



Иванов А.А., Хайрутдинов Р.Р.,
Медведев С.Ю., Пошехонов Ю.Ю.

Вычислительный код
SPIDER - решение прямой и
обратной задач равновесия
плазмы со свободной
границей в токамаке

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Вычислительный код SPIDER - решение прямой и обратной задач равновесия плазмы со свободной границей в токамаке / А.А.Иванов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 26. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-26>

О р д е н а Л е н и н а
И Н С Т И Т У Т П Р И К Л А Д Н О Й М А Т Е М А Т И К И
и м е н и М . В . К е л д ы ш а
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А . А . И в а н о в , Р . Р . Х а й р у т д и н о в , С . Ю . М е д в е д е в , Ю . Ю . П о ш е х о н о в

В ы ч и с л и т е л ь н ы й к о д **SPIDER** –
Р Е Ш Е Н И Е П Р Я М О Й И О Б Р А Т Н О Й З А Д А Ч Р А В Н О В Е С И Я П Л А З М Ы
С О С В О Б О Д Н О Й Г Р А Н И Ц Е Й В Т О К А М А К Е

М о с к в а , 2 0 0 9

А.А.Иванов, Р.Р.Хайрутдинов, С.Ю.Медведев, Ю.Ю.Пошехонов

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОД SPIDER –
РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ
СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ТОКАМАКЕ**

Аннотация

Код SPIDER является многомодульным вычислительным кодом для расчёта целого ряда задач, связанных с аксиально-симметричным МГД равновесием плазмы в токамаке. Данный препринт посвящен описанию модулей для решения прямой и обратной задачи равновесия плазмы со свободной границей.

В первой части препринта дается постановка прямой задачи о нахождении равновесия плазмы со свободной границей в заданных внешних удерживающих токах, которая описывается двумерным уравнением равновесия Грэда-Шафранова в неограниченной области относительно неизвестной функции полоидального магнитного потока Ψ в неизвестной занимаемой плазмой области Ω_p . Приводятся два варианта алгоритма решения задачи на фиксированной прямоугольной и априори неизвестной криволинейной адаптированной к магнитным поверхностям (линиям уровня решения Ψ) сетках.

Вторая часть препринта посвящена формулировке и методу решения обратной задачи равновесия плазмы со свободной границей в токамаке, как задачи восстановления удерживающих токов в катушках полоидального поля по заданному в определенном формате равновесию. Описывается соответствующий вычислительный алгоритм. Приводятся примеры расчетов.

В приложении приводится общая схема вывода уравнения равновесия Грэда-Шафранова.

A.A.Ivanov, R.R.Khayrutdinov, S.Yu.Medvedev, Yu.Yu.Poshekhonov

**THE SPIDER CODE –
SOLUTION OF DIRECT AND INVERSE PROBLEMS
FOR FREE BOUNDARY TOKAMAK PLASMA EQUILIBRIUM**

Abstract

The SPIDER code is an axisymmetric multipurpose plasma equilibrium solver for different formulations of the tokamak plasma equilibrium problems. This paper deals with solution of direct and inverse problems for free boundary plasma equilibrium.

The first part of the paper concerns the direct axisymmetric free boundary plasma equilibrium problem, which is formulated for the poloidal magnetic flux function Ψ and the unknown plasma domain Ω_p in terms of the Grad-Shafranov equation over an infinite domain. Computational algorithms for the cases of fixed rectangular grid and magnetic surface adaptive grid are described.

The second part of the paper concerns the inverse free boundary plasma equilibrium problem of reconstruction of PFC currents as a module in the frame of the SPIDER code. Corresponding computational algorithm is described too. The results of simulations are presented.

Derivation of the Grad-Shafranov equilibrium equation is given in the appendix.

Содержание:

1. Введение	4
2. Задача равновесия плазмы со свободной границей	6
2.1. Постановка задачи	6
2.2. Сведение задачи в неограниченной области к задаче в ограниченной области (процедура Лакнера).....	7
2.3. Вычислительный алгоритм	9
2.4. Разностная схема	10
2.5. Равновесие на прямоугольной сетке	11
2.6. Равновесие на сетке, адаптированной к магнитным поверхностям	12
3. Обратная задача восстановления токов в катушках полоидального поля	14
3.1. Постановка обратной задачи	14
3.2. Вычислительный алгоритм	15
3.3. Примеры расчетов.....	17
4. <u>Приложение</u> . Уравнение равновесия Грэда-Шафранова	20
5. Литература.....	22

1. Введение

К настоящему времени наиболее значимые результаты в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС) были достигнуты на установках с магнитным удержанием плазмы типа токамак. Во Франции (Кадараш) ведутся работы по реализации международного проекта Интернационального термоядерного экспериментального реактора-токамака (ИТЭР) для демонстрации научной и технологической осуществимости реакции синтеза D-T и её использования в мирных целях.

Тороидальная высокотемпературная плазма, удерживаемая от контактов со стенками камеры магнитным полем, является основным объектом исследований в проблеме УТС. Эти исследования включают в себе самый широкий спектр плазменно-физических и инженерно-технических проблем во всей их сложной взаимозависимости.

Достижение проектных параметров плазмы в установках токамак неосуществимо без создания математических моделей и комплексов программ, и проведения на их основе предварительных расчётов, направленных на моделирование процессов в плазме, т.е. без изучения плазменных процессов методами математического моделирования. Существующие в настоящее время математические модели плазмы и обширная база экспериментальных данных позволяют проводить вычислительные эксперименты уже на стадии проектирования токамака.

В этой связи для термоядерного реактора одной из первоочередных, базисных проблем этого спектра является задача получения и удержания тороидального плазменного шнура с оптимальными формой его тороидального сечения и положения в камере, а также оптимальным распределением по радиусу плазмы её давления и плотности электрического тока. Именно поэтому расчет с необходимой точностью условий равновесия тороидальной плазмы произвольной формы с достаточно произвольным распределением по радиусу давления и плотности тока является одной из первоочередных задач теоретических исследований во всей проблеме УТС, дающих необходимую информацию по оптимизации параметров магнитной системы самых продвинутых в настоящее время термоядерных установок с магнитным удержанием плазмы – токамаков.

Множество постановок задачи расчёта равновесия плазмы токамака делится на два основных и неравнозначных класса, а именно: задачи равновесия в ограниченной области внутри заданной фиксированной границы плазмы и задачи равновесия в неограниченной области с неизвестной свободной границей плазмы в предписанных внешних тороидальных токах. Второй существенно более сложный и более приближенный к потребностям эксперимента класс задач представляет, соответственно, и существенно больший практический интерес. При этом различают так называемые прямую - расчет равновесия в заданных токах - и обратную - подбор токов по заданному в том или ином формате равновесию - задачи аксиально-симметричного равновесия плазмы с неизвестной свободной границей во внешних токах.

