



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 29 за 2009 г.



Прокопов Г.П., Северин А.В.

Экономичная реализация
метода Годунова

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Прокопов Г.П., Северин А.В. Экономичная реализация метода Годунова // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 29. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-29>

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Институт прикладной математики
имени М.В.Келдыша РАН

Г.П. Прокопов, А.В. Северин

**Экономичная реализация
метода Годунова**

Москва, 2009 год

УДК 519.6

Экономичная реализация метода Годунова

Прокопов Г.П., Северин А.В.

Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

При реализации метода С.К.Годунова для расчета газодинамических течений могут использоваться приближенные безитерационные алгоритмы решения задач Римана. Это существенно сокращает объем вычислений и позволяет расширить круг уравнений состояния.

Работа выполнена в рамках Программы № 15 Президиума РАН.

Prokopov G.P.

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS

At realization of an S.K.Godunov's method for calculation gasdynamic currents can be used approached non-iteration algorithms of the decision of Reeman's problem. It essentially reduces volume of calculations and allows to expand a circle of the equations of a condition.

This work is supported by Presidium of RAS, program #15.

	стр.
Введение	3
§ 1. Приближенный расчет распада разрыва	4
§ 2. Исследование поведения энтропии	7
§ 3. Модификация приближенного алгоритма	9
§ 4. Численные эксперименты	11
§ 5. Анализ численных экспериментов	17
§ 6. Конструирование «эквивалентного» газа	19
§ 7. Проблема сложных уравнений состояния	21
Заключение	22
Литература	24

Введение

Известный метод Годунова [1,2] для численного решения газодинамических задач пользуется широкой популярностью, в том числе, и для других уравнений математической физики (см., напр., [3]). Его важнейшим структурным элементом является массовое решение задач о распаде разрыва (называемых также задачами Римана). Если такая элементарная, но достаточно громоздкая задача решается точно (заметим, что это необходимо далеко не всегда), требуются значительные вычислительные затраты. Ситуация еще ухудшается, если речь идет об уравнениях состояния, более сложных, чем идеальный газ или двучленный УРС (см., напр., [4]).

В связи с этим появились и продолжают появляться работы, предлагающие алгоритмы приближенного решения задач Римана (некоторые из них представлены в [3]). Одной из таких работ, содержащей описание экономичного алгоритма, является [5]. В ней представлены и результаты его апробирования, близкие к получаемым по методу Годунова с точным расчетом распадов разрывов, но при существенно меньших вычислительных затратах.

Тем не менее обоснованность алгоритма [5] и его приемлемость для расчета произвольных газодинамических задач вызвала определенные сомнения с точки зрения возможного поведения энтропии, изложенные в [6]-[7]. Недавно появилась работа [8], посвященная исследованию поведения энтропии в алгоритме, предложенном в [5]. Особенностью этого алгоритма является то, что получаемые вспомогательные параметры, как правило, не удовлетворяют уравнению состояния. Это порождает, в частности, проблему неопределенности энтропии. Ее можно снять посредством простых в алгоритмическом плане приемов. Обсуждение этих и некоторых других примыкающих вопросов и является содержанием настоящей работы.

§ 1. Приближенный расчет распада разрыва

В точной постановке задача Римана представляет расчет конфигурации, которая возникает при взаимодействии газодинамических потоков с произвольными постоянными параметрами:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_1, \quad u = u_1, \quad p = p_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{при } x < 0 \\ \rho = \rho_2, \quad u = u_2, \quad p = p_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_2 \quad \text{при } x > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ - плотность, u - скорость, p - давление, ε - внутренняя энергия единицы массы газа. При этом величины ρ, p, ε связаны так называемым уравнением состояния (УРС), например, в форме:

$$p = p(\rho, \varepsilon) \quad (1.2)$$

В простейшем случае это идеальный газ или так называемое двучленное уравнение состояния:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \quad \text{или} \quad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon + c_0^2(\rho - \rho_0) \quad (1.3)$$

Хорошо известно (см., напр., [2], с.106-107), что при распаде произвольного разрыва (1.1) образуется контактный разрыв (КР) и две волны, которые распространяются влево и вправо от него. Каждая из этих волн может быть либо ударной (УВ), либо волной разрежения (ВР). В случае ударной волны речь идет о движущемся фронте разрыва, за которым параметры газа постоянны и связаны определенными соотношениями. В случае волны разрежения ситуация иная: возникает область переменного течения, в которой параметры газа постоянны вдоль прямолинейных лучей, и к этой зоне разрежения примыкает область постоянного течения, аналогичная области за фронтом ударной волны.

В качестве примера на рис.1 изображена одна из таких возможных конфигураций с левой ударной волной и правой волной разрежения.

В обсуждаемом приближенном методе, предложенном в [5] (для краткости он будет называться схемой С), используется упрощенная схема распада разрыва. Она во всех случаях включает три разрыва: контактный, левый и правый (называть их волнами было бы не всегда правильно) и представлена на рис.2.

Постоянным значениям параметров присвоим индексы в соответствии с номерами секторов. В силу условий на контактном разрыве

$$p_3 = p_4 = P, \quad u_3 = u_4 = U \quad (1.4)$$

Используем выражения законов сохранения массы, импульса и энергии на левом и правом разрывах. Введем скорости D_1 и D_2 движения этих разрывов и массовые скорости (плотности потока вещества) через поверхности разрыва

$$a_1 = \rho_1(u_1 - D_1), \quad a_2 = \rho_2(D_2 - u_2) \quad (1.5)$$

(В [5] использовались другие обозначения для этих величин).

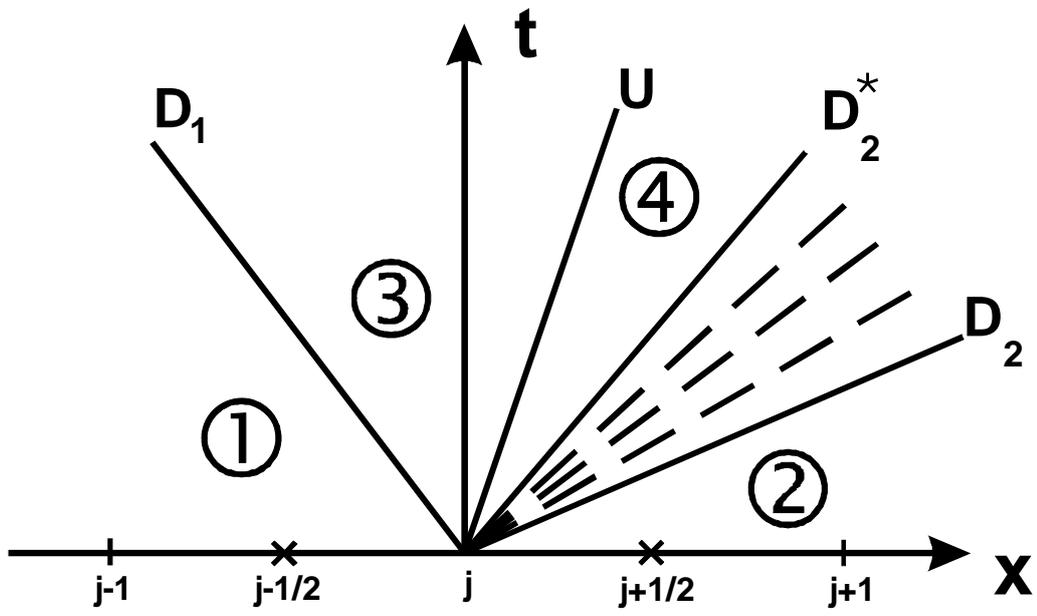


Рис. 1.

