



Игнатов А.И., Сазонов В.В.

Реализация режимов  
вращательного движения  
ИСЗ с малым уровнем  
остаточных микроускорений  
электромеханическими  
исполнительными органами

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 91. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-91>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**А.И.Игнатов, В.В.Сазонов**

**РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ ИСЗ С МАЛЫМ УРОВНЕМ ОСТАТОЧНЫХ  
МИКРОУСКОРЕНИЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ  
ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОРГАНАМИ**

Москва - 2008

## Аннотация

Получены оценки квазистатических микроускорений на перспективном ИСЗ, предназначенном для проведения космических экспериментов в области микрогравитации. Рассмотрены два рабочих режима вращательного движения спутника: трехосная солнечная ориентация, и трехосная орбитальная ориентация. В первом режиме абсолютная угловая скорость спутника практически равна нулю, нормаль к плоскости его солнечных батарей направлена на Солнце. Во втором режиме продольная ось спутника направлена по местной вертикали, а солнечные батареи лежат в плоскости орбиты. Оба режима поддерживаются системой электромеханических исполнительных органов (гиросистемой). Оценки остаточных микроускорений выполнены с помощью математического моделирования движения спутника относительно центра масс под действием гравитационного и аэродинамического моментов, а также момента, создаваемого гиросистемой. Показано, что оба режима обеспечивают весьма малый уровень квазистатических микроускорений на КА. В этих режимах в середине рабочего отсека микроускорения не превышают  $10^{-5}$  м/с<sup>2</sup>. При этом режим орбитальной ориентации обеспечивает весьма малую область вариации вектора остаточного микроускорения. Однако приемлемый энергопотребление в этом режиме возможен только в случае достаточно большого удаления Солнца от плоскости орбиты.

**A.I.Ignatov, V.V.Sazonov. Realization of spacecraft attitude motion with small residual accelerations by electromechanical actuators.** We estimate residual accelerations on board a projectible spacecraft intended for experiments in microgravity sciences. Two modes of the spacecraft attitude motion are considered: a triaxial solar orientation and a triaxial orbital orientation. The motion in the first mode is as follows: the normal to the plane of spacecraft solar arrays is constantly directed to the Sun. The motion in the second mode is a rest position with respect to the orbital coordinate system. At that, the spacecraft longitudinal axis is directed along the local vertical, the solar arrays lay in the orbital plane. Both orientation modes are realized by electromechanical actuators (a gyro system). The acceleration estimates are obtained by mathematical modeling of the spacecraft attitude motion taking into account the gravitational and the aerodynamic torques acted upon the spacecraft, as well as the control torques produced by the gyro system. The estimates show that accelerations in the working area of the spacecraft is not more than  $10^{-5}$  m/s<sup>2</sup>. The orbital orientation of the spacecraft provides a small variation area of the residual acceleration vector, but an electric current from the spacecraft solar arrays is acceptable in this mode only when the Sun is far enough from the orbital plane.

**1. Математическое моделирование квазистатических микроускорений, возникающих на искусственном спутнике Земли.** В данной работе оцениваются квазистатические (низкочастотные) микроускорения на перспективном ИСЗ, предназначенном для исследований в области микрогравитации. Рассматриваются два режима вращательного движения спутника. Основным режимом считается поддержание направления на Солнце нормали к светочувствительной стороне солнечных батарей спутника. Поддержание реализуется электромеханическими исполнительными органами (гиросистемой) — гиросистемами или двигателями-маховиками. Указанный режим обеспечивает весьма низкий уровень остаточных микроускорений, и единственным очевидным недостатком его является необходимость проведения разгрузок кинетического момента гиросистемы, ограничивающих время полета без сильных возмущений. Еще один менее очевидный недостаток состоит в сравнительно большой области вариации вектора остаточного микроускорения в связанной со спутником системе координат. Такие вариации могут оказаться вредными для экспериментов в области космического материаловедения.

Второй режим — орбитальная ориентация спутника. В этом режиме продольная ось спутника направлена по местной вертикали, солнечные батареи лежат в плоскости орбиты. Режим также реализуется с помощью гиросистемы. Он обеспечивает как низкий уровень микроускорений, так и малую область вариации вектора остаточного микроускорения в связанной со спутником системе координат. Этот режим может оказаться весьма удобным для проведения экспериментов в области космического материаловедения. Главным его недостатком является малый энергосъём с солнечных батарей для почти всех положений орбиты спутника относительно Солнца.

Оценки остаточных микроускорений получены методом математического моделирования. В основе используемой модели лежит тот факт, что квазистатические микроускорения на борту рассматриваемого ИСЗ вызваны тремя причинами: движением спутника относительно центра масс как твердого тела, градиентом гравитационного поля и аэродинамическим торможением. При этом квазистатическое микроускорение в заданной фиксированной точке борта описывается простой формулой, причем чтобы воспользоваться ею, достаточно знать только орбиту и вращательное движение спутника. Вывод формулы микроускорения основан на следующем определении.

Пусть спутник представляет собой твердое тело, и точка  $P$  жестко связана с его корпусом. Микроускорением  $\mathbf{b}$  в точке  $P$  называется разность между напряженностью гравитационного поля в этой точке и абсолютным ускорением последней. Роль вектора  $\mathbf{b}$  в орбитальных экспериментах аналогична роли ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$  в экспериментах на поверхности Земли. В частности, если в точке  $P$  закрепить пробное тело с исчезающе малой массой  $m_P$ , то сила реакции, действующая на это тело со стороны спутника,

будет равна  $-m_P \mathbf{b}$ . Для микроускорения можно вывести формулу [1]

$$\mathbf{b} = \mathbf{d} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\mu_E}{|\mathbf{r}|^3} \left[ \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{r} - \mathbf{d} \right] + c \varrho_a |\mathbf{v}| \mathbf{v}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{d}$  — радиус-вектор точки  $P$  относительно центра масс спутника — точки  $O$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — абсолютная угловая скорость спутника,  $t$  — время,  $\mu_E$  — гравитационный параметр Земли,  $\mathbf{r}$  — геоцентрический радиус-вектор точки  $O$ ,  $\mathbf{v}$  — скорость этой точки относительно поверхности Земли,  $\varrho_a$  — плотность атмосферы в точке  $O$ ,  $c$  — баллистический коэффициент спутника.

Формула (1) выведена для общего случая без каких-либо частотных ограничений. Однако если спутник имеет большие инерционные характеристики и его вращательное движение рассчитывается как движение твердого тела (такое движение обычно очень медленное), то формула (1) дает именно квазистатическое микроускорение.

Формулу (1) можно использовать для расчета реальных квазистатических, микроускорений, имевших место на летавших спутниках. Делается это так. Сначала на по данным измерений бортовых датчиков, полученным на некотором отрезке времени, определяется реальное вращательное движение спутника на этом отрезке. Затем вдоль найденного движения микроускорение в заданной точке борта рассчитывается по формуле (1) в функции времени. Если на спутнике был установлен низкочастотный акселерометр, то его показания можно сравнить с результатами расчета микроускорения в точке установки акселерометра. Совпадение результатов свидетельствует об адекватности такого подхода и в известной степени гарантирует правильность расчетов микроускорения в других точках борта. Примеры описанного использования формулы (1) приведены в [2 – 6].

Формулу (1) можно использовать также для прогноза квазистатических микроускорений на проектируемых спутниках. С этой целью разрабатывается математическая модель движения спутника (уравнения движения), выбирается режим движения, этот режим моделируется, т. е. находятся соответствующие решения уравнений движения, и вдоль найденного решения микроускорение в заданной точке борта рассчитывается по формуле (1). Именно таким образом формула (1) применяется ниже.

Приведем математическую модель рассматриваемого перспективного спутника. Спутник считаем гироскопом. Для описания его движения будем использовать четыре правые декартовы системы координат.

$Ox_1x_2x_3$  — система координат, образованная главными центральными осями инерции спутника. Ниже при отсутствии специальных указаний компоненты векторов и координаты точек указываются в этой системе.

$Sy_1y_2y_3$  — гринвичская система координат. Точка  $S$  — центр Земли, плоскость  $Sy_1y_2$  совпадает с плоскостью экватора, положительная полуось  $Sy_1$

пересекает гринвичский меридиан, ось  $Cy_3$  направлена к Северному полюсу.

$OX_1X_2X_3$  — орбитальная система координат. Ось  $OX_3$  направлена вдоль геоцентрического радиуса-вектора точки  $O$ , ось  $OX_2$  — вдоль вектора кинетического момента орбитального движения спутника.

$CZ_1Z_2Z_3$  — квазиинерциальная система координат. Ось  $CZ_2$  параллельна оси  $OX_2$ . Ось  $CZ_3$  лежит в плоскости  $CY_1Y_2$  и направлена в восходящий узел орбиты. Абсолютная величина угловой скорости системы  $CZ_1Z_2Z_3$  не превышает 7 град./сут. Плоскость  $CZ_1Z_3$  параллельна плоскости оскулирующей орбиты спутника (плоскости  $OX_1X_3$ ).

Матрицу перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к гринвичской системе обозначим  $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$ . Здесь  $b_{ij}$  — косинус угла между осями  $CY_i$  и  $Ox_j$ . Матрицы перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к системам  $OX_1X_2X_3$  и  $CZ_1Z_2Z_3$  обозначим соответственно  $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$  и  $\|a'_{ij}\|_{i,j=1}^3$ . Здесь  $a_{ij}$  — косинус угла между осями  $OX_i$  и  $Ox_j$ ,  $a'_{ij}$  — косинус угла между осями  $CZ_i$  и  $Ox_j$ .

Положение системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $OX_1X_2X_3$  будем также задавать углами  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , которые введем следующим образом. Система  $OX_1X_2X_3$  может быть переведена в систему  $Ox_1x_2x_3$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\delta + \pi/2$  вокруг оси  $OX_2$ , 2) на угол  $\beta$  вокруг новой оси  $OX_3$ , 3) на угол  $\gamma$  вокруг новой оси  $OX_1$ , совпадающей с осью  $Ox_1$ . Элементы матрицы  $\|a_{ij}\|$  выражаются через эти углы с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & a_{21} &= \sin \beta, \\ a_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, \\ a_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Пусть  $u$  — аргумент широты центра масс спутника, т. е. угол между осями  $CZ_3$  и  $OX_3$ , причем направление отсчета этого угла согласовано с направлением оси  $CZ_2$ . Тогда углы  $\gamma$ ,  $\delta' = \delta + u$  и  $\beta$  задают направление осей системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $CZ_1Z_2Z_3$  точно так же, как углы  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  задают положение первой из этих систем относительно системы  $OX_1X_2X_3$ . Выражения величин  $a'_{ij}$  через углы  $\gamma$ ,  $\delta'$  и  $\beta$  получаются из приведенных выше выражений для  $a_{ij}$  заменой  $\delta \rightarrow \delta'$ .