К настоящему времени в мире разработано и успешно эксплуатируется несколько вычислительных кодов, в которых, как их необходимая составная часть, решается прямая задача равновесия со свободной границей на фиксированной прямоугольной сетке при заданных профилях давления и полоидального тока плазмы. К числу таких кодов относятся коды DINA [1], TSC [2], CORSICA [3], JETTO [4], SCED [5] и MAXFEA [6]. Представляемый в данной работе код SPIDER [7] является кодом, в котором задача расчёта равновесия со свободной границей может быть решена как на традиционной фиксированной прямоугольной сетке, так и на априори неизвестной адаптированной к магнитным поверхностям (линиям уровня решения) потоковой сетке, позволяющей в ряде специальных случаев решать задачи, которые практически неразрешимы на фиксированных прямоугольных сетках.

В качестве примеров кодов, в которых решается обратная задача МГД равновесия плазмы в токамаке, можно привести такие известные эксплуатируемые на ряде действующих установок вычислительные коды, как EFIT [8], LIUQE [9], CLISTE [10].

Код SPIDER является многомодульным вычислительным кодом для расчёта целого ряда задач, связанных с аксиально-симметричным МГД равновесием плазмы в токамаке. Данный препринт посвящен описанию модулей для решения прямой и обратной задачи равновесия плазмы со свободной границей.

В первой части препринта дается постановка прямой задачи о нахождении равновесия плазмы со свободной границей в заданных внешних удерживающих токах, которая описывается двумерным уравнением равновесия Грэда-Шафранова в неограниченной области относительно неизвестной функции полоидального магнитного потока Ψ в неизвестной занимаемой плазмой области Ω_p . Приводятся два варианта алгоритма решения задачи на фиксированной прямоугольной и априори неизвестной криволинейной адаптированной к магнитным поверхностям (линиям уровня решения Ψ) сетках.

Вторая часть препринта посвящена формулировке и методу решения обратной задачи равновесия плазмы со свободной границей в токамаке, как задачи восстановления удерживающих токов в катушках полоидального поля по заданному в определенном формате равновесию. Описывается соответствующий вычислительный алгоритм. Приводятся примеры расчетов.

В приложении приводится общая схема вывода уравнения равновесия Грэда-Шафранова.

Разработанные авторами методы решения прямой и обратной задачи равновесия плазмы со свободной границей позволяют получать обширную информацию, необходимую для оптимизации параметров магнитной системы токамака, а также являются неотъемлемой частью всего комплекса программ, обеспечивающего возможность проектирования термоядерного реактора на основе токамака и применяемого, в частности, для международного проекта ИТЭР.

2. Задача равновесия плазмы со свободной границей

2.1. Постановка задачи

Осесимметричное равновесие плазмы со свободной границей в цилиндрических координатах (R, Z) описывается уравнением Грэда-Шафранова [11]:

$$-R\nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla \Psi \right) \equiv -\frac{1}{R} \Delta^* \Psi = \mu_0 j_\varphi(a, R) + \mu_0 \sum_k J_k \cdot \delta(R - R_k, Z - Z_k) \quad (2.1)$$

в неограниченной области. При этом область Ω_p , занимаемая плазмой, предполагается неизвестной. Здесь и далее используются следующие обозначения: Ψ – полоидальный поток магнитного поля, Φ – тороидальный поток, J_{pol} – полоидальный ток, J_{tor} – тороидальный ток, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. В качестве метки магнитных поверхностей – потоковой координаты – может быть выбран, например, нормированный полоидальный поток $a(R, Z) = \bar{\Psi}(R, Z) = \frac{\Psi - \Psi_{axis}}{\Psi_{boun} - \Psi_{axis}} \in [0, 1)$, где Ψ_{axis} и Ψ_{boun} – значения Ψ , соответственно, на неизвестной магнитной оси, определяемой из условия $|\nabla \Psi| = 0$, и на неизвестной границе плазмы $\partial\Omega_p$.

В правой части (2.1)

$$j_\varphi(a, R) = (\vec{j}, \nabla \varphi) \cdot R = \begin{cases} R \cdot \frac{dP}{d\Psi} + \frac{1}{\mu_0 R} F \cdot \frac{dF}{d\Psi}, & (R, Z) \in \Omega_p \\ 0, & (R, Z) \notin \Omega_p \end{cases} \quad (2.2)$$

- тороидальная компонента плотности тока плазмы; $P(a)$ – давление плазмы; профиль $\frac{dP}{d\Psi}(a)$ предполагается заданным, как функция потоковой координаты a ; $F(a) = \mu_0 \frac{J_{pol}}{2\pi}$ – нормированный полоидальный ток; профиль $F \cdot \frac{dF}{d\Psi}(a)$ также предполагается заданным. Катушки полоидального поля и пассивные проводящие структуры, окружающие плазму, аппроксимируются конечным

набором филаментов – точечных кольцевых проводников. R_k, Z_k - координаты филаментов, J_k - известные величины токов в филаментах.

К числу входных параметров задачи относится также величина полного тороидального тока, протекающего по плазме:

$$I_{pl} = \int_{\Omega_p} j_\varphi(a, R) dS \quad (2.3a)$$

Уравнение равновесия (2.1) дополняется следующими краевыми условиями:

$$\Psi|_{R \rightarrow 0} = 0, \quad \Psi|_{R^2 + Z^2 \rightarrow \infty} = 0, \quad \Psi|_{\partial\Omega_p} = \Psi_{boun} = const, \quad (2.3б)$$

где Ψ_{boun} определяется через Ψ_{axis} и Ψ_{separ} (значение Ψ на неизвестной сепаратрисе плазмы) из условия

$$\alpha = \frac{\Psi_{boun} - \Psi_{axis}}{\Psi_{separ} - \Psi_{axis}} = const, \quad \alpha \in (0, 1], \quad (2.4)$$

где α - входной параметр задачи, задающий близость границы плазмы к сепаратрисе ($\alpha = 1$ соответствует случаю совпадения границы плазмы с сепаратрисой). Значение Ψ_{boun} может также определяться непосредственно значением решения Ψ в некоторой заданной точке области – так называемой лимитерной точке.

Предполагается, что мы имеем дело с равновесием плазмы, обладающим единственной магнитной осью и стягивающимися к ней вложенными друг в друга магнитными поверхностями.

2.2. Сведение задачи в неограниченной области к задаче в ограниченной области (процедура Лакнера)

Неограниченность области, в которой решается описанная выше нелинейная эллиптическая задача равновесия со свободной границей, создаёт дополнительную трудность с точки зрения численной реализации этой задачи. Для преодоления этой трудности мы применяем предложенный в [12] алгоритм

сведения задачи в неограниченной области к задаче в ограниченной области – процедуру Лакнера. Подробное описание этого метода применительно к решению эллиптических краевых задач с неизвестной свободной границей на плоскости можно найти в [13-15]. Приведём здесь общую схему процедуры Лакнера:

1.) Фундаментальное решение (функция Грина) $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ для оператора Δ^* определяется как решение уравнения:

$$\Delta^* G = -\mu_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot R \quad (2.5)$$

в неограниченной области, $\delta(R, Z)$ - дельта-функция Дирака.