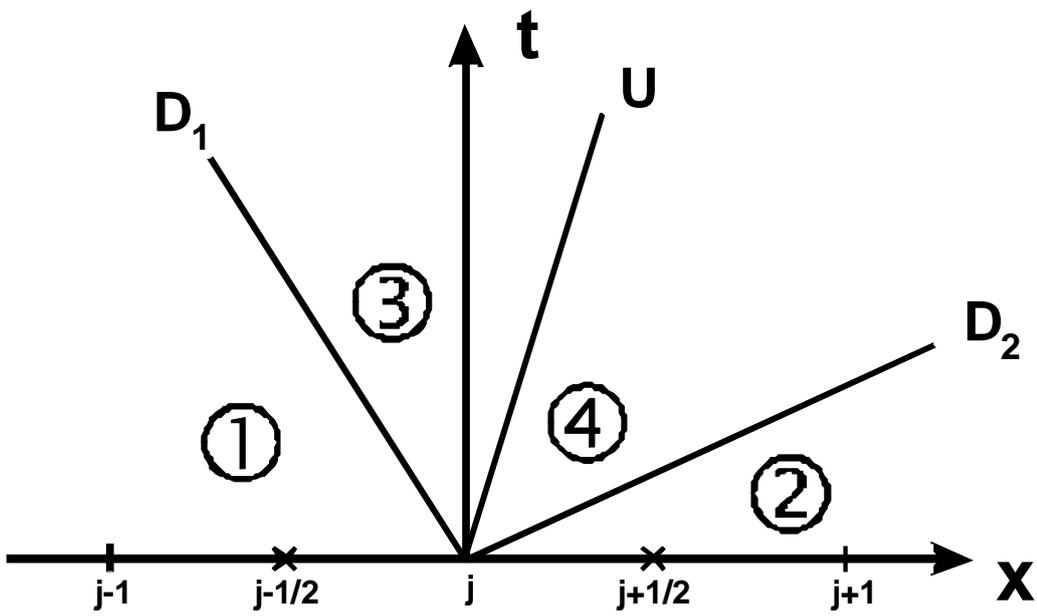


Рис. 2.

Тогда из шести формул для упомянутых законов сохранения получаются следующие, которые станут основой для приближенного расчета распада разрыва:

$$P = [p_2 a_1 + p_1 a_2 - a_1 a_2 (u_2 - u_1)] / (a_1 + a_2) \quad (1.6)$$

$$U = (u_2 a_2 + u_1 a_1 - p_2 + p_1) / (a_1 + a_2) \quad (1.7)$$

$$1/\rho_3 = 1/\rho_1 + (U - u_1)/a_1 = 1/\rho_1 - (P - p_1)/a_1^2 \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + (P^2 - p_1^2)/a_1^2/2 = \varepsilon_1 + (1/\rho_3 - 1/\rho_1)(P + p_1)/2 \quad (1.9)$$

$$1/\rho_4 = 1/\rho_2 - (U - u_2)/a_2 = 1/\rho_2 - (P - p_2)/a_2^2 \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_2 + (P^2 - p_2^2)/a_2^2/2 = \varepsilon_2 + (1/\rho_4 - 1/\rho_2)(P + p_2)/2 \quad (1.11)$$

При получении этих формул не используются уравнения состояния в секторах 3 и 4. Это обстоятельство позволило автору [5] предложить следующее.

Назначим массовые скорости a_1 и a_2 явными формулами, в качестве которых предлагаются:

$$a_1 = \rho_1 [u_1 - \min(u_1 - c_1, u_2 - c_2)] \quad (1.12)$$

$$a_2 = \rho_2 [\max(u_2 + c_2, u_1 + c_1) - u_2] \quad (1.13)$$

или
$$a_1 = a_2 = \max(\rho_1 c_1, \rho_2 c_2) \quad (1.14)$$

Здесь c_1, c_2 - скорости звука. В случае простейших уравнений состояния (1.3) они определяются формулами:

$$c = \sqrt{\gamma p / \rho} \quad \text{или} \quad c = \sqrt{\gamma (p + p_0) / \rho}, \quad p_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma \quad (1.15)$$

Согласно формулам (1.5),

$$D_1 = u_1 - \rho_1 / a_1, \quad D_2 = u_2 + a_2 / \rho_2 \quad (1.16)$$

Результатом алгоритма является выбор в ходе расчета нужного сектора в конфигурации, изображенной на рис.2, в соответствии со скоростями разрывов U, D_1, D_2 , и значений величин (R_*, U_*, P_*, E_*) плотности, скорости, давления и внутренней энергии в нужном секторе:

$$(R, U, P, E)_* = \begin{cases} (\rho_1, u_1, p_1, \varepsilon_1), & \text{если } D_1 \geq 0 \\ (\rho_2, u_2, p_2, \varepsilon_2), & \text{если } D_2 \leq 0 \\ (\rho_3, U, P, \varepsilon_3), & \text{если } D_1 < 0 \leq U \\ (\rho_4, U, P, \varepsilon_4), & \text{если } U < 0 < D_2 \end{cases} \quad (1.17)$$

Они называются условно «большими величинами» и используются затем при расчете потоков через соответствующие границы ячеек сетки в методе Годунова.

В первой публикации [5] отмечалось, что схема С не имеет осцилляций на разрывах при произвольных физических параметрах в соседних ячейках в случае назначения массовых скоростей формулами (1.12)-(1.14).

Это безусловно важно для практики расчетов. Однако первоочередная проблема состоит в следующем.

§ 2. Исследование поведения энтропии.

Одним из принципиальных элементов конструирования схемы С является замена волны разрежения на фронт разрыва. Между тем, в [9], опубликованной еще ранее [1], была показана необходимость накладывать *дополнительные требования* на обобщенное решение нестационарных уравнений газодинамики в дивергентной форме. И состоят они именно в запрете ударных волн разрежения, что эквивалентно требованию *неубывания энтропии*. При *точном* расчете распада разрыва решение целенаправленно конструируется так, чтобы этому требованию удовлетворить.

Серьезный пример, иллюстрирующий точку зрения о важности обеспечения неубывания энтропии, можно найти в обзоре [10] на стр.9.

Прямых оснований говорить о том, что в схеме С реализуется ударный фронт разрежения, нет. Однако вопрос о том, не может ли происходить уменьшение энтропии при переходе через конструируемый разрыв, естественно возникает. Исследования, представленные в [6-7], подтвердили, что для таких *сомнений* есть основания.

Для простоты ограничимся пока рассмотрением только случая идеального газа.

Уже отмеченной особенностью приближенного решения является то, что при получении «больших величин» *почти* не используется УРС. Тогда естественно ожидать (и это действительно оказывается так), что параметры (P_*, R_*, E_*) *уравнению состояния не удовлетворяют*.

Это сразу же порождает проблему для предполагаемого исследования энтропии, вычисляемой по этим параметрам. Что в такой ситуации называть энтропией? В [8] делается выбор в пользу определения энтропии не по давлению и плотности в привычном виде энтропийной функции

$$\sigma(p, \rho) = p\rho^{-\gamma}, \quad (2.1)$$

а по внутренней энергии и плотности:

$$s(\varepsilon, \rho) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \cdot \rho^{-\gamma} = (\gamma - 1)\varepsilon\rho^{1-\gamma} \quad (2.2)$$

В случае выполнения УРС проблемы нет: $\sigma \equiv s$.

Выбор в пользу определения (2.2) аргументируется анализом схемы в кинетической интерпретации. Представленное в [8] исследование отношения s_3/s_1 , вычисленного по внутренней энергии и плотности, обнаруживает весьма любопытный факт. Приведем из [8] формулу для вычисления этого отношения :

$$\frac{s_3}{s_1} = y(\xi) = \left[1 + \frac{(\gamma-1)(\xi^2-1)}{2\gamma b} \right] \left(1 - \frac{\xi-1}{\gamma b} \right)^{\gamma-1}, \quad (2.3)$$

$$\text{где } \xi = p_3/p_1 = P/p_1, \quad b = a_1^2/(\rho_1 c_1)^2. \quad (2.4)$$

Ее производная определяется выражением:

$$y'(\xi) = \left(b - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \xi - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) (\xi-1) \cdot \frac{\gamma-1}{2b^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_3} \right)^{\gamma-2} \quad (2.5)$$

В случае *волны разрежения* $0 < \xi < 1$. Назначение $b \geq 1$ позволяет достигнуть выполнения условия $y'(\xi) < 0$ на всем интервале $0 < \xi < 1$. Поскольку $y(1) = 1$, это гарантирует, что $y(\xi) > 1$ для всех $0 < \xi < 1$ (и даже при $\xi \leq 0$), т.е. исключает убывание энтропии.