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая — его движение относительно центра масс (вращательное движение). Подсистема уравнений движения центра масс записывается в гринвичской системе координат относительно компонент векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  (см. (1)). В ней учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включи-

тельно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент спутника считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована уравнениями, выражающими теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс, кинематическими уравнениями Пуассона для элементов первых двух строк матрицы  $\| b_{ij} \|$  и уравнениями, описывающими изменение собственного кинетического момента гиросистемы. В уравнениях, выражающих теорему об изменении кинетического момента, учитываются гравитационный и аэродинамический моменты. Для гравитационного момента существует простое аналитическое выражение [7]. Аэродинамический момент  $\mathbf{M}_a$  вычислялся в предположении, что спутник имеет форму прямого кругового цилиндра с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами — солнечными батареями. Цилиндр имеет радиус  $R$  и высоту  $L$ , его ось совпадает с осью  $Ox_1$ . Пластины расположены в плоскости  $Ox_1x_3$  симметрично относительно оси  $Ox_1$ . Стороны пластин параллельны осям  $Ox_1$  и  $Ox_3$ . Суммарная площадь пластин составляет  $S_b$ . Координаты геометрических центров масс цилиндра и пластин суть  $(z_c, 0, 0)$  и  $(z_b, 0, 0)$ . Полагая, что молекулы атмосферы при столкновении со спутником испытывают абсолютно неупругий удар, формулу для аэродинамического момента представим в виде [7]

$$\mathbf{M}_a = \varrho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{P}). \quad (2)$$

Здесь  $\varrho_a$  — плотность атмосферы в точке  $O$ ,  $\mathbf{v}$  — скорость этой точки относительно гринвичской системы координат (см. (1)),  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{v})$  — первый момент геометрической фигуры, являющейся проекцией внешней оболочки спутника на плоскость  $\Pi_v$ , перпендикулярную вектору  $\mathbf{v}$ . Вектор  $\mathbf{P}$  лежит в плоскости  $\Pi_v$  и вычисляется относительно проекции на  $\Pi_v$  точки  $O$ . Поскольку формула (2) инвариантна относительно замены  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + p\mathbf{v}$ , где  $p$  — произвольный скаляр, функцию  $\mathbf{P}(\mathbf{v})$  можно задавать, не связывая себя условием  $\mathbf{P} \in \Pi_v$ . В частности, компоненты вектора  $|\mathbf{v}|\mathbf{P}(\mathbf{v})$  удобно задавать в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Для рассматриваемого спутника эти компоненты были взяты в виде

$$|\mathbf{v}|\mathbf{P}(\mathbf{v}) = \left[ z_c \left( \pi R^2 |v_1| + 2RL \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right) + z_b S_b |v_2|, 0, 0 \right].$$

Здесь  $v_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{v}$ .

Допущения, сделанные при выводе формулы аэродинамического момента, позволяют выписать явное выражение для входящего в формулу (1) баллистического коэффициента спутника. Этот коэффициент имеет вид  $c =$

$S_v/m$ , где  $S_v$  — площадь геометрической фигуры, являющейся проекцией внешней оболочки спутника на плоскость  $\Pi_v$ ,  $m$  — масса спутника. В данном случае

$$|\mathbf{v}|S_v = \pi R^2|v_1| + S_b|v_2| + 2RL\sqrt{v_2^2 + v_3^2},$$

и аэродинамический член формулы (1) принимает вид

$$c\varrho_a|\mathbf{v}|\mathbf{v} = \varrho_a \left( \frac{\pi R^2}{m}|v_1| + \frac{S_b}{m}|v_2| + \frac{2RL}{m}\sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right) \mathbf{v}. \quad (3)$$

Все приводимые в данном отчете расчеты микроускорений выполнены по формулам (1), (3).

При выводе выражений для аэродинамического момента и баллистического коэффициента не учитывалось возможное взаимное затенение корпуса спутника и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправдано, поскольку для большинства движений спутника относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

Баллистический коэффициент  $c$  при расчете микроускорений считался переменным, а в подсистеме уравнений движения центра масс спутника — постоянным. Это упрощение оправдано тем, что влияние сопротивления атмосферы на движение центра масс достаточно точно описывается с использованием постоянного значения баллистического коэффициента, которое определяется в результате обработки траекторных измерений. Принятый способ описания движения центра масс является общепринятым и позволяет использовать при математическом моделировании вращательного движения спутника реальную баллистическую информацию.

Уравнения, выражающие теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс, и кинематические уравнения Пуассона для элементов  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2x_3) + h_2\omega_3 - h_3\omega_2, \\ \dot{k}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1x_3) + \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu}(h_3\omega_1 - h_1\omega_3 + p v_3), \\ \dot{k}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda(h_1\omega_2 - h_2\omega_1 - p v_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{11} &= b_{12}\omega_3 - b_{13}\omega_2 + \omega_E b_{21}, \\ \dot{b}_{12} &= b_{13}\omega_1 - b_{11}\omega_3 + \omega_E b_{22}, \\ \dot{b}_{13} &= b_{11}\omega_2 - b_{12}\omega_1 + \omega_E b_{23}, \\ \dot{b}_{21} &= b_{22}\omega_3 - b_{23}\omega_2 - \omega_E b_{11}, \end{aligned} \quad (4)$$



$$\begin{aligned}\dot{b}_{22} &= b_{23}\omega_1 - b_{21}\omega_3 - \omega_E b_{12}, \\ \dot{b}_{23} &= b_{21}\omega_2 - b_{22}\omega_1 - \omega_E b_{13},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= k_1 - h_1, \quad \omega_2 = k_2 - \frac{\lambda h_2}{1 + \lambda\mu}, \quad \omega_3 = k_3 - \lambda h_3, \\ \lambda &= \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \nu = \frac{3\mu E}{r^5}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ p &= E \varrho_a \left( g_1 |v_1| + g_2 |v_2| + g_3 \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right), \\ g_1 &= \frac{\pi R^2 z_c}{I_1}, \quad g_2 = \frac{S_b z_b}{I_1}, \quad g_3 = \frac{2RLz_c}{I_1}.\end{aligned}$$

Здесь точка над буквой означает дифференцирование по времени,  $\omega_i$  и  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — компоненты векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}$ ,  $I_i$  — моменты инерции спутника относительно осей  $Ox_i$ ,  $k_i$  и  $h_i$  — отнесенные к  $I_1$  компоненты кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс и компоненты собственного кинетического момента гиросистемы,  $E$  — масштабирующий множитель. При численном интегрировании уравнений (4) единицей измерения времени служит 1000 с, единицей измерения длины — 1000 км, скорость выражается в км/с, единица измерения угловой скорости и величин  $k_i$  и  $h_i$  —  $0.001 \text{ с}^{-1}$ , плотность атмосферы рассчитывается в  $\text{кг/м}^3$ ,  $E = 10^{12}$ . Элементы третьей строки матрицы  $\|b_{ij}\|$  вычисляются как векторное произведение первой и второй ее строк

Переменные  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$  зависимы. Вследствие ортогональности матрицы  $\|b_{ij}\|$  они связаны соотношениями

$$b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 = 1, \quad b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 = 1, \quad (5)$$

$$b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22} + b_{13}b_{23} = 0.$$

Эти соотношения должны учитываться при задании начальных условий для  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$ .

Чтобы замкнуть систему (4), надо добавить к ней уравнения, описывающие изменение переменных  $h_i$ . Эти уравнения запишем в виде

$$\dot{h}_1 = h_2\omega_3 - h_3\omega_2 - m_1, \quad \dot{h}_2 = h_3\omega_1 - h_1\omega_3 - m_2, \quad (6)$$

$$\dot{h}_3 = h_1\omega_2 - h_2\omega_1 - m_3,$$

где  $m_i$  — отнесенные к  $I_1$  компоненты управляющего момента, приложенного к спутнику со стороны гиросистемы. Явный вид этих компонент зависит от режима вращательного движения спутника, который должен поддерживаться гиросистемой, и будет указан ниже.

Приведем использованные в расчетах числовые значения параметров описанной модели. Параметры спутника:  $m = 7800$  кг,  $I_1 = 4500$  кгм<sup>2</sup>,  $I_2 = 32000$  кгм<sup>2</sup>,  $I_3 = 30000$  кгм<sup>2</sup>,  $R = 1.05$  м,  $L = 7.3$  м,  $S_b = 65$  м<sup>2</sup>,  $z_b = z_c = 0.3$  м. Микроускорения рассчитывались в точке  $P$  с координатами  $(-2.5$  м,  $0.7$  м,  $0.7$  м). Параметры модели атмосферы:  $F = F_{81} = 150$ ,  $A_p = 12$ .

Рассматривались два варианта начальных условий движения центра масс спутника. Они задавались в восходящих узлах орбиты и отвечают реальной орбите МКС. Соответствующие им решения уравнений орбитального движения назовем орбитами I и II. Начальные условия орбиты I задавались в узле, пройденном станцией в момент 04:49:26 ДМВ 15.02.2004. Угол  $\varphi$  между ортом  $\mathbf{s}$  направления "Земля — Солнце" и плоскостью  $Ox_1x_3$  орбиты составлял в тот момент  $-64.14^\circ$ . Неравенство  $\varphi < 0$  означает, что Солнце лежит в полупространстве  $X_2 < 0$  ( $Z_2 < 0$ ): проекция орта  $\mathbf{s}$  на ось  $CZ_2$  равна  $\sin \varphi$ . В первые несколько недель полета по орбите I угол  $\varphi$  возрастал. Начальные условия орбиты II задавались аналогичным образом в восходящем узле, пройденном станцией в момент 05:28:12 ДМВ 29.02.2004. В тот момент  $\varphi = -4.72^\circ$ ,  $\dot{\varphi} > 0$ . Таким образом, орбиты I и II существенно по-разному расположены относительно Солнца.

Начальные условия уравнений (4) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия принятой орбиты. Этот момент служил началом отсчета времени — точкой  $t = 0$ .

**2. Микроускорения в режиме солнечной ориентации спутника.** Проведение научных экспериментов требует больших затрат электроэнергии, поэтому основным режимом вращательного движения спутника планируется так называемая трехосная солнечная ориентация. В этом режиме нормаль к светочувствительной стороне солнечных батарей (ось  $Ox_2$ ) направлена на Солнце, угловая скорость спутника практически равна нулю. Чтобы полностью определить этот режим, введем еще одно условие. Потребуем, чтобы ось  $Ox_1$  лежала в плоскости орбиты.

Подставим уравнения (6) в первые три уравнения (4). Получим соотношения

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2x_3) + m_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1x_3) + \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu}(m_2 + p\nu_3), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda(m_3 - p\nu_2).\end{aligned}\tag{7}$$

Здесь члены с  $\nu$  и  $p$  описывают гравитационный и аэродинамический моменты. Характерное время действия этих моментов на спутник должно быть существенно больше аналогичного времени для управляющего момента. По этой причине, выбирая последний, ограничимся рассмотрением движения спутника на коротких временных интервалах и положим в (7)  $\nu = 0$ ,  $p = 0$ .

Управляющий момент возьмем в виде (мотивировку см. в Приложении)

$$m_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad m_2 = -\frac{1 + \lambda\mu}{\lambda}(2\xi\omega_2 - \xi^2 n_1 n_3), \quad (8)$$

$$m_3 = -\frac{1}{\lambda}[2\xi\omega_3 + \xi^2(s_1 + 2n_1 n_2)],$$

где  $\xi$  — положительный параметр,  $s_i$  и  $n_i$  — компоненты орта  $\mathbf{s}$  направления "Земля — Солнце" и орта  $\mathbf{n}$  оси  $Ox_2$ :  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Как нетрудно видеть,  $n_i = a_{2i} = a'_{2i}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Компоненты орта  $\mathbf{s}$  в гринвичской системе координат рассчитывались по приближенным формулам [8].

