Коновалов Н.В.

Оператор рассеяния поляризованного излучения и его общие свойства. Характеристическое уравнение теории переноса поляризованного излучения

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША РАН

Н.В. Коновалов

ОПЕРАТОР РАССЕЯНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ЕГО ОБЩИЕ СВОЙСТВА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ.

МОСКВА 2009

Н.В. Коновалов

ОПЕРАТОР РАССЕЯНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ЕГО ОБЩИЕ СВОЙСТВА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ.

Аннотация

В первой части работы проведено исследование спектральных свойств матричных операторов рассеяния в задаче о переносе поляризованного излучения. Во второй части исследуется разрешимость характеристического уравнения соответствующей векторной задачи. Приведён пример численного расчёта, показавшего, что пренебрежение эффектами поляризации не приводит к ощутимым ошибкам при определении интенсивности света. Поэтому скалярная теория дает хорошее приближение для интенсивности радиации. Поляризационные эффекты во многих случаях можно учесть, используя теорию возмущений.

N.V. Konovalov

POLARIZED RADIATION SCATTERING OPERATOR. THE GENERAL PROPERTIES. THE CHARACTERISTIC EQUATION FOR THE POLARIZED RADIATION TRANSPORT THEORY.

Abstract

Some important spectral properties of matrix scattering operators for the polarized radiation transport problem were investigated in the first part of this paper. In the second part the corresponding characteristic equation solvability was studied. Numerical results show that vanishing the polarization effect is possible when light intensity is determined. That’s why the scalar theory yields good estimation for radiation intensity. In many cases the polarization effect can be taken into account with the help of perturbations theory.

Предисловие

Третьего апреля 2009 года после тяжелой болезни умер Николай Васильевич Коновалов, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Не задолго до смерти он закончил работу, которую хотел представить на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Николай Васильевич многое успел в своей жизни. Его разработками пользуются, и будут пользоваться еще долго. Он многим помог и многих научил. Но закончить главное дело своей жизни времени у Николая Васильевича не хватило.

Данный препринт представляет собой ту часть его диссертации, которую он успел не только сделать, но и оформить. Повышенная требовательность Николая Васильевича к самому себе не позволила ему опубликовать этот материал в 2007 году, когда он был полностью готов. Сделать это позднее не позволила болезнь. Только перед самой смертью, сохраняя полное самообладание и чувство юмора, он согласился с тем, что материал готов к представлению на суд научной общественности.

Текст публикуется практически в том виде, в котором его застигла смерть автора. Поэтому автор несет полную ответственность за его содержание. Это для него привычно. Николай Васильевич всегда сам отвечал не только за то, что делал сам, но и за то, что делали многие другие. При подготовке материала для публикации в виде препринта ограниченного объема, пришлось изменить формат текста и слегка его отредактировать. Это, конечно, исказило авторский текст. В частности, многие выносные формулы пришлось сделать строчными, что может быть причиной смещения авторских акцентов. Николай Васильевич простил бы за это. Он всегда прощал…

Марков М.Б.

1. Оператор рассеяния поляризованного излучения. Общие свойства

1.1 Пространства функций. Определение оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$

Пусть $\mathsf{L}_p(\Omega)$ и $C(\Omega)$ – пространства функций, измеримых и суммируемых с p- ой степенью модуля и непрерывных на единичной сфере Ω трехмерного эвклидова пространства. Обозначим через $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ линейное пространство комплекснозначных вектор–функций $\Phi(s)=\{\Phi_1(s),\Phi_2(s),\Phi_3(s),\Phi_4(s)\}$, компоненты которых $\Phi_i(s)\in\mathsf{L}_p(\Omega)$, $i=1,2,3,4$, $s\in\Omega$. Определив норму в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ равенством $\|\Phi\|_{\mathsf{L}_p^{(4)}}=\left(\sum\limits_{i=1}^{4}\|\Phi_i\|_{\mathsf{L}_p}^{p}\right)^{1/p}$, $\|\Phi\|_{\mathsf{L}_\infty^{(4)}}=\max\limits_i \sup\limits_{s\in\Omega}\mathrm{vrai}\left|\Phi_i(s)\right|$, где $\|\Phi_i\|_{\mathsf{L}_p}^{p}=\int\limits_{\Omega}\left|\Phi_i(s)\right|^p ds$, $p\in[1,\infty)$, обратим $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в полное нормированное пространство.

Пространство, состоящее из непрерывных на Ω вектор–функций с нормой $\|\Phi\|_{C^{(4)}} = \max_i \max_{s\in\Omega} |\Phi_i(s)|$, обозначим через $C^{(4)}(\Omega)$.

Для функций $\Phi(s) \in \mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ и $\Psi(s) \in \mathsf{L}_q^{(4)}(\Omega)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ введем скалярное произведение и относительно него для оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, заданного в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$, определим на $\mathsf{L}_g^{(4)}(\Omega)$ сопряженный оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$:

$$(\Phi,\Psi) = \sum_{i=1}^{4} \int_\Omega \Phi_i(s) \bar{\Psi}_i(s)\, ds \quad (1.1) \qquad\qquad (\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi,\Psi) = (\Phi, \hat{\hat{\mathsf{P}}}^* \Psi). \quad (1.2)$$

При $p=\infty$ под $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ будем понимать сужение $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ на подпространство $\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega) \subset \mathsf{L}_\infty^{(4)*}(\Omega)$. Подобным образом введем пространства функций $\Phi(\mu)$, не зависящих от азимутального угла φ $\mathsf{L}_p(-1,1)$ и $C[-1,1]$: $\|\Phi\|_{\mathsf{L}_p}^p = \int_{-1}^{1} |\Phi(\mu)|^p\, d\mu$, $\|\Phi\|_\infty = \sup_{\mu\in(-1,1)} vrai |\Phi(\mu)|$, $\|\Phi\|_c = \max_{\mu\in[-1,1]} |\Phi|$, и соответствующие пространства $\mathsf{L}_p^{(4)}(-1,1)$ и $C^{(4)}[-1,1]$ вектор-функций $\Phi(\mu) = \{\Phi_1(\mu), \Phi_2(\mu), \Phi_3(\mu), \Phi_4(\mu)\}$. Вещественные ядра этих пространств обозначим через $N(\mathsf{L}_p^4)$ и $N(C^{(4)})$.

Для $\Phi(s)$ используем два представления: *SP* - Стокса-Пуанкаре и *CP* – представление [1,3]. В первом $\Phi_1(s)$ есть интенсивность излучения I в направлении $s\in\Omega$: $\Phi_1^{sp}(s) = I$, $\Phi_2^{sp} = Q = Ip\cos 2\beta \cos 2\chi$, $\Phi_3^{sp} = U = Ip\cos 2\beta \sin 2\chi$, $\Phi_4^{sp} = V = Ip\sin 2\beta$. Здесь $p = \sqrt{Q^2+U^2+V^2}\big/ I \le 1$ - степень поляризации. Углы β и χ характеризуют положение, степень вытянутости эллипса поляризации и направление вращения вектора электрического поля (направление поляризации). *CP* – представление связано с *SP* преобразованием $\hat{T}$:

$$\Phi^{cp} = \hat{T}\Phi^{sp}, \quad \hat{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2\hat{\bar{T}}^{+} = 2T^*, \qquad (1.3)$$

где черта означает комплексное сопряжение, а “ + ” - транспонирование.

Оператор рассеяния $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ есть интегральный оператор

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s) = \hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(\mu,\varphi) = \int_\Omega \hat{\mathsf{P}}(s',s)\Phi(s')\,ds' = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} d\mu'\; \hat{\mathsf{P}}(\mu',\varphi';\mu,\varphi)\Phi(\mu',\varphi'),$$

ядро которого, четырехмерная матрица $\hat{\mathsf{P}}(s',s)$, определяется произведением

$$\hat{\mathsf{P}}(s',s) = \hat{L}(\chi_1(s',s))\hat{\Gamma}(s's)\hat{L}(\chi_2(s',s)), \qquad (1.4)$$

$\mu = \cos\theta$ и φ - сферические координаты вектора $s \in \Omega$.

Матрица $\hat{\Gamma}(s's)$, зависящая лишь от величины угла рассеяния $\vartheta = \arccos s's$, описывает преобразование в акте рассеяния параметров поляризации I, Q, U и V, отнесенных к плоскости рассеяния. $\hat{L}(\alpha)$ отвечает изменению этих параметров при повторе координатной системы на угол α - вокруг оси, определяемой вектором s [1].

SP - и CP -представления связаны соотношением $\hat{L}^{cp}(\alpha) = \hat{T}\hat{L}^{sp}(\alpha)\hat{T}^{-1}$:

$$\hat{L}^{sp}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (1.5) \quad \hat{L}^{cp}(\alpha) = \begin{bmatrix} \exp(-2i\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp 2i\alpha \end{bmatrix}. (1.6)$$

Углы χ_1 и χ_2, входящие в формулу (1.4), определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} &\cos\chi_1(s',s) = \cos\chi_2(s,s') = \left(\cos\theta - \cos\vartheta\cos\theta'\right) / \left(\sin\theta'\sin\vartheta\right), \\ &\sin\chi_1(s',s) = -\sin\chi_2(s,s') = s\sin\theta\,\left|\sin(\varphi'-\varphi)\right| / \sin\vartheta, \qquad (1.7) \\ &\cos\vartheta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi),\ s = sign\sin(\varphi'-\varphi). \end{aligned}$$

В тех точках $s,\ s'$, где $\sin\vartheta,\ \sin\theta$ и $\sin\theta'$ обращаются в ноль, доопределим функции (1.7) их предельными значениями и получим, таким образом, функции $\cos\chi_{1,2}$ и $\sin\chi_{1,2}$, непрерывные в области $-1 \le \mu, \mu' \le 1,\ 0 \le \varphi, \varphi' \le 2\pi$. Отсюда следуют равенства $\sin 2\chi_1(s,s') = -\sin 2\chi_2(s',s)$ и $\cos 2\chi_1(s,s') = \cos 2\chi_2(s',s)$. Из них вытекает соотношение, верное в обоих представлениях:

$$\hat{L}^{*}(\chi_1(s,s')) = \hat{L}^{+}(\chi_1(s,s')) = \hat{L}(\chi_2(s',s)). \qquad (1.8)$$

Оператор рассеяния $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{cp} = \hat{T}\,\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{sp}\,\hat{T}^{-1}$ в CP – представлении есть интегральный оператор с ядром (1.4), в котором

$$\hat{\Gamma}^{cp}(s',s) = \hat{T}\,\hat{\Gamma}^{sp}(s's)\hat{T}^{-1} \equiv \{\,\Gamma_{mn}(s's)\},\quad m,n \in \{2,0,-0,-2\}. \qquad (1.9)$$

Из равенств (1.6) и (1.9) следует, что в CP - представлении

$$\left|\hat{\mathsf{P}}^{cp}(s',s)\right| = \left|\hat{\Gamma}^{cp}(s',s)\right|. \qquad (1.10)$$

1.2. Спектральные свойства оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$

При доказательстве нижеследующих двух теорем мы воспользуемся CP - представлением, так как равенство (1.10) позволит в значительной мере упростить выкладки. При этом, в силу невырожденности преобразования $\hat{T}$, нормы элемента $\Phi(s)$, взятого в SP и CP - представлениях, эквивалентны. Вследствие этого справедливость указанных теорем сохраняется и в SP - представлении. Компоненты вектора $\Phi(s)$ в CP - представлении будем нумеровать индексом $m \in \{2,0,-0,-2\}$.

Теорема 1.1 Пусть $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathsf{L}_1(-1,1),\ m,n \in \{2,0,-0,-2\}$. Тогда оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$

вполне непрерывен в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ при любом $p\in[1,\infty]$ и

$$\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_p^{(4)}} \le 8\pi \max_{m,n}\left\|\Gamma_{mn}\right\|_{\mathsf{L}_1} . \qquad (1.11)$$

2. При $\Gamma_{mn}(\mu)\in \mathsf{L}_q(-1,1)$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$, $q\in[1,\infty)$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ вполне непрерывен из $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ и

$$\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_p^{(4)}\to C^{(4)}} \le (8\pi)^{1/q} \max_{m,n}\left\|\Gamma_{mn}\right\|_{\mathsf{L}_q},\ p^{-1}+q^{-1}=1. \qquad (1.12)$$

3. Если $\Gamma_{mn}(\mu)\in \mathsf{L}_\infty(-1,1)$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$, то оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ ограничен из $\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$:

$$\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_1^{(4)}\to C^{(4)}} \le \max_{m,n}\left\|\Gamma_{mn}\right\|_{\mathsf{L}_\infty}, \qquad (1.13)$$

а оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{Z}$ вполне непрерывен из $\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$.

4. Сопряженный оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{*}$ есть интегральный оператор с ядром $\hat{L}(\chi_1(s',s))\overline{\Gamma}^{+}(s',s)\hat{L}(\chi_2(s',s))$. Он также обладает свойствами (1.1) – (1.3).

<u>Доказательство</u>

1. Пусть $\Gamma_{mn}(\mu)\in \mathsf{L}_1(-1,1)$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$.

При $\Phi(s)\in\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p\in(1,\infty)$, используя неравенство Гёльдера, получим:

$$\sum_m\int_\Omega\left|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right|_m^p ds \le \sum_m\int_\Omega ds\left\{\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(ss')^{1/q+1/p}\right|\left|\Phi_n(s')\right|ds'\right\}^p \le$$

$$\le\sum_m\int_\Omega ds\left\{\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(ss')\right|ds'\right\}^{p/q}\left\{\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(ss')\right|\left|\Phi_n(s')\right|^p ds'\right\}\le\left\{8\pi\max_{m,n}\int_{-1}^{1}\left|\Gamma_{mn}(\mu)\right|d\mu\right\}^{\rho}\left\|\Phi\right\|_{\mathsf{L}_p^{(4)}}^{\rho}$$

откуда следует (1.11). Просто доказывается неравенство (1.11) и в случае $p=1,\ \infty$.

Для доказательства полной непрерывности $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, следуя работе [2], предположим сначала, что $\Gamma_{mn}(\mu)\in C[-1,1]$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$. В этом случае легко доказывается полная непрерывность оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ из $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p\in[1,\infty]$ в $C^{(4)}(\Omega)$ с использованием равномерной непрерывности функции $\Gamma_{mn}(\mu)$ на сегменте $[-1,1]$ и теоремы Арцела. Далее, аппроксимируя $\Gamma_{mn}(\mu)\in\mathsf{L}_1(-1,1)$ последовательностями непрерывных функций в метрике $\mathsf{L}_1(-1,1)$, получим последовательность вполне непрерывных операторов $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{(\ell)}$, равномерно сходящуюся в силу (1.11) к оператору $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$: $\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{(\ell)}\right\|_{\mathsf{L}_p^{(4)}}\le 8\pi\max_{m,n}\left\|\Gamma_{mn}(\mu)-\Gamma_{mn}^{(\ell)}\right\|_{\mathsf{L}_1}\to 0$ при $\ell\to\infty$.

Следовательно, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ вполне непрерывен в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ при любом p.

2. Пусть теперь $\Gamma_{mn}(\mu)\in\mathsf{L}_q(-1,1)$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$, $q\in(1,\infty)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Тогда, используя неравенство Гёльдера, получим:

$$\left|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right|_m \le \sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(ss')\right|\left|\Phi_n(s')\right|ds' \le \left\{\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(ss')\right|^q ds'\right\}^{1/q}\times$$

$$\times\left\{\sum_n\int_\Omega\left|\Phi_n(s')\right|^p ds'\right\}^{1/p}\le\left\{8\pi\max_{m,n}\int_{-1}^{1}\left|\Gamma_{mn}(\mu)\right|^q d\mu\right\}\left\|\Phi\right\|_{\mathsf{L}_p^{(4)}},$$

откуда следует (1.12). Аналогично при $q=1$ $(p=\infty)$:

$$\left|\Phi_m(s)\right|\le\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(ss')\right|\left|\Phi_n(s')\right|ds'\le 8\pi\max_{m,n}\int_{-1}^{1}\left|\Gamma_{mn}(\mu)\right|d\mu\ \left\|\Phi\right\|_{\mathsf{L}_\infty^{(4)}}.$$

Доказательство полной непрерывности $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ из $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ проводится аналогично [2], где оно выполнено для скалярного случая при $p=q=2$. Функции $\Gamma_{mn}(\mu)\in\mathsf{L}_q(-1,1)$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$ аппроксимируются в метрике $\mathsf{L}_q(-1,1)$ последовательностью непрерывных функций $\Gamma_{mn}^{(\ell)}(\mu)$, а затем используется равномерная непрерывность $\Gamma_{mn}^{(\ell)}(\mu)$ на $[-1,1]$ и теорема Арцела.

3. Положим $\Gamma_{mn}(\mu)\in\mathsf{L}_\infty(-1,1)$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$ и $\Phi(s)\in\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$. Тогда, в силу (1.10), для любого $s\in\Omega$:

$$\left|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right|_m=\left|\sum_n\int_\Omega\mathsf{P}_{mn}(s',s)\Phi_n(s')ds'\right|\le\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(s',s)\right|\left|\Phi_n(s')\right|ds'\le\max_{m,n}\sup_{\mu\in(-1,1)}vrai\left|\Gamma_{mn}(\mu)\right|\left\|\Phi\right\|_{\mathsf{L}_1^{(4)}}.\quad(1.14)$$

Предположим сначала, что $\Gamma_{mn}(\mu)$ измеримы и ограничены по модулю на сегменте $[-1,1]$: $\max_{m,n}\left|\Gamma_{mn}(\mu)\right|\le K$. Пусть $s_1,s_2\in\Omega$. Образуем разность:

$$\left|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s_1)-\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s_1)\right|\le\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(s_1,s)-\Gamma_{mn}(s_2,s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds.\quad(1.15)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Выберем $\delta>0$ так, чтобы

$$\sum_n\int_e\left|\Phi_n(s)\right|ds<\varepsilon/12K\quad(1.16)$$

для любого измеримого подмножества $e\subset\Omega$ с мерой $mes\,e<\delta$. Приблизим функции $\Gamma_{mn}(\mu)$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$ по мере непрерывными функциями $\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu)$, $\left|\Gamma_{mn}(\mu)\right|\le K$, т.е. выберем $\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu)$ так, чтобы мера множества

$$E_0=\left\{\mu\left|\mu\in(-1,1),\max_{m,n}\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu)-\Gamma_{mn}(\mu)\right|\ge\varepsilon\big/6\left\|\Phi\right\|_{\mathsf{L}_1^{(4)}}\right.\right\}$$

была меньше $\delta/2\pi$: $mes\,E_0<\delta/2\pi$.