2.) Уравнение равновесия со свободной границей (2.1) можно разбить на два уравнения:

$$\Delta^* \psi_{pl} = -R \cdot \mu_0 \cdot j_\varphi, \quad (2.6a)$$

$$\Delta^* \psi_{ext} = -R \cdot \mu_0 \cdot \sum_k J_k \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (2.6b)$$

при этом по определению и свойствам функции Грина получаем:

$$\psi_{pl}(\vec{r}_0) = \int_{\Omega_p} j(\vec{r}) \cdot G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS, \quad (2.7a)$$

$$\psi_{ext}(\vec{r}_0) = \sum_k G(\vec{r}_0 - \vec{r}_k) \cdot J_k \quad (2.7b)$$

3.) Для любых двух функций u, v справедливо следующее интегральное соотношение:

$$\int_S \frac{1}{R} \cdot (\Delta^* v \cdot u - \Delta^* u \cdot v) dS = \int_{\partial S} \left(\frac{v}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dl - \frac{u}{R} \cdot \frac{\partial v}{\partial n} dl \right) \quad (2.8)$$

4.) Окружим область Ω_p , занимаемую плазмой, внешней по отношению к ней замкнутой кривой ∂S достаточной степени гладкости. Рассмотрим в области S задачу

$$\Delta^* g = -R \cdot \mu_0 \cdot j_\varphi, \quad g|_{\partial S} = 0 \quad (2.9)$$

Положим в (2.8) $v \equiv G(\vec{r}, \vec{r}_0)$, $u \equiv g$. Тогда

$$\int_S \frac{1}{R} \cdot (\Delta^* G \cdot g - \Delta^* g \cdot G) dS = \int_{\partial S} \left(\frac{G}{R} \cdot \frac{\partial g}{\partial n} dl - \frac{g}{R} \cdot \frac{\partial G}{\partial n} dl \right)$$

и

$$\lambda \cdot g(\vec{r}_0) - \int_S j_\varphi \cdot G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS = \int_{\partial S} \frac{G}{R} \cdot \frac{\partial g}{\partial n} dl, \quad \text{где } \lambda = \begin{cases} 1, & \vec{r}_0 \in S \\ 1/2, & \vec{r}_0 \in \partial S \\ 0, & \vec{r}_0 \notin S \end{cases} \quad (2.10)$$

Положим в (2.10) $\vec{r}_0 \in \partial S$. Тогда $-\int_S j_\varphi \cdot G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS = \int_{\partial S} \frac{G}{R} \cdot \frac{\partial g}{\partial n} dl$, где согласно (2.7а)

$\int_S j_\varphi \cdot G(\vec{r}, \vec{r}_0) dS = \psi_{pl}(\vec{r}_0)$, и мы получаем краевое условие для $\psi = \psi_{pl} + \psi_{ext}$ на границе ∂S :

$$\psi_{pl}(\vec{r}_0) = - \int_{\partial S} \frac{G}{R} \cdot \frac{\partial g}{\partial n} dl, \quad \psi_{ext}(\vec{r}_0) = \sum_k G(\vec{r}_0 - \vec{r}_k) \cdot J_k. \quad (2.11)$$

Здесь g - решение краевой задачи (2.9).

Таким образом, решение исходной задачи в неограниченной области сводится к решению двух краевых задач (2.6), (2.9) в ограниченных областях.

2.3. Вычислительный алгоритм

Для решения нелинейной задачи (2.1)-(2.4) мы предлагаем итерационный алгоритм, ключевым моментом которого является использование так называемых лимитерных точек или лимитеров, отвечающих за сходимость итерационного процесса. Использование лимитеров предполагает следующую итерационную процедуру, состоящую из двух итерационных процессов: вначале решается задача при фиксированных лимитерах (внутренние итерации); затем значения координат лимитерных точек переопределяются (внешние итерации), и процесс повторяется.

Внутренние итерации

Выполняются итерации Пикара для уравнения

$$\Delta^* \psi_{pl}^{s+1} = -R \cdot \mu_0 \cdot j_\varphi(\psi^s, R), \quad s - \text{номер итерации,}$$

$$\psi_{ext}(\vec{r}) = \sum_k G(\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot J_k ,$$

при заданном фиксированном положении лимитерной точки (R_m, Z_m) – в данном случае магнитной оси равновесной конфигурации. Для фиксации магнитной оси в предписанной точке (R_m, Z_m) вводится следующая искусственная добавка

$$\psi_{art}^{s+1}(\vec{r}) = C_r^{s+1} \cdot R^2 + C_z^{s+1} \cdot Z \quad (2.12)$$

таким образом, что

$$\psi^{s+1} = \psi_{pl}^{s+1} + \psi_{ext} + \psi_{art}^{s+1} . \quad (2.13)$$

Константы C_r^{s+1} и C_z^{s+1} в (2.12) подбираются из условия, что магнитная ось находится в заданной точке (R_m, Z_m) , где s - номер итерации. По заданной величине α (2.4) и итерационному приближению для решения ψ^{s+1} определяется граница плазмы.

Внешние итерации

Рассмотрим множители C_r и C_z , как функции от неизвестных координат магнитной оси (R_m, Z_m) .

Следующий шаг итерационной процедуры заключается в нахождении координат (R_m, Z_m) , соответствующих решению задачи (2.1)-(2.4). Искомые значения (R_m, Z_m) находятся из решения следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} C_r(R_m, Z_m) &= 0, \\ C_z(R_m, Z_m) &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Вся двухступенчатая итерационная процедура повторяется до тех пор, пока константы C_r, C_z не станут исчезающе малыми, обнуляя тем самым искусственную добавку (2.12).

2.4. Разностная схема

В расчетной области строится четырёхугольная сетка. Разностный аналог оператора $\Delta^*(\cdot)$ (2.1) строится на основе консервативно-разностной аппроксимации оператора $rot(rot(\cdot))$ с помощью операторно-вариационного метода [16]. Процедура построения разностной схемы для уравнения равновесия (2.1) описана в [17].