Подстановка соотношений (8) в уравнения (7) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3 + \mu\omega_2\omega_3, \\ \dot{\omega}_2 &= -2\xi\omega_2 + \xi^2 n_1 n_3 + \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}\omega_1\omega_3, \\ \dot{\omega}_3 &= -2\xi\omega_3 - \xi^2(s_1 + n_1 n_2) - (1 - \lambda + \lambda\mu)\omega_1\omega_2. \end{aligned} \quad (9)$$

На коротких интервалах времени орты  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  можно считать неизменными в абсолютном пространстве. В таком случае компоненты этих ортов определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \omega_3 s_2 - \omega_2 s_3, & \dot{n}_1 &= \omega_3 n_2 - \omega_2 n_3, \\ \dot{s}_2 &= \omega_1 s_3 - \omega_3 s_1, & \dot{n}_2 &= \omega_1 n_3 - \omega_3 n_1, \\ \dot{s}_3 &= \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2, & \dot{n}_3 &= \omega_2 n_1 - \omega_1 n_2, \end{aligned} \quad (10)$$

Система уравнений (9), (10) является замкнутой и может быть использована для исследования переходных процессов при стабилизации движения спутника. Эта система допускает два стационарных решения

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad s_1 = s_2 = n_1 = 0, \quad s_3 = 1, \quad (11)$$

$$n_2 = n_2^\circ, \quad n_3 = \pm n_3^\circ, \quad n_2^\circ = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}, \quad n_3^\circ = \sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2},$$

причем для рассматриваемых орбит  $|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}| < 1$ . В решениях (11) спутник покоится, ось  $Ox_2$  точно направлена на Солнце. Докажем, что эти решения асимптотически устойчивы. Рассмотрим соответствующую линеаризованную систему. Пусть  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  — вектор бесконечно малого поворота спутника. В окрестности стационарных решений (11) имеют место соотношения

$$\omega_i = \dot{\theta}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad s_1 = \theta_3, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = -\theta_1,$$

$$n_1 = n_2^\circ \theta_3 - n_3^\circ \theta_2, \quad n_2 = n_2^\circ + n_3^\circ \theta_1, \quad n_3 = n_3^\circ - n_2^\circ \theta_1,$$

которые согласованы с (10). Подстановка этих соотношений в (9) дает

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + 2\xi \dot{\theta}_1 + \xi^2 \theta_1 &= 0, & \ddot{\theta}_2 + 2\xi \dot{\theta}_2 + \xi^2 n_3^\circ (n_3^\circ \theta_2 - n_2^\circ \theta_3) &= 0, \\ \ddot{\theta}_3 + 2\xi \dot{\theta}_3 + \xi^2 [\theta_3 - n_2^\circ (n_3^\circ \theta_2 - n_2^\circ \theta_3)] &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Первое уравнение системы (12) отделяется от остальных ее уравнений. При  $\xi > 0$  оно устойчиво. Чтобы исследовать устойчивость подсистемы, образованной вторым и третьим уравнениями (12), рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) + \frac{\xi^2}{2} [\theta_3^2 + (n_2^\circ \theta_3 - n_3^\circ \theta_2)^2].$$

Ее производная в силу этой подсистемы  $\dot{V} = -2\xi(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \leq 0$ . Множество  $\dot{V} = 0$  содержит нетривиальные целые траектории подсистемы лишь в случае  $\xi n_3^\circ = 0$ . Но это равенство не имеет места:  $\xi > 0$  по условию,  $n_3^\circ \neq 0$  в силу того, что выбранные орбиты имеют наклонение  $51^\circ$ . По теореме Барбашина — Красовского [9] исследуемая подсистема асимптотически устойчива, и, следовательно, устойчивы стационарные решения (11) системы (9), (10). Более того, можно показать, что при достаточно большом значении параметра  $\xi$  возмущенное движение спутника в окрестности положений покоя (11) будет затухать с любой требуемой скоростью.

Покажем, что выбранный закон изменения кинетического момента гиросистемы действительно обеспечивает трехосную солнечную ориентацию спутника. С этой целью вычислим решения системы (4), (6) и (8). Примем  $\xi = 0.2\text{с}^{-1}$ . Начальные условия зададим следующим образом. Пусть в момент  $t = 0$  орты  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  имеют в гринвичской системе координат компоненты  $\mathbf{s} = (S_1, S_2, S_3)$ ,  $\mathbf{n} = (N_1, N_2, N_3)$ . Начальные условия для переменных  $b_{1i}$ ,  $b_{2i}$  возьмем в виде

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{S_2 N_3 - S_3 N_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}, & b_{12} &= S_1, & b_{13} &= \frac{N_1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) S_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}, \\ b_{21} &= \frac{S_3 N_1 - S_1 N_3}{\sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}, & b_{22} &= S_2, & b_{23} &= \frac{N_2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) S_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}. \end{aligned}$$

Такие начальные условия удовлетворяют соотношениям (5) и соответствуют положению покоя (11), в котором  $n_3 = n_3^\circ$ . Начальные условия для переменных  $h_i$  возьмем нулевые. Тогда начальные условия для переменных  $k_i$  будут совпадать с начальными значениями компонент угловой скорости  $\omega_i$ . Последние выберем так, чтобы иметь возможность показать процесс гашения возмущенного движения, а именно положим

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01 \text{ град./с.}$$

Результаты интегрирования системы (4), (6), (8) и расчетов микроускорений вдоль ее решений приведены на рис. 1а–г и 2а–г. Здесь эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов  $\gamma$ ,  $\delta'$ ,  $\beta$  и  $\vartheta$ . Первые три угла определены выше и задают положение системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $CZ_1Z_2Z_3$ ; последний угол образован ортами  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$ :  $\vartheta = \arccos(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})$ . На рисунках представлены также аналогичные графики компонент угловой скорости  $\omega_i$ , микроускорения  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , собственного кинетического момента гиросистемы  $H_i = I_1 h_i$  и величин  $\dot{H}_i = I_1 \dot{h}_i$ . Кроме того, на рисунках приведены графики модулей перечисленных векторов:  $|\mathbf{b}|$ ,  $|\mathbf{H}|$  и  $|\dot{\mathbf{H}}|$ , где  $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ ,  $\dot{\mathbf{H}} = (\dot{H}_1, \dot{H}_2, \dot{H}_3)$ . Графики построены на интервалах времени более 2 сут. На рис. 1а,б и 2а,б показан переходной процесс — процесс гашения возмущенного движения, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости. Такие графики охватывают отрезок времени, примыкающий к начальной точке  $t = 0$  и имеющий длину в один орбитальный виток. Однако собственно переходной процесс протекает гораздо быстрее. Графики на рис. 1в,г и 2в,г иллюстрируют последующие двое суток полета. На них видны установившиеся колебания с доминирующей частотой, которая равна удвоенной орбитальной частоте. За такие колебания в микроускорении ответствен третий член формулы (1).

Ошибки ориентации иллюстрируются графиками функций  $\vartheta(t)$  и  $\beta(t)$ . Как можно усмотреть из определения углов в разделе 2,  $\beta$  — угол между осью  $Ox_1$  и плоскостью орбиты. Расчеты, показывают, что ошибки ориентации и накопление кинетического момента гиросистемы зависят от параметра  $\xi$ . С ростом  $\xi$  ошибки ориентации и накопление кинетического момента уменьшаются. При  $\xi \rightarrow +\infty$  ошибки ориентации стремятся к нулю, а накопленный кинетический момент стремится к интегралу по времени от внешнего момента, приложенного к спутнику. При  $\xi > 0.1\text{с}^{-1}$  зависимость от  $\xi$  функций  $\vartheta(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\omega_i(t)$  и  $H_i(t)$  уже слабая. Микроускорение и величины  $\dot{H}_i$  от параметра  $\xi$  практически не зависят.

Заметим, что увеличение  $\xi$  приводит к уменьшению длительности переходного процесса и увеличению микроускорений во время его протекания. Возможно, имеет смысл выбирать разные законы управления гиросистемой для участка переходного процесса и участка установившегося движения.

Разница между орбитами I и II невелика, если оценивать ее по уровню микроускорений, и весьма существенна, если судить по накопленному кинетическому моменту. Существенное отличие обусловлено тем, что на этих орбитах на спутник по разному действуют гравитационный и аэродинамический моменты.

В целом микроускорения в режиме поддержания солнечной ориентации с помощью гиросистемы получились весьма малыми. Однако они имеют довольно большую область вариации. Размер этой области в установившемся режиме превышает максимальное значение функции  $|\mathbf{b}(t)|$ .

Проблема разгрузки гиросистемы в данной работе не рассматривается. Необходимость проведения разгрузок может сократить отрезки невозмущенного полета.

**3. Микроускорения в режиме орбитальной ориентации спутника.** Орбитальной ориентацией спутника будем называть его положение покоя в орбитальной системе координат, в котором оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  совпадают с осями  $\pm OX_3$  и  $\pm OX_2$  соответственно. Орбитальная ориентация наиболее удобна для проведения космических экспериментов по росту кристаллов. Удобство обусловлено тем, что, в этом режиме, во первых, вектор остаточного микроускорения остается практически постоянным и ориентированным строго определенным образом в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ ; во-вторых, накопление кинетического момента гиросистемы происходит медленно — в указанном положении гравитационный момент равен нулю, а аэродинамический момент мал. К сожалению, при таком способе орбитальной ориентации энергопотребление с солнечных батарей спутника, как правило, невелик [10], что сужает область его применения.

Рассмотрим вариант режима орбитальной ориентации, в котором в котором ось  $Ox_1$  совпадает с осью  $OX_3$ , а ось  $Ox_2$  — с осью  $OX_2$ . В терминах углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , введенных в разделе 2, такой режим описывается соотношениями

$$\gamma = \beta = 0, \quad \delta = \pi. \quad (13)$$

В случае круговой орбиты приближенное выполнение этих соотношений можно обеспечить без использования управления — только за счет подходящего выбора начальных условий вращательного движения спутника [10]. Такое движение называется режимом пассивной гравитационной ориентации. Однако в этом режиме вариации вектора остаточного микроускорения все же достаточно велики, поэтому имеет смысл реализовать точную орбитальную ориентацию с помощью органов управления. В [10] исследована реализация орбитальной ориентации с помощью электрореактивных двигателей малой тяги. Ниже рассматривается реализация с помощью гиросистем или двигателей-маховиков.

Управляющий момент возьмем в виде (см. Приложение)

$$m_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 a_{23}, \quad m_2 = -\frac{1 + \lambda\mu}{\lambda} [2\xi(\omega_2 - \omega_0) + \xi^2 a_{33}], \quad (14)$$

$$m_3 = -\frac{1}{\lambda} [2\sqrt{2}\xi\omega_3 + \xi^2(a_{21} - a_{32})],$$

где  $\xi$  — положительный параметр. Подстановка соотношений (14) в уравнения (7) приводит к уравнениям

$$\dot{\omega}_1 + 2\xi\omega_1 - \xi^2 a_{23} = \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2 x_3),$$

$$\dot{\omega}_2 + 2\xi(\omega_2 - \omega_0) + \xi^2 a_{33} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1 x_3) + \frac{\lambda p v_3}{1 + \lambda\mu}, \quad (15)$$

$$\dot{\omega}_3 + 2\sqrt{2}\xi\omega_3 + \xi^2(a_{21} - a_{32}) = -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1 x_2) + \lambda p v_2.$$

Вообще говоря, эти уравнения надо рассматривать совместно с уравнениями орбитального движения спутника и уравнениями (4) относительно переменных  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$ . По фазовому вектору уравнений орбитального движения рассчитывается матрица перехода от гринвичской системы координат к орбитальной системе, эта матрица и матрица  $\|b_{ij}\|$  позволяют найти матрицу  $\|a_{ij}\|$ , элементы которой используются в уравнениях (15). Однако для приближенного анализа закона управления орбиту спутника можно принять круговой и неизменной в абсолютном пространстве. В этом случае кинематические уравнения движения удобно взять в виде

$$\dot{\gamma} = \omega_1 - \operatorname{tg} \beta(\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \quad (16)$$

$$\dot{\delta} = \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0, \quad \dot{\beta} = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma,$$

где  $\omega_0$  — орбитальная частота. Она рассчитывается по формулам задачи Кеплера и значению фазового вектора орбитального движения в начальный момент времени. Покою (13) в орбитальной системе координат отвечает решение

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0. \quad (17)$$

Уравнения движения (15), (16) допускают дальнейшее упрощение. Их можно линеаризовать в окрестности положения (13), (17). При этом можно пренебречь правыми частями (15), поскольку приложенный к спутнику момент со стороны гиросистемы существенно больше влияет на его вращательное движение чем гравитационный и аэродинамический моменты, а также члены уравнений движения  $\sim \omega_i \omega_j$ . Такие упрощенные линеаризованные уравнения имеют вид

$$\ddot{\gamma} + 2\xi\dot{\gamma} + \xi^2\gamma = 0, \quad \Delta\ddot{\delta} + 2\xi\Delta\dot{\delta} + \xi^2\Delta\delta = 0,$$

$$\ddot{\beta} + 2\sqrt{2}\xi\dot{\beta} + 2\xi^2\beta = 0,$$

где  $\Delta\delta = \delta - \pi$ . Выписанные уравнения асимптотически устойчивы. Следовательно, асимптотически устойчив и режим орбитальной ориентации. При достаточно большом значении параметра  $\xi$  возмущенное движение спутника в окрестности положения покоя (13), (17) будет затухать с любой требуемой скоростью.

