ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 88 за 2008 г.

Парусников В.И.

Цепные дроби до ближайшего четного. Короткий вариант

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Парусников В.И. Цепные дроби до ближайшего четного. Короткий вариант // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 88. 12 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-88**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.И. Парусников

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

ДО БЛИЖАЙШЕГО ЧЕТНОГО.

КОРОТКИЙ ВАРИАНТ

Москва, 2008 г.

УДК 511.36

В.И. Парусников. Цепные дроби до ближайшего четного. Короткий вариант. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2008.

В препринте «Цепные дроби до ближайшего четного» был предложен новый тип одномерных цепных дробей ч цепные дроби до ближайшего четного. Он обладает многими основными свойствами классических цепных дробей: сходимостью, единственностью разложения, периодичностью для квадратичных иррациональностей. Однако их сходимость очень медленная.

В настоящей работе предложен быстрый (короткий) вариант четных цепных дробей. Модифицированный алгоритм позволяет заменить ряд одинаковых звеньев четной цепной дроби одним дробно-линейным преобразованием, которое можно выписать сразу, не производя промежуточных вычислений.

V.I. Parusnikov. Continued fractions by the nearest even number. The short type. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2008.

In the preprint «Continued fractions by the nearest even number», we propose a new type of one-dimensional continued fractions. It has many properties of the classic continued fractions: convergence, uniqueness of expansion, periodicity for quadratic irrationalities. But they converge very slow.

Here we propose a fast (short) type of even continued fractions. The modi»ed algorithm allows to replace a sequence of similar parts of even continued fraction by one linear fractional transformation.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-00085, 08-01-00082).

E-mail: parus@keldysh.ru

Сайт: www.keldysh.ru

§ 1. Введение

В нашей предыдущей работе [1] в основных чертах была построена теория четных цепных дробей.

Принципиально конструкция четных цепных дробей (цепных дробей до ближайшего четного) не отличается от конструкции классических цепных дробей и цепных дробей до ближайшего целого числа. Она тоже основана на алгоритме Евклида деления с остатком, но на n-м шаге алгоритма неполное частное b_n здесь определяется по-другому. В классических правильных цепных дробях неполное частное равно целой части отношения q/q' чисел $q' = q'_{n-1}, q = q_{n-1}$, полученных на предыдущем шаге алгоритма. В цепных дробях до ближайшего целого b_n это целое число, ближайшее к q/q' в евклидовой метрике. В предложенном нами алгоритме неполное частное b_n это четное число, расстояние до которого от q/q' либо минимально, либо, если отношение q/q' нечетно и ближайших к нему четных чисел два, то за b_n принимается само число q/q'. Для краткости нами введены обозначения $\llbracket\, x \,\rrbracket$ и $\{\!\!\{\, x \,\}\!\!\}$ для ближайшего четного к $x \in \mathbb{R}$ и для расстояния до ближайшего четного:

$$\llbracket x \rrbracket = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \\ k, & |x-k| < 1,\ k \in \mathbb{Z}_{even},\ \text{если } x \notin \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \{\!\!\{ x \}\!\!\} = x - \llbracket x \rrbracket .$$

В [1] доказано, что четные цепные дроби обладают всеми основными свойствами цепных дробей, хотя и имеют некоторую специфику. Перечислим эти свойства.

Каждое вещественное число $\beta = \beta_0 \in \mathbb{R}$ может быть единственным образом разложено в четную цепную дробь. Если число β рационально, то цепная дробь обрывается на некотором шаге $n_0 \in \mathbb{Z}_+$

$$\beta_0 = b_0 + \cfrac{-1}{b_1 + \cfrac{-1}{b_2 + \cfrac{-1}{\ddots + \cfrac{-1}{b_{n_0}}}}}, \qquad \begin{array}{l} b_0 \in \mathbb{Z},\ \text{если } n_0 = 0, \\ \left.\begin{array}{l} b_0 \in \mathbb{Z}_{even}, \\ b_1, \ldots, b_{n_0-1} \in \mathbb{Z}'_{even}, \\ b_{n_0} \in \mathbb{Z}'', \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{если} \\ n_0 > 0.\end{array} \end{array} \tag{2.1}$$