2.5. Равновесие на прямоугольной сетке

При расчёте равновесия со свободной границей на прямоугольной сетке задача решается в прямоугольнике, размеры которого выбираются так, что плазма заведомо находится внутри него. На Рис.1 приводится пример расчета равновесной конфигурации токамака ИТЭР, определяемой следующими входными параметрами задачи:

- профили тороидальной компоненты плотности тока плазмы $dP/d\Psi$ и $F \cdot dF/d\Psi$, как функции нормированного полоидального потока, приводятся на Рис.2;
- полный тороидальный ток плазмы: $I_{pl} = 15\text{MA}$;
- параметр, задающий близость границы плазмы к сепаратрисе (2.4): $\alpha = 0.995$;
- заданными полагаются внешние токи в катушках полоидального поля, специальным алгоритмом распределенные по аппроксимирующим эти катушки филаментам, число и расположение которых приводятся на Рис.1

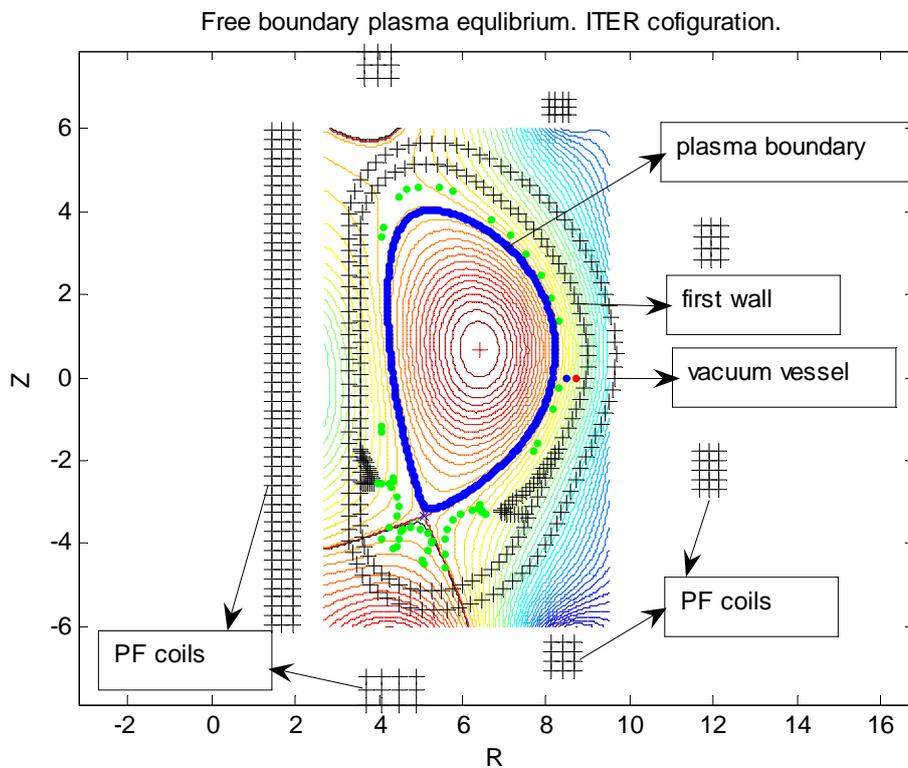


Рис.1 Равновесие плазмы со свободной границей на прямоугольной сетке.
Конфигурация токамака ИТЭР.

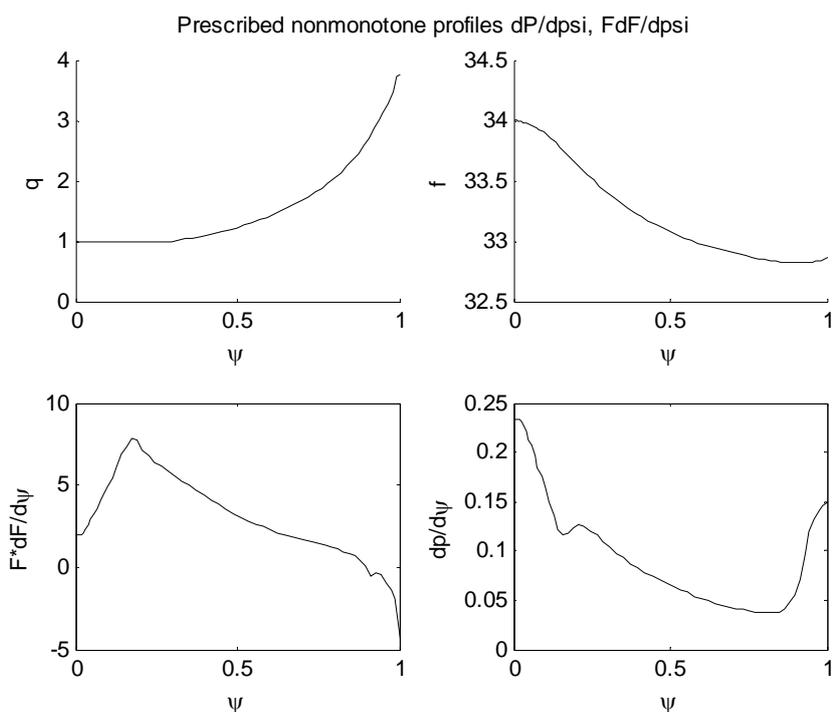


Рис.2 Профили тороидальной компоненты плотности тока плазмы $dP/d\psi$ и $F \cdot dF/d\psi$, как функции нормированного полоидального потока, соответствующие равновесной конфигурации Рис.1

2.6. Равновесие на сетке, адаптированной к магнитным поверхностям

При расчёте равновесия со свободной границей на сетке, адаптированной к магнитным поверхностям, в качестве расчетной области выбирается область, охватывающую плазму и геометрически подобная области, занимаемой плазмой. В расчётной области строится сетка, топологически эквивалентная радиально-кольцевой сетке в круге.

В области, занимаемой плазмой, сетка в процессе расчета адаптируется к магнитным поверхностям – линиям уровня решения – на каждом итерационном шаге. На Рис.3а приводится пример расчета той же самой равновесной конфигурации токамака ИТЭР, что и на Рис.1:

Free boundary plasma equilibrium. ITER configuration.

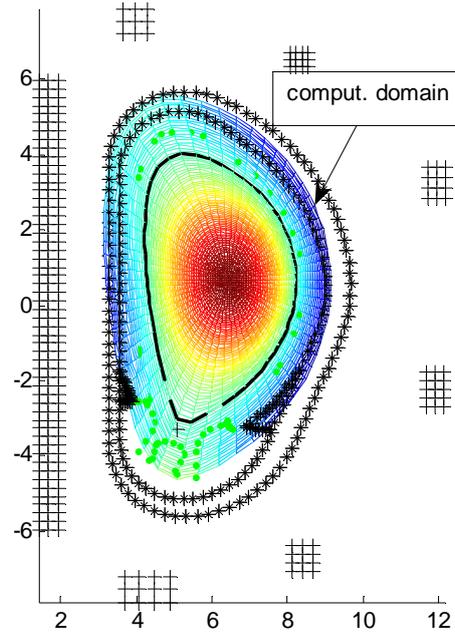


Рис.3а Равновесие плазмы со свободной границей на адаптивной сетке.
Конфигурация токамака ИТЭР

На Рис.3б это же равновесие даётся более крупным планом без филаментов, аппроксимирующих катушки полоидального поля. По положению X-точки, отстоящей на некоторое расстояние от границы плазмы, видно, что в данном расчёте граница, определяемая $\alpha = 0.995$, не совпадает с сепаратрисой.