Покажем, что выбранный закон изменения кинетического момента гиросистемы действительно обеспечивает орбитальную ориентацию спутника. С

этой целью вычислим решения системы (4), (6), (14) при  $\xi = 0.005\text{с}^{-1}$ . Начальные условия зададим следующим образом. Будем считать, что в момент  $t = 0$  оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  совпадают с осями  $OX_3$  и  $OX_2$  соответственно. Компоненты ортов осей  $OX_3$  и  $OX_2$  в гринвичской системе координат обозначим соответственно  $y_i^\circ$  и  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тогда начальные условия для переменных  $b_{1i}$ ,  $b_{2i}$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} b_{11} &= y_1^\circ, & b_{12} &= N_1, & b_{13} &= y_2^\circ N_3 - y_3^\circ N_2, \\ b_{21} &= y_2^\circ, & b_{22} &= N_2, & b_{23} &= y_3^\circ N_1 - y_1^\circ N_3. \end{aligned}$$

Начальные условия для переменных  $h_i$  возьмем нулевые. В этом случае начальные условия для переменных  $k_i$  будут совпадать с начальными значениями компонент угловой скорости  $\omega_i$ . Последние выберем так, чтобы показать процесс гашения возмущенного движения, а именно положим

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01 \text{ град./с.}$$

Результаты интегрирования системы (4), (6), (14) и расчета микроускорений вдоль ее решения в случае орбиты II приведены на рис. 3а–г. Эти рисунки устроены аналогично рис. 1, 2, только графики угла  $\delta'$  заменены на графики угла  $\delta$ . Графики построены на интервалах времени около 2 сут. На рис. 3а,б виден переходной процесс, обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости. Такие графики охватывают отрезок времени, который примыкает к начальной точке  $t = 0$  и имеет длину один орбитальный виток, но собственно переходной процесс протекает быстрее. Графики на рис. 3в,г иллюстрируют последующие двое суток полета. На них видны установившиеся колебания с доминирующей частотой, которая равна орбитальной частоте  $\omega_0$ . За такие колебания в микроускорении ответствен последний член формулы (1), отвечающий аэродинамическому торможению. Поскольку этот член мал, область вариации микроускорения (1) оказалась намного меньше максимального значения  $|\mathbf{b}|$ . Практически  $\mathbf{b} = \text{const}$ .

Ошибки реализации орбитальной ориентации иллюстрируются графиками функций  $\gamma(t)$ ,  $\delta(t)$  и  $\beta(t)$ . График функции  $\vartheta(t)$  характеризует возможный энергосъем с солнечных батарей спутника. На орбите II  $\vartheta(t) \approx 90^\circ$ , поэтому энергосъем практически отсутствует, на орбите I он довольно значителен — нормаль к светочувствительной стороне солнечных батарей составляет с вектором  $\mathbf{s}$  угол около  $30^\circ$ .

Ошибки ориентации, микроускорения и накопление кинетического момента гиросистемы слабо зависят от  $\xi$  при  $\xi > 0.005\text{с}^{-1}$ . Вид функций  $\vartheta(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\omega_i(t)$  и  $H_i(t)$  практически одинаков для орбит I и II. Накопление кинетического момента мало. Последнее обстоятельство, как уже говорилось, обусловлено малой величиной внешних моментов действующих на спутник в этом режиме.



## Приложение. Выбор законов изменения кинетического момента гиросистемы

**1. Стабилизация спутника в абсолютном пространстве.** Спутник будем считать гироскатом. По определению гироскат представляет собой несущее твердое тело с расположенной на нем гиросистемой. Собственный кинетический момент гиросистемы может меняться произвольным образом, но положение центра масс спутника относительно несущего тела и тензор инерции спутника в жестко связанной с несущим телом системе координат при этом остаются неизменными. Полагаем, что внешние силы на спутник не действуют. Теорему об изменении полного кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс запишем следующим образом

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{H}$  — собственный кинетический момент гиросистемы,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость несущего тела, точка над буквой означает дифференцирование по времени  $t$ , причем дифференцирование векторов выполняется по отношению к системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , жестко связанной с несущим телом и имеющей начало в центре масс спутника,  $\hat{I}$  — тензор инерции спутника в этой системе координат.

Закон изменения внутреннего кинетического момента гиросистемы возьмем в виде

$$\dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{M}_c$  — момент, действующий на несущее тело со стороны гиросистемы. Подставим соотношение (2) в уравнение (1). Получим

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_c. \quad (3)$$

Пусть заданы два неколлинеарных орта  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$ , сохраняющих неизменное направление в абсолютном пространстве. Изменение этих ортов в системе  $Ox_1x_2x_3$  описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = 0, \quad \dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0. \quad (4)$$

Если правая часть уравнения (3) зависит от  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$ , то это уравнение и уравнения (4) образуют замкнутую систему. Построим функцию  $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}, \mathbf{n})$  таким образом, чтобы система (3), (4) имела асимптотически устойчивые стационарные решения вида

$$\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \mathbf{s} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{e}_i$  — орты осей  $Ox_i$ . Построение выполним в два этапа. На первом этапе найдем потенциальный момент  $\mathbf{M}_c$ , такой, что система (3), (4) имеет

устойчивые стационарные решения (5). На втором этапе к найденному  $\mathbf{M}_c$  добавим диссипативный момент  $\sim \boldsymbol{\omega}$ .

Задача первого этапа решается построением силовой функции  $U$ , имеющей строгий максимум при  $\mathbf{s} = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$  (ср. с известной теоремой Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной механической системы). В качестве такой функции возьмем

$$U = l(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_2) - \frac{m}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)^2,$$

где  $l$  и  $m$  положительные коэффициенты. В этом случае

$$\mathbf{M}_c = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}} \times \mathbf{s} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} = l(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s}) - m(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}). \quad (6)$$

Чтобы убедиться в том, что функция  $U$  действительно имеет в точках  $\mathbf{s} = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$  строгий максимум, параметризуем положение спутника в окрестности одной из них параметрами  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Компоненты вектора  $\boldsymbol{\theta}$  указаны в системе  $Ox_1x_2x_3$ . Пусть  $\mathbf{n}^\circ$  — значение  $\mathbf{n}$  в этой точке. Тогда

$$\mathbf{n}^\circ = \left( 0, \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}, \pm \sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2} \right)$$

и, пренебрегая членами порядка  $O(|\boldsymbol{\theta}|^3)$ , можно записать

$$\mathbf{s} = \mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}^\circ - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}^\circ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}^\circ).$$

Подстановка последних выражений в формулу для  $U$  дает

$$U = l - \frac{l}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) - \frac{m}{2}[\theta_3(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \mp \theta_2 \sqrt{1 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}]^2 + O(|\boldsymbol{\theta}|^3).$$

Поскольку орты  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  неколлинеарны, коэффициент при  $\theta_2^2$  здесь отрицателен.

Уравнения (3), (4) и (6) допускают стационарные решения (5) и первый интеграл

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{I}\boldsymbol{\omega}) - U.$$

Используя этот интеграл в качестве функции Ляпунова, можно доказать, что стационарные решения (5) устойчивы.

Положим теперь

$$\mathbf{M}_c = l(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s}) - m(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - \hat{D}\boldsymbol{\omega}, \quad (7)$$

где  $\hat{D}$  — симметричный положительно определенный тензор второго порядка. Система (3), (4), (7) допускает стационарные решения (5). Вдоль решений этой системы

$$\dot{E} = -(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{D}\boldsymbol{\omega}).$$

Взяв  $E$  в качестве функции Ляпунова, можно с помощью теоремы Барбашина — Красовского [9] установить асимптотическую устойчивость решений (5).

Проделанный анализ практически не изменится, если момент (7) заменить моментом

$$\mathbf{M}_c = l\hat{J}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s}) - m(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)\hat{J}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - \hat{D}\boldsymbol{\omega}, \quad (8)$$

где  $\hat{J}$  — симметричный положительно определенный тензор второго порядка, постоянный в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Уравнение (3), (8) приводится к виду (3), (7) заменой обозначений  $\hat{J}^{-1}\hat{I} \rightarrow \hat{I}$ ,  $\hat{J}^{-1}\hat{D} \rightarrow \hat{D}$ . В случае  $\hat{J} = \hat{I}$ ,  $l = m = \xi^2$ ,  $\hat{D} = 2\xi\hat{I}$  получим момент  $\mathbf{M}_c$ , рассмотренный в разделе 2.

**2. Орбитальная стабилизация спутника.** Пусть спутник-гиростат движется по неизменной круговой орбите вокруг притягивающего центра. Рассмотрим задачу стабилизации такого спутника в орбитальной системе координат  $OX_1X_2X_3$  в положении, в котором ось  $Ox_1$  совпадает с осью  $OX_3$ , а ось  $Ox_2$  — с осью  $OX_2$  (см. раздел 3). Из внешних моментов, действующих на спутник, будем учитывать только гравитационный. Незначительная модификация описанного выше подхода позволяет решить и эту задачу.

Пусть  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{e}_r$  — орты осей  $OX_2$  и  $OX_3$  соответственно. Изменение этих ортов в системе  $Ox_1x_2x_3$  описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0, \quad \dot{\mathbf{e}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r = \omega_0(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_r). \quad (9)$$

Здесь  $\omega_0$  — орбитальная частота. Теорема об изменении полного кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс имеет вид

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times \hat{I}\mathbf{e}_r).$$

Закон изменения внутреннего кинетического момента гиросистемы возьмем в виде (2). Тогда последнее уравнение перейдет в уравнение

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{I}\boldsymbol{\omega} = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times \hat{I}\mathbf{e}_r) + \mathbf{M}_c. \quad (10)$$

Построим функцию  $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}, \mathbf{e}_r)$  таким образом, чтобы система (9), (10) имела асимптотически устойчивые стационарные решения вида

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_1. \quad (11)$$

Соображения, аналогичные изложенным в п. 1 данного Приложения, показывают, что эту функцию можно взять в виде

$$\mathbf{M}_c = l(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_r) + m(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}) - \hat{D}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0\mathbf{n}), \quad (12)$$

где  $l$  и  $m$  — положительные коэффициенты,  $\hat{D}$  — симметричный положительно определенный тензор второго порядка. Проверим правильность такого выбора. Положим

$$U = -\frac{3\omega_0^2}{2}(\mathbf{e}_r \cdot \hat{I}\mathbf{e}_r) + l(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_1) + m(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2),$$

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{I}\boldsymbol{\omega}) - \omega_0(\mathbf{n} \cdot \hat{I}\boldsymbol{\omega}) - U.$$

Уравнение (10), (12) можно записать в виде

$$\hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_r} \times \mathbf{e}_r + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} - \hat{D}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0\mathbf{n}), \quad (13)$$

для производной функции  $E$  по времени в силу системы (9), (13) будет иметь место формула

$$\dot{E} = -(\boldsymbol{\omega} - \omega_0\mathbf{n}) \cdot \hat{D}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0\mathbf{n}).$$

Стационарные решения системы (9), (13) описывают покой спутника в орбитальной системе координат и определяются уравнениями

$$\omega_0^2(\mathbf{n} \times \hat{I}\mathbf{n}) = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times \hat{I}\mathbf{e}_r) + l(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_r) + m(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{n}).$$

При этом  $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{n}$ . Соотношения (11) задают решениями выписанных уравнений в том и только в том случае, когда в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  тензор  $\hat{I}$  имеет диагональный вид. Иными словами, оси  $Ox_i$  являются главными центральными осями инерции спутника. На практике это условие может выполняться лишь приближенно, но зато всегда можно обеспечить соотношения  $l \gg \omega_0^2 \text{tr } \hat{I}$ ,  $m \gg \omega_0^2 \text{tr } \hat{I}$ . В силу этих соотношений система (9), (13) допускает стационарное решение, близкое (11). Используя  $E$  в качестве функции Ляпунова и теорему Барбашина — Красовского, можно доказать, что это решение асимптотически устойчиво.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00467).