Если же число β_0 иррационально, то цепная дробь бесконечна

$$\beta_0 = b_0 + \cfrac{-1}{b_1 + \cfrac{-1}{b_2 + \cfrac{-1}{\ddots \; b_n + \cfrac{-1}{\ddots}}}}, \qquad \begin{array}{l} b_0 \in \mathbb{Z}_{even}, \\ b_n \in \mathbb{Z}'_{even}, n \in \mathbb{N}. \end{array} \tag{2.2}$$

Последовательность p_n *подходящих дробей*

$$p_n = \frac{p_{1,n}}{p_{2,n}} = b_0 + \cfrac{-1}{b_1 + \cfrac{-1}{\ddots \, b_{n-1} + \cfrac{-1}{b_n}}} \tag{2.3}$$

сходится к разложенному в цепную дробь числу β_0. Для краткости вместо записи (2.2) будем употреблять стандартную запись правильной цепной дроби, эквивалентной цепной дроби (2.2):

$$\beta_0 = [\ b_0\ ; -b_1, +b_2, \ldots, (-1)^n b_n, \ldots]. \tag{2.4}$$

(Подходящие дроби цепных дробей (2.3),(2.4) совпадают.) Определим остатки цепной дроби

$$\begin{aligned} &\alpha_n = [\ 0\ ; -b_{n+1}, +b_{n+2}, -b_{n+3}, \ldots], \\ &\beta_n = [\ b_n\ ; -b_{n+1}, +b_{n+2}, \ldots], \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

В связи с четным цепными дробями естественным образом возникает множество, которое мы назвали множеством *четных рациональных чисел* $\mathbb{Q}_{even}$. Это множество чисел, представимых в виде рациональной дроби p/q, где p либо четно, а q нечетно, либо, наоборот, p нечетно, а q четно. Остальные рациональные числа названы *нечетными*: $\mathbb{Q}_{odd} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{even}$. Нечетные рациональные числа имеют ровно по два представления в виде четной цепной дроби: одно ɥ обрывающееся на некотором шаге n_0, а другое ɥ бесконечное, все элементы b_n которой при $n > n_0$ одинаковы и равны либо -2, либо $+2$. Остальные вещественные числа $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_{odd}$ в виде четной цепной дроби представляются единственным образом.

Для четных цепных дробей верен следующий аналог знаменитой теоремы Эйлера - Лагранжа: квадратичные иррациональности и только они раскладываются в периодические цепные дроби.

Не смотря на сходимость всех четных цепных дробей, подходящие дроби p_n к ним могут стремиться к пределам крайне медленно. Оценки

$$|\frac{p_{1,n}}{p_{2,n}} - \beta| < \frac{1}{|p_{2,n}p_{2,n+1}|}, \quad |p_{2,n+1}| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}|p_{2,n}|, \tag{2.4}$$

верные для классических цепных дробей и гарантирующие хорошие аппроксимационные свойства их подходящих дробей, здесь, вообще говоря, не верны. Для четных цепных дробей рост модулей знаменателей подходящих дробей оценивается снизу не геометрической, а арифметической прогрессией

$$|p_{2,n+1}| > |p_{2,n}| \geq n+1, \tag{2.5}$$

почему и гарантированная скорость сходимости минимальна:

$$|\frac{p_{1,n}}{p_{2,n}} - \beta| < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n}. \qquad (2.6)$$

Целью настоящей работы будет переход от четной цепной дроби к другой связанной с ней конструкции, обеспечивающей большую скорость сходимости. Группируя однотипные преобразования, возникающие на шагах разложения в четную цепную дробь, мы придем к понятию *короткой четной цепной дроби.* Подходящие дроби к последней будут обобщать понятие подходящей дроби (2.1). Их последовательность будет подпоследовательностью последовательности подходящих дробей исходной четной цепной дроби. Для обобщенных цепных дробей, используя Теорему 4 работы [1], можно будет выписать аналог классической оценки (2.4).