В случае *ударной волны* $\xi > 1$. Следовательно, если удастся обеспечить выполнение условия

$$b \geq \frac{\gamma+1}{2\gamma} \xi + \frac{\gamma-1}{2\gamma}, \quad (2.6)$$

то согласно (2.5) в приближенном решении убывание энтропии тоже будет исключено ($s_3 > s_1$).

Очевидно, что для отношения s_4/s_2 ситуация аналогична.

Для полноты картины исследуем отношение σ_3/σ_1 для рассматриваемого алгоритма. Не углубляясь в подробности, получаем по аналогии с (2.3):

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = z(\xi) = \xi \left(1 - \frac{\xi-1}{\gamma b} \right)^\gamma \quad (2.7)$$

$$z'(\xi) = \left(1 - \frac{\xi-1}{\gamma b} \right)^{\gamma-1} \left(1 - \frac{\xi-1}{\gamma b} - \frac{\gamma\xi}{\gamma b} \right) = \left(1 - \frac{\xi-1}{\gamma b} \right)^{\gamma-1} \frac{(1-\xi) + \gamma(b-\xi)}{\gamma b} \quad (2.8)$$

В случае *волны разрежения* $0 < \xi < 1$. Из формулы (2.8) следует, что $z'(\xi) > 0$ при назначении $b \geq 1$ на всем интервале $0 < \xi < 1$. Поскольку $z(1) = 1$, отсюда следует, что тогда $z(\xi) < 1$ для всех $0 < \xi < 1$, т.е. энтропия $\sigma(p, \rho)$ убывает при переходе через разрыв. Именно на это обстоятельство и было обращено внимание в [6], как на основание для возможных сомнений.

Полученный результат: убывание энтропии (2.2), вычисляемой по внутренней энергии и плотности, исключается в случае назначения массовых скоростей a_1, a_2 не ниже массовой скорости звуковой волны в случае волны разрежения и не ниже точного значения массовой скорости в случае ударной волны, - сочтен автором [5], [8] основанием для рекомендации формул (1.12)-(1.14). Их обоснованность нуждается в обсуждении.

Формулы (1.12)-(1.13) могут быть переписаны в виде:

$$a_1 = \begin{cases} \rho_1 c_1, & \text{если } c_1 \geq c_2 + u_1 - u_2 \\ \rho_1 (c_2 + u_1 - u_2), & \text{если нет} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$a_2 = \begin{cases} \rho_2 c_2, & \text{если } c_2 \geq c_1 + u_1 - u_2 \\ \rho_2 (c_1 + u_1 - u_2), & \text{если нет} \end{cases} \quad (2.10)$$

Поэтому выбор (1.12)-(1.13) обеспечивает выполнение условий $a_1 \geq \rho_1 c_1$, $a_2 \geq \rho_2 c_2$ в зонах разрежения, а также условия $D_2 > D_1$.

Формула (1.14) применяется в случае конфигураций с ударными волнами:

$$\begin{aligned} a_1 &= \rho_2 c_2, \text{ если } \rho_2 c_2 > \rho_1 (c_2 + u_1 - u_2) > \rho_1 c_1 \\ a_2 &= \rho_1 c_1, \text{ если } \rho_1 c_1 > \rho_2 (c_1 + u_1 - u_2) > \rho_2 c_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Использование этих формул (2.11) в расчетах *сильных* волн разрежения нецелесообразно, поскольку может приводить к значениям скоростей (1.16), превышающим характеристическую скорость перед волной.

§ 3. Модификация приближенного алгоритма.

Чем же вызвано столь разное поведение (2.1) и (2.2)?

Чтобы прояснить причину происходящего, сравним формулы (2.3) и (2.7) и обнаруживаем, что

$$\frac{z(\xi)}{y(\xi)} = \xi \left(1 - \frac{\xi - 1}{\gamma b} \right) / \left[1 + \frac{(\gamma - 1)(\xi^2 - 1)}{2\gamma b} \right] \quad (3.1)$$

Именно то обстоятельство, что $z(0)=0$, в то время как $y(0)>1$, и объясняет эффект.

Как же быть с проблемой невыполнения уравнения состояния и неопределенности энтропии? В [8] со ссылкой на кинетическую интерпретацию объясняется, что получаемые значения параметров на гранях ячейки, используемые затем для расчета потоковых величин, подчиняются уравнению состояния не строго, а в *линеаризованном* виде. И, как уже отмечено, предлагается при энтропийном обосновании схемы избрать вариант с определением энтропии по внутренней энергии и плотности.

Благоприятные результаты, полученные при исследовании поведения такой энтропии, гораздо более естественным делают следующий *подход*. Почему бы не дополнить предлагаемый алгоритм завершающей операцией: после вычисления величин $(R, U, R, E)_*$ *пересчитывается величина давления по уравнению состояния* (идеального газа в рассматриваемом пока случае):

$$P^* = (\gamma - 1) R_* E_* \quad (3.2)$$

Отметим, что, как показывает формула (3.1), поскольку $P_*/P^* = z(\xi)/y(\xi)$, различие P_* и P^* может быть существенным. Значения

потоков считаются затем по величинам (P^*, U_*, R_*, E_*) с новым значением давления по определяющим потоки формулам. Естественно, это уже будут иные значения, т.е. реализуется *другое приближенное решение*. Не лучшее ли? Ответ должен дать численный эксперимент.

Столь простой в алгоритмическом плане прием позволил бы снять проблему определения энтропии. Она стала бы однозначной, поскольку

$$s(E_*, R_*) = (\gamma - 1) R_* E_* R_*^{-\gamma} = P^* R_*^{-\gamma} = \sigma(P^*, R_*)$$

Может представлять интерес для практики *еще одно предложение* по модификации алгоритма. Полученное условие (2.6) неубывания энтропии свидетельствует о следующем. Вычислим в случае ударной волны ($P_* > p_1$) плотность ρ_3 не по формуле (1.8):

$$1/\rho_3 = 1/\rho_1 - (P_* - p_1)/a_1^2, \quad (3.3)$$

а по ударной адиабате:

$$\rho_3 = [(\gamma + 1)P_* + (\gamma - 1)p_1] / [(\gamma - 1)P_* + (\gamma + 1)p_1] \cdot \rho_1 \quad (3.4)$$

Заметим: в таком случае окажется, что $P^* = P_*$.

Тогда возрастание энтропии $s_3 > s_1$ будет *гарантировано даже в том случае*, если формулы назначения массовых скоростей не обеспечивают выполнение условия (2.6).

Напротив, в случае волны разрежения использование вместо (1.6) формулы (3.4) привело бы к убыванию энтропии ($s_3 < s_1$).

Ситуация с формулой для зоны 4 аналогична.

Чтобы проиллюстрировать возможную полезность использования ударной адиабаты, проанализируем условие (2.6) на примере встречного взаимодействия симметричных потоков:

$$\rho_1 = \rho_2, \quad p_1 = p_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \Delta u = u_1 - u_2 > 0 \quad (3.5)$$

Тогда будем иметь:

$$a_1 = \rho_1(c_1 + \Delta u), \quad P_* = (p_1 + p_2)/2 + a_1 \Delta u / 2, \\ \xi = P_*/p_1 = 1 + \gamma \Delta u (c_1 + \Delta u) / (2c_1^2), \quad (3.6)$$

$$b - \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \xi + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) = \frac{\Delta u}{c_1} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{4} - \frac{\gamma + 1}{4} \frac{\Delta u}{c_1} \right) = \frac{\Delta u}{4c_1} \left[(3 - \gamma) - (\gamma + 1) \frac{\Delta u}{c_1} \right]$$

Отсюда следует, что условие (2.6) в случае $\gamma > 3$ не выполняется при произвольных, т.е. и сколь угодно малых, значениях $\Delta u > 0$. Если $1 < \gamma < 3$, то условие (2.6) нарушается в случае $\Delta u/c_1 > (3 - \gamma)/(\gamma + 1)$. Отметим только, что (2.6) является *достаточным, но не необходимым* условием для неубывания энтропии в случае ударной волны.

Естественно, что возможные условия нарушения (2.6) могут быть обнаружены и в более общих ситуациях, чем (3.5).