## Литература

- [1] Сазонов В.В., Комаров М.М., Полежаев В.И., Никитин С.А., Ермаков М.К., Стажков В.М., Зыков С.Г., Рябуха С.Б., Асеведо Х., Либерман Е. Микроускорения на орбитальной станции *Мир* и оперативный анализ гравитационной чувствительности конвективных процессов тепло-массопереноса. Космические исследования, 1999, т.37, № 1, с. 86-101.

- [2] Абрашкин В.И., Волков М.В., Егоров А.В., Зайцев А.С., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях угловой скорости и микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон-12*. Космические исследования, 2003, т. 41, № 6, с. 632-651.
- [3] Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ *Фотон-11*. Космические исследования, 2004, т. 42, № 2, с. 185-200.
- [4] Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Определение квазистатической компоненты микроускорения, возникающего на борту Международной космической станции. Космические исследования, 2004, т. 42, № 2, с. 162 - 171.
- [5] Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон М-2*, и квазистатические микроускорения на его борту. Космические исследования, 2007, т. 45, № 5, с. 450-470.
- [6] Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон М-2*. Космические исследования, 2008, т. 46, № 5, с. 463-483.
- [7] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1957.
- [8] Меес Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. М., Мир, 1988.
- [9] Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М., Наука, 1970.
- [10] Латышев Л.А., Штырлин А.Ф., Непейвода О.М., Сазонов В.В. Использование электроракетных двигателей для реализации режима движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 16, 2007.

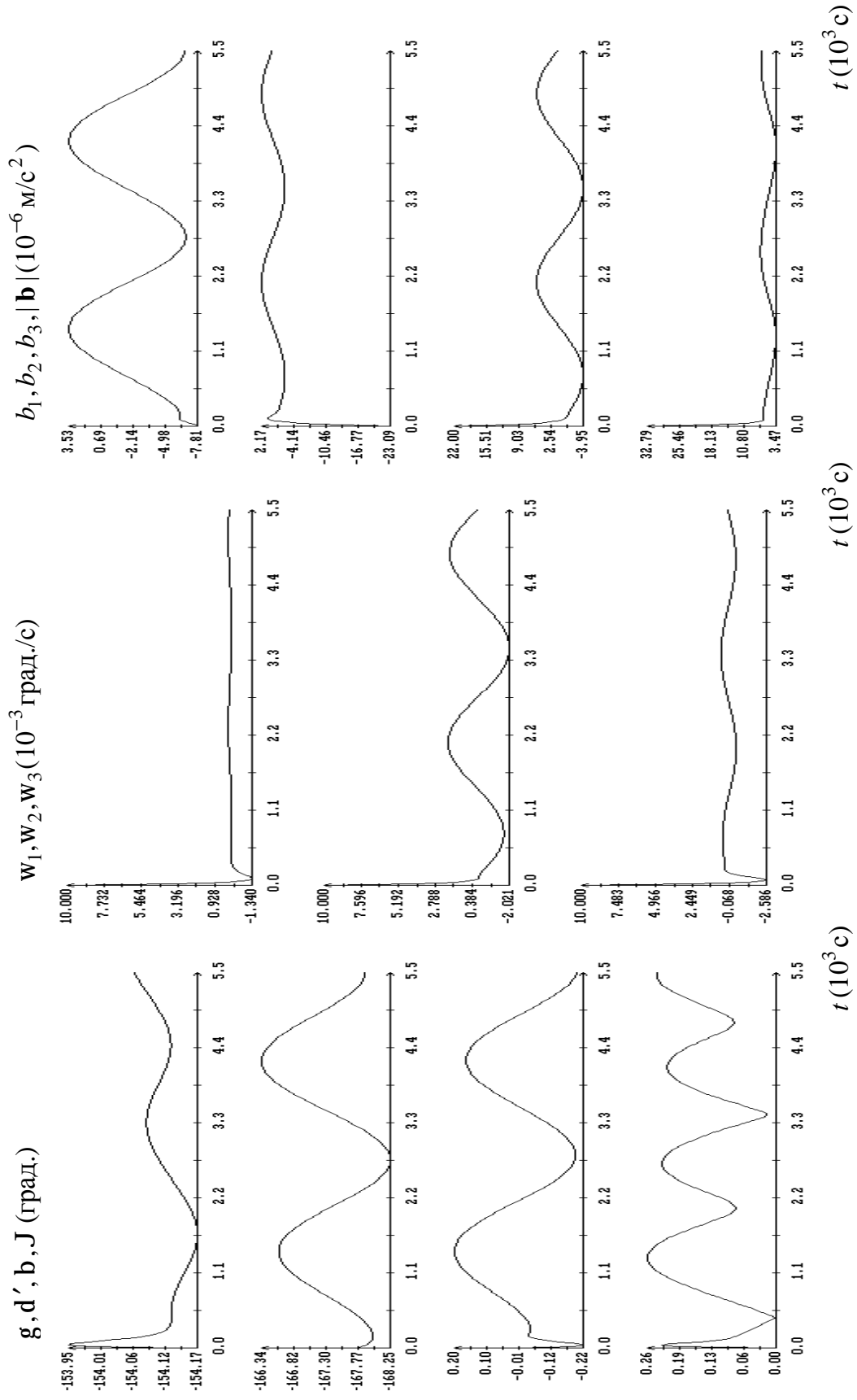


Рис. 1а. Движение спутника и микрокорения в режиме солнечной ориентации, орбита I.

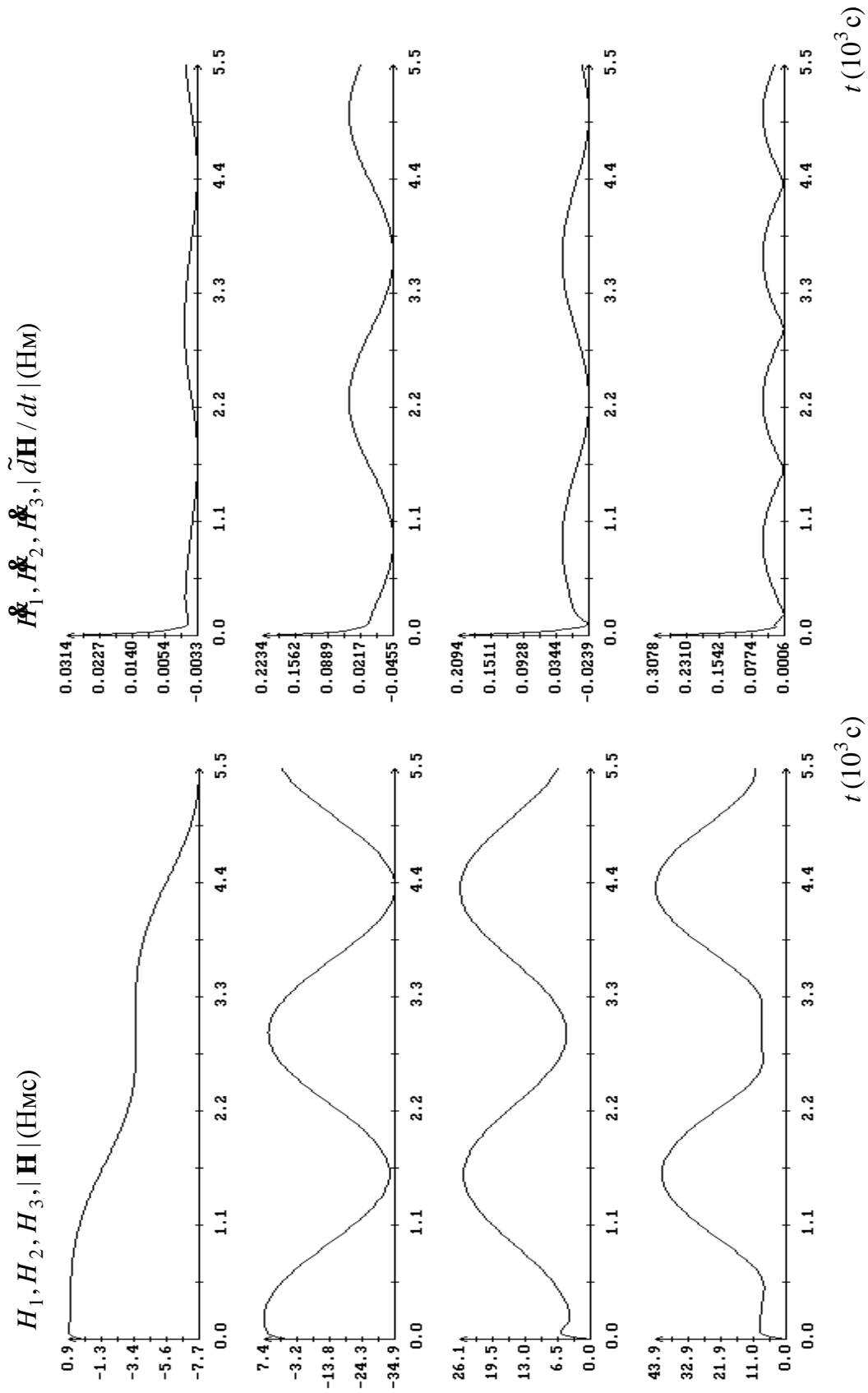


Рис. 16. Изменение кинетического момента гиросистемы в режиме солнечной ориентации, орбита I.

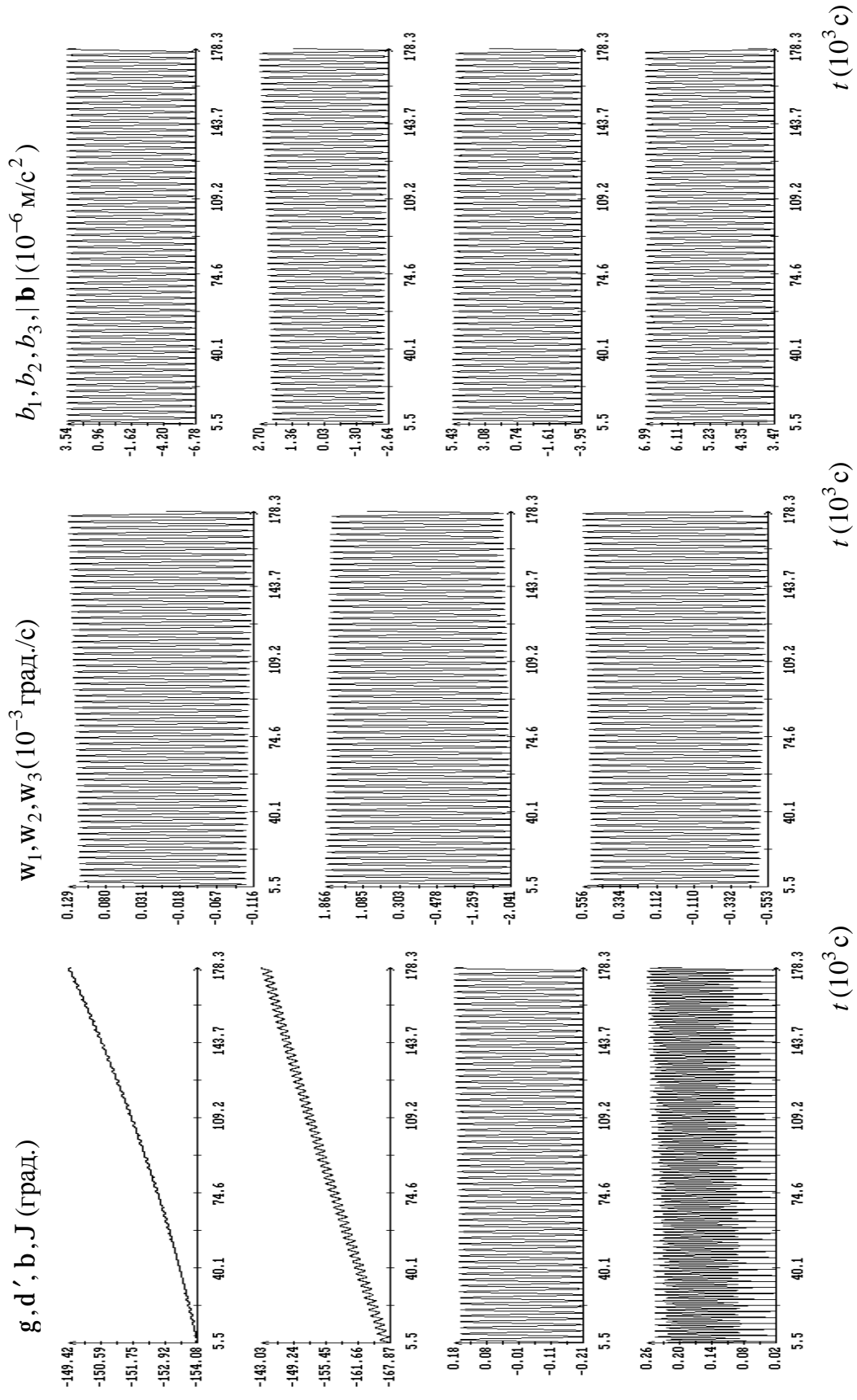


Рис. 1в. Движение спутника и микроускорения в режиме солнечной ориентации, орбита I.