Чтобы не повторять здесь дословно значительный объем материала, в настоящей работе повсюду будут использоваться обозначения и употребляться термины в том смысле, в котором они встречаются в препринте [1]. В ссылках на формулы того препринта будут спереди дописываться символы «1. », а номера формул настоящей работы будут начинаться с «2. ».

§ 2. Перестройка и ускорение

Попробуем, сгруппировав вместе дробно-линейные преобразования при некоторых последовательно идущих n, перестроить цепную дробь, ускорив ее сходимость. Преобразованная цепная дробь в последующем будет названа короткой четной цепной дробью.

Мы видели, что наихудшим образом сходятся подходящие дроби к бесконечным четным цепным дробям, представляющим нечетные рациональные числа. Модельными примерами могут служить две цепные дроби

$$1 = [\ 0\ ; +2, -2, +2, -2, \ldots, 2(-1)^{n+1}, \ldots],$$

$$-1 = [\ 0\ ; -2, +2, -2, +2, \ldots, 2(-1)^{n}\ \ , \ldots].$$

В [1] были введены матрицы

$$J_{-n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & n \end{pmatrix},\ J_{-n} = -^{\mathrm{T}}J_{+n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad (2.7)$$

отвечающие дробно-линейным преобразованиям, соответствующим значениям $b_k = n$ знаменателя k-го шага разложения в цепную дробь. n-е степени матриц J_{-2}, J_{+2} при всех $n \in \mathbb{Z}$ определяют прямые $\alpha = \mathcal{J}_{\sigma,n}(\alpha_{n+1})$

и обратные дробно-линейные отображения $\alpha_{n+1} = \mathcal{J}^{-1}_{\sigma,n}(\alpha)$ $(\sigma = \pm 1)$, связывают между собой остатки цепных дробей (2.7). Сами степени дробно-линейных преобразований равны

$$\mathcal{J}_{\sigma,n}(\alpha) = \frac{\sigma(n-1)\alpha - n}{n\alpha - \sigma(n+1)} = \sigma\Bigl(1 - \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{|\alpha| - 1}}\Bigr), \quad \sigma = \pm 1, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Отображения $\mathcal{J}_{\sigma,n}(\alpha)$ обладают следующим свойством

$$\mathcal{J}_{\sigma,n}(\sigma) = \sigma,$$
$$\mathcal{J}_{\sigma,n}(\sigma\ (1 - \frac{1}{x})) = \sigma\ (1 - \frac{1}{x+n}), \quad x \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}.$$

Для полуцелых $x = k - 1/2, k \in \mathbb{Z}$ и целых ($x = k - 1/2$ и $x = k \in \mathbb{Z}$), т.е. для аргументов данных функций ч взятых с правильными знаками элементами симметричных последовательностей $t^{(-1)}_k = 1 - \dfrac{2}{2k+1} = \dfrac{2k-1}{2k+1}$, $t^{(0)}_k = 1 - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k}{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rccccccccc}
k = & \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\
t^{(-1)}_k = & \dots & \frac{7}{5} & \frac{5}{3} & \frac{3}{1} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{5}{7} & \dots \\
t^{(0)}_k = & \dots & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{2}{1} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \dots
\end{array}$$

получим

$$\mathcal{J}_{\sigma,n}(\sigma t^{(-1)}_k) = \sigma t^{(-1)}_{k+n}, \quad \mathcal{J}_{\sigma,n}(\sigma t^{(0)}_k) = \sigma t^{(0)}_{k+n}, \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

и

$$\mathcal{J}_{\sigma,-n}(\sigma t^{(-1)}_n) = \sigma(-1), \quad \mathcal{J}_{\sigma,-n}(\sigma t^{(0)}_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(Последовательности «проиндексированы» теми числами -1 и 0, через которые проходят орбиты их точек.)

