quad -\operatorname{Re} p_4 > d$
	$\xi_{\max} = \sqrt{\chi a_2/a_0}, \text{ где } \chi - \text{минимальный положительный корень уравнения}$ $\chi^3 + (3\kappa - 1)\chi^2 + (\kappa - 3\gamma\kappa)\chi - \gamma\kappa^2 = 0 ; k = d(4a_0d^2 + 2a_2)/(3a_1d^2 + a_3)$	
III	$\gamma_+ < \gamma < \gamma_L \quad (\kappa < 1/6)$ $\max \{0, (10\kappa - 1)(1 - 2\kappa)/16\kappa\} < \gamma < \gamma_R \quad (\kappa > 5/14)$	$p_{1,2} = -d \pm i\omega, \quad p_3 = -d$ $p_4 = -d_1, \quad d_1 > d$
	$\xi_{\max} = \sqrt{\chi a_2/a_0}, \text{ где } \chi - \text{положительный корень уравнения}$ $8\chi^4 + (26\kappa - 8)\chi^3 + (21\kappa^2 - 11\kappa + 2 - 9\gamma\kappa)\chi^2 + \kappa(3\kappa - 1 - 14\gamma\kappa + 5\gamma)\chi + \gamma\kappa^2(3\gamma - 1 + \kappa) = 0$ $k = (a_0d^4 + a_2d^2 + a_4)/d(a_1d^2 + a_3)$	
IV	$\gamma_L < \gamma < 1 - \kappa \quad (\kappa < 1/6)$ $\kappa < \gamma < 1 - \kappa \quad (1/6 \leq \kappa < 1/2)$ $\gamma_R < \gamma < \max \{1 - \kappa, (3\kappa - 1)(1 - \kappa)/\kappa\} \quad (\kappa > 5/14)$	$p_{1,2} = -d \pm i\omega$ $-\operatorname{Re} p_3 > d, \quad -\operatorname{Re} p_4 > d$ $d'(k) = 0$
	$\xi_{\max} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{-\psi}{\psi - x}} \left(\sqrt{\psi^2 + 2\psi + 1 - 4\gamma\kappa} + (\psi + 1 - 2\kappa) \operatorname{sign}(\kappa - \gamma) \right),$ <p>где ψ - корень уравнения</p> $2\psi^3(x + y + 1) - x\psi^2(3x + 2y + 6) + x\psi(6x - 4xy - 2y^2) - x^2(2x - y^2 - 2xy) = 0,$ <p>лежащий в интервале $(x, 0)$, $x = \kappa + \gamma - 1$, $y = 1 - 2\kappa$;</p> $k = (a_0d^4 + a_2d^2 + a_4)/d(a_1d^2 + a_3)$	

На рис. 12 штриховыми линиями показаны образы границ областей I-IV (видно, что некоторые из них являются «оггибающими» графиков $d(\kappa)$; на некоторых происходит разрыв производной). Максимальное значение степени устойчивости достигается при $\kappa = \gamma = 1/6$ и, согласно (9), составляет $1/\sqrt{6}$. Приведём также пример зависимости оптимального коэффициента демпфирования от κ при фиксированном γ (на рис. 13, где $\gamma = 1/6$, штриховой линией обозначен образ области I).