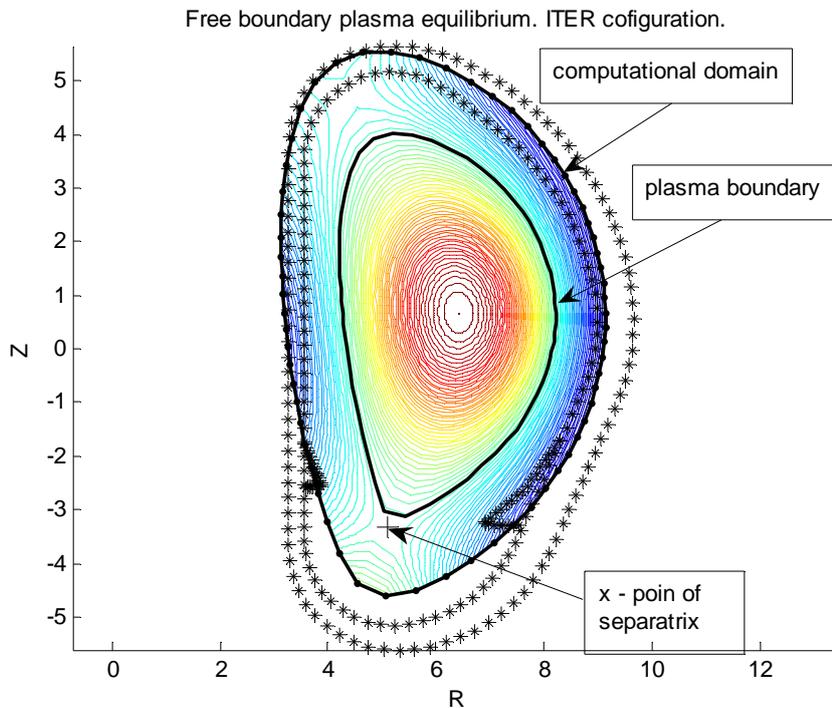


Рис.3б Равновесие плазмы со свободной границей на адаптивной сетке.
Конфигурация токамака ИТЭР

3. Обратная задача восстановления токов в катушках полоидального поля

3.1. Постановка обратной задачи

Обратная задача нахождения токов в обмотках катушек полоидального поля, формирующих требуемое равновесие плазмы со свободной границей, формулируется следующим образом:

1. Положение и форма границы плазмы аппроксимируются конечным набором точек на плоскости (R, Z) . Полагаются известными их координаты (r_l, z_l) . Это так называемые «фиттинговые» точки, к которым определяемая в процессе итераций граница равновесной плазмы будет подстраиваться наилучшим образом в смысле минимизации приводимого ниже функционала.
2. Задаются координаты конечного числа «контрольных» точек, через которые граница равновесия плазмы пройдет точно.
3. Задаются опорные значения (приближения) токов в катушках полоидального поля, от которых, по возможности, не должны сильно отличаться искомые токи.
4. Задаются координаты точки, где $|\nabla\Psi|=0$. Координаты X-точки найденного равновесия со свободной границей должны совпадать с заданными.
5. Как функции нормированного полоидального потока $a = \bar{\Psi}$, задаются определяющие равновесие профили в плазме, а также нормировочные константы:
 - a.) $p'_\psi(a)$, $f \cdot f'_\psi(a)$, значение тока плазмы $I_{pl} = const$, значение вакуумного тороидального магнитного поля $B_0 = const$ для заданного значения координаты $R = R_0$

либо

б.) $p'_\psi(a)$, $q(a) = -\frac{d\Phi}{d\Psi}$ - фактор запаса устойчивости и, либо значение тока плазмы $I_{pl} = const$, либо значение полоидального потока на магнитной оси $\psi_{ax} = const$.

6. Для искомого равновесия плазмы со свободной границей задается значение параметра α (2.4).

Требуется найти значения токов в предписанных катушках полоидального поля, которые формируют равновесную конфигурацию плазмы со свободной границей, удовлетворяющую условиям (1)-(6).

3.2. Вычислительный алгоритм

Задача нахождения токов в обмотках полоидального поля, необходимых для того, чтобы поддерживать границу плазмы проходящей близко к заданным точкам (r_l, z_l) , формулируется как задача минимизация функционала

$$W = \sum_{l=1}^L \omega_l \left[\psi_p(r_l, z_l) + \sum_{k=1}^K J_k G(r_l, z_l; r_k, z_k) - \psi_{boun} \right]^2 + \sigma \sum_{k=1}^K d_k (J_k - J_k^{ref})^2, \quad (3.1)$$

$$\min_{J_k, \psi_{boun}} W,$$

по отношению к вариациям величин токов J_k и величины полоидального потока $\psi = \psi_{boun}$ на границе плазмы. Значение величины $\sigma > 0$ обеспечивает регуляризацию решения задачи. Коэффициенты ω_l и d_k задаются, и служат для корректировки величин значений потоков в каждой конкретной фиттинговой точке и отклонения равновесных токов в обмотках от предписанных опорных величин. Через $\psi_p(r_l, z_l)$ обозначается значение полоидального потока, создаваемого током плазмы в фиттинговой точке (r_l, z_l) .

Кроме приближенных граничных точек, могут также задаваться «контрольные» граничные точки (r_m, z_m) , через которые граница плазмы

должна проходить точно. Это удобно сделать с использованием Лагранжевых множителей λ_m и приведением функционала к виду:

$$W' = \sum_{m=1}^M \lambda_m \left[\psi_p(r_m, z_m) + \sum_{k=1}^K J_k G(r_m, z_m; r_k, z_k) - \psi_{boun} \right] , \quad (3.2)$$

$$\min_{J_k, \psi_{boun}, \lambda_m} (W + W') .$$

За счет добавки к функционалу нижеследующих условий с множителями Лагранжа $\lambda_{Rx}, \lambda_{Zx}, \lambda_x$ точно выполняются условия пунктов (3),(6) :

$$W'' = \lambda_{Rx} \left[\left(\frac{\partial \psi_p}{\partial R} \right)_x + \sum_k J_k \frac{\partial G(\vec{r}_x, \vec{r}_k)}{\partial R_x} \right] + \lambda_{Zx} \left[\left(\frac{\partial \psi_p}{\partial Z} \right)_x + \sum_k J_k \frac{\partial G(\vec{r}_x, \vec{r}_k)}{\partial Z_x} \right] + \\ + \lambda_x \left[(\psi_{ax} - \psi_{boun}) - \alpha (\psi_{ax} - \psi_{separ}) \right] , \quad (3.3)$$

$$\min_{J_k, \psi_{boun}, \lambda_m, \lambda_{Rx}, \lambda_{Zx}, \lambda_x} (W + W' + W'') .$$