В [1] определялись промежутки $\Delta_{0,k}$, по попаданию очередного остатка α_{n-1} в который можно было определить величину неполного частного b_n на n-м шаге разложения в четную цепную дробь:

$$\Delta_{0,k} = \{\alpha : \ [\![\frac{-1}{\alpha}]\!] = -k\} = \{\alpha : \ [\![\frac{1}{\alpha}]\!] = k\},$$
$$\alpha_n \in \Delta_{0,k} \quad \Leftrightarrow \quad b_n(\alpha_n) = -k \quad (k \in \mathbb{Z}, |k| > 1).$$

Дополнительно введем дизъюнктные полуинтервалы $\Delta_{\sigma,k}$ и вложенные друг в друга открытые интервалы $U_{\sigma,k}$, имеющими концами точки последовательностей $\pm t^{(-1)}_k, k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{array}{llll}
\Delta_{+1,k} =]\ t^{(-1)}_k\ ; t^{(-1)}_{k+1}] = & U_{+1,k} \setminus U_{+1,k+1}\,, & \Delta_{-1,k} = -\Delta_{+1,k}, & \\
U_{+1,k} =]\ t^{(-1)}_k\ ;\ 1\ [= & \bigcup\limits_{\ell=k}^{\infty} \Delta_{+1,\ell} \supset U_{+1,k+1}, & U_{-1,k} = -U_{+1,k} & (k \in \mathbb{Z}_+).
\end{array}$$

Используя соотношения этими множествами и введенными ранее V_{-2}, V_{+2} и V_0

$$]-1\ ;\ 1\ [\ = U_{\sigma,0} = \Delta_{\sigma,0} \bigcup U_{\sigma,1} = \sigma\ ]-1\ ; \frac{1}{3}\ [\ \bigcup\ \sigma\ [\ \frac{1}{3}\ ; 1\ [\ ,$$

$$\Delta_{\sigma,0} = \sigma\ ]-1\ ; \frac{1}{3}\ ]\ = \sigma\ ]-1\ ; -\frac{1}{3}\ [\ \bigcup\ \sigma\ [-\frac{1}{3}\ ; \frac{1}{3}\ ]\ = V_{-\sigma} \bigcup\ (V_0 \bigcup \{0\}),$$

$$U_{\sigma,1} = V_\sigma = \sigma\ ]\ \frac{1}{3}\ ; 1\ [\ = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{\sigma,k} \quad (\sigma = \pm 1),$$

можно детализировать полученное в [1] разбиение

$$\mathrm{I}'' = V_{-2} \cup V_0 \cup V_{+2},$$
$$V_{-2} = \ ]-1\ ; -\frac{1}{3}\ [\ =\ \Delta_{0,-2} =\ \{\alpha \in \mathrm{I}'':\ [\![\frac{-1}{\alpha}]\!] = +2\},$$
$$V_0 = [-\frac{1}{3}\ ;\ 0\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ \frac{1}{3}\ ] = \bigcup_{|k|\geq 3} \Delta_{0,k} = \{\alpha \in \mathrm{I}'':\ |[\![\frac{-1}{\alpha}]\!]| \geq 3\},$$
$$V_{+2} = \ ]\ \frac{1}{3}\ ;\ \ 1\ \ [\ =\ \Delta_{0,+2} =\ \{\alpha \in \mathrm{I}'':\ [\![\frac{-1}{\alpha}]\!] = -2\}.$$

Отрезок I'' без трех целых точек представляется в виде объединения дизъюнктных промежутков:

$$\mathrm{I}'' = V_{-2} \bigcup V_0 \bigcup V_{+2} = (\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{-1,k})\ \bigcup\ (\bigcup_{|k|\geq 3} \Delta_{0,k})\ \bigcup\ (\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{+1,k}).$$