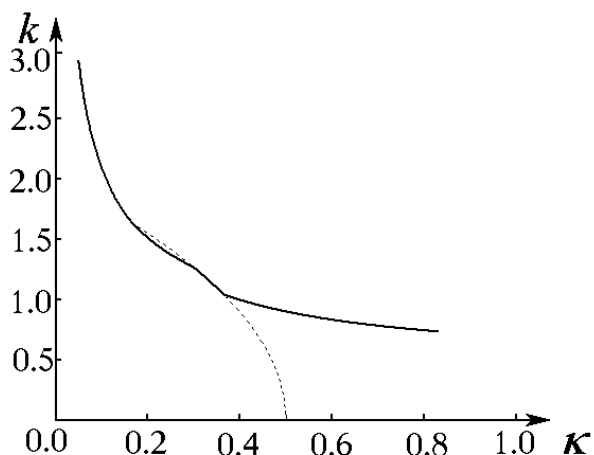


Рис. 13

Второй этап оптимизации

На втором этапе определим оптимальные значения всех параметров системы спутник-стабилизатор (рассматривается равновесие, в котором спутник и стабилизатор ориентированы вдоль касательной к орбите; шарнир совпадает с центром масс каждого из тел). В случае, когда отсутствует упругая связь в шарнире, линеаризованные уравнения, определяющие малые колебания системы спутник-стабилизатор в плоскости круговой орбиты, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_1 + 3\lambda_1 \vartheta_1 + k(\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2) &= 0, \\ \mu^2 \ddot{\vartheta}_2 + 3\mu^2 \lambda_2 \vartheta_2 - k(\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\lambda_1 = (A_1 - C_1)/B_1, \quad \lambda_2 = (A_2 - C_2)/B_2, \quad \mu = \sqrt{B_2/B_1}, \quad k = \bar{k}/\omega_0 B_1,$$

$A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ - главные центральные моменты инерции спутника и стабилизатора, \bar{k} - коэффициент демпфирования, ω_0 - угловая скорость движения центра масс системы по орбите, ϑ_1, ϑ_2 - углы тангажа, определяющие ориентацию спутника и стабилизатора в орбитальной системе координат; точкой обо-

значено дифференцирование по истинной аномалии. Характеристическое уравнение системы (26) имеет вид (4), где

$$a_0 = \mu^2, a_1 = 1 + \mu^2, a_2 = 3\mu^2(\lambda_1 + \lambda_2), a_3 = 3(\lambda_1 + \mu^2\lambda_2), a_4 = 9\mu^2\lambda_1\lambda_2. \quad (27)$$

Вместо использовавшихся выше параметров κ, γ удобно перейти к таким параметрам ρ, ν , что ρ зависит только от μ , а ν - только от λ_1 и λ_2 . Например, введем параметры

$$\nu = \gamma\kappa = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, \quad \rho = \frac{\kappa - \kappa^2 - \nu}{1 - 4\nu} = \frac{\mu^2}{(1 + \mu^2)^2}. \quad (28)$$

На плоскости (ρ, ν) допустимая область представляет собой квадрат $0 < \rho, \nu < 0.25$; при этом каждой точке области соответствуют две точки области на плоскости (κ, γ) , абсциссы которых симметричны относительно 0.5.

Заметим, что все полученные выше формулы для оптимальной степени устойчивости представимы в виде

$$\hat{d} = \tilde{g}(\kappa, \gamma)\sqrt{a_2/a_0} = g(\rho, \nu)\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

При этом величина ν определяется лишь отношением λ_1/λ_2 . Поэтому очевидно, что максимум степени устойчивости достигается в точке (λ_1, λ_2) на границе допустимой области $|\lambda_i| \leq 1$, т.е. либо $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = b$, либо $\lambda_1 = b, \lambda_2 = 1$ ($b < 1$; выражение для ν симметрично относительно λ_1, λ_2). Физически это означает, что одно из тел вырождается в пластину. При таких λ_1, λ_2 имеем

$$1 + \sqrt{1 - 4\nu} = (\lambda_1 + \lambda_2 + |\lambda_1 - \lambda_2|)/(\lambda_1 + \lambda_2) = 2 \max\{\lambda_1, \lambda_2\}/(\lambda_1 + \lambda_2) = 2/(\lambda_1 + \lambda_2),$$

откуда $\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} = \sqrt{2/(1 + \sqrt{1 - 4\nu})}$ и, следовательно,

$$\hat{d} = g(\rho, \nu)\sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}}. \quad (29)$$

Анализ выражения (29) удобно провести лишь для случая двух пар комплексно сопряжённых корней с одинаковой вещественной частью (заштрихованная область на рис. 14). В этом случае $\kappa < 0.5$, и соответствие этой области с областью на плоскости (κ, γ) является взаимно однозначным.