Добавка к функционалу нижеследующих условий с множителями Лагранжа $\lambda_{RZ}, \lambda_{ZZ}$

$$W''' = \lambda_{RZ} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial R \partial Z} \right)_x + \sum_{k=1}^K J_k \frac{\partial^2 G(\vec{r}_x, \vec{r}_k)}{\partial R \partial Z} \right] + \lambda_{ZZ} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial Z^2} \right)_x + \sum_{k=1}^K J_k \frac{\partial^2 G(\vec{r}_x, \vec{r}_k)}{\partial Z^2} \right] , \quad (3.4)$$

$$\min_{J_k, \psi_{boun}, \lambda_m, \lambda_{Rx}, \lambda_{Zx}, \lambda_x, \lambda_{RZ}, \lambda_{ZZ}} (W + W' + W'' + W''') .$$

позволяет решать обратную задачу восстановления токов в катушках полоидального поля для случая равновесия с X-точкой второго порядка - так называемого равновесия «snowflake» [18] – удовлетворяющей в дополнение к обычной X-точке условиям равенства нулю всех вторых производных от решения Ψ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R \partial Z} = 0 . \quad (3.5)$$

3.3 Примеры расчетов

На Рис.4 приводится пример равновесной конфигурации токамака ИТЭР, определяемой реконструированными в результате решения обратной задачи токами в катушках полоидального поля. Входными параметрами обратной задачи, помимо заданных значений координат «фиттинговых» и «контрольных» точек, являлись:

- немонотонные профили тороидальной компоненты плотности тока плазмы $dP/d\Psi$ и $F \cdot dF/d\Psi$, как функции нормированного полоидального потока, приведенные на Рис.5;
- полный тороидальный ток плазмы: $I_{pl} = 15\text{MA}$;
- параметр, задающий близость границы плазмы к сепаратрисе: $\alpha = 0.995$;
- значение вакуумного тороидального магнитного поля $B_0 = 5.3\text{T}$ на $R_0 = 6.2\text{m}$.

Free boundary plasma equilibrium in reconstructed currents. ITER configuration.

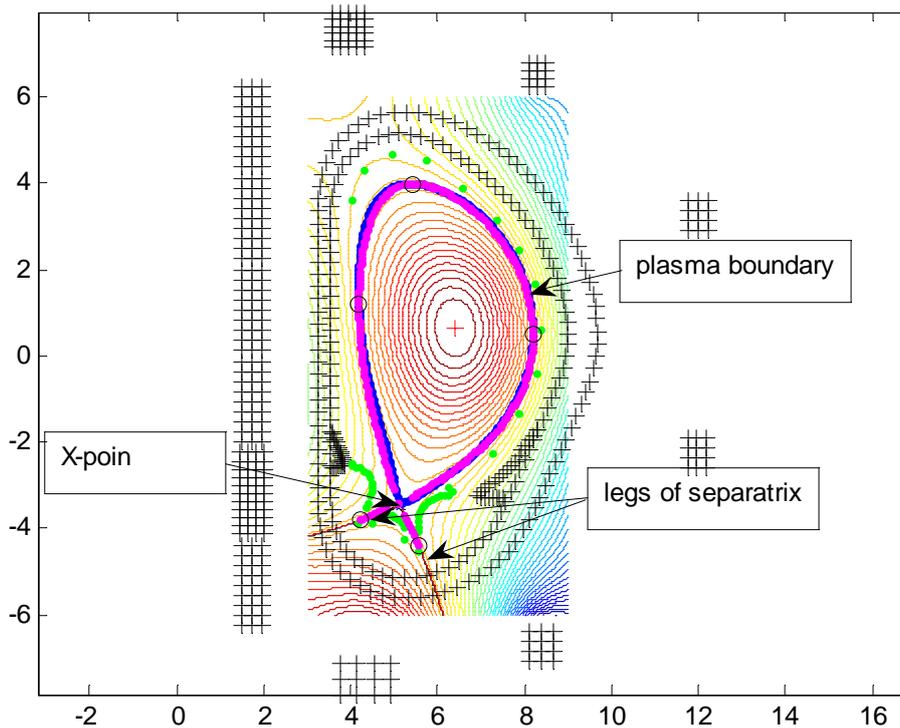


Рис.4 Равновесие плазмы со свободной границей на прямоугольной сетке в реконструированных токах. Конфигурация токамака ИТЭР. Маркерами «кружочек» показано положение «контрольных» точек: трёх на границе плазмы и двух на усах сепаратрисы.

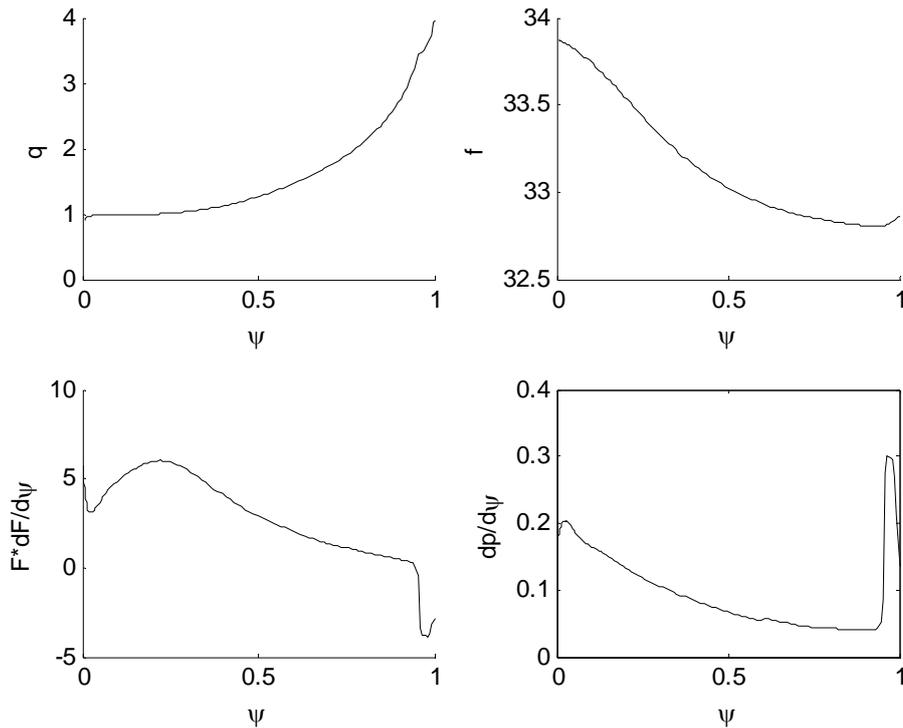


Рис.5 Профили тороидальной компоненты плотности тока плазмы $dP/d\psi$ и $F \cdot dF/d\psi$, как функции нормированного полоидального потока, соответствующие равновесной конфигурации Рис.4

На Рис.6 приводится пример равновесной конфигурации с X-точкой второго порядка - так называемого «snowflake» равновесия - токамака TCV, определяемой реконструированными в результате решения обратной задачи токами в катушках полоидального поля. Входными параметрами обратной задачи, помимо заданных значений координат «фиттинговых» и «контрольных» точек, являлись:

- профили тороидальной компоненты плотности тока плазмы $dP/d\psi$ и $F \cdot dF/d\psi$, как функции нормированного полоидального потока, приведенные на Рис.7;
- полный тороидальный ток плазмы: $I_{pl} = 0.378 \text{ MA}$;
- параметр, задающий близость границы плазмы к сепаратрисе: $\alpha = 0.995$;
- значение вакуумного тороидального магнитного поля $B_0 = 1.44 \text{ T}$ на $R_0 = 0.88 \text{ m}$.