Функция $\mathcal{J}_{\sigma,n}^{-1}$ имеет единственную особую точку ч полюс в точке $\sigma\frac{n-1}{n}$, т.е. в нуле функции $\mathcal{J}_{\sigma,n}$. Он расположен внутри промежутка $\Delta_{\sigma,n-1}$ и, соответственно, вне всех прочих промежутков $\Delta_{\sigma,k}$ и интервалов $U_{\sigma,k}$ $(k \geq n)$. Производная функции $\mathcal{J}_{\sigma,n}^{-1}$ на вещественной оси положительна

$$(\mathcal{J}_{\sigma,n}^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{(n\alpha - \sigma(n-1))^2}.$$

Следовательно, монотонная функция $\mathcal{J}_{\sigma,n}^{-1}$, непрерывная на промежутках $\Delta_{\sigma,k}$ и $U_{\sigma,k}, k \geq n$, и отображающая концы этих в концы аналогичных промежутков, переводит и сами промежутки один в другой:

$$\mathcal{J}_{\sigma,n}^{-1}(\Delta_{\sigma,k}) = \Delta_{\sigma,k-n}\,,$$
$$\mathcal{J}_{\sigma,n}^{-1}(U_{\sigma,k}) = U_{\sigma,k-n}, \quad n, k-n \in \mathbb{Z}_+.$$

Проследим за разложением числа $\alpha = \alpha_1 \in \mathrm{I}''$ в четную цепную дробь на типовом (не начальном) шаге. Все шаги разложения, кроме начального шага, имеют два этапа. Исходным числом для типового шага $(n > 0)$ является число $\alpha = \alpha_1 \in \mathrm{I}''$. Если α лежит в подмножестве $\Delta_{0,k}$ множества V_0, его неполное частное b_1 равно $-k$, где $|b_1| = |k| \geq 3$.

Если же α лежит в одном из множеств $V_\sigma, \sigma = \pm 1$, его первое неполное частное b_1 равно -2σ. При этом можно предсказать, сколько в точности первых по порядку неполных частных b_k будут равны -2σ.

Если число α лежит в полуинтервале $\Delta_{\sigma,n} \subset V_\sigma$ при некотором конкретном $n \in \mathbb{N}$, то при всех k от 0 до $n-1$ отображения $\mathcal{J}^{-1}_{\sigma,k}(\alpha)$ переводят точку α в точку α_{k+1} интервала $\Delta_{\sigma,n-k} \subset \Delta_{\sigma,1} \subset V_\sigma$, где на очередном, $(k+1)$-м, шаге разложения для получения следующего остатка α_{k+2} к ним придется применять снова отображение $\mathcal{J}^{-1}_{\sigma,1}$. Это значит, что на $(k+1)$-м шаге неполное частное b_{k+1} будет равно -2σ. На n-м шаге отображение $\mathcal{J}^{-1}_{\sigma,1}$ переведет точку $\alpha_n \in \Delta_{\sigma,1}$ в точку дополнения к V_σ, т.е. либо в точку 0, либо в точку множеств V_0 или $V_{-\sigma}$. После этого разложение либо оборвется, либо очередное неполное частные b_{n+1} будет по модулю больше двух или равно $+2\sigma$. Во всех случаях будет $b_{n+1} \neq -2\sigma$.

Таким образом, по числу $\alpha \in V_\sigma$ можно определить число идущих подряд в начале его разложения неполных частных, равных -2σ. Оно равно индексу n промежутка $\Delta_{\sigma,n}$, содержащего α. Чтобы найти n, надо проверить условие $\alpha \in \Delta_{\sigma,n}$ или $|\alpha| = \sigma\alpha \in \Delta_{+1,n}$, записывающееся в виде

$$1 - \frac{2}{2n+1} = t^{(-1)}_n < |\alpha| \leq t^{(-1)}_{n+1} = 1 - \frac{2}{2n+3},$$