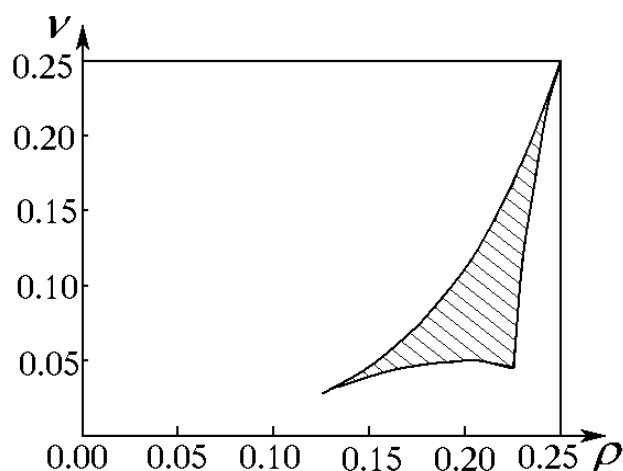


Рис. 14

В рассматриваемом случае формула (29) принимает вид

$$\hat{d} = \frac{\sqrt[4]{1-4\rho}}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{1-4\nu}}{1+\sqrt{1-4\nu}}},$$

т.е. \hat{d} монотонно убывающая функция ρ и ν . Следовательно, максимум достигается на границе в точке $(1/8, 1/36)$, которой в пространстве $\mu, \lambda_1, \lambda_2$ соответствует два набора оптимальных параметров

- 1) $\mu = \sqrt{2} + 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = (\sqrt{2} - 1)^4;$
- 2) $\mu = \sqrt{2} - 1, \quad \lambda_1 = (\sqrt{2} - 1)^4, \quad \lambda_2 = 1.$

В первом случае оптимальное значение $k = \sqrt{6}$, во втором $k = \sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)^2$.

Степень устойчивости в обоих случаях $d_* = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)$, при этом характеристическое уравнение имеет 4-х кратный корень.

Докажем, что d_* является глобальным максимумом степени устойчивости. Подставляя в (4) $w = p + d_*$, получим

$$\begin{aligned} a_0 w^4 + (ka_1 - 4a_0 d_*) w^3 + (a_2 - 3ka_1 d_* + 6a_0 d_*^2) w^2 + \\ + (ka_3 - 2a_2 d_* + 3ka_1 d_*^2 - 4a_0 d_*^3) w + \\ + (a_4 - ka_3 d_* + a_2 d_*^2 - ka_1 d_*^3 + a_0 d_*^4) = b_0 w^4 + b_1 w^3 + b_2 w^2 + b_3 w + b_4 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Введём обозначения

$$\frac{a_2}{a_0 d_*^2} = s = \frac{2(\sqrt{2} + 1)^2}{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}, \quad \hat{\kappa} = \kappa s, \quad \hat{k} = \frac{ka_1}{a_0 d_*}. \quad (31)$$

Тогда необходимые и достаточные условия устойчивости принимают вид

$$\hat{k} > 4, \quad (32.1)$$

$$\hat{k} > (2s + 4)/(\hat{k} + 3), \quad (32.2)$$

$$\hat{k} < (1 + s + \nu s^2)/(\hat{k} + 1), \quad (32.3)$$

$$f(\hat{k}) = (-2\hat{k} - 8)\hat{k}^3 + [-\hat{k}^2 + (s + 4)\hat{k} - \nu s^2 + 8s + 48]\hat{k}^2 + [-96 - 32s - (2 - 8\nu)s^2]\hat{k} + 64 + 32s + (4 - 16\nu)s^2 > 0, \quad (32.4)$$

откуда, в частности, следует

$$\hat{k} < 2 + s/3. \quad (32.5)$$

Сравнивая (32.1) и (32.5), получаем $s > 6$, откуда $\nu > 1/36$. Заметим далее, что

$$f(4) = -4[2\hat{k} - (s - 4)]^2 \leq 0, \quad f'(4) = -2[2\hat{k} - (s - 4)][2\hat{k} - (s - 12)], \quad (33)$$

т.е., при $\hat{k} = 4$ многочлен из условия (32.4) отрицателен за исключением случая, когда $2\hat{k} - (s - 4) = 0$. Построим соответствующую кривую на плоскости (ρ, ν) совместно с линией $\nu = 1/36$ (рис. 15).