Далее положим $\eta>0$ настолько малым, чтобы для всех $\mu_1,\mu_2\in[-1,1]$, как только $\left|\mu_1-\mu_2\right|<\eta$, выполнялось неравенство

$$\max_{m,n}\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu_1)-\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu_2)\right|<\varepsilon\Big/\left(3\|\Phi\|_{\mathsf{L}_1^{(4)}}\right), \tag{1.17}$$

Тогда $|s_1 s - s_2 s| = |(s_1 - s_2)s| \le |s_1 - s_2| < \eta$ при $|s_1 - s_2| < \eta$ и из (1.15) и (1.17) следует:

$$\left|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s_1)-\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s_2)\right|\le\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(s_1s)-\Gamma_{mn}(s_2s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds\le \tag{1.18}$$

$$\le\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(s_1,s)-\tilde{\Gamma}_{mn}(s_1,s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds+\sum_n\int_\Omega\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(s_1s)-\tilde{\Gamma}_{mn}(s_2s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds+$$

$$+\sum_n\int_\Omega\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(s_2s)-\Gamma_{mn}(s_2s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds<\sum_n\int_\Omega\left|\Gamma_{mn}(s_1s)-\tilde{\Gamma}_{mn}(s_2s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds+$$

$$+\varepsilon\|\Phi\|_{\mathsf{L}_1^{(4)}}\Big/3\|\Phi\|_{\mathsf{L}_1^{(4)}}+\sum_n\int_\Omega\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(s_2s)-\Gamma_{mn}(s_2s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds=I_1+\varepsilon/3+I_2.$$

Оценим слагаемое $I_1=\sum_n\int_\Omega\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(s_1s)-\Gamma_{mn}(s_1s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds$.

Пусть $E_1^n=\{s\,|\,s\in\Omega,\ s_1 s\in E_0\}$. Это множество есть образ множества $E_0\times(0,2\pi)$ при вращении сферы Ω, совмещающим ось $0Z$ с вектором s_1. Следовательно, E_1 измеримо и $mes\ E_1=2\pi\, mes\ E_0<\delta$. Тогда:

$$I_1=\sum_n\int_{\Omega/E_1}\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(s_1s)-\Gamma_{mn}(s_1s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds+\sum_n\int_{E_1}\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(s_1s)-\Gamma_{mn}(s_1s)\right|\left|\Phi_n(s)\right|ds<$$

$$<\varepsilon/6+\varepsilon K/12K+\varepsilon K/12K=\varepsilon/3$$

Здесь использованы неравенства (1.16): $\max_{m,n}\left|\Gamma_{mn}(\mu)\right|\le K$, $\max_{m,n}\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(\mu)\right|\le K$, а также тот факт, что на множестве Ω/E_1 $\max_{m,n}\left|\tilde{\Gamma}_{mn}(s_1s)-\Gamma_{mn}(s_1s)\right|<\varepsilon\Big/\left(6\|\Phi\|_{\mathsf{L}_1^{(4)}}\right)$. Подставляя оценку для I_1 и аналогичную оценку для I_2 в (1.18), получим $\left|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s_1)-\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s_2)\right|<\varepsilon$ как только $|s_1-s_2|<\eta$, т.е. $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\in C^{(4)}(\Omega)$.

Если $\Gamma_{mn}(\mu),\ m,n\in\{2,0,-0,-2\}$ – произвольные функции из $\mathsf{L}_\infty(-1,1)$, то, изменив их на множестве меры ноль, где они обращаются в бесконечность, превратим их в ограниченные на [-1,1] функции. Отсюда следует включение $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\in C^{(4)}(\Omega)$ и в случае $\Gamma_{mn}(\mu)\in\mathsf{L}_\infty(-1,1)$. Неравенство (1.11) следует из (1.14).

Доказать полную непрерывность оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ из $\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ при $\Gamma_{mn}\in\mathsf{L}_\infty(-1,1),\ m,n\in\{2,0,-0,-2\}$, опираясь на теорему Арцела не удается, так как интеграл $\int_e\left|\Phi_n(s)\right|ds,\ e\subset\Omega$ не обладает абсолютной непрерывностью, равномерной относительно функций из произвольного ограниченного множества $M\subset\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$. Однако в этом случае вполне непрерывен оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^2$.

Действительно, ограниченное множество $M \in \mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$, согласно доказанному, переводится оператором $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ в ограниченное множество $\hat{\hat{\mathsf{P}}}(M) \in C^{(4)}(\Omega)$. Тогда, в силу теоремы, множество $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^2(M) = \hat{\hat{\mathsf{P}}}(\hat{\hat{\mathsf{P}}}(M))$ компактно в $C^{(4)}(\Omega)$.

4. Четвертый пункт теоремы следует из равенства (1.8). Действительно,

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*(s',s) = \hat{\hat{\mathsf{P}}}^+(s',s) = \overline{\left[\hat{L}(\chi_1(s,s')\hat{\Gamma}(s's)\hat{L}(\chi_2(s,s'))\right]^+} =$$

$$= \hat{\bar{L}}^+\left(\chi_2\left(s,s'\right)\right)\hat{\bar{\Gamma}}(s's)\hat{\bar{L}}(\chi_1(s,s')) = \hat{L}\left(\chi_1\left(s',s\right)\right)\hat{\bar{\Gamma}}^+(s's)\hat{L}(\chi_2(s',s)),$$

т.е. $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ представляется произведением вида (1.4) с матрицей $\hat{\bar{\Gamma}}^+(\mu) = \hat{\Gamma}^*(\mu)$.

На основании доказанной теоремы при $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathsf{L}_1(-1,1),\ m,n \in \{2,0,-0,-2\}$ мы вправе рассматривать операторы $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ как вполне непрерывные операторы в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega),\ \ p \in [1,\infty]$ или $C^{(4)}(\Omega)$. Если же $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ – ограниченный оператор из $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ при $p \in [1,\infty]$, то функции $\Gamma_{mn}(\mu)$ должны удовлетворять более жесткому условию $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathsf{L}_q(-1,1),\ m,n\{2,0,-0,-2\},\ q^{-1} + P^{-1} = 1$. При этом $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ вполне непрерывны из $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$, если $p \in [1,\infty]$. Если $p = 1$, то вполне непрерывны из $\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$ в $C^{(4)}(\Omega)$ операторы $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^2,\ \hat{\hat{\mathsf{P}}}^{*2}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\,\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$.

<u>Лемма 1.1</u> Пусть $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathsf{L}_1(-1,1),\ m,n \in \{2,0,-0,-2\}$ и $\ell_0 = \max\{|m|,|n|\}$. Тогда для любого $\Phi(s) \in \mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$

$$\left[\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right]_m = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty}\sum_{n=-2}^{2} p_{mn}^{\ell} \sum_{q=-\ell}^{\ell}(-1)^q P_{mq}^{\ell}(\mu)e^{-iq\varphi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} d\mu' d\varphi' \Phi_n(\mu',\varphi')P_{mq}^{\ell}(\mu')e^{iq\varphi'}, \quad (1.19)$$

где $P_{mn}^{\ell} = \dfrac{2\ell+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\Gamma_{mn}(\mu)P_{mn}^{\ell}(\mu)d\mu$, а $P_{mn}^{\ell}(\mu)$ - обобщенные присоединенные функции Лежандра. Ряд (1.19) сходится в метрике $\mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$.

<u>Доказательство</u>

1. Предположим сначала, что $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathsf{L}_2(-1,1)$ и положим $\ell_0 = \max\{|m|,|n|\}$. Покажем, что для любого $\Phi(s) \in \mathsf{L}_2(\Omega)$

$$\int_{\Omega}\mathsf{P}_{mn}(s,s')\Phi(s')ds' = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} p_{mn}^{\ell}\int_{\Omega}T_{mn}^{\ell}(\tilde{\chi}_1,\cos\tilde{\vartheta},\tilde{\chi}_2)\Phi(s')ds', m,n \in \{2,0,-0,-2\}, \quad (1.20)$$

где $\tilde{\chi}_1, \cos\tilde{\vartheta}, \tilde{\chi}_2$ определены соотношениями (1.7), в которых изменены местами штрихованные и не штрихованные переменные, а T_{mn}^{ℓ} – обобщенные сферические функции. Для этого воспользуемся разложением для функций $\mathsf{P}_{mn}(s,s')$:

$$\mathsf{P}_{mn}(s,s') = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} p_{mn}^{\ell}T_{mn}^{\ell}(\tilde{\chi}_1,\cos\tilde{\vartheta},\tilde{\chi}_2) = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} p_{mn}^{\ell}e^{-in\tilde{\chi}_1}p_{mn}^{\ell}(\cos\tilde{\vartheta})e^{-in\tilde{\chi}_2}. \quad (1.21)$$

При $N>2$, с учетом (1.21), обозная $\Gamma^N_{mn}(\mu)=\sum_{\ell=N}^{\infty} p^\ell_{mn}\, p^\ell_{mn}(\mu)$, имеем:

$$\left|\int_\Omega \mathsf{P}_{mn}(s,s')\Phi(s')ds'-\sum_{\ell=\ell_0}^{N} p^\ell_{mn}\int_\Omega T^\ell_{mn}(\tilde\chi_1,\cos\tilde\vartheta,\tilde\chi_2)\Phi(s')ds'\right|=$$

$$\left|\int_\Omega \sum_{\ell=N}^{\infty} p^\ell_{mn}e^{-in\tilde\chi_1}p^\ell_{mn}(\cos\tilde\vartheta)e^{-in\tilde\chi_2}\Phi(s')ds'\right|\le\int_\Omega\left|\sum_{\ell=N}^{\infty} p^\ell_{mn}p^\ell_{mn}(s's)\right|\left|\Phi(s')\right|ds'\le$$

$$\le\sqrt{2\pi\int_{-1}^{1}\left|\Gamma^N_{mn}(\mu)\right|^2d\mu}\ \sqrt{\int_\Omega\left|\Phi(s')\right|^2ds'}=\sqrt{2\pi\int_{-1}^{1}\left|\Gamma^N(\mu)\right|^2d\mu}\,\|\Phi\|_{\mathsf{L}_2}\ .$$

В силу равенства Парсеваля – Стеклова, $\int_\Omega\left|\Gamma^N_{mn}(\mu)\right|^2d\mu=\sum_{\ell=N}^{\infty}\left|p^\ell_{mn}\right|^2\to 0$ при $N\to\infty$. Таким образом, справедливо равенство (1.20), причем сходимость равномерная относительно $s\in\Omega$.

Если за $\Phi(s)$ взять функцию $P^\ell_{mq}e^{iq\varphi}$ и подставить ее в (1.20), то после несложных преобразований с использованием теоремы сложения для обобщенных сферических функций и ортогональности функций $P^\ell_{mq}(\mu)$ и $e^{iq\varphi}$, получим:

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\mathsf{P}_{mn}(s,s')P^\ell_{mq}(\mu')\ell^{iq\varphi'}d\mu'd\varphi'=\frac{4\pi}{2\ell+1}P^\ell_{nq}(\mu)\ell^{iq\varphi}. \qquad (1.22)$$

2. Пусть теперь $\Gamma_{mn}(\mu)\in\mathsf{L}_1(-1,1), m,n\in\{2,0,-0,-2\}$. Покажем, что и в этом случае равенство (1.22) имеет место. Действительно, пусть $\Gamma^{(k)}_{mn}(\mu)$ последовательность функций из $C[-1,1]$ такая, что $\left\|\Gamma^{(k)}_{mn}(\mu)-\Gamma_{mn}(\mu)\right\|_{\mathsf{L}_1}\to 0$ при $k\to\infty$, $m,n\in\{2,0,-0,-2\}$. Пусть $p^{\ell(k)}_{mn}=\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}\Gamma^{(k)}_{mn}(\mu)P^\ell_{mn}(\mu)d\mu$. Для любого конечного ℓ

$$p^{\ell(k)}_{mn}\to p^\ell_{mn}\ \text{при}\ k\to\infty, \qquad (1.23)$$

т.к. $\left|p^{\ell(k)}_{mn}-p^\ell_{mn}\right|\le\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}\left|\Gamma^{(k)}_{mn}(\mu)-\Gamma_{mn}(\mu)\right|\left|P^\ell_{mn}(\mu)\right|d\mu\le\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}\left|\Gamma^{(k)}_{mn}(\mu)-\Gamma_{mn}(\mu)\right|d\mu\to 0.$

Здесь использована оценка $\left|P^\ell_{mn}(\mu)\right|\le 1$. Соотношение (1.22) выполнено для всякого оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{(k)}$ при любом $k=1,2,\ldots$. Поэтому

$$\left|\int_\Omega\mathsf{P}_{mn}(s,s')p^\ell_{mq}(\mu')e^{iq\varphi'}d\mu'd\varphi'-\frac{4\pi}{2\ell+1}P^\ell_{mn}P^\ell_{nq}(\mu)e^{iq\varphi}\right|\le\frac{4\pi}{2\ell+1}\left|P^{\ell(k)}_{mn}-P^\ell_{mn}\right|\left|P^\ell_{mq}(\mu)e^{iq\varphi}\right|+$$

$$+\left|\int_\Omega\left[\mathsf{P}_{mn}(s,s')-\mathsf{P}^{(k)}_{mn}(s,s')\right]p^\ell_{mq}(\mu')e^{iq\varphi'}\right|\le 2\pi\int_{-1}^{1}\left|\Gamma_{mn}(\mu)-\Gamma^{(k)}_{mn}(\mu)\right|d\mu+\frac{4\pi}{2\ell+1}\left|p^{\ell(k)}_{mn}-p^\ell_{mn}\right|.$$

Т.к. левая часть этого неравенства не зависит от k, то (1.22) оказывается справедливым в рассматриваемом случае.

Возьмем произвольный $\Phi(s) \in \mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$. Поскольку $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s) \in \mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$, мы можем разложить $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)$ в сходящийся в норме $\mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$ ряд:

$$\left[\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right]_m = \sum_{\ell=|m|}^{\infty} \sum_{q=-\ell}^{\ell} Q_{mq}^{\ell} P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{-iq\varphi} , \tag{1.24}$$

где $Q_{mq}^{\ell} = \dfrac{(2\ell+1)(-1)^q}{4\pi} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} \left[\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right]_m P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{iq\varphi} \, d\mu d\varphi$.

Для доказательства леммы достаточно вычислить коэффициенты Q_{mq}^{ℓ}:

$$Q_{mq}^{\ell} = \frac{(2\ell+1)}{4\pi}(-1)^q \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} d\mu d\varphi \left[\sum_{n=2}^{-2} \int\limits_{\Omega} \mathsf{P}_{mn}(s',s)\Phi_n(s')ds'\right] P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{iq\varphi} =$$

$$= \frac{(2\ell+1)}{4\pi}(-1)^q \sum_{n=2}^{-2} \int\limits_{\Omega} ds' \left[\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} \mathsf{P}_{mn}(s',s) \, P_{mn}^{\ell}(\mu) \, \ell^{iq\varphi} d\mu d\varphi\right] \Phi_n(s') = \frac{(2\ell+1)}{4\pi}(-1)^q \times$$

$$\times \sum_{n=2}^{-2} \int\limits_{\Omega} ds' \left[\frac{4\pi}{2\ell+1} P_{nq}^{\ell}(\mu') \, \ell^{iq\varphi'} \Phi_n(s')\right] = (-1)^q \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^{\ell} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} d\mu' d\varphi' \Phi_n(\mu',\varphi') P_{nq}^{\ell}(\mu') e^{iq\varphi'}.$$

Здесь мы воспользовались равенством (1.22). Подставляя теперь полученное выражение для Q_{mq}^{ℓ} в (1.24), мы приходим к равенству (1.19). Лемма доказана.

<u>Замечание</u>. Если в условиях леммы потребовать $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathsf{L}_2(-1,1)$, то, как легко показать, сходимость ряда (1.19) будет равномерной относительно $s \in \Omega$.

<u>Теорема 1.2</u> (аналог теоремы Функа-Хекке [2]). Пусть $\Gamma_{mn}(\mu) \in \mathsf{L}_1(-1,1)$, $m,n \in \{2,0,-0,-2\}$. Тогда оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, как оператор в $\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$, обладает следующими свойствами.

1. Спектр $\sigma(\hat{\hat{\mathsf{P}}})$ оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ состоит из ноля и собственных значений, каждое из которых имеет конечную алгебраическую кратность. Предельной точкой спектра может быть только ноль.

2. Положим $\ell_0 = \max\{|m|,|n|\}, m,n \in \{2,0,-0,-2\}$ и пусть матрицы $\hat{p}^{\ell} = \left\{p_{mn}^{\ell} / (2\ell+1)\right\}^{-2}$, $\ell = \ell_0, \ell_0+1,...$ порядка 4x4 из коэффициентов $p_{mn}^{\ell} = \dfrac{2\ell+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \Gamma_{mn}(\mu) P_{mn}^{\ell}(\mu) d\mu$.

Всякое отличное от ноля собственное значение оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ есть общее собственное значение одной или конечного числа матриц $\hat{p}^{\ell}, \ell = \ell_1,...,\ell_I$, $I \ge 1$. Если $\nu(\lambda)$ – кратность λ, как собственного значения оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, то $\nu(\lambda)=\sum_{i=1}^{I}(2\ell_i+1)\nu_i(\lambda)$,где $\nu_i(\lambda)$ – кратность λ, как собственного значения матрицы $\hat{p}^{\ell_i}$.

3. Множества собственных $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ и присоединенных $\{\boldsymbol{\beta}\}$ (если они есть) векторов совокупности матриц $\hat{p}^{\ell}, \ell=\ell_1,...,\ell_I$, отвечающих λ, порождают $\nu(\lambda)$ собственных и присоединенных линейно независимых векторов оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ вида:

$$\Phi_m(s)=\alpha_m P^{\ell}_{mq}(\mu)e^{-iq\varphi}, \quad (1.25) \qquad \Psi_m(s)=\beta_m P^{\ell}_{mq}(\mu)\ell^{-iq\varphi}, \quad (1.26)$$

$$m\in\{2,0,-0,-2\}, \ell=\ell_1,...,\ell_I, q=-\ell,...,\ell,$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ пробегают множества $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ и $\{\boldsymbol{\beta}\}$, соответственно. Других собственных векторов нет ни в каком $\mathsf{L}^{(4)}_p(\Omega)$.

<u>Доказательство</u>. Утверждение первого пункта теоремы есть следствие полной непрерывности оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ в $\mathsf{L}^{(4)}_1(\Omega)$ (теорема 1.1).

1. Рассмотрим сначала оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ в $\mathsf{L}^{(4)}_2(\Omega)$. $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ вполне непрерывен в $\mathsf{L}^{(4)}_2(\Omega)$ (теорема 1.1).

Зафиксируем некоторое $\ell\in\{\ell_0,\ell_0+1,...,\}$ и рассмотрим матрицу $\hat{p}^{\ell}$. Пусть λ (в том числе и $\lambda=0$) ее собственное значение, а $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\beta}^j$, $j=1,2,...,J,\ J\le 3$ ее собственный и порожденные им J присоединенных (если они есть) векторов, отвечающих λ:

$$\frac{1}{2\ell+1}\sum_{n=2}^{-2} p^{\ell}_{mn}\,\alpha_n=\lambda\alpha_m, \qquad (1.27)$$

$$\frac{1}{2\ell+1}\sum_{n=2}^{-2} p^{\ell}_{mn}\,\beta^j_n=\lambda\,\beta^j_m+\beta^{j-1}_m,\ \ \beta^0_m=\alpha_m,\ \ m\in\{2,0,-0,-2\}, j=1,...,J. \qquad (1.28)$$

Тогда λ является собственным значением оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, а

$$\Phi_m(s)=\alpha_m P^{\ell}_{mq}(\mu)e^{-iq\varphi}, \qquad (1.29)$$

$$\Psi^j_m(s)=\beta^j_m P^{\ell}_{mq}(\mu)\,e^{-iq\varphi}, m\in\{2,0,-0,-2\}, q=-\ell,...,\ell,\ j=1,...,J, \qquad (1.30)$$

отвечающие λ $(2\ell+1)$ линейно независимых собственных и $J(2\ell+1)$ присоединенных векторов:

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}\boldsymbol{\Phi}(s)=\lambda\boldsymbol{\Phi}(s), \quad (1.31) \qquad \hat{\hat{\mathsf{P}}}\boldsymbol{\Psi}^j(s)=\lambda\boldsymbol{\Psi}^j(s)+\boldsymbol{\Psi}^{j-1}(s), \boldsymbol{\Psi}^0(s)=\boldsymbol{\Phi}(s). \quad (1.32)$$

Линейная независимость векторов (1.29) и (1.30) следует из ортогональности функций $P^{\ell}_{mq}(\mu)$ и $e^{-iq\varphi}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно (1.29) и (1.30) подставить в уравнения (1.31) и (1.32), соответственно.