Например, в случае двух ударных волн, который реализуется при больших значениях $\Delta u > 0$, асимптотическое поведение давления P изучалось в [7] и в [3] на стр.170. Главный член оценки имеет вид:

$$P = (\Delta u)^2 \cdot \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)^2 + o(\Delta u^2),$$

где $r_1 = \sqrt{(\gamma + 1)\rho_1/2}$, $r_2 = \sqrt{(\gamma + 1)\rho_2/2}$

Массовые скорости a_1, a_2 оцениваются формулами

$$a_1 = \sqrt{\rho_1 \left(\frac{\gamma + 1}{2} P + \frac{\gamma - 1}{2} p_1 \right)} = r_1 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \Delta u + o(\Delta u)$$

$$a_2 = \sqrt{\rho_2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} P + \frac{\gamma - 1}{2} p_2 \right)} = r_2 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \Delta u + o(\Delta u)$$

Поэтому в такой ситуации более естественным было бы вместо (1.12)-(1.13) для массовых скоростей использовать формулы:

$$a_1 = \rho_1 \left(c_1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{r_2}{r_1 + r_2} \Delta u \right)$$

$$a_2 = \rho_2 \left(c_2 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{r_1}{r_1 + r_2} \Delta u \right)$$

Использование ударной адиабаты (3.4) вместо (1.8) описанный дефект исключает, *гарантируя* неубывание энтропии (в случае ударной волны!) при назначении (1.12)-(1.14).

§ 4. Численные эксперименты.

Вообще говоря, предлагаемые дополнения алгоритма [5] настолько естественны, что их целесообразность сомнений не вызвала. Тем не менее, экспериментальная численная проверка была нами предпринята и для исходного и для модифицированных вариантов предлагаемого приближенного решения задач Римана.

В методических целях программно реализован алгоритм решения одномерной нестационарной задачи, уже описывавшейся в [5] и [6]:

$$U_t + F_x = 0, \quad U = \left\{ \rho, \rho u, \rho \left(\varepsilon + u^2/2 \right) \right\}^T,$$

$$F(U) = \left\{ \rho u, \rho u^2 + p, \rho u \left(\varepsilon + u^2/2 \right) + pu \right\}^T \quad (4.1)$$

(Знаком T обозначено транспонирование).

Разностная схема для (4.1) записывается в виде

$$U^{j-1/2} = U_{j-1/2} - (F_j - F_{j-1}) \Delta t / \Delta x \quad (4.2)$$

Здесь $j - 1/2$ - номер ячейки сетки по оси x , ограниченной узлами с номерами $j - 1$ и j . Формула (4.2) описывает пересчет: переход от величин с нижнего слоя по времени t к верхнему.

Задача решается для отрезка $0 \leq x \leq 1$ на неподвижной равномерной сетке с узлами: $x_j = j/j^*$, $j = 0, 1, \dots, j^*$.

В качестве начальных данных при $t=0$ задаются величины (как в тестовых задачах [5], которые, в свою очередь, взяты из [11]):

$$(\rho, u, p)_{j-1/2} = \begin{cases} (\rho, u, p)_L, & \text{если } 0 < (x_j + x_{j-1})/2 < x^* \\ (\rho, u, p)_R, & \text{если } x^* < (x_j + x_{j-1})/2 < 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Граничные условия задаются так: $(\rho, u, p)_L$ для $j=0$ и $(\rho, u, p)_R$ для $j = j^*$.

Расчеты проводились до $t = t_{\max}$ не позднее времени выхода образующихся волн к крайним точкам $x=0$ и $x=1$. Поэтому вопрос о корректности граничных условий не возникает.

В качестве контрольных в основном были избраны те же тесты, что и в [5]. А именно, расчеты выполнялись при $\gamma = 1.4$ и числе Куранта,

$$CFL = w_{\max} \Delta t / \Delta x < 1, \quad w_{\max} = \max_j |w_j|,$$

т.е. w_{\max} - максимальная скорость распространения возмущений, *постепенно* возрастающем от начального значения CFL_0 до CFL_1 . Это делается для того, чтобы «смягчить» (если нужно) начальный этап расчета в окрестности точки разрыва $x=x^*$, где потоки велики (особенно с участием P^*). При задании $CFL_0 = CFL_1 = 0.9$ реализуются тесты [5].

Число интервалов сетки $j^* = 50$.

Параметры некоторых из тестов представлены в таблице

Тест	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	x^*	t_{\max}
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.3	0.2
3	1	0	1000.	1.	0	0.01	0.5	0.012
6	1	-0.8	0.4	1	1.2	0.4	0.44	0.25
7*	1	2.	4.	1.	-2.	4.	0.5	0.04

Тест 6 выбран как модификация теста 2. Во-первых, чтобы проконтролировать количественно «глубину» падения давления и плотности, а не просто визуально – почти до нуля – и для точного и для приближенного распада разрыва. Во-вторых, в нем $u_L + u_R \neq 0$, что дает возможность проследить в точке разрыва $x = x^*$ «работу» ненулевых потоков благодаря величине $U = (u_L + u_R)/2 = 0.2$.

Для теста 7* выбрано $\gamma = 9$, чтобы проконтролировать ситуацию, описанную в конце § 3.

Представление результатов этих тестов сделано на рис.3-6 по аналогии с представлением [5] и примерно в том же масштабе.

Разметка по оси x по номерам узлов $0 \leq j \leq 50$ идентична $0 \leq x \leq 1$.

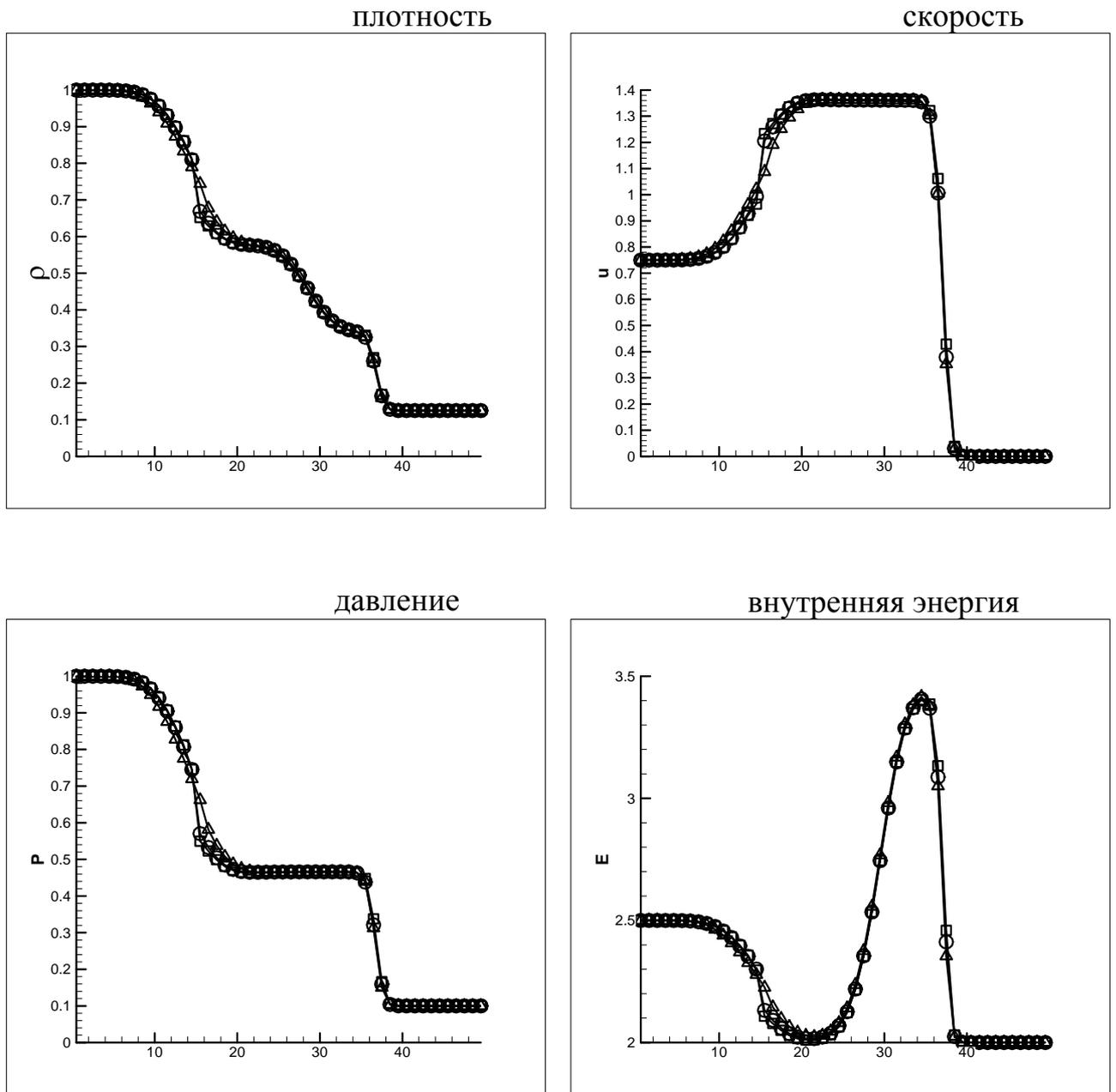


Рис.3. Тест 1.