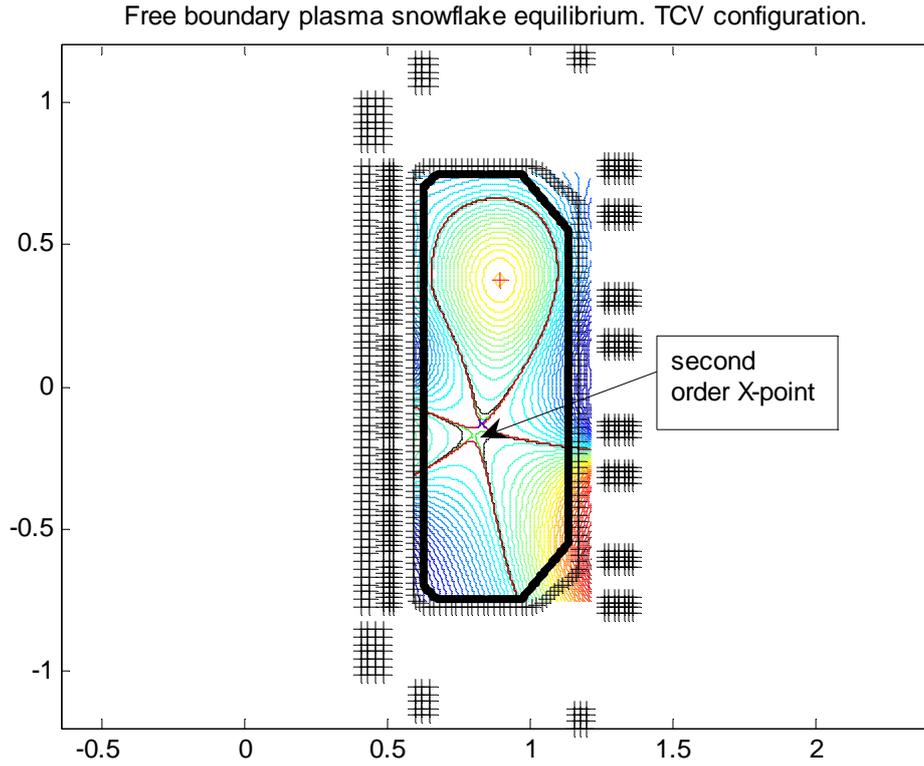


Рис.6 Равновесие плазмы со свободной границей на прямоугольной сетке в реконструированных токах. Случай конфигурации магнитного поля со “snowflake” (X-точка второго порядка) дивертором в токамаке TCV.

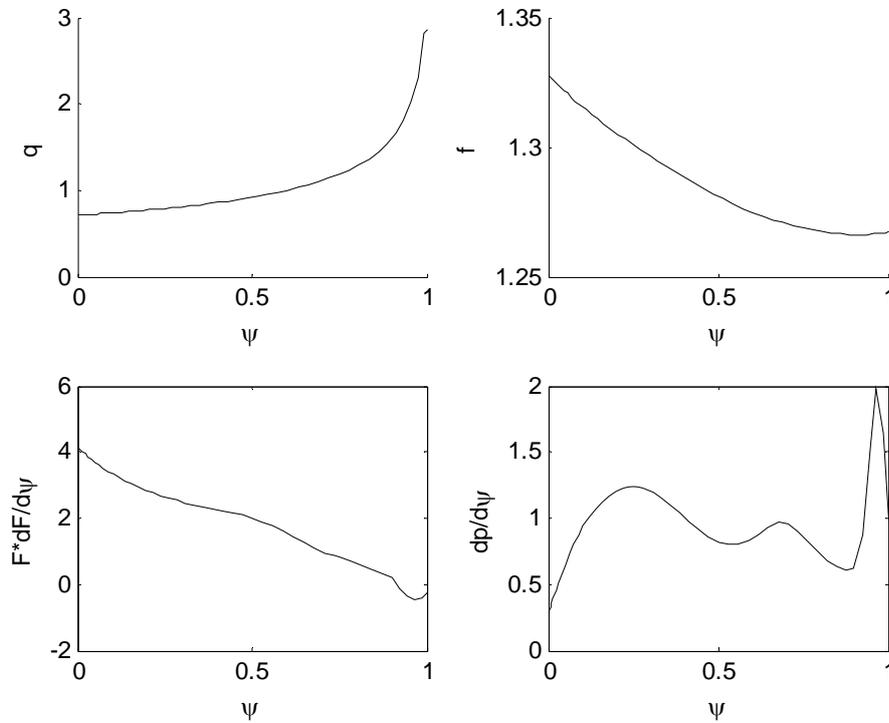


Рис.7 Профили тороидальной компоненты плотности тока плазмы $dp/d\psi$ и $F \cdot dF/d\psi$, как функции нормированного полоидального потока, соответствующие равновесной конфигурации Рис.6

4. Приложение: Уравнение равновесия Грэда-Шафранова

В МГД приближении равновесие плазмы описывается уравнениями идеальной магнитостатики [11]:

$$\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p = 0, \quad \mu_0 \cdot \vec{j} = \nabla \times \vec{B}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{п.1})$$

где \vec{B} - магнитное поле, \vec{j} - плотность электрического тока, p - давление в плазме.

1.) Для удобства изложения введём цилиндрическую систему координат (R, φ, Z) . Произвольный вектор \vec{w} единственным образом может быть разложен на сумму взаимно-ортогональных полоидального и тороидального векторов:

$$\vec{w} = \vec{w}_p + \vec{w}_\varphi, \quad \text{где } \vec{w}_p \in \text{плоскости } (R, Z), \quad \vec{w}_\varphi = (\vec{w}, \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi.$$

При условии осевой симметрии, т.е. независимости от координаты φ , всегда будет выполнено соотношение

$$\text{div}(\vec{w}_\varphi) = 0,$$

и, кроме того, ротор полоидального вектора есть вектор тороидальный, а ротор тороидального вектора есть вектор полоидальный.

2.) Обозначим через Ψ полоидальный поток магнитного поля \vec{B} и через J_{pol} полоидальный ток (поток вектора \vec{j}) в плазме, и введем связанные с ними потоковые функции:

$$\psi = \frac{\Psi}{2\pi}, \quad F = \mu_0 \cdot \frac{J_{pol}}{2\pi}.$$

3.) Магнитное поле.