Воспользовавшись затем соотношением (1.19) леммы 1.1, а также ортогональностью функций $P^{\ell}_{mq}(\mu)$ и $e^{-iq\varphi}$, придем к уравнениям (1.27) и (1.28).

Обратно, предположим теперь, что λ – отличное от ноля собственное значение оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, а $\Phi(s) \in \mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$ – соответствующий ему собственный вектор. Представим его рядом $\Phi_m(s) = \sum_{\ell=|m|}^{\infty} \sum_{q=-\ell}^{\ell} \Phi_{mq}^{\ell} P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{-iq\varphi}$, где

$$\Phi_{mq}^{\ell} = \frac{(2\ell+1)}{4\pi}(-1)^q \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \Phi_m(s) P_{mq}^{\ell}(\mu) e^{iq\varphi}\, d\mu d\varphi . \tag{1.33}$$

Подставляя (1.38) в (1.31) и пользуясь (1.19), приходим к равенству

$$\sum_{\ell=|m|}^{\infty} \sum_{q=-\ell}^{\ell} \left[\frac{1}{2\ell+1} \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^{\ell} \Phi_{nq}^{\ell} - \lambda \Phi_{mq}^{\ell} \right] P_{mq}^{\ell}(\mu)\, e^{-iq\varphi} = 0 ,$$

откуда, вследствие ортогональности функций $P_{mq}^{\ell}(\mu)$ и $\ell^{-iq\varphi}$, имеем:

$$\frac{1}{2\ell+1} \sum_{n=2}^{-2} p_{mn}^{\ell} \Phi_{nq}^{\ell} = \lambda \Phi_{mq}^{\ell},\ m \in \{2,0,-0,-2\},\ \ell = \ell_0, \ell_0+1, \ldots, q = -\ell, \ldots, \ell. \tag{1.34}$$

Из (1.34), в частности, видно, что λ должно быть собственным числом хотя бы одной из матриц $\hat{p}^{\ell}$, в противном случае все $\Phi_{mq}^{\ell} = 0$ и $\Phi(s) \equiv 0$. Далее, поскольку кратность λ, как собственного значения оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, конечна, постольку λ может быть собственным значением матриц $\hat{p}^{\ell}$ лишь для некоторого конечного набора чисел $\ell = \ell_1, \ldots, \ell_I$. Т.о., в соответствии с (1.34), Φ_{mq}^{ℓ} отличны от ноля лишь для $\ell = \ell_1, \ldots, \ell_I$, а собственный вектор (1.33) должен иметь вид

$$\Phi_m(s) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{q=-\ell}^{\ell_i} \Phi_{mq}^{\ell_i} p_{mq}^{\ell_i}(\mu) e^{-iq\varphi},$$

где в качестве коэффициентов $\{\Phi_{mq}^{\ell_i}\}$, $m \in \{2,0,-0,-2\}$, служит какая-либо последовательность собственных векторов матриц $\hat{p}^{\ell}$, $\ell = \ell_1, \ldots, \ell_I$, отвечающих λ. Но каждое слагаемое этой суммы есть собственный вектор оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, соответствующий λ. Поэтому мы доказали, что всякий собственный вектор оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, соответствующий собственному значению λ, является линейной комбинацией системы линейно независимых собственных векторов вида (1.29), где $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_m\}$ - собственные векторы некоторого конечного набора матриц $\hat{p}^{\ell}$, $\ell = \ell_1, \ldots, \ell_I$, отвечающие числу λ. Эту систему векторов мы выбираем в качестве базиса в собственном подпространстве оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, порожденном собственным значением λ.

Рассмотрим тот случай, когда оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ имеет присоединенные элементы, порожденные некоторым собственным вектором $\Phi(s)$ оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, отвечающим собственному значению λ. Вектор $\Phi(s)$, как мы выяснили, имеет вид

$$\Phi_m(s) = \alpha_m P_{mq_0}^{\ell_0} e^{-iq_0\varphi},\ m \in \{2,0,-0,-2\}, q_0 \in \{-\ell_0, \ldots, \ell_0\},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_m\}$ - собственный вектор некоторой матрицы $\hat{p}^{\ell_0}$, $\ell_0 \in \{\ell_1,...,\ell_I\}$, отвечающий ее собственному значению λ. Пусть $\Psi^j(s)$, $j = 1,...,J$ – система таких присоединенных векторов. Разложим их в ряд и подставим это разложение в (1.32). Используя далее равенство (1.19) леммы 1.1, приходим к выводу, что

$$\Psi^j_m(s) = \beta^j_m P^{\ell_0}_{mq_0}(\mu) e^{-iq_0\varphi} + \tilde{\Phi}_m(s), \tag{1.35}$$

где $\tilde{\Phi}(s)$ – некоторый собственный вектор оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, отвечающий собственному значению λ, линейно независимый с первым слагаемым в (1.35). Здесь $\boldsymbol{\beta}_j$ – система присоединенных векторов матрицы $\hat{p}^{\ell_0}$, соответствующих ее собственному вектору $\boldsymbol{\lambda}$. Отбрасывая в (1.35) собственный вектор $\tilde{\Phi}(s)$, приходим к желаемому результату.

Подсчитаем кратность $\nu(\lambda)$ каждого не нулевого собственного значения λ оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$. Пусть $\{\ell_i\}, i = 1,2,...,I(\lambda)$ – система таких чисел, что λ является собственным значением матриц $\hat{p}^{\ell}, \ell = 1,2,...,\ell_{I(\lambda)}$. Тогда $\nu(\lambda) = \sum_{i=1}^{I(\lambda)} (2\ell+1)\nu_i(\lambda)$, где $\nu_i(\lambda)$ – кратность λ как собственного значения матрицы $\hat{p}^{\ell_i}$.

Все сказанное справедливо и для $\lambda = 0$, если оно является собственным значением $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, с той лишь разницей, что его кратность может быть бесконечной.

2. Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ в пространстве $\mathsf{L}^{(4)}_1(\Omega)$. Сначала заметим, что в силу последнего пункта теоремы 1.1 все сказанное справедливо и для оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$. $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, как оператор в $\mathsf{L}^{(4)}_1(\Omega)$, есть продолжение по непрерывности $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, заданного на $C^{(4)}(\Omega) \subset \mathsf{L}^{(4)}_2(\Omega)$ - множества, всюду плотного в $\mathsf{L}^{(4)}_1(\Omega)$. При продолжении спектр оператора может измениться: либо к спектру добавятся новые точки, либо увеличится кратность уже имеющихся. Но это невозможно. Действительно, пусть $\lambda \neq 0$ – собственное значение $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, действующего в $\mathsf{L}^{(4)}_1(\Omega)$, а $\nu(\lambda)$ – его кратность. Тогда $\bar{\lambda}$ и $\nu(\lambda)$ – собственное значение и его кратность для оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$, действующего в сопряженном пространстве $\mathsf{L}^{(4)}_\infty(\Omega) = \mathsf{L}^{(4)*}_1(\Omega) \subset \mathsf{L}^{(4)}_2(\Omega)$. $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, как оператор в $\mathsf{L}^{(4)}_\infty(\Omega)$, задан и на $C^{(4)}(\Omega) \subset \mathsf{L}^{(4)}_2(\Omega)$. Продолжая $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ по непрерывности на $\mathsf{L}^{(4)}_2(\Omega)$, приходим к уже рассмотренному случаю. Т.о., λ есть собственное значение набора матриц $\hat{p}^{\ell *}$, $\ell = \ell_1,...,\ell_{I(\lambda)}$. Но тогда λ есть собственное значение матриц $\hat{p}^{\ell}$ с теми же ℓ и соответствующими кратностями.

Аналогичные рассуждения справедливы и для точки $\lambda = 0$, если она является собственным значением оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, с той лишь разницей, что ее кратность может быть бесконечной. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Спектр оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\right)$, а, следовательно, и его спектральный радиус $r\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}^n\right\|}$, одинаков во всех пространствах $C^{(4)}(\Omega)$ или $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$. В любом из этих пространств $\|\mathsf{P}\| = \left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\right\| \geq \sup|\lambda|\|h\|$, где $\sup$ берется по всем собственным значениям λ всех матриц $\hat{p}^{\ell}$.

Утверждения теоремы 1.2 остаются справедливыми и для оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}$. Действительно, рассматривая его сначала в $\mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$, в силу (1.19) имеем:

$$\left[\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right]_m = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty}\sum_{n=2}^{-2}\left(\sum_{k=2}^{-2}\frac{p_{mk}^{*\ell}\,p_{kn}^{\ell}}{2\ell+1}\right)\sum_{q=-\ell}^{\ell}(-1)^q P_{mq}^{\ell}(\mu)e^{iq\varphi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} d\mu'\,d\varphi'\,\Phi_n(\mu',\varphi')P_{nq}^{\ell}(\mu')e^{iq\varphi'}.$$

Отсюда видно, что теорема 1.2 выполняется в этом случае с той лишь разницей, что в качестве матриц $\hat{p}^{\ell}$ следует взять матрицы с компонентами

$$\sum_{k=2}^{-2}\frac{p_{mk}^{*\ell}\,p_{kn}^{\ell}}{2\ell+1},\ m,n \in \{2,0,-0,-2\}.$$

Из самосопряженности оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ вытекает равенство $\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}} = \sup\limits_i|\Lambda_i|$,

где Λ_i – собственные значения $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ (или матриц $\hat{p}^{*\ell}\hat{p}^{\ell}$) так, что в пространстве $\mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$ $\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}} = \left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}} = \sqrt{\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}} = \sup\limits_i\sqrt{\Lambda_i}$.

1.3 Оператор рассеяния для блочно-диагональных матриц $\hat{\Gamma}(\mu)$

При доказательстве теорем 1.1 и 1.2 мы использовали CP - представление для оператора рассеяния. Везде в дальнейшем нам удобно вернуться к SP - представлению оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$. При этом спектр оператора остается неизменным, а его собственные и присоединенные векторы преобразуются по правилу $\Phi^{cp}(s) \to \Phi^{sp}(s) = \hat{T}^{-1}\Phi^{cp}(s)$.

Далее рассмотрим вещественные клеточно-диагональные матрицы вида:

$$\hat{\Gamma}(\mu) = \left\{\Gamma_{ij}(\mu)\right\}_1^4 = \begin{bmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ b & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & c \\ 0 & 0 & -c & a_4 \end{bmatrix}(\mu). \qquad (1.36)$$

Для таких матриц

$$\hat{\Gamma}^*(\mu)=\hat{\Gamma}^+_{ij}(\mu)=\begin{bmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ b & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -c \\ 0 & 0 & c & a_4 \end{bmatrix}=\hat{Q}\hat{\Gamma}(\mu)\hat{Q}, \quad (1.37) \qquad \hat{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \hat{Q}^2=\hat{E}, \quad (1.38)$$

т.е. сопряженный оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ определяется матрицей (1.37). Заметим также, что из (1.5) и (1.38) следует коммутируемость матриц $\hat{L}(\alpha)$ и $\hat{Q}$:

$$\hat{L}(\alpha)\hat{Q}=\hat{Q}\hat{L}(\alpha). \qquad (1.39)$$

Наряду с оператором $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, рассмотрим симметрический оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$, определяемый матрицей $\hat{\Gamma}_s(\mu)$:

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s=\hat{Q}\hat{\hat{\mathsf{P}}}, \qquad (1.40) \qquad \hat{\Gamma}_s(\mu)=\hat{Q}\hat{\Gamma}\ (\mu)=\begin{bmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ b & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & c \\ 0 & 0 & c & -a_4 \end{bmatrix}(\mu). \qquad (1.41)$$

В соответствии с теоремой 1.2, собственные значения λ оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ совпадают с собственными значениями матриц $\hat{p}^{\ell}$. Переходя к SP - представлению с помощью преобразования $\hat{p}^{\ell}\to\hat{T}^{-1}\hat{p}^{\ell}\hat{T}$, легко обнаружить, что λ являются собственными значениями матриц:

$$\hat{\Gamma}_1^{\ell}=\begin{bmatrix} a_1^{\ell} & b^{\ell} \\ b^{\ell} & a_2^{\ell} \end{bmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_2^{\ell}=\begin{bmatrix} a_3^{\ell} & c^{\ell} \\ -c^{\ell} & a_4^{\ell} \end{bmatrix}, \quad \ell=0,1,...,$$

где $a_1^{\ell}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_1(\mu)P_{\ell}(\mu)d\mu,\ \ a_4^{\ell}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_4(\mu)P_{\ell}(\mu)d\mu\ ,\ \ \ell=0,1,2,...,$

$$b^{\ell}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} b(\mu)P_{\ell}^{(2)}(\mu)d\mu\ ,\ C^{\ell}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} C(\mu)P_{\ell}^{(2)}(\mu)d\mu,\ a_2^{\ell}=\frac{1}{2}\left[(a_2^{+\ell}+a_2^{-\ell})+(a_3^{+\ell}-a_3^{-\ell})\right], \qquad (1.42)$$

$$a_3^{\ell}=\frac{1}{2}\left[(a_2^{+\ell}-a_2^{-\ell})+(a_3^{+\ell}+a_3^{-\ell})\right],\ a_k^{\pm\ell}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_k(\mu)P_{2,\pm2}^{\ell}(\mu)d\mu\ ,\ \ k=2,3,\ \ \ell=2,3,....$$

Здесь $P_{\ell}(\mu)=P_{00}^{\ell}(\mu)$ - полиномы Лежандра, а $P_{\ell}^{(2)}(\mu)=P_{02}^{\ell}(\mu)$ - присоединенные функции Лежандра.

Полагая $\det(\hat{\Gamma}_{1,2}^{\ell}-\lambda\hat{E})=0$, найдем собственные значения $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$:

при $\ell=0,1 \quad \lambda_1^{\ell}=a_1^{\ell},\ \ \lambda_2^{\ell}=a_4^{\ell},\ \ \lambda_{3,4}^{\ell}=0 \qquad (1.43)$

при $\ell=2,3,...\ \ \lambda_{1,2}^{\ell}=\left(a_1^{\ell}+a_2^{\ell}\right)/2\pm\sqrt{\left(a_1^{\ell}-a_2^{\ell}\right)^2/4+b^{\ell^2}},\ \lambda_{3,4}^{\ell}=\left(a_3^{\ell}-a_4^{\ell}\right)/2\pm\sqrt{\left(a_3^{\ell}+a_4^{\ell}\right)^2/4-C^{\ell^2}}$.

Аналогично определяются собственные значения оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$, которые вещественны:

при $\text{l} = 0,1$ $\lambda_1^\ell = a_1^\ell$, $\lambda_2^\ell = a_4^\ell$, $\lambda_{3,4}^\ell = 0$; (1.44)

при $\ell = 2,3,...$ $\lambda_{1,2}^{\ell} = \frac{a_1^\ell + a_2^\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(a_1^\ell - a_2^\ell\right)^2}{4} + b^{\ell^2}}$, $\lambda_{3,4}^{\ell} = \frac{a_3^\ell - a_4^\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(a_3^\ell + a_4^\ell\right)^2}{4} + C^{\ell^2}}$.

Не представляет труда найти систему собственных векторов оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$:

при $\ell = 0,1$ $\Phi_{1q}^\ell(s) = C_1\left[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\right]^+ P_\ell^{(q)}(\mu)e^{-iq\varphi}$, $\Phi_{2q}^\ell(s) = C_2\left[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\right]^+ P_\ell^{(q)}(\mu)e^{-iq\varphi}$, (1.45)

при $\ell = 2,3,...$ $\Phi_{3q}^\ell(s) = C_3\left[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\right]^+ P_\ell^{(q)}(\mu)e^{-iq\varphi}$, $\Phi_{4q}^\ell(s) = C_4\left[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\right]^+ P_\ell^{(q)}(\mu)e^{-iq\varphi}$;

$$\Phi_{kq}^\ell(s) = \begin{bmatrix} (\alpha_0^\ell + \alpha_{-0}^\ell)P_\ell^{(q)}(\mu) \\ \alpha_2^\ell P_{2q}^\ell(\mu) + \alpha_{-2}^\ell P_{-2q}^\ell(\mu) \\ i[\alpha_2^\ell P_{2q}^\ell(\mu) - \alpha_{-2}^\ell P_{-2q}^\ell(\mu)] \\ -[\alpha_0^\ell - \alpha_{-0}^\ell]P_\ell^{(q)}(\mu) \end{bmatrix} e^{-iq\varphi}, \quad q \in \{-\ell, ..., \ell\}, \quad k = 1, ..., K \le 4.$$

Здесь C_k, $k = 1,2,3,4$ – произвольные постоянные, а α_m^ℓ, $m \in \{2,0,-0,-2\}$ - собственные векторы матиц $\hat{p}^\ell$ в CP - представлении, отвечающие собственным значениям λ_j^ℓ (1.43). Заметим, что в классе матриц (1.36) всякому собственному значению может соответствовать не более чем один присоединенный вектор. Таким образом, оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ при каждом ℓ либо не имеет присоединенных векторов, либо имеет их в количестве $(2\ell + 1)$ штук.

Выражения, аналогичные (1.45), можно выписать и для собственных векторов операторов $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}$. Для $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, в качестве матриц $\hat{p}^\ell$ должны быть взяты матрицы $\hat{p}^{\ell*}\hat{p}^\ell \big/ \left(2\ell + 1\right)$. Собственные векторы, отвечающие $\ell = 0,1$, у операторов $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ совпадают.

1.4 Дальнейшие свойства оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$. Конусы $K_p(\Omega)$ и $K_+(\Omega)$. Неотрицательные матрицы

Функция $\Phi(s)$, описывающие допустимые состояния поляризации, как это следует из физического анализа, должны удовлетворять определенным условиям. В SP - представлении эти условия имеют вид [1]:

а) $\Phi_i(s)$ - вещественные функции s $(i = 1,2,3,4)$; (1.46)

б) $\Phi_1(s) \ge 0$, $\Phi_1^2(s) \ge \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)$.

<u>Лемма 1.2</u> Множество $K_p(\Omega)$ функций из $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, удовлетворяющих условиям (1.46) почти всюду на Ω, обладает свойствами:

1. $K_p(\Omega)$ замкнуто в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$;
2. если $\Phi(s), \Psi(s) \in K_p(\Omega)$, то $\alpha\Phi(s) + \beta\Psi(s) \in K_p(\Omega)$, $\alpha, \beta \ge 0$;
3. если $\Phi(s) \in K_p(\Omega)$, то $-\bar{\Phi}(s) \overline{\in} K_p(\Omega)$;

4. каждый элемент $\mathbf{\Phi}(s) \in N(\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega))$ может быть представлен в виде разности $\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Psi}_1(s) - \mathbf{\Psi}_2(s)$, где $\mathbf{\Psi}_{1,2}(s) \in K_p(\Omega)$.