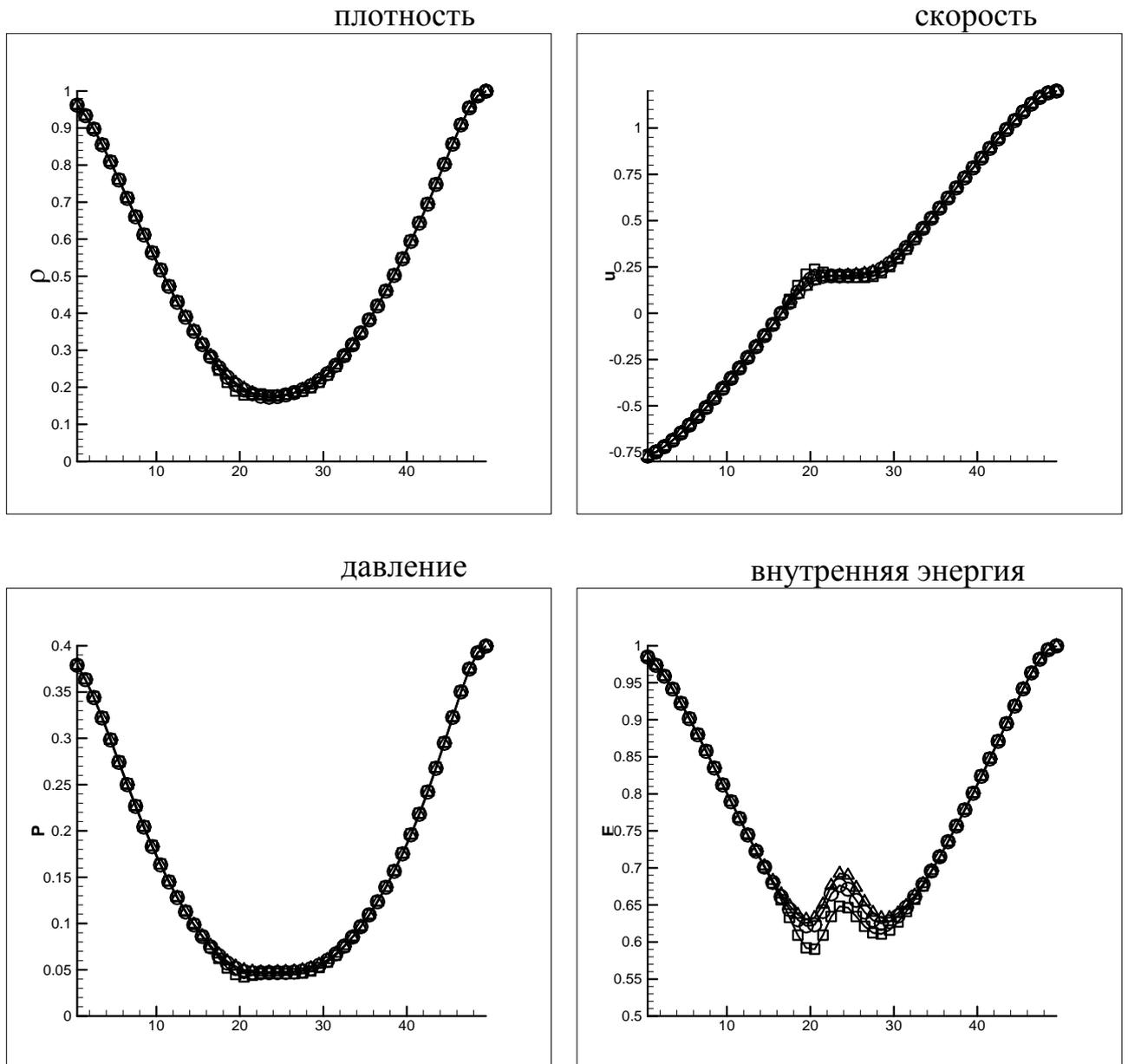


Рис.4. Тест 6.

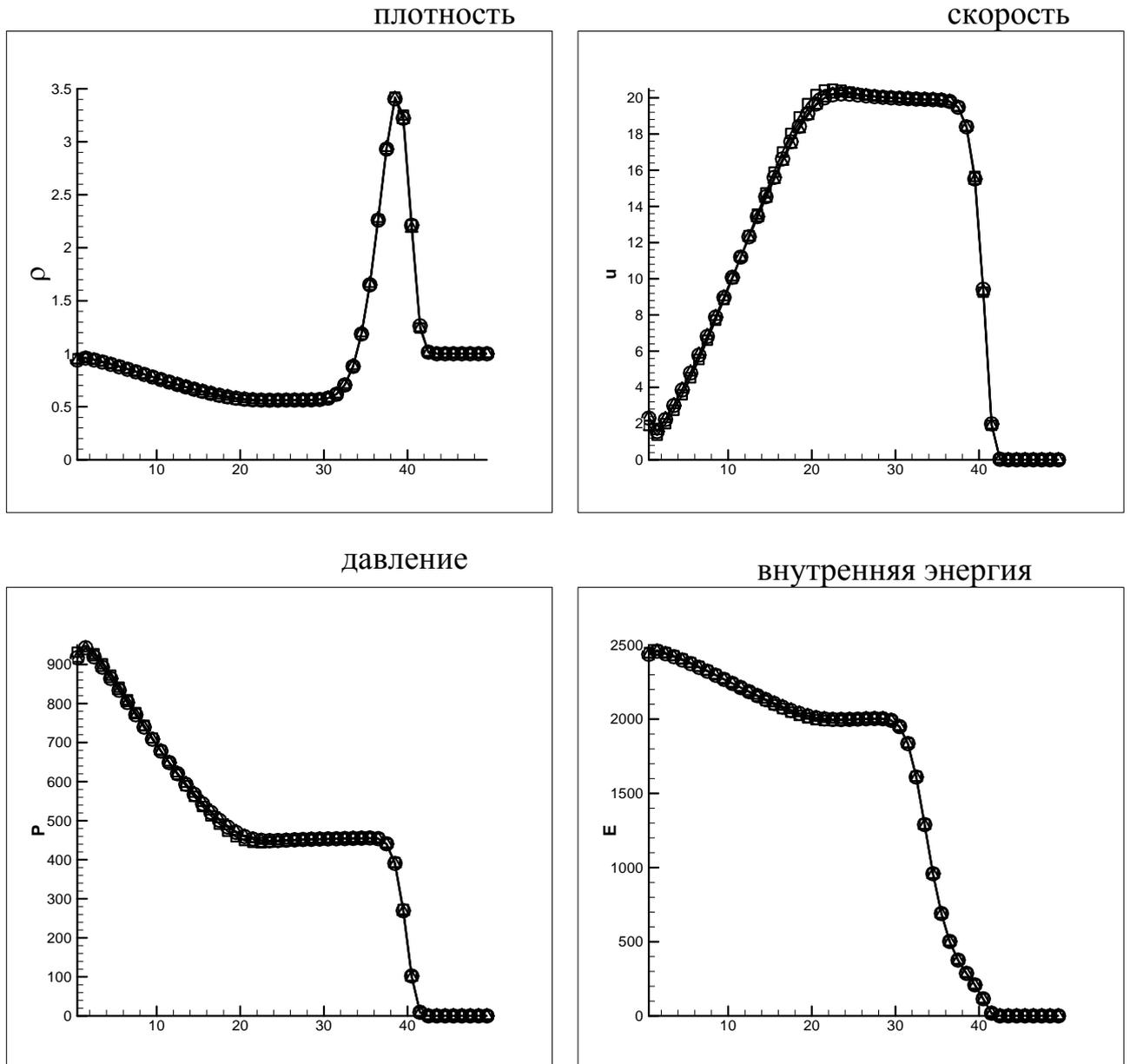


Рис.5. Тест 3.