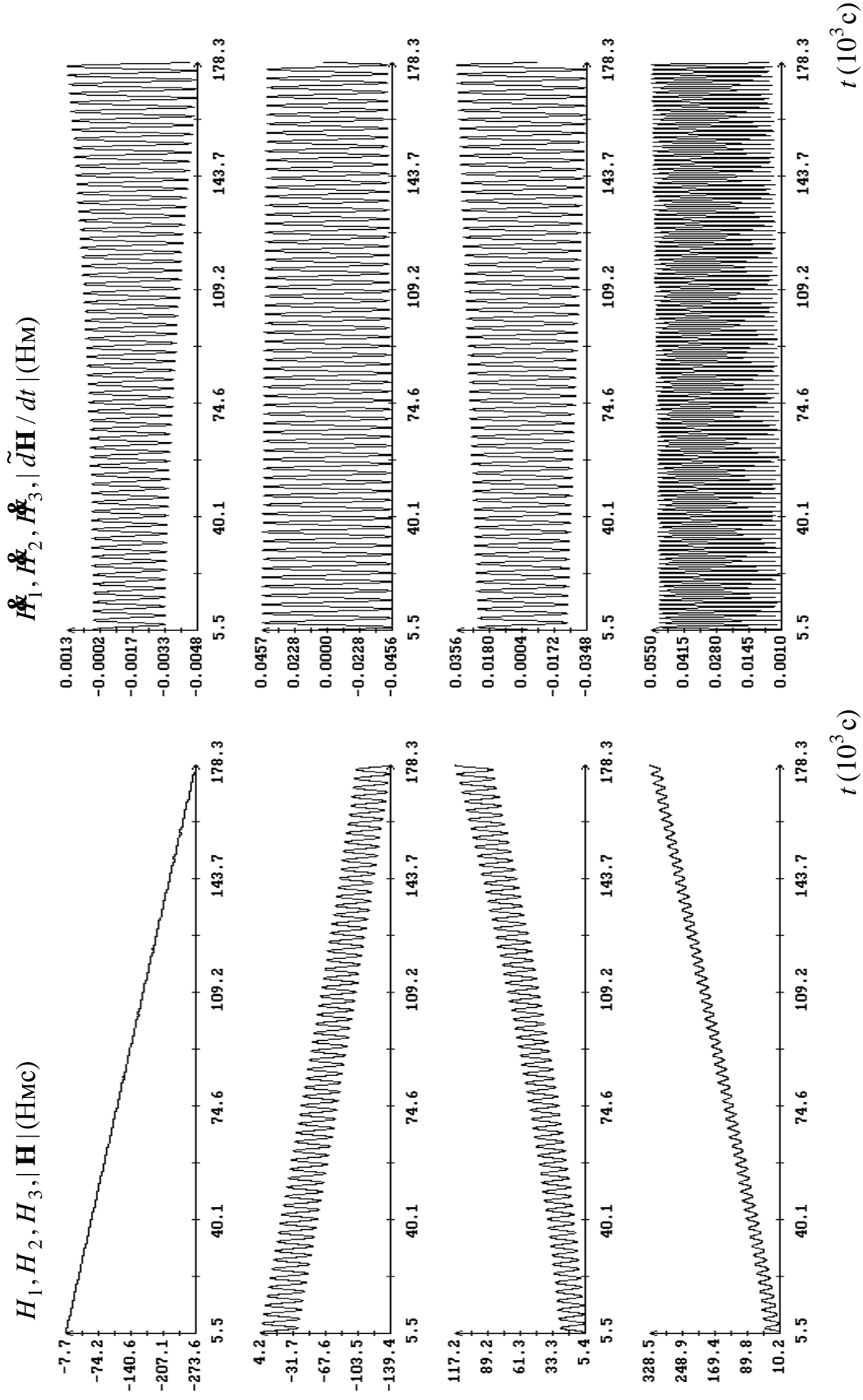


Рис. 1г. Изменение кинетического момента гиросистемы в режиме солнечной ориентации, орбита I.

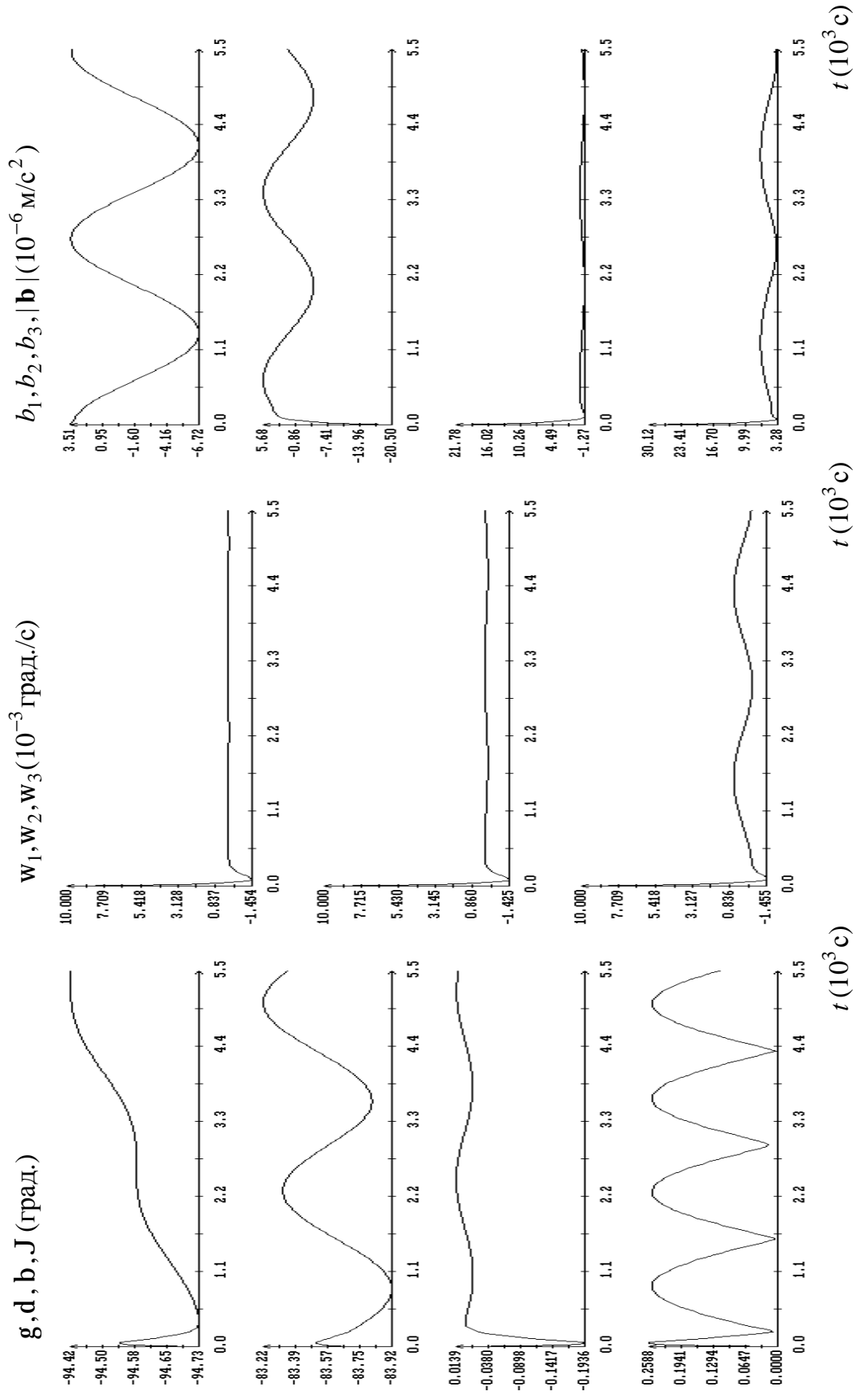


Рис. 2а. Движение спутника и микрокорения в режиме солнечной ориентации, орбита II.

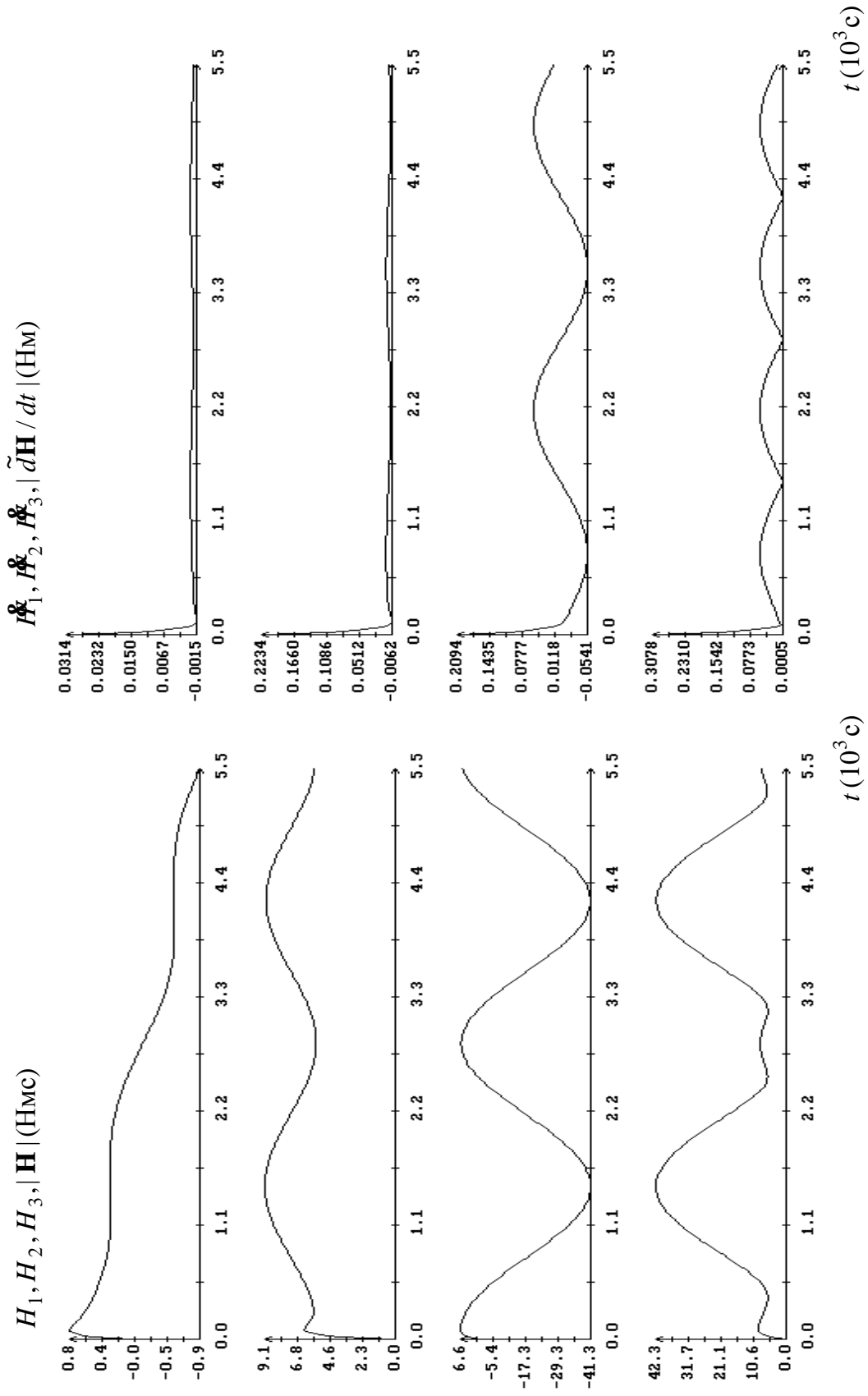


Рис. 26. Изменение кинетического момента гиросистемы в режиме солнечной ориентации, орбита II.