и равносильное системе

$$-n \leq \frac{1}{|\alpha| - 1} + \frac{3}{2} < -n + 1.$$

С помощью стандартной операции $[\ .\ ]$ взятия целой части последнее условие переписывается как

$$n = -[\frac{1}{|\alpha|-1} + \frac{3}{2}]. \tag{2.9}$$

Теперь можно дать явную формулу и для остатка α_{n+1}. Заменив в формуле (2.8) индекс n на взятое со знаком минус выражение (2.9) (поскольку рассматривается $\mathcal{J}^{-1}_{\sigma,n} = \mathcal{J}_{\sigma,-n}$, а не $\mathcal{J}_{\sigma,n}$), получим

$$\mathcal{J}^{-1}_{\sigma,n}(\alpha) = \sigma\Bigg(1 + \frac{1}{\{\frac{3}{2} + \frac{1}{|\alpha|-1}\} - \frac{3}{2}}\Bigg).$$

Здесь $\{\ .\ \}$ ч дробная часть числа, с округлением до меньшего либо равного целого.

Отметим, что, если не реализуется исключительный случай обрыва цепной дроби, т.е. *если число* $\dfrac{2}{1-|\alpha|}$ *не является нечетным целым числом*, две последние формулы чуть менее громоздко записываются с помощью операций $[\![\ .\ ]\!]$, $\{\!\![\ .\ ]\!\!\}$ взятия ближайшего целого и расстояния до ближайшего целого:

$$\mathcal{J}_{\sigma,n}^{-1}(\alpha) = \sigma\Big(1 + \frac{1}{\{\!\!\{\frac{1}{1-|\alpha|}\}\!\!\}}\Big).$$

Подготовительная работа проделана и мы можем дать

Определение алгоритма разложения числа β_0 в <u>короткую</u> цепную дробь.

На *начальном ($n = 0$) шаге* алгоритма β_0 представляется в виде суммы ближайшего четного b_0 и *остатка* $\gamma_1 = \alpha_1 \in \mathrm{I}''$ по формулам

$$\alpha_1 = \{\!\!\{\beta_0\}\!\!\} \in \mathrm{I}'', \quad b_0 = [\![\beta_0]\!] \in \mathbb{Z},$$
$$\beta_0 = b_0 + \alpha_1.$$

Шаг алгоритма с номером $n, n > 0$ состоит в получении $(n+1)$*-го остатка* $\gamma_{n+1} \in \mathrm{I}''$ по остатку $\gamma_n \in \mathrm{I}''$. Сначала определяется, на каком из промежутков V_{-2}, V_0, V_{+2} лежит γ_n:

$$\sigma_n = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad -1 < \gamma_n < -\frac{1}{3} \\ 0, & \text{если} \quad -\frac{1}{3} \le \gamma_n \le \frac{1}{3} \\ +1, & \text{если} \quad \frac{1}{3} < \gamma_n < 1 \end{cases}.$$

При $\sigma_n = 0$ находим

$$c_n := [\![\frac{-1}{\gamma_n}]\!] \in \mathbb{Z} \setminus (\{-1\} \bigcup \{0\} \bigcup \{1\})$$

и получаем

$$\gamma_n = \frac{-1}{c_n + \gamma_{n+1}}, \quad \gamma_{n+1} = -\frac{1}{\gamma_n} - c_n = \{\!\!\{\frac{-1}{\gamma_n}\}\!\!\}.$$

При $\sigma_n \ne 0$ находим

$$d_n = -[\frac{1}{|\gamma_n| - 1} + \frac{3}{2}] \ge 1,$$

и получаем формулу для дробно-линейного преобразования

$$\gamma_{n+1} = \sigma_n\Big(1 + \frac{1}{\{\frac{1}{|\gamma_n|-1} + \frac{3}{2}\} - \frac{3}{2}}\Big). \tag{2.10}$$

К *обрыву* короткой четной цепной дроби *на n-м шаге* приводят следующие случаи. При $\sigma_n = 0$, когда $-1/\gamma_n \in \mathbb{Z}, |c_n| \ge 3$. А при $\sigma_n \ne 0$ ч случай, когда задаваемое формулой (2.10) число γ_n равно 0 или $-\sigma_n$, что, в свою очередь, эквивалентно условию $\gamma_n = t_k^{(0)}$ или $\gamma_n = t_{k+1}^{(-1)}, k \in \mathbb{N}$.