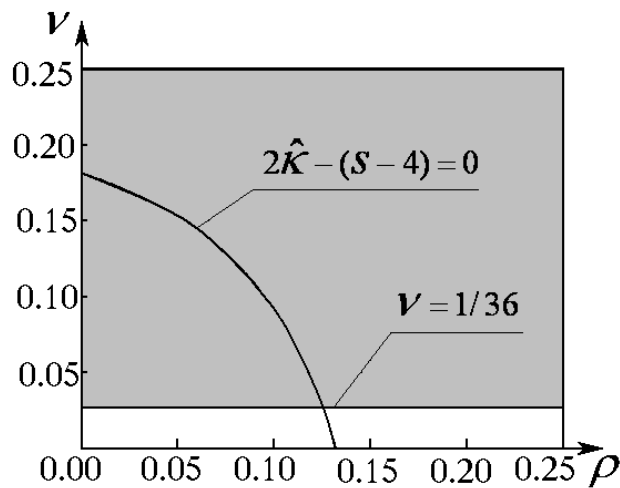


Рис. 15

Заметим, что кривая $2\hat{k} - (s - 4) = 0$ соответствует «листу», где $\kappa < 0.5$ (поскольку из $2\hat{k} - (s - 4) = 0$ следует $\kappa = (s - 4)/2s < 0.5$). Правее этой кривой на данном листе, а также на всём листе, где $\kappa > 0.5$, как следует из (33), $f'(4) < 0$,

поскольку при $\nu \in (0, 0.25)$ $s \in \left((\sqrt{2} + 1)^2, 2(\sqrt{2} + 1)^2 \right) \approx (5.83, 11.66)$. Далее, график функции

$$f'(k) = -6(\hat{k} + 4)\hat{k}^2 - 2\left[\hat{k}^2 - \hat{k}(s + 4) + \nu s^2 - 8s - 48\right]\hat{k} - 96 - 32s - 2(1 - 4\nu)s^2$$

есть парабола, направленная ветвями вниз.

Несложно показать, что всюду в допустимой области точка 4 лежит правее вершины параболы, т.е.

$$\frac{-\hat{k}^2 + \hat{k}(s + 4) - \nu s^2 + 8s + 48}{6\hat{k} + 24} < 4. \quad (34)$$

Из (34) следует, что даже при наличии у функции $f(\hat{k})$ экстремумов точка $\hat{k} = 4$ лежит в этом случае правее них, а поэтому $f(\hat{k}) < 0$ не только при $\hat{k} = 4$, но и при $\hat{k} > 4$. Таким образом, показана несовместность условий (32).

Рассмотрим теперь область $\nu > 1/36$, лежащую левее кривой $2\hat{k} - (s - 4) = 0$ на листе $\kappa < 0.5$. В этой области $f'(4) > 0$, но, по-прежнему, $f(4) < 0$. Поскольку, очевидно, $f(-\infty) = +\infty$ и $f(+\infty) = -\infty$, то ситуация, когда $f(\hat{k}) > 0$ в каких-то точках правее $\hat{k} = 4$, возможна только, если уравнение $f(\hat{k}) = 0$ имеет более одного корня. Найдём область, на плоскости (ρ, ν) , в которой это имеет место. Для нахождения её границ решаем совместно уравнения $f(\hat{k}) = 0$ и $f'(\hat{k}) = 0$, что приводит к уравнению 4-го порядка, которое ввиду его громоздкости здесь не приводится. Решая его численно, получаем область существования 3-х корней (на рис. 16 заштрихована).