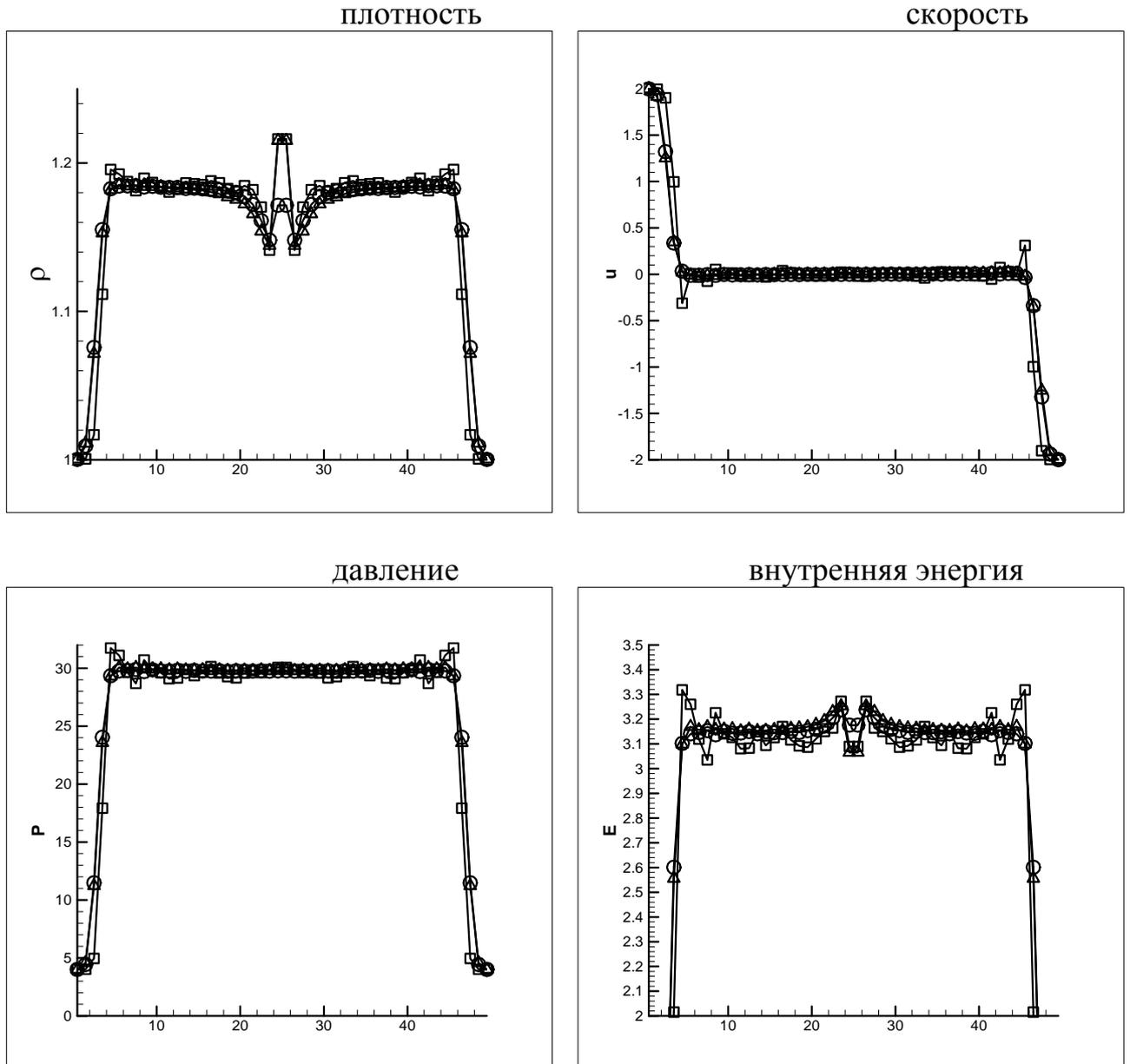


Рис.6. Тест 7.

Для каждого из четырех тестов представлены плотность ρ , скорость u , давление p и внутренняя энергия ε на заданный момент времени t_{\max} . На рис.3 представлен тест 1, на рис.4 – тест 6, на рис.5 – тест 3, на рис.6 – тест 7.

На каждом из графиков представлены три варианта приближенного расчета распада разрыва: «точный», использующий P_* и P^* . Главный результат состоит в том, что варианты практически не различаются (несмотря на то, что указанные выше значительные возможные отличия P_* и P^* безусловно возникали).

§ 5. Анализ численных экспериментов.

Основная их цель состояла в апробировании нескольких вариантов расчетных формул. На первом этапе исследований мы полагали главным вопросом *о поведении энтропии при приближенном решении задач Римана*. Поэтому в ходе всего нестационарного расчета для всех значений j осуществлялся «энтропийный контроль». «Неблагополучным» считалось уменьшение относительного значения энтропии на величину, большую заданного «порога» $fix = 10^{-6}$. Все такие случаи фиксировались в специальном файле с выдачей дополнительной информации для анализа.

Результаты численного эксперимента подтвердили, что при рекомендуемых способах назначения массовых скоростей и предлагаемых алгоритмах расчета приближенного решения задач Римана убывания энтропии (определенной должным образом!) в подавляющем большинстве случаев (или вообще во всех случаях) удается избежать. Однако иногда обнаруживается относительно небольшое число «неблагополучных» ситуаций. Их возможное появление порождает два вопроса: как такие ситуации диагностировать и что делать в таких случаях. Речь идет о том, чтобы *не привлекать энтропию* для их выявления. Иначе «впустую» будет потрачен выигрыш в вычислительных затратах, достигаемый за счет приближенного алгоритма. Предлагается простое практическое решение: считать «кандидатами на возможное неблагоприятие» случаи, когда

$$\left| P_*/P^* - 1 \right| > \delta_0, \quad \text{где } 0 < \delta_0 < 1.$$

Задаваемый безразмерный «порог» δ_0 может варьироваться, в зависимости от требований, которые исполнитель предъявляет к расчету *конкретной* задачи. Это согласуется и с соображениями о требованиях к *точности* приближенного решения.

В качестве ответа на вопрос, что делать в «неблагополучных» случаях, напрашиваются два *противоположных*.

Первый - в таких случаях следует реализовывать *точный* расчет распада разрыва, используя полученный результат в качестве *начального приближения*. По сути, такую точку зрения разделяет и автор [8], отмечая: «для вычисления параметров на гранях ячеек, прилегающих к границе

расчетной области, рекомендуются процедуры, основанные на *точном* решении соответствующих модельных задач».

Заметим, что не для всех граничных ячеек обязателен точный расчет распада разрыва. В [2] упоминаются так называемые *эйлеровы* границы, которые никак не влияют на среду, через них протекающую. Ситуация на них практически не отличается от ситуации внутри области и поэтому может допускать и приближенный расчет распада разрыва. С другой стороны, в силу того, что *гиперболический* характер задач может приводить в ходе расчета к образованию и взаимодействию сильных волн внутри расчетной области, следует иметь в виду возможность «неблагополучных» ситуаций и на границах *внутренних* ячеек (что подтверждает и численный эксперимент).

В качестве другого ответа на вопрос, что делать в «неблагополучных» случаях, есть и такой: «ничего не делать - авось обойдется». Судя по всему, именно так и получалось при расчете тех задач, которыми иллюстрировалась успешная работа обсуждаемого приближенного метода. Объясняется это, по-видимому, тем, что каждая «неблагополучная» ситуация (если возникала) существовала в течение небольшого интервала времени и «размазывалась», не приводя к катастрофическим (или хотя бы визуально обнаруживаемым) последствиям.