Отнесем неотрицательный индекс n к одному из трех множеств $\Lambda_{-1}, \Lambda_{+1}$ или Λ_0, в зависимости от того, где лежит $(n+1)$-й остаток разложения ч в V_{-2}, V_{+2} или V_0:

$$n \in \Lambda_\kappa \;\Leftrightarrow\; \alpha_{n+1} \in V_\kappa, \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

При вычисленных коэффициентах c_n матрицы дробно-линейных преобразований имеют вид C_n или D_n, в зависимости от того, какова на этом шаге величина σ_n:

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c_n \end{pmatrix} \text{ при } \sigma_n = 0,$$
$$D_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1-d_n & -d_n \\ d_n & d_n+1 \end{pmatrix} & \text{при } \sigma_n = -1, \\ (-1)^{d_n} \begin{pmatrix} 1-d_n & d_n \\ -d_n & d_n+1 \end{pmatrix} & \text{при } \sigma_n = +1. \end{cases}$$

Напрашивается следующий способ сокращенной записи выписанной последовательности дробно-линейных преобразований вида: заменить в записи (2.4) участки с чередующимися двойками или минус двойками их «степенями», оставив неизменными элементы b_n, абсолютные значения которых больше двух. Однако на практике этот способ не слишком удобен из-за громоздкости и возможной путаницы, связанной с подсознательным желанием вычислить и приравнять четные степени чисел целых чисел. Вместо $(-2)^{d_n}$ и $(+2)^{d_n}$ употребляется более компактная запись $-d_n\jmath$ и $d_n\jmath$. Итак, для записи коротких четных цепных дробей будет использоваться запись

$$\beta \;=\; \text{Ц}_2[b_0\;;\; g_1, g_2, \ldots],$$
$$\text{где } g_n = \begin{cases} c_n, & \text{если } \sigma_n = 0, \\ -d_n\;\jmath, & \text{если } \sigma_n = -1, \\ +d_n\;\jmath = d_n\;\jmath, & \text{если } \sigma_n = +1, \end{cases} \quad \text{а } \jmath \text{ - некоторый символ.}$$

Обозначим G_n матрицы, отвечающие дробно-линейным преобразованиям за шаг разложения в короткую четную цепную дробь. Тогда

$$\beta \;=\; \text{Ц}_2[b_0\;;\; g_1, g_2, \ldots] \;=\; J^{-1}G_0G_1G_2\ldots G_n\ldots = J^{-1}G_0G_1G_2\ldots G_n\alpha_{n+1}.$$

Введем матрицы

$$\begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{q}}_n = Q_n\vec{\mathbf{0}}, \quad Q_n = Q_{n-1}G_n, \quad Q_{-1} = J^{-1} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+),$$

столбцы которых (также как и отношение их элементов) назовем *n-ми подходящими дробями короткой четной цепной дроби.* Правые столбцы этих матриц будем называть *главными подходящими дробями* $q_n = q_n(\alpha)$, а левые ч *дополнительными подходящими дробями* q'_n

$$\vec{\mathbf{q}}_n = J^{-1} B_0 G_1 G_2 \ldots G_n \vec{\mathbf{0}},$$

$$\begin{pmatrix} q'_{1,n} \\ q'_{2,n} \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{q}}'_n = Q_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Целочисленные элементы первой и второй строк Q_n назовем соответственно *числителями* $q'_{1,n}, q_{1,n}$ и *знаменателями* $q'_{2,n}, q_{2,n}$ подходящей дроби суть.