Доказательство. Первое и третье утверждения леммы очевидны. Второе вытекает из неравенств:

$$\left|\Phi_2(s)\Psi_2(s) + \Phi_3(s)\Psi_3(s) + \Phi_4(s)\Psi_4(s)\right| \le \sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)} \times$$
$$\times \sqrt{\Psi_2^2(s) + \Psi_3^2(s) + \Psi_4^2(s)} \le \Phi_1(s)\Psi_1(s), \mathbf{\Phi}(s), \mathbf{\Psi}(s) \in K_p(\Omega), \tag{1.47}$$

а для доказательства последнего достаточно положить

$$\mathbf{\Psi}_1(s) = \begin{cases} \mathbf{\Phi}(s), \text{ если } \Phi_1^2(s) \ge \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s), \\ \left\{\sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)}, \Phi_2(s), \Phi_3(s), \Phi_4(s)\right\}, \\ \text{если } \Phi_1^2(s) < \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s), \end{cases}$$

$$\mathbf{\Psi}_2(s) = \begin{cases} \{0,0,0,0\}, \quad \text{если} \quad \Phi_1^2(s) \ge \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s), \\ \left\{\sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)} - \Phi_1(s), \ 0,0,0\right\}, \\ \text{если } \Phi_1^2(s) < \Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s) \quad . \end{cases}$$

Согласно [4], $K_p(\Omega)$ является воспроизводящим конусом в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$.

Следствие 1. Множество функций $K_+(\Omega) = K_p(\Omega) \bigcap C^{(4)}(\Omega)$ образует телесный конус [4] в вещественном ядре $N(C^{(4)}(\Omega))$. Внутренние элементы удовлетворяют неравенству

$\Phi_1(s) > \sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)}, \ s \in \Omega,$ а граничные – равенству

$\Phi_1(s) = \sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)}$ хотя бы в одной точке $s \in \Omega$.

По определению [4] сопряженный конус $K_p^*(\Omega)$ образуют функции $\mathbf{\Psi}(s)$ такие, что функционалы $\Psi(\mathbf{\Phi})$ неотрицательны.

Следствие 2. $K_p^*(\Omega) = K_q(\Omega)$ при $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Действительно, для $\mathbf{\Psi}(s) \in K_q(\Omega)$ и только таких функций, в силу неравенства (1.47):

$$\Psi(\mathbf{\Phi}) \ge \int_\Omega \left[\Phi_1(s)\Psi_1(s) - \left|\Phi_2(s)\Psi_2(s) + \Phi_3(s)\Psi_3(s) + \Phi_4(s)\Psi_4(s)\right|\right] ds \ge$$
$$\ge \int_\Omega [\Phi_1(s)\Psi_1(s) - \sqrt{\Phi_2^2(s) + \Phi_3^2(s) + \Phi_4^2(s)}\sqrt{\Psi_2^2(s) + \Psi_3^2(s) + \Psi_4^2(s)}] ds \ge 0,$$

для любого $\mathbf{\Phi}(s) \in K_p(\Omega)$.

При $p = \infty$ будем рассматривать в качестве сопряженного конус $K_\infty^*(\Omega) \bigcap \mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$.

Относительно конусов $K_p(\Omega)$ и $K_+(\Omega)$, определим классы положительных, u_0 - положительных и сильно положительных операторов [4]. Следуя работе [3], введем понятие неотрицательной матрицы.

<u>Определение.</u> Клеточно-диагональную матрицу (1.36) назовем неотрицательной, если всякий вектор с компонентами, удовлетворяющими условиям (1.46), умножением на $\hat{\Gamma}(\mu)$ переводится в вектор, компоненты которого удовлетворяют тем же условиям.

Для таких матриц почти всюду на (-1,1) выполнены неравенства:

$$a_1(\mu) \ge 0; \left|b(\mu)\right| \le a_1(\mu); \ \left|C(\mu)\right| \le a_1(\mu); \ \left|d_k(\mu)\right| \le a_1(\mu), \ k = 2,3,4. \qquad (1.48)$$

<u>Лемма 1.3</u> Пусть вещественная клеточно-диагональная матрица $\hat{\Gamma}(\mu)$ неотрицательна почти всюду на (1.-1,1) и $\hat{\Gamma}_{ij}(\mu) \in \mathsf{L}_1(-1,1), \, i,j \in \{1,2,3,4\}$.

Тогда: $\left|a_1^1\right| < a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} a_1(\mu)d\mu; \left|a_4^1\right| < a;$ при $\ell = 2,3,...,$ $\left|a_k^\ell\right| < a,$ $k = 2,3;$

$\left|a_3^\ell a_4^\ell + (C^\ell)^2\right| < a^2$; $\left|b^\ell\right| < a;$ $\left|C^\ell\right| < a;$ $\left|a_1^\ell\right| < \sqrt{a^2 - (b^\ell)^2}$; $\left|a_4^\ell\right| < \sqrt{a^2 - (C^\ell)^2}$.

Число $\lambda_1^0 = a$ является старшим простым собственным значением операторов $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства:

$$\left|a_4^0\right| < a; \ -a + (b^\ell)^2 \Big/ \left(a + a_1^\ell\right) < a_2^\ell < (b^\ell)^2 \Big/ \left(a - a_1^\ell\right); \qquad (1.49)$$

И простым старшим собственным значением $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_S$ тогда и только тогда, когда наряду с (1.49) выполнены неравенства:

$$-a + (C^\ell)^2 \Big/ \left(a + a_4^\ell\right) < a_3^\ell < (C^\ell)^2 \Big/ \left(a - a_4^\ell\right), \qquad (1.50)$$

где коэффициенты a_k^ℓ, b^ℓ и C^ℓ определены в (1.42).

<u>Доказательство.</u> Из неравенств (1.48) следует:

$$\left|a_1^\ell\right| < \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_1(\mu)d\mu = a, \qquad \ell = 1,2,..., \qquad [7]$$

$$\left|a_4^1\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} a_4(\mu)\mu d\mu\right| \le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left|a_4(\mu)\right|d\mu - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left|a_4(\mu)\right|[1-|\mu|]d\mu < d;$$

$$\left|b^\ell\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} b(\mu)P_\ell^{(2)}(\mu)d\mu\right| \le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_1(\mu)d\mu - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_1(\mu)[1-\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right|]d\mu < a;$$

$$\left|C^\ell\right| \le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_1(\mu)d\mu - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_1(\mu)[1-\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right|]d\mu < a, \quad \ell = 2,3,...,$$

так как $\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right| \le 1$ и $\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right| = 1$ лишь на множестве меры ноль. Учитывая, что $\displaystyle\sum_{q=-\ell}^{\ell}\left|P_{mn}^\ell(\mu)\right|^2 \equiv 1$ имеем при $\ell = 2,3,...$:

$$\left|a_2^\ell\right| \le \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left\{\left|a_2(\mu)\right|\left|P_{22}^\ell(\mu)+P_{2,-2}^\ell(\mu)\right|+\left|a_3(\mu)\right|\left|P_{22}^\ell(\mu)-P_{2,-2}^\ell(\mu)\right|\right\}d\mu \le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d\mu\, a_1(\mu)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\left|P_{22}^\ell(\mu)+P_{2,-2}^\ell(\mu)\right|+\frac{1}{2}\left|P_{22}^\ell(\mu)-P_{2,-2}^\ell(\mu)\right|\right\} \le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d\mu a_1(\mu)\max\left\{\left|P_{22}^\ell(\mu)\right|,\left|P_{2,-2}^\ell(\mu)\right|\right\} < a;$$

$$\left(a_1^\ell\right)^2+\left(b^\ell\right)^2=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}d\mu\int_{-1}^{1}d\mu'\left[a_1(\mu)\mathrm{P}_\ell(\mu)a_1(\mu')\mathrm{P}_\ell(\mu')+b(\mu)\mathrm{P}_\ell^{(2)}(\mu)b(\mu')\mathrm{P}_\ell^{(1)}(\mu')\right] \le$$

$$\le \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}d\mu\int_{-1}^{1}d\mu' a_1(\mu)a_1(\mu')\left[\left|P_\ell(\mu)\right|\left|P_\ell(\mu')\right|+\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right|\left|P_\ell^{(2)}(\mu')\right|\right] \le \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}d\mu\int_{-1}^{1}d\mu' a_1(\mu)a_1(\mu')\times$$

$$\times\sqrt{\left|P_\ell(\mu)\right|^2+\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right|^2}\sqrt{\left|P_\ell(\mu')\right|^2+\left|P_\ell^{(2)}(\mu')\right|^2} < \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d\mu\, a_1(\mu)\right)^2 = a^2$$

a

$$\left|a_3^\ell a_4^\ell+\left(C^\ell\right)^2\right| = \frac{1}{4}\left|\int_{-1}^{1}d\mu\left\{a_3(\mu)\frac{1}{2}\left[P_{22}^\ell(\mu)-P_{2,-2}^l(\mu)\right]+a_2(\mu)\frac{1}{2}\left[P_{22}^\ell(\mu)+P_{2,-2}^\ell(\mu)\right]\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-1}^{1}d\mu' a_4(\mu')P_\ell(\mu')+\int_{-1}^{1}d\mu\int_{-1}^{1}d\mu' C(\mu)P_\ell^{(2)}(\mu)C(\mu')P_\ell^{(2)}(\mu')\right| \le \tag{1.51}$$

$$\le \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}a_1(\mu)d\mu\int_{-1}^{1}a_1(\mu')d\mu'\left[\left\{\frac{1}{2}\left|P_{22}^\ell(\mu)-P_{2,-2}(\mu)\right|+\frac{1}{2}\left|P_{22}^\ell(\mu)+P_{2,-2}^\ell(\mu)\right|\right\}\left|P_\ell(\mu')\right|+\right.$$

$$\left.+\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right|\left|P_\ell^{(2)}(\mu')\right|\right] \le \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}d\mu a_1(\mu)\int_{-1}^{1}d\mu' a_1(\mu')\left[\max\left\{\left|P_{22}^\ell(\mu)\right|,\left|P_{2,-2}^\ell(\mu)\right|\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left|P_\ell(\mu')\right|+\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right|\left|P_\ell^{(2)}(\mu')\right|\right] \le \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}a_1(\mu)d\mu\int_{-1}^{1}a_1(\mu')d\mu'\times$$

$$\times\sqrt{\max\left\{\left|P_{22}^\ell(\mu)\right|^2,\left|P_{2,-2}^\ell(\mu)\right|^2\right\}+\left|P_\ell^{(2)}(\mu)\right|^2}\times\sqrt{\left|P_\ell(\mu')\right|^2+\left|P_\ell^{(2)}(\mu')\right|^2} < a^2.$$

Неравенства $\left|a_3^\ell\right| < a$ и $\left(a_4^\ell\right)^2 < a^2-\left(C^\ell\right)^2, \ell=2,3,...,$ доказываются аналогично.

Таким образом, имеют смысл неравенства (1.49) и (1.50).

Докажем, что при выполнении этих неравенств, a есть простое собственное значение оператора $\hat{\hat{\mathrm{P}}}_s$. Пусть, например, выполнены (1.49) (индекс ℓ для простоты записей опустим): Из неравенства $-a+b^2/\left(a+a_1\right) < a_2 < a-b^2/\left(a-a_1\right)$, т.к. $\left|a_1\right| < a$, следует $(a_2+a)(a+a_1) > b^2,\ (a-a_1)(a-a_2) > b^2.$

Добавляя в левых и правых частях этих неравенств члены $(a_1^2+a_2^2)/4$, после преобразований, получим: $\left(a\pm\left(a_1+a_2\right)/2\right)^2 > (a_1-a_2)^2/4+b^2$. Так как по доказанному $\left|a_1+a_2\right|/2 < a$, $\left|a_2\right| < a$, то $a\pm\left(a_1+a_2\right)/2 > \sqrt{(a_1-a_2)^2/4+b^2}$.

Если $a_1 + a_2 \geq 0$, то $(a_1 + a_2)/2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2/4 + b^2} < a.$

Если $a_1 + a_2 < 0$, то $(a_1 + a_2)/2 - \sqrt{(a_1 - a_2)^2/4 + b^2} > -a$, т.е. для всех $\ell = 2,3,...$

$$\left|(a_1 + a_2)/2 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2/4 + b^2}\right| < a \ . \tag{1.52}$$

Поэтому, как это видно из выражений (1.44), $\left|\lambda_{1,2}^{\ell}\right| < a, \quad \ell = 2,3,.....$

Аналогично доказывается $\left|\lambda_{3,4}^{\ell}\right| < a,\ \ell = 2,3,...,$ при выполнении (1.50).

Учитывая, что $\left|a_4^0\right| < 0$ по предположению и $\left|\lambda_1^{\ell}\right| = \left|a_1^{\ell}\right| < a, \quad \left|\lambda_2^{\ell}\right| = \left|a_4^{\ell}\right| < a$, $\ell = 1,2,...,$ по доказанному, получаем простоту собственного значения $\lambda_1^0 = a$ оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$. Наоборот, если справедливо неравенство (1.52), то выкладки, обратные выполненным, приводят ко второму из неравенств (1.49). Утверждения теоремы относительно (1.50) доказываются аналогично.

Так как собственные значения $\lambda_{1,2}^{\ell}$ для операторов $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$ совпадают, то для доказательства леммы осталось показать, что

$$\left|\lambda_{3,4}^{\ell}\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right)\right| = \left|\left(a_3^{\ell} + a_4^{\ell}\right)/2 \pm \sqrt{(a_3^{\ell} - a_4^{\ell})^2/4 - (C^{\ell})^2}\right| < a, \quad \ell = 2,3,... \tag{1.53}$$

Действительно, всегда $(a - a_4)(a - a_3) > 0 \geq -C^2, \quad (a + a_4)(a + a_3) > 0 \geq -C^2$.

Прибавляя к левым и правым частям слагаемое $(a_3^2 + a_4^2)/4$, после простых преобразований найдем, что $a \pm \left(\left(a_3 + a_4\right)/2\right)^2 > \left(\left(a_3 - a_4\right)/2\right)^2 - C^2$.

Если $\left(a_3 - a_4\right)^2/4 - C^2 \geq 0$, то $\lambda_{3,4}$ действительны, и отсюда следует (1.53), т.к. всегда $\left|a_3 + a_4\right|/2 < a$.

При $\left(a_3 - a_4\right)^2/4 - C^2 < 0$, $\lambda_{3,4}$ комплексны и из (1.51) следует:

$\left|\lambda_{3,4}\right|^2 = \left(a_3 + a_4\right)^2/4 + \left[C^2 - \left(a_3 - a_4\right)^2/4\right] = a_3 a_4 + C^2 < a^2$. Лемма доказана.

<u>Замечание.</u> Неравенство $\left|a_4^0\right| < a$ выполнено для достаточно широкого класса матриц, отвечающих физическим законам рассеяния. Например, если при рассеянии естественного света $\left(\Phi(s) = I(s)\{1,0,0,0\}\right)$ возникает поляризация, то необходимо $b(\mu) \neq 0$ на множестве положительной меры. Но для неотрицательных матриц $a_1^2(\mu) \geq b^2(\mu) + C^2(\mu) + a_4^2(\mu)$, поэтому на множестве положительной меры $\left|a_4(\mu)\right| < a_1(\mu)$, откуда сразу следует $a - \left|a_4^0\right| \geq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[a_1(\mu) - \left|a_4(\mu)\right|]d\mu > 0$.

Физическая природа неравенств $-a + b^2/\left(a + a_1\right) < a_2 < a - b^2/\left(a - a_1\right)$ остается не ясной. Поэтому вопрос о физической природе простоты a остается до конца не выясненным.

Чтобы обеспечить неравенство $\left|a_4^0\right| < a$, можно было бы на матрицу $\hat{\Gamma}(\mu)$ наложить более жесткие условия, чем неотрицательность, а именно, предположить, что на множестве положительной меры $a_1^2(\mu) > b^2(\mu) + C^2(\mu) + a_4^2(\mu)$. Но это выполняется не всегда. Например, для матрицы рассеяния Рэлея

$$a_1(\mu) = 3(1+\mu^2)/4,\, b(\mu) = 3(\mu^2 - 1)/4,\, C(\mu) \equiv 0,\, a_4(\mu) = 3\mu/2 \ ,$$

так что $b^2(\mu) + C^2(\mu) + a_4^2(\mu) \equiv a_1^2(\mu)$.

В скалярном случае простота a есть тривиальное следствие неотрицательности индикатрисы рассеяния $g(\mu)$ [2], как для таких индикатрис $\left|a_1^\ell\right| < a$, $\ell = 1,2,...$ Здесь же, помимо неотрицательности матрицы $\hat{\Gamma}(\mu)$, накладываются дополнительные ограничения на коэффициенты разложения ее элементов $b(\mu)$, $a_{2,3}(\mu)$ и $a_4(\mu)$ по обобщенным сферическим функциям, обеспечивающие простоту a. Интересно отметить, что коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра в векторном случае подчинены более жестким условиям $\left|a_1^\ell\right| < \sqrt{a^2 - (b^\ell)^2}$, $\ell = 2,3,...$, чем в скалярном, где $\left|a_1^\ell\right| < a$.

Класс матриц рассеяния, для которых a – простое собственное значение, не пуст. Это видно на примере матрицы рассеяния Рэлея. Для нее отличные от нуля коэффициенты разложения равны [3]:

$$a_1 = 1;\ a_1^{(2)} = 0.1;\ \ a_4^{(1)} = 0.5;\ a_2^{(2)} = 0.6;\ b^{(2)} = 0.6/\sqrt{6}\ .$$

Неравенства (1.49) оказываются выполненными, что обеспечивает простоту a.

<u>Теорема 1.3.</u> Пусть вещественная клеточно-диагональная матрица $\hat{\Gamma}(\mu)$ неотрицательна почти при всех $\mu \in (-1,1)$ и $\Gamma_{ij}(\mu) \in \mathsf{L}_1\,(-1,1)$, $i,j \in \{1,2,3,4\}$. Тогда: операторы $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$ положительны относительно конусов $K_p(\Omega)$ и $K_+(\Omega)$; все собственные значения указанных операторов не превосходят по модулю собственного значения $a = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_1(\mu) d\mu > 0$ и $\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}} = \|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}} = \|\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}} = a$. В $C^{(4)}(\Omega)$ и $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ спектральный радиус $r\ \left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}^n\|}\ = a$.

Операторы $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$ сильно положительны относительно $K_+(\Omega)$ тогда и только тогда, когда a простое.