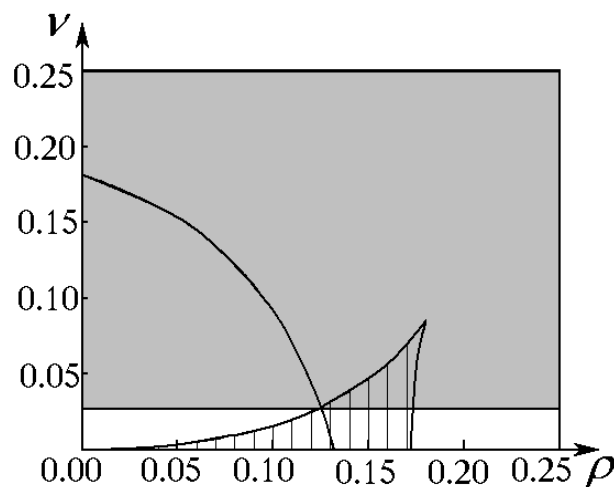


Рис. 16

Граница полученной области проходит непосредственно через точку $(1/8, 1/36)$. Таким образом, область левее кривой $2\hat{k} - (s - 4) = 0$ (и $\nu > 1/36$) и область 3-х корней не пересекаются. Поэтому из $f(4) < 0$ следует, что и при $\hat{k} > 4$ $f(\hat{k}) < 0$, т.е. и в этом случае условия (32) несовместны.

Наконец, рассмотрим точки, лежащие непосредственно на кривой $2\hat{k} - (s - 4) = 0$. Из проведенного выше анализа следует, что хотя теперь $f(4) = 0$, но всюду правее $f(\hat{k}) < 0$, и снова условия (32) несовместны.

Тем самым, показано, что всюду в допустимой области изменения параметров (ρ, ν) необходимые и достаточные условия устойчивости уравнения (30) не выполнены, т.е. оно имеет корни в правой полуплоскости. Это означает, что оптимум действительно достигается в точке $(1/8, 1/36)$. При этом максимальная степень устойчивости $d_* = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)$ достигается при следующих значениях параметров:

- 1) $\mu = \sqrt{2} + 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = (\sqrt{2} - 1)^4, \quad k = \sqrt{6};$
- 2) $\mu = \sqrt{2} - 1, \quad \lambda_1 = (\sqrt{2} - 1)^4, \quad \lambda_2 = 1, \quad k = \sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)^2.$

Заключение

В настоящей работе проведена оптимизация по k степени устойчивости для характеристического уравнения вида (4). Установлено, что максимальное значение степени устойчивости может достигаться на одной из четырёх конфигураций корней. В пространстве безразмерных параметров системы определены соответствующие области, для каждой из которых получены выражения, определяющие максимальную величину степени устойчивости и оптимальное значение k .

Для частного случая системы спутник-стабилизатор (шарнир совпадает с центрами масс спутника и стабилизатора) определены оптимальные параметры, при которых собственные колебания системы в плоскости круговой орбиты затухают максимально быстро. Строго доказано, что в точке оптимума характеристическое уравнение имеет 4-х кратный вещественный корень. При этом одно из тел вырождается в пластину.

Литература

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников, Итоги науки и техники. Серия “Исследование космического пространства”. ВИНТИ, т.11, 1978.
2. Мирер С.А. Оптимальное гиродемпфирование нутационных колебаний спутника, стабилизируемого вращением. Космич. исследования, т. 15, 1977, №5, с. 677-682.
3. Цыпкин Я.З., Бромберг П.В. О степени устойчивости линейных систем. Изв. АН СССР, ОТН, 1945, №12, с. 1163-1168.
4. Сарычев В.А., Пеньков В.И., Яковлев Н.И. Оптимизация параметров линейных систем. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1975, №124.
5. Сарычев В.А., Пеньков В.И. Исследование гравитационной системы стабилизации спутника с демпфирующей пружиной. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1974, №127.
6. Яковлев Н.И. Оптимизация по быстродействию параметров гравитационных систем ориентации с двумя демпферами. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1976, №56.
7. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа. Космич. исследования, т. 35, 1997, № 6, с. 651-658.
8. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников. Космич. исследования, т. 14, 1976, №2, 1976, с. 198-208.
9. Сидорюк М.Е. К задаче нахождения максимума степени устойчивости. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1981, №89.
10. Sarychev V.A., Mirer S.A., Sazonov V.V. Plane oscillations of a gravitational system satellite-stabilizer with maximal speed of response. Acta Astronautica, vol.3, 1976, No.9-10, p. 651-669.
11. Мирер С.А. Плоские колебания спутника с двумя гироскопами. Космич. исследования, т. 16, 1978, № 1, с. 137-139.
12. Sarychev V.A., Mirer S.A., Isakov A.V. Dual-Spin Satellites with Gyro-Damping, Acta Astronautica, 1982, Vol. 9, №5, p. 285-289.