Видно, что если $\sigma_n = 0$, главная $(n-1)$-я подходящая дробь будет n-й дополнительной подходящей дробью. За этим исключением, все подходящие дроби четной цепной дроби различны.

Для n-х остатков α_{n+1} цепной дроби верно представление

$$\alpha_n \;=\; \text{Ц}_2[0\;;\; g_n, g_{n+1}, \ldots] \;=\; G_n G_{n+1} \ldots,$$
$$\alpha_1 = G_1 G_2 \ldots G_n \alpha_{n+1} = Q_n \alpha_{n+1}.$$

§ 3. Пример

Как известно ([2]), постоянная Эйлера $e \approx 2.71828$ раскладывается в правильную цепную дробь

$$e \;=\; [\,2\;;\; 1,\; 2,\; 1,\; 1,\; 4,\; 1,\; 1,\; 6,\; 1,\; 1,\; 8,\; 1, \ldots]. \tag{2.11}$$

Введем матрицу

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}^2 = E.$$

Рассмотрим подходящие дроби $p_n(e)$ к (2.11) с номерами, кратными трем. Сгруппируем тройки дробно-линейных преобразований, отвечающие элементам $1, 2n, 1$ в разложении (2.11), но представим их для нечетных и четных n по-разному:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n+2 \end{pmatrix} = \begin{cases} -J_{+2}^{2n+1}\hat{E}, & \text{при } n \notin \mathbb{Z}_{even}, \\ \hat{E}\; J_{-2}^{2n+1}, & \text{при } n \in \mathbb{Z}_{even}. \end{cases}$$

Определим при n различной четности $n = 2k + \ell, \ell = 0, 1$, концевые векторы $\tilde{\vec{\mathbf{r}}}_\ell$ (зависящие от n)

$$\tilde{\vec{\mathbf{r}}}_\ell = \begin{cases} \vec{\mathbf{0}}, & \text{при } \ell = 0, \\ -J_{+2}^{4k+3}\hat{E}\vec{\mathbf{0}} = J_{+2}^{4k+3}\vec{\mathbf{0}}, & \text{при } \ell = 1. \end{cases}$$

По формуле вычисления подходящих дробей получим

$$\vec{\mathbf{r}}_{6k+3\ell}(e) = J^{-1}J_{-2}^{\,1}(-1)J_{+2}^{\,3}\hat{E}\hat{E}J_{-2}^{\,5}\ldots\ (-1)J_{+2}^{4k-1}\hat{E}\hat{E}J_{-2}^{4k+1}\tilde{\vec{\mathbf{r}}}_{\ell} =$$

$$= (-1)^k J^{-1}J_{-2}^{\,1}J_{+2}^{\,3}J_{-2}^{\,5}\ldots\ J_{+2}^{4k-1}J_{-2}^{4k+1}\tilde{\vec{\mathbf{r}}}_{\ell}.$$

Знак $(-1)^k$ для вычисления отношения $(-1)^k q_{1,m}/(-1)^k q_{2,m} = q_{1,m}/q_{2,m}$ не существенен, поэтому в обоих вариантах четности n подходящая дробь $p_{3n}(e)$ равна отношению элементов правого столбца матрицы $J^{-1}J_{-2}^{\,1}J_{+2}^{\,3}J_{-2}^{\,5}J_{+2}^{\,7}\ldots J_{(-1)^{n+1}}^{2n+1}$.

Итак, получено разложение в короткую четную цепную дробь которая, как мы знаем, сходится. Поэтому она сходится к e:

$$e = Ц_2[\ 2\ ;\ 3\jmath, -5\jmath,\ 7\jmath, -9\jmath,\ 11\jmath, \ldots].$$

Список литературы

1. Парусников В.И. Цепные дроби до ближайшего четного. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Москва, 2008г., 29 с.

2. Perron O. Die Lehre von den Kettenbr*ü*chen. Leipzig ч Berlin: Teubner, 1913. S. 1ч520.