Заслуживает быть отмеченным еще и следующее обстоятельство. Формула (1.9) для внутренней энергии

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + (1/\rho_3 - 1/\rho_1)(P + p_1)/2$$

может рассматриваться как дискретная реализация

$$dE + Pd(1/\rho) = 0$$

через левый разрыв. Так же обстоит дело и с формулой (1.11). С учетом того факта, что адиабата Гюгонио и адиабата Пуассона имеют касание второго порядка, это создает весьма благоприятные условия с точки зрения точности реализуемых формул. Они известны в газовой динамике: в слабой ударной волне скачок энтропии является величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления.

При таком подходе удастся обойтись без использования алгоритма точного распада разрыва. Однако останется неясным, насколько надежны полученные результаты, если в ходе расчета убывание энтропии происходило. Кроме того, отметим: надеяться, что так бывает *всегда*, не следует. В [6] на с.1598 упоминается о расчетах нестационарных процессов, возникающих при взаимодействии набегающей ударной волны с течением за отошедшей головной ударной волной перед тупым телом, летящим со сверхзвуковой скоростью. При таких расчетах «неблагополучные» ситуации приобретали *массовый* характер и надеяться только на приближенные расчеты распада разрыва не имело смысла.

С точки зрения практики расчетов представляется целесообразным не противопоставление приближенных решений (какое «лучше?»), а, например, *параллельное* проведение двух расчетов с использованием упомянутых выше

величин P_* и P^* . Сравнение их результатов может позволить делать выводы либо о приемлемой точности определения нужных характеристик процесса или конструкции, либо, напротив, о необходимости их уточнения.

§ 6. Конструирование «эквивалентного» газа.

В связи с тем, что получаемые при реализации схемы S параметры (R_*, P_*, E_*) не удовлетворяют уравнению состояния газа, представляет интерес возможность конструирования «эквивалентного» гипотетического газа, который сохраняет заданные значения потоков, но уравнению состояния удовлетворяет. Соответствующий алгоритм был описан в § 4 работы [6].

Такой путь оказался достаточно громоздким. Но он привлекателен своей универсальностью, поскольку позволяет включить в сферу исследований, например, схемы, которые конструируют непосредственно значения потоков, а не параметры газа на границах соседних ячеек.

Для обсуждаемого алгоритма приближенного расчета распада разрыва в случае уравнения состояния идеального газа его удалось реализовать несколько проще, чем было описано в [6], и подключить к проведению численных экспериментов. Эти результаты представляют интерес для обсуждаемых вопросов.

Итак, рассматривается задача о решении системы четырех уравнений для величин (R, U, P, E) при заданных значениях потоковых величин F_1, F_2, F_3 :

$$\begin{aligned} RU &= F_1, & RU^2 + P &= F_2 \\ U \left[R \left(E + U^2/2 \right) + P \right] &= F_3, & P &= (\gamma - 1) RE. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Исключаем, как и ранее, вырожденный случай $F_1 = F_3 = 0$, для которого $U = 0$, $P = F_2$, R – произвольно.

Очевидно также, что следует предполагать

$$F_2 > 0, \quad F_1 F_3 > 0 \quad (6.2)$$

В отличие от алгоритма, описанного в [6], получим уравнение не для U , а для величины P . Из (6.1) имеем:

$$\begin{aligned} U &= (F_2 - P)/F_1, & R &= F_1/U = F_1^2/(F_2 - P) \\ RE &= F_3/U - F_1 U/2 - P = F_1 F_3/(F_2 - P) - (F_2 - P)/2 - P \end{aligned} \quad (6.3)$$

В случае УРС идеального газа после элементарных преобразований получаем для P квадратное уравнение:

$$(\gamma + 1)P^2 - 2F_2 P - (\gamma - 1)(F_2^2 - 2F_1 F_3) = 0 \quad (6.4)$$

Его решение записывается в виде:

$$P = F_2 \left(1 \pm \sqrt{DIS} \right) / (\gamma + 1), \quad (6.5)$$

где

$$DIS = 1 + (\gamma^2 - 1)(1 - \omega), \quad \omega = 2F_1F_3 / (F_2)^2 \quad (6.6)$$

Возможна одна из трех ситуаций.

1⁰. Если $DIS < 0$, то действительных решений у (6.4) нет.

2⁰. Если $1 - \omega > 0$, то $DIS > 0$. Уравнение (6.4) имеет один положительный корень, определяемый формулой (6.5) при использовании знака +. После этого для вычисления плотности R по формуле (6.3) необходима величина

$$F_2 - P = (\gamma - \sqrt{DIS}) / (\gamma + 1) = F_2(\gamma - 1)\omega / (\gamma + \sqrt{DIS}) > 0 \quad (6.7)$$

Следовательно, параметры «эквивалентного» газа восстанавливаются однозначно.

3⁰. Если $1 - \omega < 0$, но $DIS > 0$, то уравнение (6.4) имеет два положительных корня, задающих P . Для обоих корней формула (6.7) гарантирует положительность соответствующих значений плотности R .

Таким образом, «эквивалентный» газ, реализующий заданные потоки F_1, F_2, F_3 не существует, если

$$\omega = 2F_1F_3 / (F_2)^2 > \gamma^2 / (\gamma^2 - 1); \quad (6.8)$$

если $\omega > 1$, то существует два набора параметров, его реализующих; в оставшемся случае $0 < \omega < 1$ такой набор параметров определен однозначно. Однако в последних двух случаях необходимо, чтобы «эквивалентный» газ с вычисленными параметрами имел энтропию, не меньшую, чем исходный газ по другую сторону разрыва.

Изложенный алгоритм в [6] был назван «энтропийным контролем». При желании исполнитель может осуществлять его в ходе расчета конкретной производственной задачи.

Такой «энтропийный контроль» был предусмотрен в ходе описанных выше тестовых экспериментов.

Воспользуемся определением потоковых величин:

$$\begin{aligned} F_1 &= R_* U_* , & F_2 &= R_* U_*^2 + P_* \\ F_3 &= R_* U_* (E_* + U_*^2 / 2) + P_* U_* \end{aligned}$$

Тогда для величины ω получаем:

$$\omega = \frac{2F_1F_3}{(F_2)^2} = \frac{R_*^2 U_*^4 + 2P_* R_* U_*^2 + 2R_*^2 U_*^2 E_*}{R_*^2 U_*^4 + 2P_* R_* U_*^2 + P_*^2}$$

Следовательно,

$$\omega > 1, \text{ если } 2R_*^2 U_*^2 E_* > P_*^2$$

$$\omega > \gamma^2 / (\gamma^2 - 1), \text{ если } R_*^2 U_*^2 [2(\gamma^2 - 1)E_*^2 - U_*^2] > P_* [\gamma^2 P_* + 2R_* U_*^2] .$$

Последнее условие особенно упрощается в случае $P_* = 0$ и принимает вид:

$$\omega > \gamma^2 / (\gamma^2 - 1), \text{ если } P_* = 0 \text{ и } U_*^2 < 2(\gamma^2 - 1)E_*^2 . \quad (6.9)$$

В простейшем случае взаимодействия симметричных потоков величина $U_* = (U_L + U_R)/2$ не зависит от $\Delta U = U_L - U_R$. Это позволяет легко подобрать такие данные, что реализуется именно «неблагоприятная» ситуация $\omega > \gamma^2 / (\gamma^2 - 1)$.

При проведении численных экспериментов проводился специальный контроль для выявления таких ситуаций, и некоторое их количество было зафиксировано. Следовательно, полученные условия носят не просто гипотетический характер, а в реальных расчетах могут возникать ситуации, когда для вычисленных значений газодинамических параметров (R_*, U_*, P_*, E_*) не существует «эквивалентного» газа, реализующего соответствующие значения потоковых величин. Аналогичные ситуации могут возникать и по поводу существования газа с энтропией, не меньшей чем у исходного. Это – тоже повод для сомнений в физической правомерности таких ситуаций.

§ 7. Проблема сложных уравнений состояния.

Недостатком, превращающимся в достоинство приближенного алгоритма, предложенного в [5], как уже упоминалось, является то, что он почти не использует уравнение состояния. Слово «почти» употреблено, во-первых, потому, что при назначении массовых скоростей используются скорости звука, во-вторых, при вычислении P^* по формуле (3.2) прямо используется УРС, в-третьих, возможно использование ударной адиабаты (3.4). Тем не менее, главное – не используется описание структуры волны разрежения на основе римановых инвариантов и адиабаты Пуассона. Это позволяет существенно расширить круг сложных УРС'ов, для которых реализуем экономичный приближенный распад разрыва, особенно, если речь идет о «благополучных» ситуациях.