При $\Gamma_{ij} \in \mathsf{L}_q\,(-1,1)$, $i,j \in \{1,2,3,4\}$ указанные операторы Φ_0 - положительны относительно конуса $K_p(\Omega)$, $p^{-1}\ + q^{-1} = 1$, $q \in [1,\infty]$, а $\Phi_0(s) = \dfrac{1}{4\pi}\{1,0,0,0\}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\Phi(s) \in K_p(\Omega), p \in [1,\infty]$. Тогда из теоремы 1.1 и вещественности матрицы $\hat{\mathsf{P}}(s',s)$ следует, что $\hat{\mathsf{P}}\Phi(s) \in N\left(\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)\right)$. Так как матрица $\hat{L}^{sp}(\alpha)$ (1.5) неотрицательна при любом α, то матрица

$\hat{\mathsf{P}}(s',s)=\hat{L}(\chi_1)\hat{\Gamma}(s',s)\hat{L}(\chi_2)$ неотрицательна почти при всех $s',s\in\Omega$. Поэтому почти при всех $s,s',s''\in\Omega$:

$$\left[\hat{\mathsf{P}}(s',s)\Phi(s')\right]_1\geq 0,$$

$$\left[\hat{\mathsf{P}}(s',s)\Phi(s')\right]_1\left[\hat{\mathsf{P}}(s'',s)\Phi(s'')\right]_1-\sum_{j=2}^{4}\left[\hat{\mathsf{P}}(s',s)\Phi(s')\right]_j\left[\hat{\mathsf{P}}(s'',s)\Phi(s'')\right]_j\geq 0.$$

Следовательно, почти при всех $s\in\Omega$

$$\left[\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right]_1=\int_\Omega\left[\hat{\mathsf{P}}(s',s)\Phi(s')\right]_1 ds'\geq 0,\qquad \left[\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right]_1^2-\sum_{j=2}^{4}\left[\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\right]_j^2=$$

$$=\int_{\Omega\times\Omega}ds'ds''\left\{\left[\hat{\mathsf{P}}(s',s)\Phi(s')\right]_1\left[\hat{\mathsf{P}}(s'',s)\Phi(s'')\right]_1-\sum_{j=2}^{4}\left[\hat{\mathsf{P}}(s',s)\vec{\Phi}(s')\right]_j\left[\hat{\mathsf{P}}(s'',s)\vec{\Phi}(s'')\right]_j\right\}\geq 0,$$

что и доказывает положительность оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ относительно конуса $K_p(\Omega)$.

Если $\Phi(s)\in K_+(\Omega)$, то $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)\in N\left(C^{(4)}(\Omega)\right)$ (теорема 1.1) и положительность $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ относительно $K_+(\Omega)$ устанавливается аналогичным образом. Операторы $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*=\hat{Q}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\hat{Q}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s=\hat{Q}\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ положительны, т.к. неотрицательна матрица $\hat{Q}$ (1.38).

Среди максимальных по модулю собственных значений операторов $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$ обязательно присутствует собственное значение $\lambda_1^0=a$. Действительно, пусть это не так, т.е. найдется конечное число собственных значений по модулю превосходящих a. В силу положительности этих операторов, среди максимальных по модулю существует положительное $\lambda>a$. Ему отвечает хотя бы один собственный вектор, лежащий в $K_+(\Omega)$ [4]. Первая компонента этого вектора, как видно из (1.45), должна быть либо нулем, либо линейной комбинацией функций $P_\ell^{(q)}(\mu)\cos q\varphi$, $P_\ell^{(q)}(\mu)\sin q\varphi$ для некоторого набора $\ell=1,2,...,\ell_0$, $q=-\ell,-\ell+1,...,\ell$. Но такая комбинация никогда не является неотрицательной функцией, так как интеграл от нее по $d\mu d\varphi$ всегда равен нулю, вследствие ортогональности $P_\ell^{(q)}(\mu)\cos q\varphi$ и $P_\ell^{(q)}(\mu)\sin q\varphi$. Это противоречит принадлежности этого вектора конусу $K_+(\Omega)$. Таким образом все собственные значения по модулю не превосходят a.

Так как $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$ – самосопряженный оператор, то $\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=a$. С одной стороны,

$$\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\left\|\hat{Q}\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}\leq\left\|\hat{Q}\right\|\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=a.$$

Но a – собственное значение $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, т.е. $\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}\geq a$. Следовательно, $\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=a$ и во всех пространствах $r\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}^n\right\|}=a$ (следствие из теоремы 1.2).

Рассмотрим теперь $\hat{\hat{P}}\left(\hat{\hat{P}}^*,\hat{\hat{P}}_*\right)$ как оператор в пространстве $C^{(4)}(\Omega)$. Пусть a - простое собственное значение $\hat{\hat{P}}$. Для того, чтобы убедиться в сильной положительности $\hat{\hat{P}}$ относительно $K_+(\Omega)$, построим как и в [5] оператор $\hat{\hat{P}}_1\Phi(s)=\hat{\hat{P}}\Phi(s)-a\Phi_0(\Phi)\Phi^0(s)$, где $\Phi^0(s)=\{1,0,0,0\}$ - собственный вектор $\hat{\hat{P}}$, отвечающий $\lambda_1^0=a$, а функционал

$$\Phi_0(\Phi)=(\Phi^0,\Phi)=\int_\Omega \Phi_1(s)ds>0 \text{ при } \Phi(s)\in K_+(\Omega).$$

Повторяя дословно доказательство второй части теоремы 6.3 работы [5], заключаем, что для любого $\Phi(s)\in K_+(\Omega)$ найдется такой номер $n\Phi$, что $\hat{\hat{P}}^n\Phi(s)\in \operatorname{int}K_+(\Omega)$; это и означает по определению, сильную положительность $\hat{\hat{P}}$. Обратно, если $\hat{\hat{P}}$ сильно положителен, то по той же теореме, a – простое собственное значение, т.к. $\hat{\hat{P}}\Phi^0(s)=a\Phi^0(s),\ \Phi_0(s)\in \operatorname{int}K_+(\Omega)$.

Пусть теперь $\Gamma_{ij}(\mu)\in L_q(-1,1), i,j\in\{1,2,3,4\}$, $q\in[1,\infty]$ и $\Phi(s)\in K_p(\Omega)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Тогда, на основании теоремы 1.1 и неотрицательности оператора $\hat{\hat{P}}$, $\hat{\hat{P}}\Phi(s)\in K_+(\Omega)$. Вследствие сильной положительности $\hat{\hat{P}}$ можно указать такой номер $n=n(\Phi)$, что $\hat{\hat{P}}^{n+1}\Phi(s)=\hat{\hat{P}}^n\left[\hat{\hat{P}}\Phi(s)\right]\in \operatorname{int}K_+(\Omega)$

И поэтому найдется такое число $\alpha>0$, что

$$\hat{\hat{P}}^{n+1}\Phi(s)-\alpha\Phi^0\left(s\right)\in K_+(\Omega)\subset K_p(\Omega) \tag{1.54}$$

или, иначе, $\hat{\hat{P}}^{n+1}\Phi(s)\ge\alpha\Phi^0(s)$ относительно конуса $K_p(\Omega)$.

С другой стороны, $\Phi^0(s)\in \operatorname{int}K_+(\Omega)$ ($K_+(\Omega)$ – телесный конус в $N\left(C^{(4)}(\Omega)\right)$ и, следовательно, при некотором $\beta>0$:

$$\Phi^0(s)-\left(1/\beta\right)\hat{\hat{P}}^{n+1}\Phi(s)\in K_+(\Omega)\subset K_p(\Omega) \text{ или } \hat{\hat{P}}^{n+1}\Phi(s)\le\beta\Phi^0(s) \tag{1.55}$$

относительно конуса $K_p(\Omega)$.

Неравенства (1.54) и (1.55) означают Φ^0 - положительность оператора $\hat{\hat{P}}$ относительно $K_p(\Omega)$. Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> Операторы $\hat{\hat{P}}$ и $\hat{\hat{P}}^*$ сильно положительны тогда и только тогда когда выполнены неравенства (1.49):

$$\left|a_4^0\right|<a,\quad -a+\left(b^\ell\right)^2\Big/\left(a+a_1^\ell\right)<a_2^\ell<a-\left(b^\ell\right)^2\Big/\left(a-a_4^\ell\right),\qquad \ell=2,3,...$$

оператор $\hat{\hat{P}}_s$ сильно положителен тогда и только тогда, когда наряду с (1.49)

$$-a+\left(C^\ell\right)^2\Big/\left(a+a_4^\ell\right)<a_3^\ell<a-\left(C^\ell\right)^2\Big/\left(a-a_4^\ell\right),\qquad \ell=2,3,...,$$

Аналогичные утверждения имеют место в скалярном случае.

Класс неотрицательных матриц $\hat{\Gamma}(\mu)$, для которых оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ сильно положителен, не пуст. Например, для матрицы рассеяния Рэлея собственное значение a простое, что обеспечивает сильную положительность $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$.

Рассмотрим пространства $\mathsf{L}_p^{(4)}(-1,1)$ и $C^{(4)}[-1,1]$ функций, не зависящих от переменной φ. В этих пространствах оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*, \hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right)$ упрощается:

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(\mu) \equiv \hat{\hat{\mathsf{P}}}^0\Phi(\mu) = \int_{-1}^{1} \hat{\mathsf{P}}_0(\mu',\mu)\Phi(\mu')d\mu', \tag{1.56}$$

где $$\hat{\mathsf{P}}_0(\mu',\mu) = \int_0^{2\pi} \hat{\mathsf{P}}(s',s)\,d\varphi'. \tag{1.57}$$

Чтобы доказать это, достаточно сослаться на теорему 1.1 и проверить, что функции $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(s)$ действительно не зависят от азимута φ. Из равенства (1.19) следует справедливость этого утверждения для пространств $C^{(4)}[-1,1]$ и $\mathsf{L}_p^{(4)}(-1,1)$ с $p \geq 2$. Продолжив оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_0$ по непрерывности с $C^{(4)}[-1,1]$ на любое $\mathsf{L}_p^{(4)}(-1,1)$, $p \in [1,2)$ (продолжение единственно), получим требуемый результат, т.к. предел последовательности не может зависеть от φ.

Важным свойством оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_0$ является клеточно-диагональная структура матрицы $\hat{\mathsf{P}}_0(\mu',\mu)$ в SP - представлении [3]:

$$\hat{\mathsf{P}}_0(\mu',\mu) = \begin{bmatrix} a_1(\mu',\mu) & b(\mu',\mu) & 0 & 0 \\ b(\mu,\mu') & a_2(\mu',\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\mu',\mu) & C(\mu',\mu) \\ 0 & 0 & -C(\mu,\mu') & a_4(\mu',\mu) \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

Действительно, полагая в (1.19) $\Phi(s) \equiv \Phi(\mu)$, выполнив интегрирование по φ' и переходя к SP - представлению с помощью матрицы $\hat{T}$ (1.3), приходим к равенству (1.58), где

$$a_1(\mu',\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, a_1^\ell P_\ell\,(\mu')P_\ell\,(\mu), \qquad a_4(\mu',\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1) a_4^\ell\, P_\ell\,(\mu')P_\ell\,(\mu),$$

$$b(\mu',\mu) = \sum_{\ell=2}^{\infty}\left(2\ell+1\right)b^\ell P_\ell\,(\mu')P_\ell^{(2)}(\mu),\; C(\mu',\mu) = \sum_{\ell=2}^{\infty}(2\ell+1)C^\ell\, P_\ell^{(2)}(\mu')P_\ell\,(\mu), \tag{1.59}$$

$$a_2(\mu',\mu) = \sum_{\ell=2}^{\infty}(2\ell+1)\, a_2^\ell\, P_\ell^{(2)}(\mu')P_\ell^{(2)}(\mu), \qquad a_3(\mu',\mu) = \sum_{\ell=2}^{\infty}(2\ell+1)\, a_3^\ell\, P_\ell^{(2)}(\mu')P_\ell^{(2)}(\mu),$$

а коэффициенты a_k^ℓ, b^ℓ и C^ℓ определены в (1.42).

Обозначим через $\mathsf{L}_p^{\mathrm{I}}(-1,1)$ и $\mathsf{L}_p^{\mathrm{II}}(-1,1)$ подпространства функций, определяемые условиями:

$$\mathsf{L}_p^{\mathrm{I}}(-1,1)=\left\{\Phi(\mu)\in\mathsf{L}_p^{(4)}(-1,1),\,\Phi_3(\mu)=\Phi_4(\mu)=0\right\},$$

$$\mathsf{L}_p^{\mathrm{II}}(-1,1)=\left\{\Phi(\mu)\in\mathsf{L}_p^{(4)}(-1,1),\,\Phi_1(\mu)=\Phi_2(\mu)=0\right\}$$

и соответствующим образом определим пространства $C^{\mathrm{I}}[-1,1]$ и $C^{\mathrm{II}}[-1,1]$. Очевидно, множества $K_p^{\mathrm{I}}=K_p\bigcap\mathsf{L}_p^{\mathrm{I}}(-1,1)$ и $K_+^{\mathrm{I}}=K_+(\Omega)\bigcap C^{\mathrm{I}}[-1,1]$ образуют конусы в пространствах $\mathsf{L}_p^{\mathrm{I}}(-1,1)$ и $C^{\mathrm{I}}[-1,1]$, а $\mathsf{L}_p^{\mathrm{II}}(-1,1)\bigcap K_p(\Omega)=0$, $C^{\mathrm{II}}[-1,1]\bigcap K_+(\Omega)=0$. Конус $K_+^{\mathrm{I}}=[-1,1]$ телесен в $N\left(C^{\mathrm{I}}[-1,1]\right)$. Вследствие (1.58), пространства $\mathsf{L}_p^{\mathrm{I}}(-1,1)$, $\mathsf{L}_p^{\mathrm{II}}(-1,1)$, $C^{\mathrm{I}}[-1,1]$ и $C^{\mathrm{II}}[-1,1]$ инвариантны относительно оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$. Обозначим через $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{\mathrm{I}}$ сужение оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ на подпространство $\mathsf{L}_p^{\mathrm{I}}(-1,1)$ или $C^{\mathrm{I}}[-1,1]$. $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{\mathrm{I}}$ - самосопряженный оператор и поэтому его спектр вещественен. Так как $\Phi^0(s)=\{1,0,0,0\}/4\pi\in C^{\mathrm{I}}[-1,1]$, то $\left\|\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{\mathrm{I}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{\mathrm{I}}}=a$.

Аналогичным образом могут быть введены сужения операторов

$\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{*}=\hat{Q}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\hat{Q}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s=\hat{Q}\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ на $\mathsf{L}_p^{\mathrm{I}}(-1,1)$ и $C^{\mathrm{I}}[-1,1]$.

Так как на этих пространствах $\hat{Q}$ – единичная матрица, то $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{*\mathrm{I}}=\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s^{\mathrm{I}}=\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{\mathrm{I}}$.

В пространстве $C^{\mathrm{I}}[-1,1]$ теорема 1.3 может быть усилена.

Теорема 1.4 Пусть выполнены условия теоремы 1.3. Тогда при выполнении неравенств (1.49) операторы $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}^{*}$ сильно положительны в $C^{\mathrm{I}}[-1,1]$ относительно конуса $K_+^{\mathrm{I}}=[-1,1]$; а при выполнении (1.50) сильно положителен относительно $K_+^{\mathrm{I}}=[-1,1]$ и оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$.

Сильная положительность следует из инвариантности $C^{\mathrm{I}}[-1,1]$ относительно этих операторов, равенства $K_+^{\mathrm{I}}=K_+(\Omega)\bigcap C^{\mathrm{I}}[-1,1]$ и теоремы 1.3.

Для оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ может быть найдено представление типа Гельдера-Шмидта. Рассмотрим $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ в гильбертовом пространстве $\mathsf{L}_2^{(4)}(\Omega)$. Пусть $\left\{\lambda_i\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right)\right\}$, $i=1,2,...$ – упорядоченная система собственных значений $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$, а $\{\Phi_i(s)\}$ – соответствующая полная система ортонормированных собственных векторов. Тогда, в силу самосопряженности $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$, для него справедливо представление Гельдера-Шмидта [6]:

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s=\sum_{i=1}^{r(\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s)}\lambda_i\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right)\left(\,\cdot,\Phi_i(s)\right)\Phi_i(s),r\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right)\le\infty.$$

Умножая это равенство на $\hat{Q}$, получим соответствующее представление для оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$:

$$\hat{\hat{\mathsf{P}}} = \sum_{i=1}^{r(\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s)} \lambda_i \left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\right)\left(\,\cdot\,, \Phi_i(s)\right) \hat{Q}\Phi_i(s).$$

2. Характеристическое уравнение теории переноса поляризованного излучения

Изучим вопрос о разрешимости характеристического уравнения

$$\hat{\hat{U}}(k)\Phi(k,s) = \Phi(k,s), \quad \hat{\hat{U}}(k) = (1+k\mu)^{-1}\hat{\hat{\mathsf{P}}} \tag{2.1}$$

и исследуем структуру множества всех тех значений k, при которых уравнение (2.1) разрешимо.

2.1 Разрешимость характеристического уравнения

Пусть Z_0 – комплексная плоскость с разрезом вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞. Как следует из теоремы 1.1, $\hat{\hat{U}}(k)$ при $k \in Z_0$ – вполне непрерывный оператор в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ и в $C^{(4)}(\Omega)$. Если $k \in (-1,1)$, то оператор $\hat{\hat{U}}(k)$, согласно теоремам 1.3–1.4, положителен относительно конусов $K_p(\Omega)$ и $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$. Наряду с $\hat{\hat{U}}(k)$, будем рассматривать операторы:

$$\hat{\hat{U}}_s(k) = \hat{Q}\hat{\hat{U}}(k) = (1+k\mu)^{-1}\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\,,\ \hat{\hat{V}}(k) = (1+k\mu)^{-1/2}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\,(1+k\mu)^{-1/2},$$

$$\hat{\hat{V}}_s(k) = (1+k\mu)^{-1/2}\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\,(1+k\mu)^{-1/2},$$

обладающие теми же свойствами полной непрерывности и положительности, что и $\hat{\hat{U}}(k)$. Кроме того, $\hat{\hat{V}}_s(k)$ - самосопряженный оператор при $k \in (-1,1)$.

Уравнение (2.1) при к $k \in Z_0$ эквивалентно уравнению

$$\hat{\hat{V}}(k)\Phi(k,s) = \Phi(k,s), \tag{2.2}$$

т.е. из разрешимости одного из них следует разрешимость другого.

<u>Лемма 2.1</u> При $k \in Z_0$ все собственные и присоединенные векторы, отвечающие ненулевому собственному значению $\hat{\hat{U}}(k)$, лежат в $C^{(4)}(\Omega)$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим $\hat{\hat{U}}(k)$ в $\mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$. Пусть собственному значению $\lambda(k)$ оператора $\hat{\hat{U}}(k)$ отвечает r собственных векторов $\Phi_j(k,s) \in \mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega)$, $j = 1,2,\ldots,r$. Каждому из них соответствует t_j присоединенных векторов $\Phi_j^i(k,s) \in \mathsf{L}_1^{(4)}(\Omega), i = 1,2,..,t_j$: $\lambda(k)\Phi_j^i(k,s) + \Phi_j^{i-1}(k,s) = \hat{\hat{U}}(k)\Phi_j^i(k,s)$, $\Phi_j^0(k,s) = \Phi_j(k,s)$, $j = 1,2,\ldots,r,\quad i = 1,2,\ldots,t_j$. Тогда $\lambda(k)$ - собственное значение оператора

$$\hat{\hat{U}}^*(k) = \hat{\hat{\mathsf{P}}}^*(1+\bar{k}\mu)^{-1} = \hat{Q}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\,\hat{Q}(1+\bar{k}\mu)^{-1}$$

и ему соответствует система собственных и присоединенных векторов $\Psi_j^i(k,s),\quad j=1,2,...,r,\quad i=0,1,...,t_j$, лежащих в $\mathsf{L}_\infty^{(4)}(\Omega)$. Но, как легко проверить, векторы $\Phi_j^i(k,s)$ и $\Psi_j^i(k,s)$ связаны соотношением $\Psi_j^i(k,s)=(1+\bar{k}\mu)\hat{Q}\Phi_j^i(k,s)$ и, следовательно, $\Phi_j^i(k,s)\in\mathsf{L}_\infty^{(4)}(\Omega),\quad j=1,2,...,r,\ \ i=0,1,...,t_j.$

Тогда, при $\bar{\lambda}(k)\neq 0$, в силу теоремы 1.1:

$$\Phi_j^i(k,s)=\left[\lambda(k)(1+k\mu)\right]^{-1}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi_j^i(k,s)-\lambda^{-1}(k)\Phi_j^{i-1}(k,s)\in C^{(4)}(\Omega),\ j=1,2,...,r,\ i=0,1,...,t_j.$$

В случае $\lambda(k)=0$, собственные векторы операторов $\hat{U}(k)$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ совпадают.