Поскольку $\operatorname{div} \vec{B}_\varphi = 0$, то $\nabla \cdot \vec{B}_p = 0$, и полоидальную составляющую магнитного поля можно представить, как $\vec{B}_p = \nabla \times \vec{A}_\varphi$, нетрудно видеть, что функция ψ и \vec{A}_φ связаны соотношением $\vec{A}_\varphi = \psi \cdot \nabla \varphi$, откуда

$$\vec{B}_p = \nabla \psi \times \nabla \varphi . \quad (\text{п.2})$$

Тороидальная составляющая магнитного поля связана с F соотношением:

$$\vec{B}_\varphi = F \cdot \nabla \varphi . \quad (\text{п.3})$$

4.) Ток.

Исходя из уравнения $\mu_0 \cdot \vec{j} = \nabla \times \vec{B}$, можно написать следующие выражения для полоидальной и тороидальной компонент плотности тока:

$$\vec{j}_p = \frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{B}_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla F \times \nabla \varphi , \quad (\text{п.4})$$

$$\vec{j}_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{B}_p = \frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \times (\nabla \psi \times \nabla \varphi) , \quad (\text{п.5})$$

5.) Проекция уравнения (п.1) на направление \vec{e}_φ даёт $\vec{j}_p \times \vec{B}_p = 0$, откуда, с учётом (п.2) и (п.4), следует

$$\nabla \psi \times \nabla F = 0 , \quad (\text{п.6})$$

что, в свою очередь, означает коллинеарность векторов $\nabla \psi$ и ∇F , т.е. линии уровня функции $\psi(R, Z)$ совпадают с линиями уровня функций $F(R, Z)$.

Проекция уравнения (п.1) на направление, ортогональное \vec{e}_φ , даёт

$$\vec{j}_p \times \vec{B}_p + \vec{j}_\varphi \times \vec{B}_\varphi - \nabla p = 0 ,$$

откуда и из соотношений (п.2)-(п.5) после несложных преобразований получаем:

$$(\nabla \times (\nabla \psi \times \nabla \varphi), \nabla \varphi) \cdot \nabla \psi = \frac{1}{R^2} \cdot F \cdot \nabla F + \mu_0 \cdot \nabla p . \quad (\text{п.7})$$

Из уравнения (п.7) с учетом (п.6) следует, что $\nabla\psi$ и ∇p также коллинеарны вектору. Таким образом, мы можем полагать функции $F = F(\psi)$ и $p = p(\psi)$ функциями полоидального потока и, соответственно,

$$\nabla F = \frac{dF}{d\psi} \cdot \nabla\psi, \quad \nabla p = \frac{dp}{d\psi} \cdot \nabla\psi.$$

Отсюда с учётом (п.7) получаем скалярное уравнение равновесия Грэда-Шафранова:

$$(\nabla \times (\nabla\psi \times \nabla\varphi), \nabla\varphi) = \frac{1}{R^2} \cdot F \frac{dF}{d\psi} + \mu_0 \cdot \frac{dp}{d\psi}. \quad (\text{п.8})$$

относительно неизвестной скалярной функции полоидального потока $\psi(R, Z)$. Дифференциальный оператор в левой части (п.8), с использованием традиционного для уравнения Грэда-Шафранова обозначения Δ^* , можно переписать в следующем виде:

$$(\nabla \times (\nabla\psi \times \nabla\varphi), \nabla\varphi) = -\frac{1}{R^2} \Delta^* \psi = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla\psi \right).$$

Из (п.5) и (п.8) получаем следующее выражение для тороидальной компоненты плотности тока:

$$\mu_0 \cdot (\vec{j}, \nabla\varphi) = \frac{1}{R^2} \cdot F \frac{dF}{d\psi} + \mu_0 \cdot \frac{dp}{d\psi}. \quad (\text{п.9})$$

5. Литература

- [1] R.R.Khayrutdinov and V.E.Lukash. Studies of Plasma Equilibrium and Transport in a Tokamak Fusion Device with the Inverse-Variable Technique. – J. Comput. Physics, **109** (1993) 193-201
- [2] Jardin S.C., Pomphrey N., and DeLucia J. Dynamic Modeling of Transport and Positional Control of Tokamaks. - J. Comput. Physics **66** (1986) 481

- [3] Croatinger J.A. et al 1997 CORSICA: a comprehensive simulation of toroidal magnetic fusion devices. Report UCRL-ID-126284, Lawrence Livermore National Laboratory, CA
- [4] Cenacchi G., Tarini A., JETTO: A free-boundary plasma transport code (basic version), JET-IR (88) 03
- [5] Blum J., J.LeFoll. The Self-Consistent Equilibrium and Diffusion SCED. – Computer Phys. Communications **24** (1981) 235
- [6] Barabaschi P. The Maxfea Code. – Plasma Control Technical Meeting, Naka, Japan, April 1993
- [7] Ivanov A.A. et al. - 32nd EPS Conf. on Plasma Phys., ECA Vol.29C, P-5.063 (2005)
- [8] L.L. Lao, T.N.Jensen et al. Magnetohydrodynamic Equilibria of Attached Plasmas after Loss of Vertical Stability in Elongated Tokamaks - Nucl. Fusion **31** (1991) 1909
- [9] F. Hofmann and G. Tonetti. Tokamak equilibrium reconstruction using Faraday rotation measurements - Nuclear Fusion **37** (1988) 1871
- [10] W. Schneider, P. J. McCarthy, K. Lackner, O. Gruber, K. Behler, P. Martin and R. Merkel. ASDEX upgrade MHD equilibria reconstruction on distributed workstations - *Fusion Engineering and Design, Volume 48, Issues 1-2, 1 August 2000, Pages 127-134*
- [11] Дегтярев Л.М., Дроздов В.В., Медведев С.Ю. - Численное моделирование равновесия и устойчивости тороидальной плазмы. Монография. ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, Москва, 1989
- [12] Lackner K. - Comput. Phys. Commun., v.12, p.33 (1976)
- [13] Galkin S.A., Drozdov V.V. - Sov. J. Differential Equations, №24, p.1171 (1988)
- [14] Galkin S.A., Drozdov V.V., Semenov V.N. - Sov. J. Plasma Physics, №3, v.15, p.288 (1989)
- [15] Galkin S.A., Denissov A.A., Drozdov V.V., Drozdova O.M. – Astron. Astrophys., v.269, p.255 (1993)

- [16] Samarsky A.A., Tishkin V.F., Favorsky A.P., et. al. – Sov. J. Differential Equations, v.7, p.1171 (1981)
- [17] Иванов А.А. , Медведев С.Ю. , Пошехонов Ю.Ю. , Хайрутдинов Р.Р. - Вычислительный код SPIDER – расчёт аксиально-симметричного равновесия плазмы с фиксированной границей. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН №7, Москва, 2006
- [18] Ryutov D.D., Cohen R.H., Rognlien T.D. and Umansky M.V. – Physics of Plasmas, 15, 092501 (2008)