В [5] и [8] упоминается об успешном применении приближенного алгоритма в случае расчетов для сред с переменными теплофизическими свойствами и опубликованных работах с такими расчетами.

В качестве еще одного примера можно привести реализацию УРС в форме Ми-Грюнайзена, рассмотренного в [4]:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon + \frac{\rho_0 c_0^2}{\mu - 1} \left[(\gamma - 1) \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) + \frac{\gamma - \mu}{\mu} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\mu \right) \right] \quad (7.1)$$

Скорость звука для него определяется формулой:

$$c = \sqrt{\gamma(p + p_0)/\rho + (\mu - \gamma)(\rho/\rho_0)^\mu p_0/\rho} \quad (7.2)$$

где, как и в (1.15), $p_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma$.

Эти формулы позволяют без всяких затруднений реализовать описанный приближенный распад разрыва и последующий пересчет полученного P_* на

P^* : вместо (3.2) реализуется (7.1), а вместо формул (1.15) скорость звука определяется (7.2).

В [4] описана гораздо более сложная технология расчета распада разрыва для УРС Ми-Грюнайзена, основанная на численном интегрировании римановых инвариантов и адиабаты Пуассона. Такая технология настолько вычислительно затратна (в частности, из-за огромного числа обращений к вычислению УРС), что с трудом согласуется со здравым смыслом и представлением о том, сколько стоит затрачивать на решение, хоть и нужной, но все-таки элементарной задачи).

Еще ранее такая технология была успешно реализована в [12] в специальной ситуации табличной формы задания уравнения состояния. В свою очередь эта технология является обобщением метода, описанного, например, в [3] на с.177. Он состоит в реализации предложенного А.В.Забродиним приема локальной аппроксимации «настоящего» УРС (7.1) двучленным.

Локальные параметры $\bar{\gamma}, \bar{c}_0, \bar{p}_0$ такого двучленного УРС определяются формулами:

$$\bar{\gamma} = 1 + \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} / \rho, \quad \bar{p}_0 = \left(\rho \frac{\partial p}{\partial \rho} - p \right) / \gamma, \quad \bar{c}_0^2 = (p + \gamma \bar{p}_0) / \rho - (\gamma - 1) \varepsilon$$

Поскольку для (7.1) $\partial p / \partial \varepsilon = (\gamma - 1) \rho$, получаем $\bar{\gamma} = \gamma$.

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = (\gamma - 1) \varepsilon + \frac{\rho_0 c_0^2}{\mu - 1} \left[(\gamma - 1) / \rho_0 - (\gamma - \mu) \rho^{\mu-1} / \rho_0^\mu \right],$$

$$\rho \frac{\partial p}{\partial \rho} - p = \rho_0 c_0^2 (\gamma - 1) / \mu,$$

и для параметра \bar{p}_0 получаем формулу

$$\bar{p}_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma \cdot (\gamma - 1) / \mu = p_0 (\gamma - 1) / \mu.$$

Для параметра \bar{c}_0^2 будем иметь:

$$\bar{c}_0^2 = \frac{\rho_0 c_0^2}{(\mu - 1) \rho} \left[(\gamma - 1) (\rho / \rho_0 - 1) + (\gamma - \mu) / \mu \cdot (1 - \rho^\mu / \rho_0^\mu) \right] +$$

$$+ \rho_0 c_0^2 (\gamma - 1) / (\mu \rho) = \left[p - (\gamma - 1) \rho \varepsilon + \rho_0 c_0^2 (\gamma - 1) / \mu \right] / \rho$$

Следовательно, затруднений с определением параметров локальной аппроксимации $\bar{\gamma}, \bar{c}_0, \bar{p}_0$ не возникнет, если будет выполнено условие:

$$\rho \varepsilon \leq p / (\gamma - 1) + \rho_0 c_0^2 / \mu.$$

Заключение

В заключение нельзя обойти молчанием то обстоятельство, что и метод Годунова с точным расчетом распада разрыва не является идеальным и не лишен определенных недостатков. В качестве одного из них можно назвать

так называемые *энтропийные следы* (нефизические немонотонности), которые иногда возникают в численных расчетах, например, вблизи оси симметрии и непроницаемой стенки (они проявляются еще под названием «карбункул»). Для их устранения применяются алгоритмы *энтропийной коррекции* (см., например, [2] и раздел 2.10 в монографии [3]). В [3] в разделах 2.3, 3.4 и 4.5 описаны и другие численные методы, основанные на приближенных решениях задачи Римана.

Еще один достаточно широкий круг работ связан с повышением точности метода Годунова при расчете гладких течений.

В начале §5 было отмечено, что на первом этапе исследований мы полагали главным тщательное исследование поведения энтропии при приближенном решении задач Римана.

Безусловно, такого же внимания заслуживает и второй этап, на котором производится пересчет газодинамических величин. Обеспечивается ли при этом неубывание энтропии или какой-нибудь функции от нее – вопрос который пока остался открытым (теоретически, в дифференциальной постановке, это гарантировано).

Важной практической особенностью метода Годунова, обеспечивающей его надежность и популярность, является то, что он имеет наглядную и точную физическую интерпретацию. Результатом распада разрыва является *реальный* физический газ, по параметрам которого (точным или приближенным) далее вычисляются величины нужных потоков. В связи с этим заметим, что получение в формуле (1.6) отрицательных значений P в случае идеального газа (3.2) делает естественной принудительную замену

$$P = \max(P, \text{fix} > 0) .$$

В такой или близкой форме она предлагается в [5].

Схема C представляет основу предлагаемой технологии расчета. Ее базовые формулы (1.6)-(1.11) обеспечивают выполнение законов сохранения массы, импульса и энергии. Отказ от прямого выполнения УРС в зонах 3 и 4 позволил освободиться от необходимости описывать волны разрежения через римановы инварианты и адиабату Пуассона. Но при этом удалось обеспечить неубывание энтропии, справившись с ее возможным убыванием. Это позволяет включить в рассмотрение широкий круг представляющих интерес сложных УРС.

Одновременно простота формул весьма существенно сокращает объем работы по расчету распада разрыва, даже для простейших УРС!

Авторы благодарны коллеге Сафронову А.В. за предоставленную возможность ознакомления с некоторыми из его результатов еще до их публикации.

Авторы признательны также Гавреевой М.С. за помощь в оформлении работы.

Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики.// Матем. сб., 1959, 47, вып.3., с.271-306.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976, 400 с.
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений//М., ФИЗМАТЛИТ, 2001, 608 с.
4. Моисеев Н.Я., Мухамадиева Т.А. Метод Ньютона для решения задачи о распаде произвольного разрыва в средах с уравнениями состояния общего вида.// ЖВМ и МФ, 2008, т.48, №6, с.1102-1110.
5. Сафронов А.В. Разностный метод решения нестационарных уравнений газовой динамики на основе соотношений на разрывах.// Космонавтика и ракетостроение. 2006, вып.2(43), с.152-158.
6. Прокопов Г.П. Необходимость контроля энтропии в газодинамических расчетах.// ЖВМ и МФ, 2007, 47, №9, с.1591-1601.
7. Прокопов Г.П. О приближенных реализациях метода Годунова.// Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2007, №15, 28 с.
8. Сафронов А.В. Кинетические схемы для уравнений газодинамики.// Вычислительные методы и программирование. 2009, 10, 1, 62-74.
9. Годунов С.К. О единственности решения уравнений газодинамики.// Матем. сб., 1956, т.40, вып.4, с.467-478.
10. Забродин А.В., Софронов И.Д., Ченцов Н.Н. Адаптивные разностные методы математического моделирования нестационарных газодинамических течений. (Обзор)// Вопросы атомной науки и техники. Серия: Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988, вып. 4, с.3-22.
11. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Method for Fluid Dynamics.// Springer Verlag, Second Edition, 1999, 594 p.
12. Чарахчян А.А. Об алгоритмах расчета распада разрыва для схем С.К.Годунова.// ЖВМ и МФ, 2000, 40, №5, с.782-796.