Аналогичными свойствами обладают собственные и присоединенные векторы операторов $\hat{U}_s(k),\ \hat{V}(k)$ и $\hat{V}_s(k)$.

<u>Лемма 2.2</u> В условиях теоремы 1.3 операторы $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$ сильно положительны относительно конуса $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$ при $k\in(-1,1)$.

Если $\Gamma_{ij}(\mu)\in\mathsf{L}_q\ (-1,1),\ \ i,j\in\{1,2,3,4\},\ q\in[1,\infty]$, то $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$ Φ^0 – положительны относительно $K_p(\Omega),\ p^{-1}+q^{-1}=1,$ где $\Phi^0(s)=\{1,0,0,0\}/4\pi.$

Для доказательства достаточно представить операторы $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$ суммой сильно положительного (Φ^0 – положительного) и положительного:

$$\hat{\hat{U}}(k)=(1+|k|)^{-1}\hat{\hat{\mathsf{P}}}+\left(|k|-k\mu\right)(1+|k|)^{-1}(1+k\mu)^{-1}\hat{\hat{\mathsf{P}}},\quad k\in(-1,1).$$

Прибавление положительного оператора сохраняет сильную положительность (Φ^0–положительность). Так, если $\Phi(s)\in k_p(s)$, то

$$\hat{\hat{U}}^n(k)\Phi(s)\geq(1+|k|)^{-n}\hat{\hat{\mathsf{P}}}^n\,\Phi(s)\geq\alpha(1+|k|)^{-n}\Phi^0(s),\ \ \alpha>0,$$

относительно конуса $K_p(\Omega)$.

Таким образом, утверждения леммы следуют из теоремы 1.3 и 1.4.

<u>Лемма 2.3</u> В условиях теоремы 1.3 справедливы утверждения.

1. При каждом $k\in(-1,1)$ существует положительное простое собственное значение $M(k)$, общее для операторов $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$ и большее модулей всех остальных собственных значений. Ему отвечает единственный в $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$ собственный вектор $\Phi(k,\mu)=\left\{\ \Phi_1(k,\mu),\ \Phi_2(k,\mu),\ 0,0\ \right\}$, $\Phi(k,\mu)\in\ \operatorname{int}K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$ операторов $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$. Других собственных векторов в конусе $K_1(\Omega)$ у этих операторов нет. Нет собственных векторов в $K_1(\Omega)$ и при k – комплексном. Спектральный радиус $r\left(\hat{\hat{U}}(k)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|\hat{\hat{U}}^n(k)\right\|}=M(k)$ в любом из пространств $C^{(4)}(\Omega)$ или $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega),\ p\in[1,\infty]$.

2. Функция $M(k)$, заданная на интервале (–1,1), обладает следующи-

ми свойствами:

а) $M(k)=M(-k)$, $M(0)=a$; б) $M(k)=\left\|\hat{\hat{V}}(k)\right\|_{L_2^{(4)}}=\left\|\hat{\hat{V}}_s(k)\right\|_{L_2^{(4)}}$; $M(k)$ – аналитична в некоторой открытой области $G_0 \subset Z_0$, содержащей интервал (–1,1);

в) $M'(0)=0,\ M'(k)>0$ при $k\in(0,1)$ и $\lim\limits_{k\to 1-0} M(k)=\infty$;

г) $\Phi(k,\mu)=\Phi(-k,-\mu)$; $\Phi(k,\mu)$ аналитична в G_0.

Доказательство.

1. Мы показали, что собственные векторы операторов $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$, отвечающие ненулевым собственным значениям, лежат в $C^{(4)}(\Omega)$. Это означает, что спектры этих операторов не зависят от пространства, в котором мы их рассматриваем. Поэтому, при доказательстве первого пункта леммы, ограничимся пространством $N\left(C^{(4)}(\Omega)\right)$. Согласно лемме 2.2, операторы $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$, $k\in(-1,1)$, сильно положительны относительно конуса $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$. Следовательно, по теореме 6.3 работы [5], каждый имеет единственный в $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$ собственный вектор, и каждому из этих векторов отвечает простое положительное собственное значение, большее модулей всех остальных. Но сужения операторов $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$ на пространство $N\left(C^{\mathrm{I}}[-1,1]\right)\supset K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$ совпадают, так как этим свойством обладают операторы $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ и $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s$. Отсюда следует, что собственные векторы $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$, лежащие в $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$, и отвечающие им собственные значения также совпадают. Обозначим их через $\Phi(k,\mu)$ и $M(k)$ соответственно:

$$M(k)\Phi(k,\mu)=\hat{\hat{U}}(k)\Phi(k,\mu)=\hat{\hat{U}}_s(k)\Phi(k,\mu).$$

Так как все собственные векторы $\hat{\hat{U}}(k)$ и $\hat{\hat{U}}_s(k)$ непрерывны (2.1) и $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]\subset K_1(\Omega)$, то других собственных векторов в конусе $K_1(\Omega)$ нет, т.е. $\Phi(k,\mu)$ оказывается единственным вектором, лежащим в $K_1(\Omega)$. Если k комплексно, то легко показать, что соответствующие ему собственные векторы так же комплексны, а следовательно, не могут лежать в $K_1(\Omega)$. Очевидно, что $M(k)$ является старшим собственным значением и операторов $\hat{\hat{V}}(k)$ и $\hat{\hat{V}}_s(k)$. Очевидно также, что $r\left(\hat{\hat{U}}(k)\right)=r\left(\hat{\hat{U}}_s(k)\right)=M(k)$.

2. Далее будем рассматривать $\hat{\hat{U}}(k)$ в пространстве $L_2^{(4)}(\Omega)$. Для доказательства четности функции $M(k)$ воспользуемся соотношением [7]:

$$\hat{\mathsf{P}}(-\mu,\mu',\varphi-\varphi')=\hat{Q}_1\ \hat{\mathsf{P}}(\mu,\mu',\varphi-\varphi')\ \hat{Q}_1\ \text{, где } \hat{Q}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}. \qquad (2.3)$$

Положим $k=-|k|<0$. Тогда, в силу определения $M(k)$ и $\Phi(k,\mu)$:

$$M(-|k|)\Phi(-|k|,\mu)=(1-|k|\mu)^{-1}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-1}^{1}d\mu'\hat{\mathsf{P}}(\mu,\mu',\varphi-\varphi')\Phi(-|k|,\mu') \quad .$$

Заменяя в этом уравнении μ на $-\mu$ и используя (2.3), получим:

$$M(-|k|)\hat{Q}_1\Phi(-|k|,-\mu)=(1+|k|\mu)^{-1}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-1}^{1}d\mu'\hat{\mathsf{P}}(\mu,\mu',\varphi-\varphi')\hat{Q}_1\Phi(-|k|,-\mu') \quad .$$

Таким образом $M(-|k|)$ оказывается и максимальным по модулю собственным значением оператора $\hat{\hat{U}}(|k|)$. В силу простоты его заключаем, что $M(|k|)=M(-|k|)$ и $\Phi(|k|,\mu)=\hat{Q}_1\Phi(-|k|,-\mu)=\Phi(-|k|,-\mu)$, так как

$$\Phi(k,\mu)=\left\{\Phi_1(k,\mu),\Phi_2(k,\mu),0,0\right\}\in N\left(C^{\mathrm{I}}[-1,1]\right).$$

Далее $\hat{\hat{U}}(0)=\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, откуда $M(0)=a$.

Рассмотрим оператор $\hat{\hat{V}}_s(k)=(1+k\mu)^{-1/2}\,\hat{\hat{\mathsf{P}}}_s\,(1+k\mu)^{-1/2}$. При $k\in(-1,1)$ $\hat{\hat{V}}_s(k)$ – самосопряженный оператор. Очевидно, что $\hat{\hat{V}}_s^*(k)=\hat{\hat{V}}_s(\bar{k})$, т.е. операторы $\hat{\hat{V}}_s(k)$ образуют самосопряженное голоморфное в Z_0 семейство [8]. В этом случае собственные значения и собственные векторы $\hat{\hat{V}}_s(k)$ голоморфны в окрестности каждой точки интервала (-1,1), а, следовательно, и в некоторой открытой области $G_0\subset Z_0$, содержащей этот интервал. Но $M(k)$, является собственным значением (простым и старшим по модулю) оператора $\hat{\hat{V}}_s(k)$ и ему соответствует собственный вектор $\Phi(k,\mu)\sqrt{1+k\mu}$. Отсюда следует аналитичность $M(k)$ и $\Phi(k,\mu)$ в G_0. В силу самосопряженности $\hat{\hat{V}}_s(k)$ при $k\in(-1,1)$ $M(k)=\left\|\hat{\hat{V}}_s(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}$. Далее $\left\|\hat{\hat{V}}(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\left\|\hat{Q}\hat{\hat{V}}_s(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}\le\left\|\hat{\hat{V}}_s(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=M(k)$. Но так как $M(k)$ собственное значение $\hat{\hat{V}}(k)$, то $\left\|\hat{\hat{V}}(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=M(k)$.

Неравенство $M^1(k)>0$ доказывается аналогично скалярному случаю [2], с использованием равенства $dM(k)/dk=-M(k)(\mu,\Phi_1^2)\big/\|\Phi_1\|_{\mathsf{L}_2}+k(\mu,\Phi_1^2)$, где $\Phi_1(k,\mu)$ – первая компонента $\Phi(k,\mu)$.

Предельное равенство $\lim\limits_{k\to1-0}M(k)=\infty$ следует из цепочки неравенств:

$$M^2(k)=\left\|\hat{\hat{V}}(k)\right\|^2_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\sup_{\Phi\,\in\,\mathsf{L}_2^{(4)},\|\Phi\|=1}\left(\hat{\hat{V}}(k)\Phi,\hat{\hat{V}}(k)\Phi\right)\ge\left(\hat{\hat{V}}(k)\Phi^0,\hat{\hat{V}}(k)\Phi^0\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1+k\mu}}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi^0\frac{1}{\sqrt{1+k\mu}},\ \frac{1}{\sqrt{1+k\mu}}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi^0\frac{1}{\sqrt{1+k\mu}}\right)\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+k\mu}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi^0,\hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi^0\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{1+k\mu}\right)\left\|\Phi^0\right\|^2=\left(\frac{a^2}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right)\left\|\Phi^0\right\|,\ k\in(0,1),$$

где $\Phi^0(s)=\{1,0,0,0\}/4\pi$, $\hat{\hat{\mathsf{P}}}\,\Phi^0(s)=a\Phi^0(s)$, $\left\|\Phi^0\right\|=1$. Лемма доказана.

Следовательно, при $a\le 1$ существует единственное $k_0\in[0,1)$: $M(\pm k_0)=1$. Ему соответствуют два решения $\Phi(\pm k_0,\mu)=\{\Phi_1(\pm k_0,\mu),\ \Phi_2(\pm k_0,\mu),\ 0,0\}$, $\Phi(-k_0,\mu)=\Phi(k_0,-\mu)$ уравнения (2.1), лежащие строго внутри конуса $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$: $\Phi_1(\pm k_0,\mu)>0$, $\left|\Phi_2(\pm k_0,\mu)\right|<\Phi_1(\pm k_0,\mu)$. Других решений в конусе $K_1(\Omega)$ характеристическое уравнение (2.1) не имеет.

Если $a<1$, то $k_0>0$. На интервале $(-k_0,k_0)$ уравнение (2.1) неразрешимо. При $a=1$ $k_0=0$ и $\Phi(\pm k_0,\mu)=\{1,0,0,0\}/4\pi=\Phi^0(s)$, т.е. корень $k_0=0$ является двукратным.

Покажем, что при $a=1$ уравнение (2.1) неразрешимо, если k лежит на мнимой оси и $k\ne 0$. Для этого достаточно показать, что $\left\|\hat{\hat{U}}(k)\right\|_{\mathrm{L}_2^{(4)}}<1$ при $k=i\chi$, где $\chi\ne 0$ – вещественное число. Норма оператора $\hat{\hat{U}}(k)$:

$$\left\|\hat{\hat{U}}(i\chi)\right\|^2_{\mathrm{L}_2^{(4)}}=\left\|\hat{\hat{U}}(-i\chi)\hat{\hat{U}}^*(i\chi)\right\|_{\mathrm{L}_2^{(4)}}=\left\|(1+i\chi\mu)^{-1}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\,\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*(1-i\chi\mu)^{-1}\right\|_{\mathrm{L}_2^{(4)}}.$$

Рассмотрим самосопряженный вполне непрерывный оператор

$$\hat{\hat{W}}(\chi)=(1+i\chi\mu)^{-1}\hat{\hat{\mathsf{P}}}\,\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*(1-i\chi\mu)^{-1}\quad.$$

Норма $\hat{\hat{W}}(\chi)$ равна максимальному из модулей его собственных значений. Его спектр совпадает со спектром оператора $\hat{\hat{D}}(\chi^2)=(1+\chi^2)^{-1/2}\sqrt{\mu}\,\hat{\hat{\mathsf{P}}}\,\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*(1+\chi^2)^{-1/2}$, который положителен относительно конуса $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$. Поэтому среди максимальных по модулю собственных значений $\hat{\hat{D}}(\chi^2)$ есть положительное, которое мы обозначим через $\lambda_0(\chi^2)$. Ему отвечает, по крайней мере, один собственный вектор $\Phi_0(\chi^2,\mu)\in K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$ $\left(\hat{Q}\Phi_0(\chi^2,\mu)=\Phi_0(\chi^2,\mu)\right)$. $\hat{\hat{D}}(\chi^2)$ образует самосопряженное голоморфное в комплексной χ^2 - плоскости с разрезом вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 семейство операторов. Следовательно, $\lambda_0(\chi^2)$ и $\Phi_0(\chi^2,\mu)$ голоморфны в некоторой открытой области, лежащей в комплексной плоскости с разрезом вдоль $(-\infty,-1)$ и содержащей этот интервал. Покажем, что $\lambda_0(\chi^2)$ строго убывает с ростом χ^2. Воспользуемся уравнением

$$\lambda_0(\chi^2)\Psi_0(\chi^2,\mu)(1+\chi^2\mu)=\hat{\hat{\mathsf{P}}}\,\hat{\hat{\mathsf{P}}}^*\Psi_0(\chi^2,\mu),\tag{2.4}$$

которому удовлетворяют $\lambda_0(\chi^2)$ и $\Psi_0(\chi^2,\mu)\sqrt{1+\chi^2\mu^2}\in K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$. Продифференцировав (2.4) по χ^2, получим уравнение для определения $d\Psi_0(\chi^2,\mu)/d\chi^2$:

$$\lambda_0(\chi^2)\Psi_0'(\chi^2,\mu)=\left(1+\chi^2\mu^2\right)^{-1}\left(\hat{\hat{\mathsf P}}\hat{\hat{\mathsf P}}^*\Psi'(\chi^2,\mu)-\mu^2\lambda_0(\chi^2)\Psi_0(\chi^2,\mu)\right)-\lambda'(\chi^2)\Psi(\chi^2,\mu)$$

Используя ортогональность правой части к решениям сопряженного однородного уравнения $(1+\chi^2\mu^2)\hat{Q}\Psi_0(\chi^2,\mu)=(1+\chi^2\mu^2)\Psi_0(\chi^2,\mu)$, найдем

$$\lambda_0'(\chi^2)=-\lambda_0(\chi^2)(\mu^2\Psi_0,\Psi_0)\Big/\left(\left\|\Psi_0\right\|+\chi^2(\mu^2\Psi_0,\Psi_0)\right)<0\,,\quad \chi^2\in(-1,\infty)\,.$$

Следовательно, $\lambda_0(\chi^2)$ строго убывает с ростом χ^2 и вместе с ней и убывает $\left\|\hat{U}(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\sqrt{\lambda_0(\chi^2)}$. Но так как $\left\|\hat{U}(0)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=a=1$, то $\left\|\hat{U}(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}<1$ при $\chi^2>0$.

Рассмотрим теперь случай $a<1$. Покажем, что уравнение (2.1) неразрешимо в полосе $\left|\operatorname{Re}k\right|\le k_0$ с исключенными точками $k=\pm k_0$. Пусть $k=k_1+ik_2$ и предположим сначала, что $k_1<k_0$. Тогда, в силу свойств функции $M(k)$:

$$\left\|\hat{\hat{V}}(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\left\|\frac{1}{\sqrt{1+k\mu}}\hat{\hat{\mathsf P}}\,\frac{1}{\sqrt{1+k\mu}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\left\|\sqrt{\frac{1+k_1\mu}{1+k\mu}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k_1\mu}}\hat{\hat{\mathsf P}}\,\frac{1}{\sqrt{1+k_1\mu}}\right)\sqrt{\frac{1+k_1\mu}{1+k\mu}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}$$

$$\le\max_{\mu\in[-1,1]}\left(1+k_1\mu\right)\left|1+k\mu\right|^{-1}\left\|\hat{\hat{V}}(k_1)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\max_{\mu\in[-1,1]}\left[1+k_2^2\,\mu^2\Big/\left(1+k_1\mu\right)^{-2}\right]^{-1}M(k_1)<1,$$

так как $k_1<k_0$. Это неравенство означает, что неразрешимо уравнение (2.2), а вместе с ним и эквивалентное ему уравнение (2.1).

Пусть теперь $k=k_0+ik_2$, $\quad k_2\ne 0$. Возьмем положительное достаточно малое число ε. Снова имеем, в силу аналитичности $M(k)$:

$$\left\|\hat{\hat{V}}(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}=\left\|\sqrt{\frac{1+(k_0-\varepsilon)\mu}{1+k\mu}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(k_0-\varepsilon)\mu}}\hat{\hat{\mathsf P}}\,\frac{1}{\sqrt{1+(k_0-\varepsilon)\mu}}\right)\sqrt{\frac{1+(k_0-\varepsilon)\mu}{1+k\mu}}\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}\le$$

$$\le\max_{\mu\in[-1,1]}\left(1+(k_0-\varepsilon)\mu\right)\left|1+k\mu\right|^{-1}M(k_0-\varepsilon)=\left(1+\varepsilon^2\big/k_2^2\right)M(k_0-\varepsilon)=$$

$=1-M'(k_0)\varepsilon+\varepsilon^2\left[k_2^{-2}+M''(k_0)\right]\Big/2\;+0(\varepsilon^3)$, где $M'(k_0)>0$ (лемма 2.3. в). Отсюда следует, что $\left\|\hat{\hat{V}}(k)\right\|_{\mathsf{L}_2^{(4)}}<1$ при любом $k=k_0+ik_2$, $\quad k_2\ne 0$ и поэтому уравнение (2.1) неразрешимо и в этом случае.