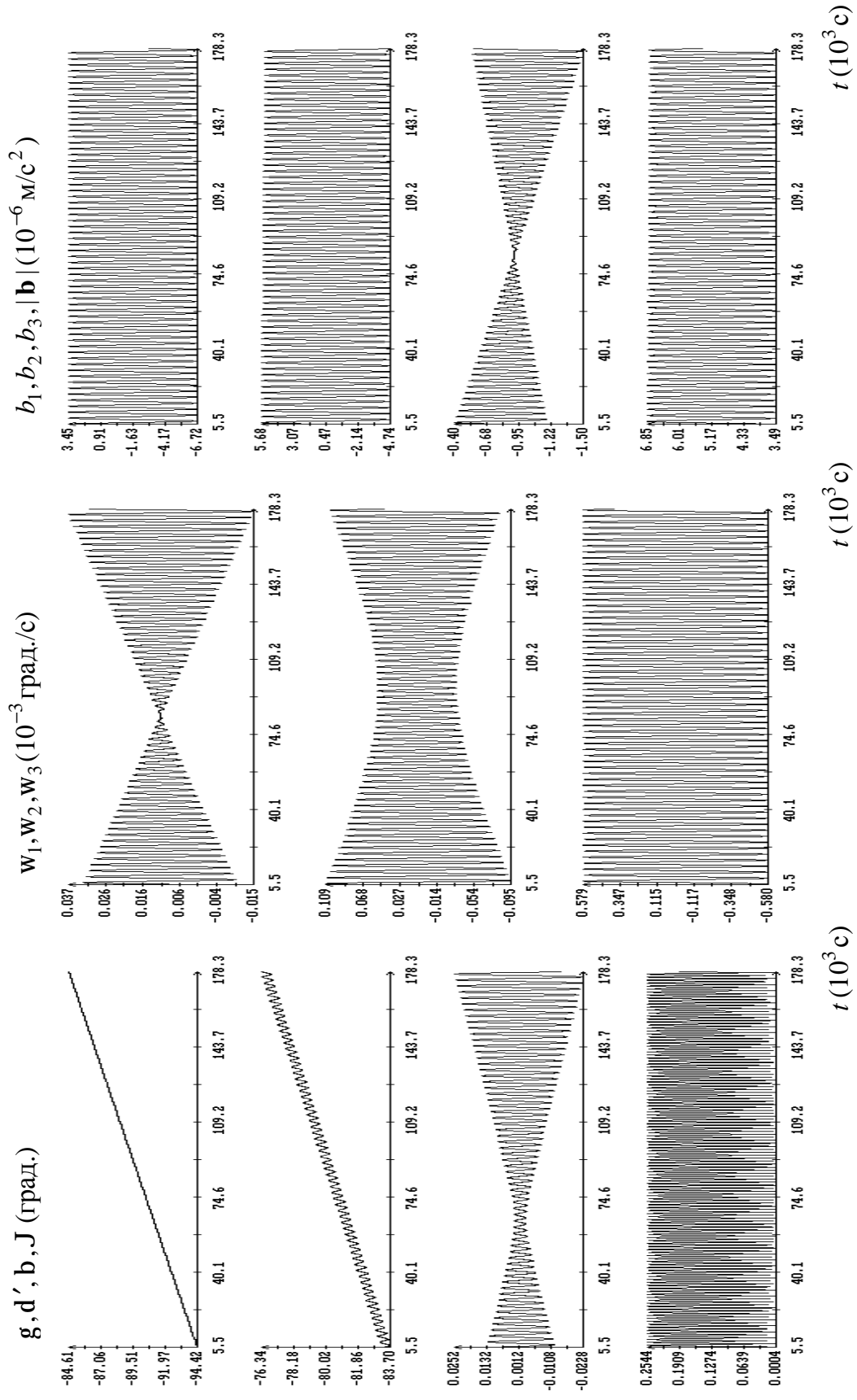


Рис. 2в. Движение спутника и микроискрения в режиме солнечной ориентации, орбита II.

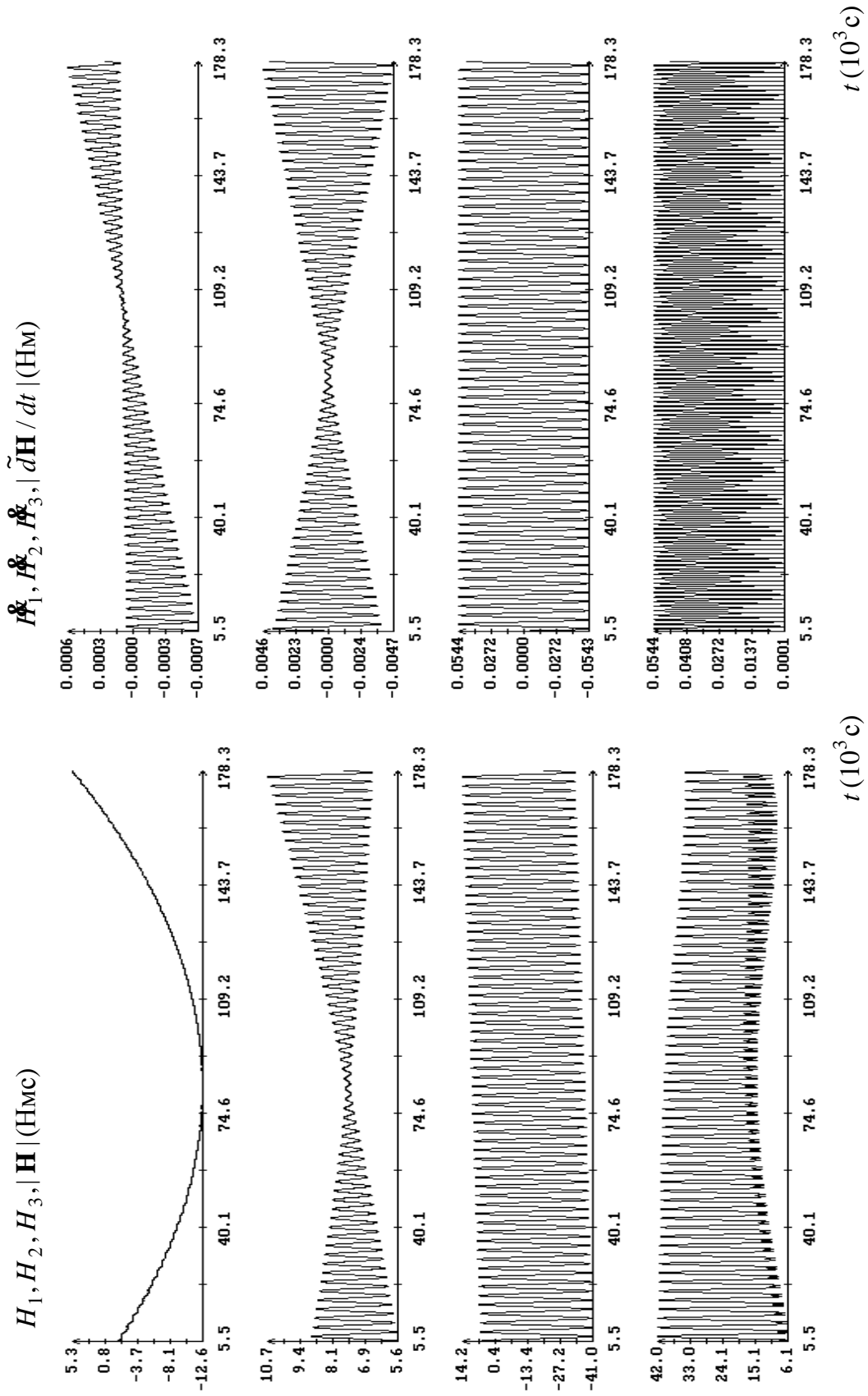


Рис. 2г. Изменение кинетического момента гиросистемы в режиме солнечной ориентации, орбита П.

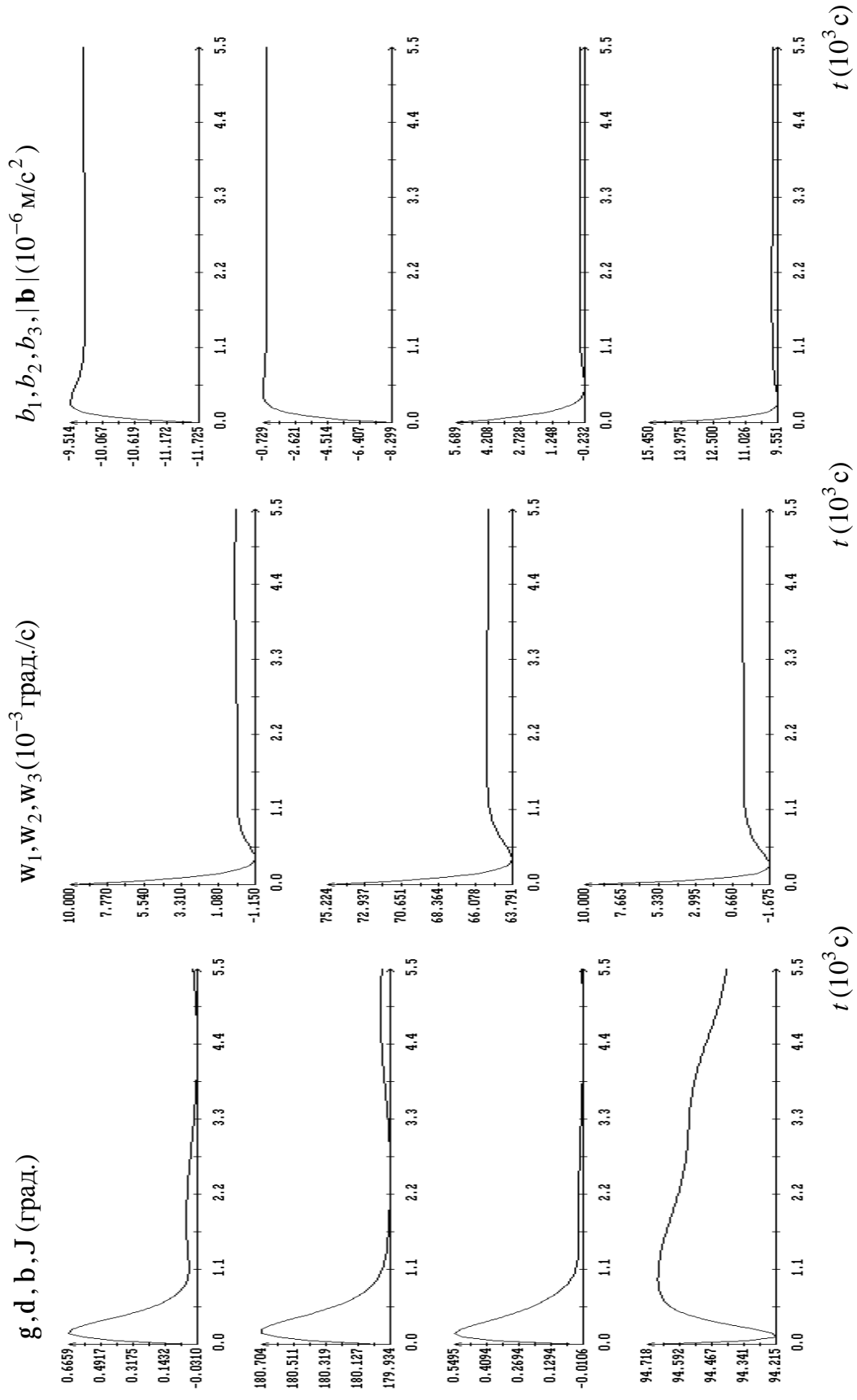


Рис. 3а. Движение спутника и микроскорения в режиме орбитальной ориентации, орбита II.