Обозначим через M множество всех тех $k\in Z_0$, при которых уравнение (2.1) разрешимо. Пусть $k\in\mathsf{M}$ и $\Psi(k,s)$ одно из решений уравнения (2.1), соответствующее этому k. Тогда, используя соотношение (2.3), легко показать, что $-k\in\mathsf{M}$ и ему отвечает решение $\hat{Q}_1\Psi(-k,-s)$, $-s=(-\mu,\varphi+\pi)$. Далее, в силу вещественности матрицы $\hat{\mathsf P}(s',s)$, $\quad\bar{k}\in\mathsf{M}$, и ему соответствует решение $\overline{\Psi}(k,s)$. Таким образом, множество M симметрично относительно вещественной и мнимой осей комплексной k - плоскости.

Пусть $G(k_0)=\{\,k\big|\;\left|\operatorname{Re}\;k\right|\le k_0\;,M\left(k_0\right)=1\;\}$ $\left(\{k_0\}\cup\;\{-k_0\}\right)\subset Z_0$ – полоса в комплексной k - плоскости с выколотыми точками $\pm k_0$. При $a=1\,k_0=0$ и $G(k_0)$ вырождается в две полуоси $(-i\infty,i0)$, $(i\infty,i\infty)$.

Из сказанного выше следует, что

$$G(k_0) \bigcap \mathsf{M} = \varnothing. \qquad (2.5)$$

Операторы $\hat{\hat{U}}(k)$ образуют в G_0 голоморфное семейство компактных операторов. Поэтому на основании теоремы 1.9 гл. VII [8] и соотношения (2.5) заключаем, что множество M не более чем счетное и его предельные точки могут лежать лишь на разрезах $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$, или на бесконечности.

Мы приходим, таким образом, к следующему результату.

Теорема 2.1 Пусть выполнены условия теоремы 1.3 и $a \le 1$. Тогда справедливы утверждения.

1. При $a<1$ существуют только два решения уравнения (2.1) $\Phi(\pm k_0,\mu)=\{\Phi_1(\pm k_0,\mu), \Phi_2(\pm k_0,\mu), 0,0\}$, $\Phi(-k_0,\mu)=\Phi(k_0,-\mu)$, лежащие внутри конуса $K_+^{\mathrm{I}}[-1,1]$ $\Phi_1(\pm k_0,\mu)>0$, $\left|\Phi_2(\pm k_0,\mu)\right|<\Phi_1(\pm k_0,\mu)$.

Число k_0 является простым и единственным корнем уравнения $M(k)=1$ на интервале (0,1). Других решений в конусе $K_1(\Omega)$ это уравнение не имеет. Если $a=1$, то $k_0=0$ – двукратный корень уравнения $M(k)=1$ и единственным в $K_1(\Omega)$ решением является вектор $\Phi^0(s)=\{1,0,0,0\}/4\pi$.

2. Уравнение (2.1) не имеет решений для значений параметра K в полосе $G(k_0)=\{k\|\mathrm{Re}\,k|\le k_0,\ M(k_0)=1\}\setminus\left(\{k_0\}\bigcup\{-k_0\}\right)$.

3. Множество M значений параметра k, при которых уравнение (2.1) разрешимо, не более чем счетное и его предельные точки могут лежать лишь на полуинтервалах вещественной оси $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$ и на бесконечности. Оно симметрично относительно вещественной и мнимой осей комплексной k - плоскости: если $k\in\mathsf{M}$, то $-k,\pm\overline{k}\in\mathsf{M}$. При этом, если $\Phi(k,s)$ – решение уравнения (2.1), то $\overline{\Phi}(k,s)$ и $\hat{Q}_1\Phi(-k,-s)$, $-s=(-\mu,\varphi+\pi)$, такие его решения.

Замечание. Если матрица $\hat{\Gamma}(\mu)$ симметрична (например, матрица, отвечающая закону рассеяния Рэлея [1]), то оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ будет самосопряженным. При этом, как легко показать, так же как и в скалярном случае, $\mathsf{M}\subset(-1,1)$.

2.2 Оператор $\hat{\hat{H}}$

Рассмотрим отдельно случай $a<1$. Так как спектральный радиус $r\left(\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right)=a<1$, то оператор $\hat{\hat{E}}-\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ обратим и, так же как и в скалярном случае [9], характеристическое уравнение приводится к эквивалентной форме задачи на собственные значения.

$$\nu\Phi(\nu,s)=\hat{\hat{H}}\Phi(\nu,s),\quad \nu=-k^{-1}, \qquad (2.6)$$

$\hat{\hat{H}}=\left(\hat{\hat{E}}-\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right)^{-1}\hat{\hat{M}}$, $\hat{\hat{M}}$ – оператор умножения на μ. Представим оператор $\hat{\hat{H}}$ суммой $\hat{\hat{H}}=\hat{\hat{M}}+\hat{\hat{S}}$, $\hat{\hat{S}}=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\hat{\mathsf{P}}}^k\hat{\hat{M}}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\hat{\mathsf{P}}}^k$ сходится в равномерной операторной топологии и является вполне непрерывным оператором. Следовательно, $\hat{\hat{S}}$ вполне непрерывное в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$ возмущение оператора умножения на μ. Справедливы утверждения [8, 10], теорема 1.1.

Лемма 2.4 Пусть выполнены условия теоремы 1.3 и $a<1$. Тогда:

1. оператор $\hat{\hat{H}} = \left(\hat{\hat{E}} - \hat{\hat{\mathsf{P}}}\right)^{-1} \hat{\hat{M}}$ ограничен в $\mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$;

2. его непрерывный спектр C_σ заполняет сегмент [-1,1];

3. дискретный спектр D_σ оператора $\hat{\hat{H}}$ располагается в ограниченной области, он не более чем счетный, все его точки имеют конечную алгебраическую кратность; предельные точки могут лежать на сегменте [-1,1]; собственные функции, соответствующие точкам D_σ, лежащим вне [-1,1], непрерывны $\Phi(\nu_j,s) \in C^{(4)}(\Omega)$, $\nu_j \in D_\sigma$, $\nu_j \overline{\in}[-1,1]$;

4. остаточного спектра оператор $\hat{\hat{H}}$ не имеет;

5. если $\nu_j \in D_\sigma$, то $-\nu_j \pm \overline{\nu}_j \in D_\sigma$, $\nu_j \overline{\in}[-1,1]$; $\Phi(-\nu_j,s) = \hat{Q}_1 \Phi(\nu_j,-s)$;

6. точки спектра D_σ, не лежащие на [-1,1], непрерывно зависят от возмущения оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$;

7. резольвента $\hat{\hat{R}}\left(\nu_j \hat{\hat{H}}\right) = \left(\nu \hat{\hat{E}} - \hat{\hat{H}}\right)^{-1}$ оператора $\hat{\hat{H}}$ является аналитической функцией ν на резольвентном множестве $\rho\left(\hat{\hat{H}}\right)$; точки $\nu_j \in D_\sigma$, $\nu_j \overline{\in}[-1,1]$ служат полюсами $\hat{\hat{R}}\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right)$; в окрестности каждой такой точки имеет место разложение в ряд Лорана

$$\hat{\hat{R}}\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right) = \sum_{n=-m_j}^{\infty} (\nu-\nu_j)^n \hat{\hat{A}}_n^j, \tag{2.7}$$

где m_j - кратность ν_j; $\hat{\hat{A}}_n^j = (1/2\pi i)\int_{\gamma j} (\nu-\nu_j)^{-n-1} \hat{\hat{R}}\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right) d\nu$;

$$\left(\hat{\hat{H}} - \nu_j \hat{\hat{E}}\right)\hat{\hat{A}}_{-n}^j = \left(\hat{\hat{H}} - \nu_j \hat{\hat{E}}\right)^n \hat{\hat{A}}_{-1}^j = \hat{\hat{A}}_{-(n+1)}^j, \quad n \ge 1,$$

γ_j - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке ν_j, не содержащая других точек спектра;

$$\hat{\hat{A}}_{-1}^j = (1/2\pi i)\int_{\gamma j} \hat{\hat{R}}\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right) d\nu = \hat{\hat{P}}_j \tag{2.8}$$

– проектор на корневое подпространство $\hat{\hat{H}}$, отвечающее собственному значению ν_j. Для всякой пары точек $\nu,\nu' \in \rho\left(\hat{\hat{H}}\right)$ справедливо тождество Гильберта;

$$\hat{\hat{R}}\left(\nu',\hat{\hat{H}}\right) - \hat{\hat{R}}\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right) = -(\nu-\nu')\hat{\hat{R}}\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right)\hat{\hat{R}}\left(\nu',\hat{\hat{H}}\right). \tag{2.9}$$

Замечание. Из тождества Гильберта (2.9) следует, что для всякой $\nu \in \rho\left(\hat{\hat{H}}\right)$ и $\Phi(s) \in \mathsf{L}_p^{(4)}(\Omega)$:

$$\frac{d}{d\nu}\hat{\hat{R}}\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right)\Phi(s) = \hat{\hat{R}}^2\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right)\Phi(s). \tag{2.10}$$

В силу эквивалентности (2.1) и (2.6) для части D_σ^* спектра D_σ, не пересекающейся с сегментом [-1,1], имеем представление $D_\sigma^* = \left\{\nu_j \middle| \ -\nu_j^{-1} \ \in \ \mathsf{M}\right\}$.

Легко показать, что точка $\nu = 0$ не является собственным значением оператора $\hat{\hat{H}}$. Действительно $\mu\Phi(s) \equiv 0$, а, следовательно, $\Phi(s) \equiv 0$.

Основываясь на утверждениях теоремы 2.1. заключаем, что D_σ целиком лежит внутри двух окружностей комплексной ν - плоскости с центром в точках $\pm(2k_0)^{-1}$ и радиуса $(2k_0)^{-1}$ за исключением двух точек $\pm\nu_0 = \pm(2k_0)^{-1}$, которые лежат на этих окружностях.

Следует заметить, что в силу пункта 6 леммы 2.4 корни k_j характеристического уравнения (2.1) непрерывно зависят от матрицы рассеяния $\hat{\Gamma}(\mu)$. М.Г.Кузьминой, в дополнение к неравенству $\inf\limits_{j=1,2,\dots} \left|\operatorname{Re} k_j\right| > k_0$ доказано, что дискретный спектр заключен в круге радиуса $1+a$ на комплексной k - плоскости.

2.3 Асимптотическое поведение решения уравнения переноса в полупространстве при $\tau \to \infty$

Выясним асимптотику при $\tau \to \infty$ решения краевой задачи:

$$\mu\partial\Phi(\tau,s)/\partial\tau + \Phi(\tau,s) = \hat{\hat{\mathsf{P}}}\Phi(\tau,s) + \exp\{-\tau/\mu_0\}\hat{\mathsf{P}}(\mu,\mu_0;\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{F}, \quad \tau \in (0,\infty) \tag{2.11}$$

$\Phi(0,s) = 0, \mu, \mu_0 > 0, \ \left|\Phi_n(\tau,s)\right| < A, \ n = 1,2,3,4,$ равномерно по $s \in \Omega$ при $\tau \to \infty$.

Доказать разрешимость этой задачи можно (при $a < 1$), опираясь на метод последовательных приближений, если перейти к уравнению переноса в интегральной форме. Предположим, что элементы матрицы рассеяния $\Gamma_{mn}(\mu)$ обладают достаточной гладкостью (непрерывны по μ на [-1,1]) для того, чтобы решение $\Phi(\tau,s)$ было непрерывным по τ и s в области $(0,\infty)\times\overline{\Omega}$

Обозначим через

$$\boldsymbol{G}(p,s) = \int\limits_0^\infty \Phi(\tau,s)e^{-p\tau}d\tau \tag{2.12}$$

образ Лапласа решения $\Phi(\tau,s)$ задачи (2.11). В силу сделанных предположений относительно $\Phi(\tau,s)$, $\boldsymbol{G}(p,s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge \gamma > 0$ и интеграл (2.12) сходится равномерно [11] . Из (2.12) следует уравнение для $\boldsymbol{G}(p,s)$:

$$(1+p\mu)\boldsymbol{G}(p,s) = \hat{\hat{\mathsf{P}}}\,\boldsymbol{G}(p,s) + \mu\Phi(0,s) + \boldsymbol{\tau}_0(p,s), \tag{2.13}$$

где $\boldsymbol{\tau}_0(p,s)=\mu_0\left(1+p\mu_0\right)^{-1}\hat{\mathsf{P}}(\mu,\mu_0;\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{F}$ – образ Лапласа функции $\exp\{-\tau/\mu_0\}\hat{\mathsf{P}}(\mu,\mu_0;\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{F}$, являющейся аналитической функцией в комплексной p - плотности с выколотой точкой $p_0=-1/\mu_0$, $0<\mu_0\le 1$.

Так как $a<1$, то уравнение (2.13) преобразуется к виду:

$$\hat{\hat{H}}\boldsymbol{G}(p,s)=-\boldsymbol{G}(p,s)/p+\boldsymbol{g}(p,s)/p,\quad \boldsymbol{g}(p,s)=\left(E-\hat{\hat{\mathsf{P}}}\right)^{-1}\left[\mu\Phi(0,s)+t_0(p,s)\right],$$

решение которого выражается через резольвенту $\hat{\hat{R}}\left(\nu,\hat{\hat{H}}\right)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{G}(p,s)=\frac{1}{p}\hat{\hat{R}}\left(\frac{1}{p},\hat{\hat{H}}\right)\boldsymbol{g}(p,s),\ \operatorname{Re}p\ge\gamma>0. \tag{2.14}$$

$\boldsymbol{G}(p,s)$ аналитически продолжима на левую полуплоскость с разрезом вдоль $\left(-\infty,-1\right]$, за исключением корней характеристического уравнения $p=-k_j$.

Для вычисления $\Phi(\tau,s)$ воспользуемся формулой обращения:

$$\Phi(\tau,s)=\frac{1}{2\pi i}=\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\boldsymbol{G}(p,s)e^{p\tau}dp, \tag{2.15}$$

где $\gamma>0$ произвольное число.

Корни k_j характеристического уравнения (2.1), лежащий в левой полуплоскости, находятся в области, ограниченной с одной стороны прямой $\operatorname{Re}p=-k_0$, а с другой – дугой окружности радиуса $1+a$. Поэтому число корней, лежащих в левой полуплоскости справа от прямо $\operatorname{Re}p=-k_0$, будет конечным. Используя свойства аналитичности $\hat{\hat{R}}(\nu,\hat{\hat{H}})$ (лемма 2.4, пункт 7) и функции $\boldsymbol{g}(p,s)$, мы можем деформировать контур интегрирования в (2.15) так, что:

$$\Phi(\tau,s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}dp\,e^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s)+\sum_{j=1}^{N(\chi)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}dp\,e^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s)+ \tag{2.16}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\chi-ib}^{-\chi+ib}dp\,e^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s)+\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-\chi+ib}^{\gamma+ib}+\int\limits_{\gamma-ib}^{-\chi-ib}+\int\limits_{\gamma+ib}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{\gamma-ib}\right)dp\,e^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s),$$

где γ_j – окружность с центром в точке $p=-k_j$ достаточно малого радиуса, не содержащая других корней характеристического уравнения, $j=1,2,...,N(\chi)$.

Последние четыре интеграла в силу произвольности $\gamma>0$ и конечности отрезка интегрирования (два первых из них), имеют оценку $0\left(1/b\right)$. Далее, учитывая простоту корня $-k_0$ и равенство (2.8), имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}dp\,e^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s)=\underset{p=-k_0}{res}\left[e^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s)\right]=\underset{p=-k_0}{res}\left[\frac{e^{p\tau}}{p}\hat{\hat{R}}(\frac{1}{p},\hat{\hat{H}})\boldsymbol{g}(p,s)\right]= \tag{2.17}$$

$$=k_0^{-1}e^{-k_0\tau}\hat{\hat{A}}_{-1}^{0}\boldsymbol{g}(-k_0,s)=k_0^{-1}e^{-k_0\tau}\hat{\hat{P}}_0\boldsymbol{g}(-k_0,s)=C_0\,e^{-k_0\tau}\boldsymbol{\Phi}(-k_0,\mu),$$

где $\hat{\hat{P}}_0$ – проектор на корневое подпространство $\hat{\hat{H}}$, отвечающее его собственному значению $\nu_0 = -k_0^{-1}$, а C_0 – константа.

Пусть m_j – кратность $\nu_j = -k_j^{-1}$, $j = 1,2,...,N(\chi)$. Предположим, например, $m_j = 2$. Тогда, используя разложение резольвенты в ряд Лорана (2.7), найдем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} dpe^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s) = \mathop{res}_{p=-k_j}\left[e^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s)\right] = \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\hat{\hat{R}}(\frac{1}{p},\hat{\hat{H}})(p+k_j)^2\boldsymbol{g}(p,s)e^{p\tau}\right]_{p=-k_j} =$$

$$= \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\hat{\hat{R}}(\frac{1}{p},\hat{\hat{H}})(p+k_j)^2\right]\boldsymbol{g}(p,s)e^{p\tau}\Big|_{p=-k_j} + \frac{1}{p}\hat{\hat{R}}(\frac{1}{p},\hat{\hat{H}})(p+k_j)^2\left[\frac{d}{dp}\boldsymbol{g}(p,s)+\tau\boldsymbol{g}(p,s)e^{p\tau}\right]_{p=-k_j} =$$

$$= k_j e^{-k_j\tau}\hat{\hat{\mathrm{A}}}_{-1}^j\boldsymbol{g}(-k_j,s) + k_j e^{-k_j\tau}\hat{\hat{\mathrm{A}}}_{-2}^j\left[\left[d\boldsymbol{g}(p,s)/dp\right]_{p=-k_j} + \tau\,\boldsymbol{g}(-k_j,s)\right] = k_j e^{-k_j\tau}\hat{\hat{P}}_j\,\boldsymbol{g}(-k_j,s) -$$

$$- k_j e^{-k_j\tau}\left(\hat{\hat{E}}\big/k_j + \hat{\hat{H}}\right)\hat{\hat{P}}_j\,\boldsymbol{g}'(-k_j,s) - k_j\tau\, e^{-k_j\tau}\left(\hat{\hat{E}}\big/k_j + \hat{\hat{H}}\right)\hat{\hat{P}}_j\,\boldsymbol{g}(-k_j,s) =$$

$$= e^{-k_j\tau}\boldsymbol{\Psi}_0^j(s) + \tau\, e^{-k_j\tau}\left(\hat{\hat{E}} + k_j\hat{\hat{H}}\right)\boldsymbol{\Psi}_1^j(s),$$

где векторы $\boldsymbol{\Psi}_{0,1}^j(s)$ лежат в корневом подпространстве оператора $\hat{\hat{H}}$, отвечающем собственному значению $\nu_j = -k_j^{-1}$, т.е. являются некоторыми линейными комбинациями собственных и присоединенных векторов. Индукцией по m_j легко доказать, что при произвольном $m_j \geq 1$:

$$\left(1/2\pi i\right)\int_{\gamma_j} dpe^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s) = e^{-k_j\tau}\sum_{n=0}^{m_j-1}\tau^n\left(\hat{\hat{E}} + k_j\hat{\hat{H}}\right)^n\boldsymbol{\Psi}_n^j(s), \qquad (2.18)$$

где $\boldsymbol{\Psi}_n^j(s)$ – некоторые фиксированные векторы не корневого подпространства $\hat{\hat{H}}$, отвечающего $\nu_j = -k_j^{-1}$.