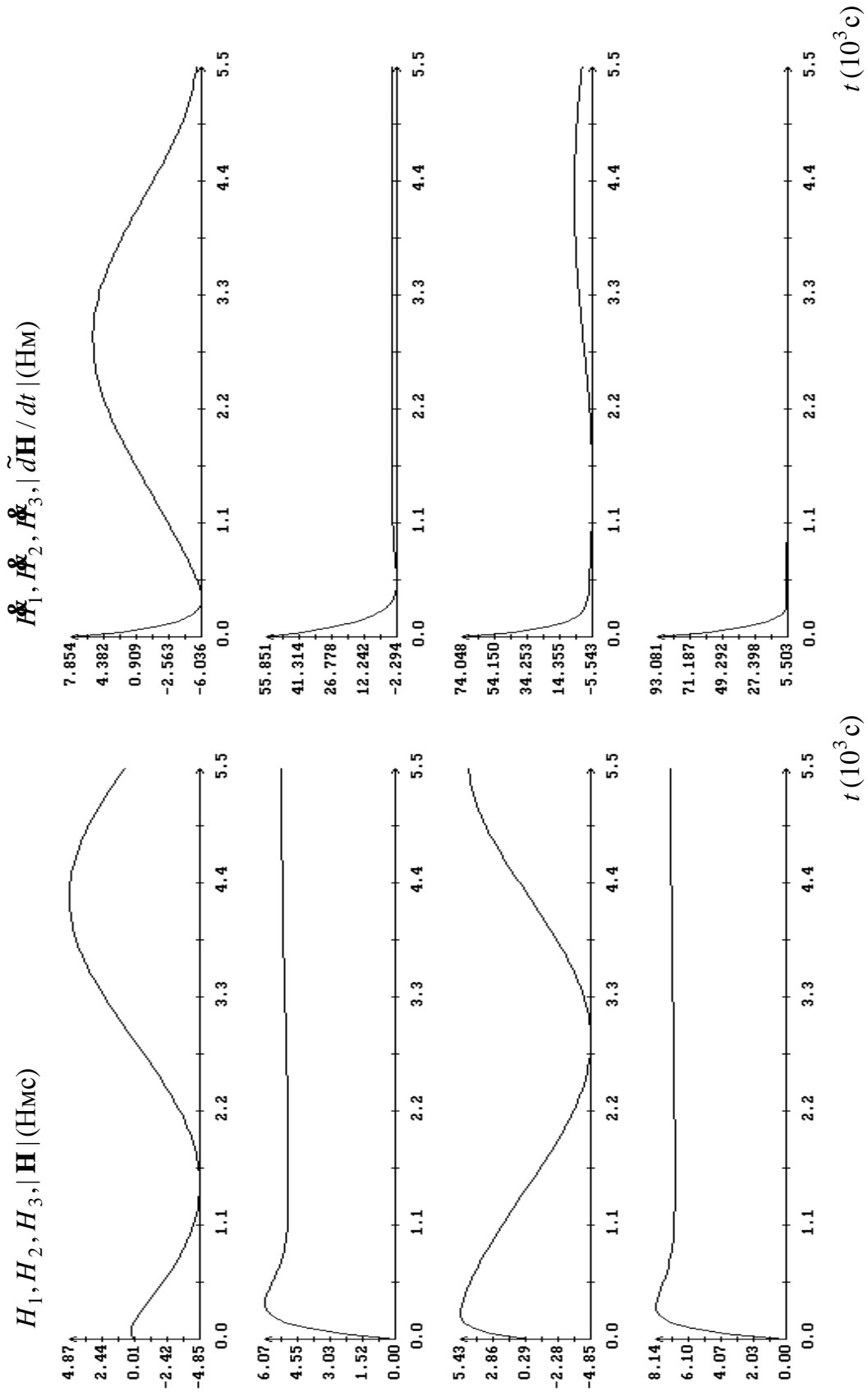


Рис. 36. Изменение кинетического момента гиросистемы в режиме орбитальной ориентации, орбита II.

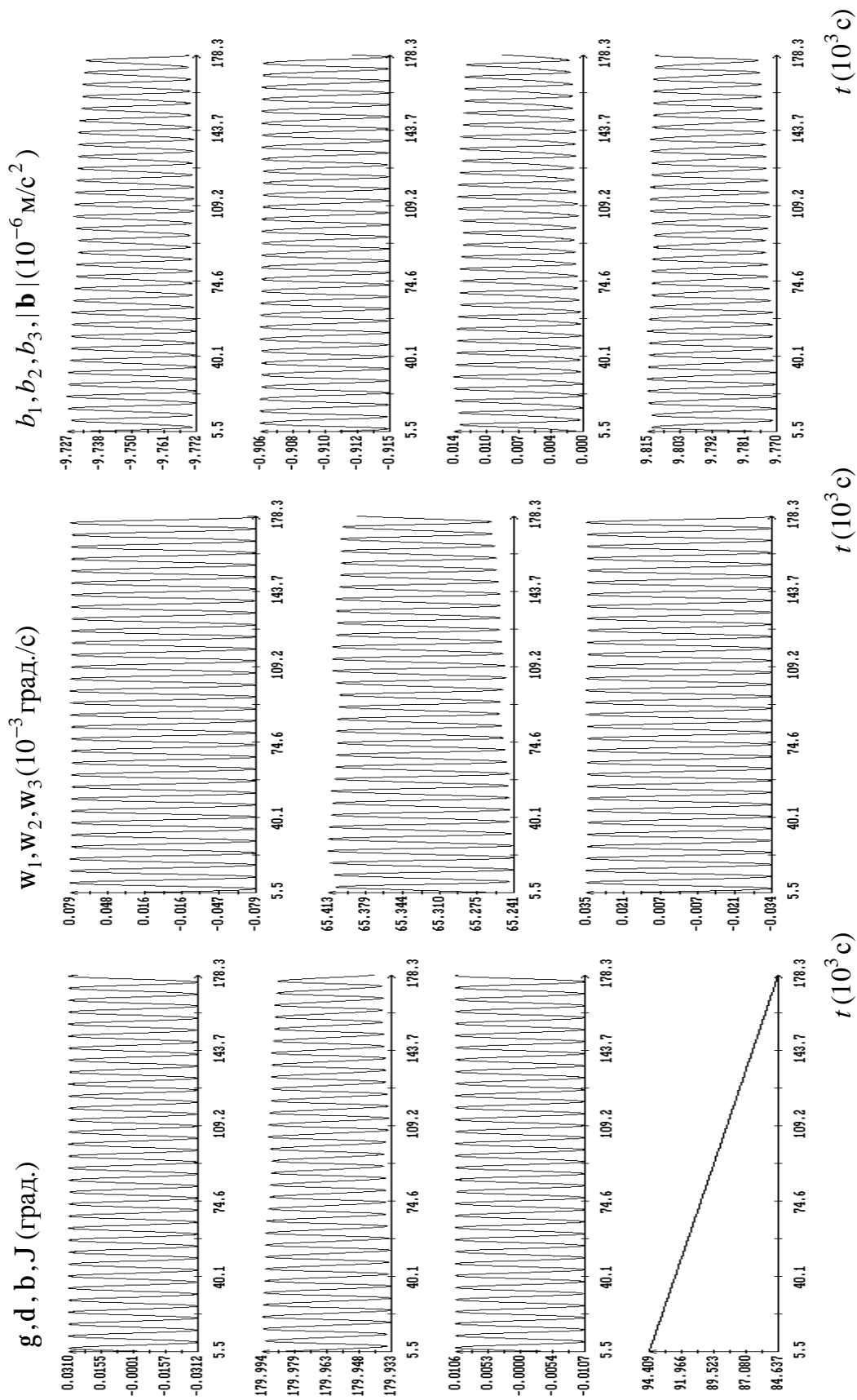


Рис. 3в. Движение спутника и микроускорения в режиме орбитальной ориентации, орбита П.



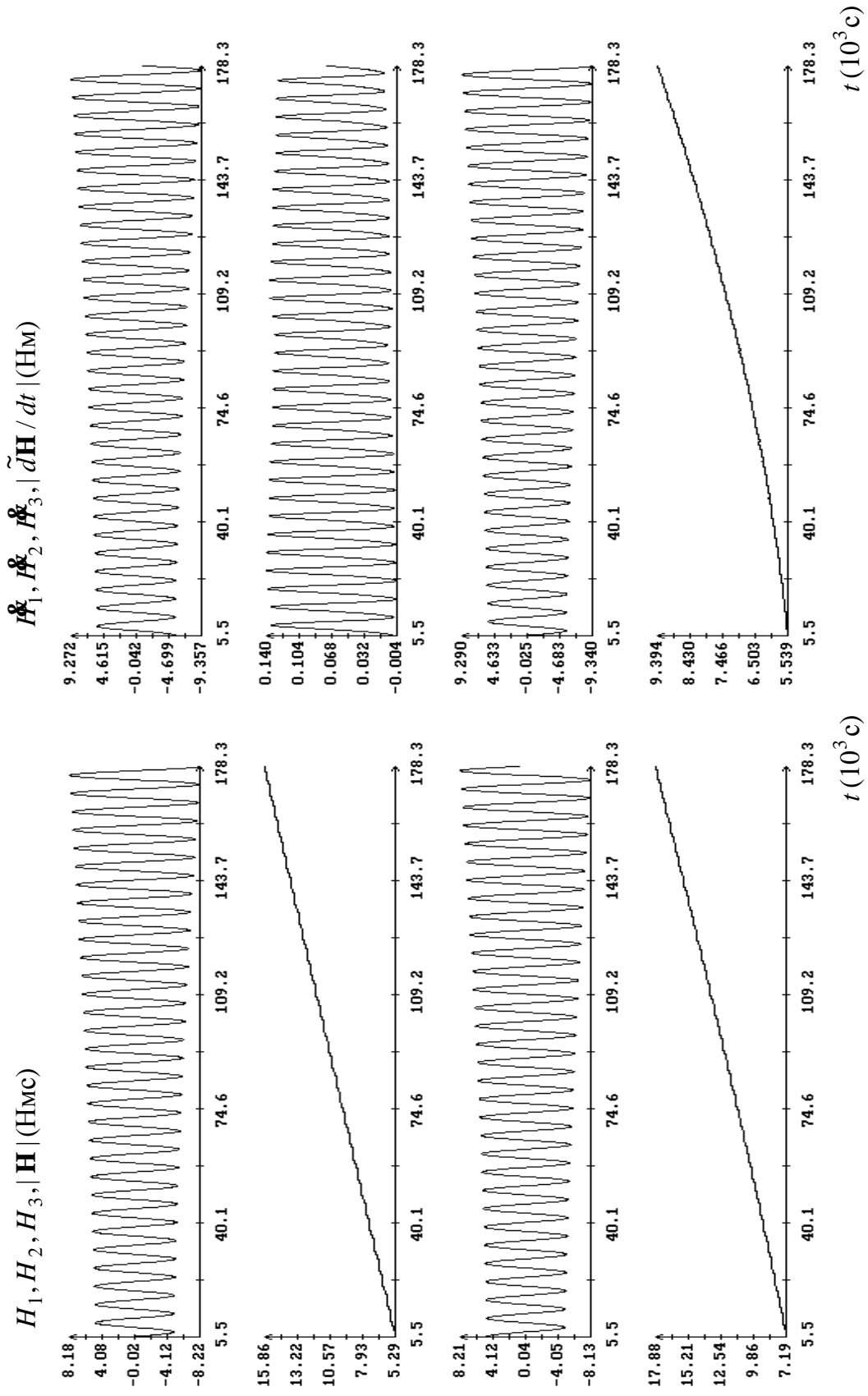


Рис. 3г. Изменение кинетического момента гиросистемы в режиме орбитальной ориентации, орбита II.