Осталось оценить третий интеграл в (2.15):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\chi-ib}^{-\chi+ib} dp\,e^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s) = \frac{e^{-\chi\tau}}{2\pi}\int_{-b}^{b} d\xi\,e^{i\xi\tau}\boldsymbol{G}(-\chi+i\xi,s). \qquad (2.19)$$

Рассмотрим при достаточно больших $B > b > 0$, интеграл:

$$\int_b^B d\xi\,e^{i\xi\tau}\boldsymbol{G}(-\chi+i\xi,s) = \frac{1}{i\tau}\left[e^{i\xi\tau}\boldsymbol{G}(-\chi+i\xi,s)\right]\Big|_b^B - \int_b^B d\xi\,e^{i\xi\tau}\frac{d}{d\xi}\boldsymbol{G}(-\chi+i\xi,s) =$$

$$= \frac{1}{i\tau}\left[e^{iB\tau}\boldsymbol{G}(-\chi+iB,s) - e^{ib\tau}\boldsymbol{G}(-\chi+ib,s)\right] - \int_b^B d\xi e^{i\xi\tau}\frac{d}{d\xi}\boldsymbol{G}(-\chi+i\xi,s) \quad .$$

Используя оценки, имеем:

$$\left|\int_b^B d\xi\,e^{i\xi\tau}G_n(-\chi+i\xi,s)\right| \leq \frac{1}{\tau}\left[\frac{A_4}{B} + \frac{A_4}{b} + B_2\int_b^B\frac{d\xi}{\xi^2}\right] \leq \frac{1}{\tau}\left[A_4\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{b}\right) + B_2\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{b}\right)\right] < \frac{K}{\tau b}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для интеграла вдоль интервала $\left(-B,-b\right)$. Следовательно, интеграл в (2.19) сходится и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\chi-ib}^{-\chi+ib} dpe^{p\tau}\boldsymbol{G}(p,s) = 0\left(\ e^{-\chi\tau}\right)\ ,\quad \max_{j=1,\dots,N(\chi)}\left|\mathrm{Re}\,k_j\right| < \mathrm{X} < 1\quad .$$

С учетом оценок и равенств (2.17) и (2.18), (2.19) преобразуется к виду:

$$\boldsymbol{\Phi}(\tau,s) = C_0 e^{-k_0\tau}\boldsymbol{\Phi}(-k_0,\mu) + \sum_{j=1}^{N(\chi)} e^{-k_j\tau}\sum_{n=0}^{m_j-1}\tau^n\left(\hat{\hat{E}} + k_j\hat{\hat{H}}\right)^n \boldsymbol{\Psi}_n^j(s) + O\left(e^{-\chi\tau}\right) + O\left(1/b\right).$$

В силу произвольности b величина $O\left(1/b\right)$ может быть сделана сколь угодно малой при любом $\tau\in(\tau_0,T)$. Поэтому окончательно имеем:

$$\boldsymbol{\Phi}(\tau,s) = C_0 e^{-k_0\tau}\Phi(-k_0,\mu) + \sum_{j=1}^{N(\chi)} e^{-k_j\tau}\sum_{n=0}^{m_j-1}\tau^n\left(\hat{\hat{E}} + k_j\hat{\hat{H}}\right)^n \boldsymbol{\Psi}_n^j(s) + O\left(e^{-\chi\tau}\right), \qquad (2.20)$$

где $\max\limits_{j=1,\dots,N(\chi)}\left|\mathrm{Re}\,k_j\right| < \chi < 1$, а $\Psi_n^j(s)$ – фиксированные векторы из корневого подпространства оператора $\hat{\hat{H}}$, соответствующего j-му собственному значению. Разложение (2.20) и дает искомую асимптотику решения краевой задачи (2.11).

Из (2.20) следует, что, если оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ самосопряжен, то корневые подпространства оператора $\hat{\hat{H}}$ состоят лишь из собственных векторов. Поэтому слагаемые в (2.20) вида $\tau^n e^{-k_j\tau}\left(\hat{\hat{E}} + k_j\hat{\hat{H}}\right)^n \boldsymbol{\Psi}_n^j(s)$ аннулируются при $n\ge 1$. Следовательно, даже при наличии кратных корней, асимптотика имеет вид:

$$\boldsymbol{\Phi}(\tau,s) = C_0 e^{-k_0\tau}\boldsymbol{\Phi}(-k_0,\mu) + \sum_{j=1}^{N(\chi)} e^{-k_j\tau}\boldsymbol{\Psi}_0^j(s) + O\left(e^{-\chi\tau}\right), \qquad (2.21)$$

где $\boldsymbol{\Psi}_0^j(s)$ – некоторые фиксированные линейные комбинации собственных векторов $\hat{\hat{H}}$ (решений характеристического уравнения), соответствующих собственному значению $\nu_j = -1/k_j$.

Оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ будет самосопряженным для матриц $\hat{\Gamma}(\mu)$ при $C(\mu)\equiv 0$. К таким матрицам, например, относится матрица рассеяния Рэлея. Асимптотика (2.21) справедлива и в частном случае скалярного уравнения. Заметим также, что для самосопряженного оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$, как указывалось выше, спектр характеристического уравнения лежит на вещественной оси, т.е. все k_j вещественны. Для скалярного случая это согласуется с известными фактами.

Асимптотика (2.20) справедлива при $a<1$. В случае консервативного рассеяния $(a=1)$ соответствующая формула может быть получена предельным переходом при $a\to 1$. При этом, как это следует из теоремы 2.1, $k_0\to 0$ и $\Phi(-k_0,\mu)\to\{1,0,0,0\}/4\pi = \Phi_0$. Таким образом, при $a=1$ асимптотика задачи (2.11) принимает вид:

$$\mathbf{\Phi}(\tau,s)=C_0\mathbf{\Phi}_0+\sum_{j=1}^{N(\chi)}e^{-k_j\tau}\sum_{n=0}^{m_j-1}\tau^n\left(\hat{\hat{E}}+k_j\hat{\hat{H}}\right)^n\mathbf{\Psi}_n^j(s)+O\left(e^{-\chi\tau}\right)\,. \tag{2.22}$$

Асимптотические формулы, полученные в этом параграфе, могут отличаться от найденных в работе Х.Домке [12, 13] наличием слагаемых вида $\tau^n e^{-k_j\tau}$. Появление этих слагаемых есть следствие несамосопряженности $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$. Наличие же в формулах (2.20), (2.22) присоединенных элементов оператора $\hat{\hat{H}}$ (не ортогональных решениям характеристического уравнения), требует соответствующего обобщения алгоритма определения коэффициентов разложения по решениям характеристического уравнения в методе Кейза [14].

Совершенно очевидно, что подобным образом может быть исследована асимптотика решений проблемы Милна, т.е. асимптотика растущих на бесконечности решений однородного уравнения (2.11). Мы не будем, однако, останавливаться на этом подробно, а выпишем лишь окончательный результат:

$$\mathbf{\Phi}_M(\tau,s)=\sum_{j=1}^{N_1(\chi_1)}e^{k_j\tau}\sum_{n=0}^{m_j-1}\tau^n\left(\hat{\hat{E}}-k_j\hat{\hat{H}}\right)^n\mathbf{\Psi}_{-n}^j(s)+C_{-0}e^{k_0\tau}\mathbf{\Phi}(k_0,\mu)+$$

$$+C_0e^{-k_0\tau}\mathbf{\Phi}\left(-k_0,\mu\right)+\sum_{j=1}^{N(\chi)}e^{-k_j\tau}\sum_{n=0}^{m_j-1}\tau^n\left(\hat{\hat{E}}+k_j\hat{\hat{H}}\right)^n\mathbf{\Psi}_n^j(s)+O\left(e^{-\chi\tau}\right).$$

Входящие сюда величины, имеют тот же смысл, что и в (2.20). Это разложение представляет собой асимптотику решения проблемы Милна, растущего на бесконечности не быстрее, чем $e^{\chi_1\tau}$, $k_0<\chi_1<1$.

2.4.Численный алгоритм определения асимптотических констант и функций

Развитая теория позволяет отыскать старший корень k_0 и соответствующее решение $\mathbf{\Phi}(-k_0,\mu)$ уравнения (2.1) методом последовательных приближений. При этом нет необходимости решать это уравнение с полной матрицей $\hat{\Gamma}(\mu)$. Число k_0 и вектор $\mathbf{\Phi}(-k_0,\mu)=\left\{\Phi_1(-k_0,\mu),\Phi_2(-k_0,\mu),0,0\right\}$ являются решениями более простого уравнения:

$$(1+k\mu)\mathbf{\Phi}(k,\mu)=\hat{\hat{\mathsf{P}}}_0^I\mathbf{\Phi}(k,\mu), \tag{2.23}$$

где интегральный оператор $\hat{\hat{\mathsf{P}}}_0^I\mathbf{\Phi}(\mu)=\int_{-1}^1\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu',\mu)\mathbf{\Phi}(\mu')d\mu'$ есть сужение оператора $\hat{\hat{\mathsf{P}}}$ на $C^I[-1,1]$, а матрица $\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu',\mu)$ определена соотношением (1.58), в котором следует положить $a_3(\mu',\mu)=C(\mu',\mu)=a_4(\mu',\mu)\equiv 0$. Уравнение (2.23) естественно решать в пространстве двумерных вектор-функций $\mathbf{\Phi}(\mu)=\left\{\Phi_1(\mu),\Phi_2(\mu)\right\}$. Наиболее приемлемым методом решения, рассчитанным на широкий круг задач, является метод последовательных приближений. Если каким-либо способом определить старший корень $k_0\in[0,1\rangle$, то вычисление соответствующего решения $\mathbf{\Phi}(k_0,\mu)$ легко провести итерациями уравнения

(2.23), начиная, например, с функции $\Phi_0(k_0,\mu)=\left\{(1+k_0\mu)^{-1},0\right\}$. Если же значение k_0 неизвестно, то его можно вычислить (например, методом хорд) построив функцию $M(k)$. Это построение легко осуществить итерациями уравнения (2.23). Вычисление k_0 и $\Phi(k_0,\mu)$ удобно объединить в единый итерационный процесс.

Величины k_0 и $\Phi(k_0,\mu)$ характеризуют асимптотический режим внутри слоя. Часто же, при рассмотрении задач о прохождении радиации через плоскопараллельные оптически плотные слои, необходимо знать характеристики отраженного и пропущенного слоем излучений. В качестве примера приведем задачу о распространении солнечного света в облаках.

Обозначим через $\mu_0=\cos\theta_0$ косинус угла между направлением падения солнечных лучей и внешней нормалью к поверхности облака, а через τ_0 - его оптическую толщину. При $\tau_0 >> 1$ справедливы следующие асимптотические формулы [15]:

$$\Phi_{\text{отр}}(\mu,\mu_0)=\begin{cases}\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu_0)\boldsymbol{F}_0-\dfrac{MN\exp(-2k_0\tau_0)}{1-N^2\exp(-2k_0\tau_0)}\boldsymbol{U}(\mu)\,U_1(\mu_0)F_0,\ a<1,\\ \hat{\rho}_\infty(\mu,\mu_0)\boldsymbol{F}_0-\dfrac{4}{(3-\omega_1)\tau_0+6\sigma}\boldsymbol{U}(\mu)\,U_1(\mu_0)F_0,\ a=1\,;\end{cases}\tag{2.24}$$

$$\Phi_{\text{проп}}(\mu,\ \mu_0)=\begin{cases}\dfrac{MN\ \exp(-k_0\tau_0)}{1-N^2\ \exp(-2k_0\tau_0)}\boldsymbol{U}(\mu)U_1(\mu_0)F_0,\quad a<1\ ,\\ \dfrac{4}{(3-\omega_1)\ \tau_0+6\sigma}\boldsymbol{U}(\mu)U_1(\mu_0)F_0,\quad a=1\ .\end{cases}$$

Здесь: $\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu_0)$ - матрица отражения облачного слоя в предположении о его бесконечности; $\boldsymbol{U}(\mu)$ – краевой режим в проблеме Милна; F_0 – поток солнечной радиации через единичную площадку, перпендикулярную направлению падения; $\boldsymbol{F}_0=\{F_0,0\}$; $\omega_1=\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}a_1(\mu)\,\mu\,d\mu$; $N=2\int\limits_0^1\left\{\Phi(k_0,-\mu),\boldsymbol{U}(\mu)\right\}\mu\,d\mu$;

$$M=2\int\limits_{-1}^{1}\left\{\Phi(k_0,\mu),\Phi(k_0,\mu)\right\}\mu\,d\mu;\ \ \sigma=2\times\int\limits_0^1U_1(\mu)\,\mu^2d\mu;\ \Phi(k_0,\mu)$$

нормирована соотношением $\dfrac{a}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left\{\Phi(k_0,\mu),\Phi(k_0,\mu)\right\}d\mu=1$.

При использовании асимптотических формул (2.24), помимо k_0 и $\Phi(k_0,\mu)$, необходимо знать также матрицу яркости $\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu_0)$ и вектор-функцию $\boldsymbol{U}(\mu)$.

Для расчета указанных величин, а также констант M, N и σ предлагается алгоритм, в целом аналогичный используемому в скалярной теории.

Параметр k_0 вычисляется как корень уравнения $M(k)=1$, где $M(k)$ – старшее собственное значение оператора $\hat{U}_0^I(k)=(1-k\mu)^{-1}\hat{\hat{\mathsf{P}}}_0^I$, методом деления отрезка пополам. При фиксированном $k\in(0,1)$ $M(k)$ вычисляется по схеме:

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(0)}(k,\mu)=(1-k\mu)^{-1}\{1,0\};\ \mathbf{\Phi}^{(n+1)}(k,\mu)=(1-k\mu)^{-1}\times\int_{-1}^{1}\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu',\mu)\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(n)}(k,\mu')d\mu';$$

$$M_n(k)=\int_{-1}^{1}\Phi_1^{(n)}(k,\mu)d,\mu;\ \tilde{\mathbf{\Phi}}^{(n)}(k,\mu)=M_n^{-1}(k)\mathbf{\Phi}^{(n)}(k,\mu);\ \lim_{n\to\infty}M_n(k)=M(k).$$

Матрица $\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu_0)$ и вектор-функция $\boldsymbol{U}(\mu)$ определяются из решения методом итераций следующих интегральных уравнений [14]:

$$(\mu+\mu_0)\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu_0)=\frac{1}{2}\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu,\mu_0)+\mu_0\int_0^1\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu,\mu')\,\hat{\rho}_\infty(\mu',\mu_0)d\mu'+\mu\int_0^1\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu')\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu',\mu_0)\,d\mu'+$$

$$+4\mu\mu_0\int_0^1\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu')\int_0^1\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu',-\mu'')\hat{\rho}_\infty(\mu'',\mu_0)d\mu'';\quad (1-k\mu)\boldsymbol{U}(\mu)=\int_0^1\hat{\mathsf{K}}(\mu,\mu')\boldsymbol{U}(\mu')d\mu',$$

где $\hat{\mathsf{K}}(\mu,\mu')=\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu,\mu')+2\mu\int_0^1\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu'')\hat{\mathsf{P}}_0^I(\mu'',-\mu')d\mu''.$

Для ускорения сходимости итерационных процессов используются перенормировки на каждом шаге в соответствии с равенствами:

$$\mathbf{\Phi}(k,-\mu)=2\int_0^1\hat{\rho}_\infty(\mu,\mu')\mathbf{\Phi}(k,\mu')\mu'd\mu',\ \ \mu>0;\ 2\int_0^1\left\{\mathbf{\Phi}(k,\mu),\boldsymbol{U}(\mu)\right\}\mu d\mu=1.$$

Данный алгоритм реализован {ещё} в программе ASIPOL, составленной на языке ФОРТРАН-ДУБНА. Размерность квадратур для интегрирования не более 50 на интервале (0,1). Задание элементов матрицы рассеяния табличное. Время расчета одного варианта при использовании квадратур максимального 50-го порядка не превышает 2 часов на ЭВМ БЭСМ-6.

Рассмотрим численный пример с матрицей рассеяния, вычисленной по теории МИ [16] и характерной для модели водяных облаков (модель CI) с широким спектром распределения капель по размерам. Длина волны света λ взята равной 0.7 мкм, показатель преломления $m=1.33$. Данная матрица характеризуется чрезвычайно высокой степенью анизотропии своих диагональных элементов. Это потребовало применения для расчетов квадратур Гаусса высокого порядка – 50 узлов на интервале (0,1). Точность расчета 1%.

Расчеты показывают, что значения асимптотических параметров k_0,M,N,σ, а также функций $\rho_{\infty 11}(\mu,\ \mu_0),U_1(\mu),\Phi_1(k_0,\mu)$ мало отличаются от таковых для скалярного случая. Например, для модели *Water*, *haze M*, ($m=1.29-0.0472i$, $\lambda=8.15$ мкм см. табл. 12 [16]), k_0 принимает следующие значения: 0.1243 ($a=0.99$), 0.2764 ($a=0.95$) и 0.8283 ($a=0.5$). Соответствующие значения в скалярном случае: 0.1243, 0.2773, 0.8312. Максимальная же разница в значениях $\Phi_1(k_0, \mu)$ в худшем случае $(a = 0.5, \mu = -1)$ составляет не более 8 %.

Приведенные данные подтверждают вывод о том, что пренебрежение эффектами поляризации не приводит к ощутимым ошибкам при определении интенсивности света. Поэтому скалярная теория дает хорошее приближение для интенсивности радиации. Поляризационные эффекты во многих случаях можно учесть, используя теорию возмущений.

Литература:

1. Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, М., 1953.
2. Масленников М.В., Проблема Милна с анизотропным рассеянием, Тр. мат. инст-та им. В.А.Стеклова, 1968, т.97.
3. Kuscher I., Ribaric M., Matrix formalism in the theory of diffusion of light, Optica Acta, 1959, v.6, №I, p.42.
4. Красносельский М.А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962.
5. Крейн М.Г., Рутман М.Л., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Усп. мат. наук, 1948, т.III, вып.1, 3.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
7. Hovenier J.W., Symmetry Relations for Scattering of Polarized Light in a Slab of Randomly Oriented Particles, J. of Astroph. Sciences, v.26, №3, p.488, 1969.
8. Като Т., Теория возмущений линейных операторов, Мир, М., I972.
9. Гермогенова Т.А., 0 полноте системы собственных функций характеристического уравнения теории переноса, Препринт ИПМ АН СССР, 1976, №103.
10. Иосида К., Функциональный анализ, Мир, М., 1967.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функции комплексного переменного, Наука, М., 1965.
12. Domke H., Transfer of polarized light in an isotropic medium. Singular eigenfunction of the transfer equation, JQSRT, 1975, v.1.5, №.7/8, p.669.
13. Domke H., Transfer of polarized light in an isotropic medium. Biorthogonality and the solution of transfer problems in semi infinite media, JQSRT, 1975, v.15, №.7/8, p.68l.
14. Domake H., Linear Fredholm Integral Equations for Radiative Transfer Problems in Finite Plane Parallel Media. II Imbedding a Semi-infinite Medium, Astron. Nachr., 1978, Bd. 299, H.2, p.95.
15. Дейрменджан Д., Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами, Мир, М., 1971.
16. Гермогенова Т.А., Коновалов Н.В., Спектр характеристического уравнения теории переноса с учетом поляризации, Препринт ИПМ АН СССР, 1978, №62.