



Подлазов А.В.

Режимы с обострением с  
комплексными  
показателями. Лог-  
периодические колебания в  
модели разрыва пучка  
волокон

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Подлазов А.В. Режимы с обострением с комплексными показателями. Лог-периодические колебания в модели разрыва пучка волокон // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 35. 22 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-35>

**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В. Келдыша**  
**Российской Академии наук**

**А.В. Подлазов**

**Режимы с обострением с комплексными  
показателями. Лог-периодические колебания в  
модели разрыва пучка волокон**

**Москва - 2009**

**А.В. Подлазов. Режимы с обострением с комплексными показателями. Лог-периодические колебания в модели разрыва пучка волокон.** Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2009, 22 страницы, 12 рисунков, библиография: 18 наименований.

В некоторых системах, развивающихся в режиме с обострением, на основной тренд накладываются лог-периодические колебания, неограниченно ускоряющиеся по мере приближения к моменту обострения. Объяснение такого поведения, характерного, в частности, для сейсмических и экономических явлений, могло бы дать понимание природы момента обострения, возникающего в этом случае как сгущение точек постоянной фазы колебаний.

Лог-периодические колебания наблюдаются в классической модели разрыва пучка волокон при условии, что прочности последних генерируются датчиком случайных чисел ограниченной глубины. В этом случае возможные значения прочностей оказываются элементами периодического множества. А модель преобразовывает этот периодический входной сигнал в лог-периодический выходной.

Поскольку периодические явления достаточно распространены в природе, можно предположить, что лог-периодичность и в других системах обусловлена таким же преобразованием.

**A.V. Podlazov. Blow-up with complex exponents. Log-periodic oscillations in the democratic fiber bundle model.** Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2009, 22 Pages, 12 Figures, 18 References.

The main trend of some blow-up systems is disturbed by log-periodic oscillations infinitely accelerating when approaching the blow-up time. Explanation of such behavior typical e.g. for seismic and economic phenomena could give an insight into the nature of blow-up time rising in this case as the condensation of constant phase points of oscillations.

Log-periodic oscillations are observed in the classical democratic fiber bundle model when the strength of bundles generated by means of random number generator of scanty depth. In this case possible strength values belong to a periodic set. And the model transforms this periodic input to log-periodic output.

Periodic events are quite worldwide, so one can assume that log-periodicity in other systems originate from the same transformation.

## ВВЕДЕНИЕ

Простейшим объектом *теории режимов с обострением* [1,2,3] является уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^{1+1/\alpha},$$

решение которого неограниченно возрастает при приближении к некоторому моменту  $t_f$ , называемому *моментом обострения*:

$$x(t) \sim (t_f - t)^{-\alpha}. \quad (1)$$

Несмотря на огромные успехи, достигнутые теорией режимов с обострением для широкого класса пространственно-распределенных систем, ключевой вопрос теории о природе самого момента обострения остается до сих пор открытым.

Как получается, что условие задачи имеет смысл в общем, а ее решение в общем не существует? Почему решение автономного уравнения имеет выделенный момент времени?

Поскольку получить содержательные ответы на эти вопросы в традиционной постановке не удастся, представляется разумным попытаться ее расширить. Простейший путь сделать это состоит в переходе от действительного показателя  $\alpha$  к комплексному  $\alpha + \beta i$ , т.е. в переходе от рассмотрения процессов вида (1) к рассмотрению более широкого класса процессов вида

$$x(t) = \operatorname{Re} \sum_k a_k (t_f - t)^{-\alpha + k\beta i} = (t_f - t)^{-\alpha} \cdot P(\log(t_f - t)), \quad (2)$$

где  $P(\cdot)$  – некоторая периодическая функция. Учет здесь кратных гармоник обусловлен существенной нелинейностью систем, развивающихся в режиме с обострением. Однако на практике во многих случаях можно ограничить разложение (2) первой гармоникой, записав его как

$$x(t) = (t_f - t)^{-\alpha} \cdot \left( a_0 + a_1 \cos \left( \beta \ln \frac{t_f - t}{\tau} \right) \right), \quad (3)$$

Такой режим отличается от обычного режима с обострением (1) наложением на него *лог-периодических колебаний*, ускоряющихся по мере приближения к моменту  $t_f$ . Параметры формулы (3) имеют следующий смысл:  $a_0$  и  $a_1$  – амплитуды, соответственно, основного тренда и колебаний около него,  $\beta$  – их безразмерная частота, а  $\tau$  – размерная фаза.

При развитии в режиме (3) момент обострения естественным образом возникает как сгущение точек постоянной фазы, приходящихся на моменты времени

$$t_n = t_f - \tau e^{-2\pi n/\beta}.$$

Легко видеть, что  $t_n \rightarrow t_f$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. вопрос о природе выделенного момента времени разрешится сам собой, коль скоро мы научимся объяснить природу лог-периодических колебаний.

К сожалению, такая исследовательская программа пока представляется трудновыполнимой. Как будет показано далее, не действительный показатель является частным случаем комплексного, а, напротив, лог-периодические колебания есть очень специальный случай возмущения, наложившегося на степенную динамику. Кроме того, запись колебаний в комплексной форме, естественная и удобная для линейных систем, в случае любой нелинейности сопряжена со значительными вычислительными, а порой и содержательными трудностями. Поэтому прямое ее использование вряд ли возможно.

Альтернативный подход к выяснению природы выделенного момента времени дает изучение *критических систем* [4]. В них корреляционная длина (характеризующая пространственный масштаб, на котором поведение их элементов согласованно) при приближении *управляющего параметра* к *критическому значению* расходится степенным образом:

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}, \quad (4)$$

что очень напоминает формулу (1).

К сожалению, прямая аналогия между режимом с обострением и критичностью неправомерна. За редкими исключениями (одно из которых рассматривается далее) управляющий параметр  $p$  не может выступать как времениподобная переменная, обладающая естественным направлением изменения. В подавляющем большинстве систем через критическую точку возможно проходить в обоих направлениях, и формула (4) остается справедливой как при  $p < p_c$ , так и при  $p > p_c$  (хотя коэффициенты пропорциональности могут различаться).

Существенно и то, что в случае критических явлений обычно не составляет труда объяснить возникновение выделенного значения управляющего параметра  $p_c$ . С одной стороны, это еще более удаляет их от развития в режиме с обострением, но с другой – позволяет надеяться на достижение понимания природы лог-периодических колебаний на материале критических систем и на его дальнейшее распространение и на системы, развивающиеся в режиме с обострением.

## ПРЕДВЕСТНИК КАТАСТРОФ

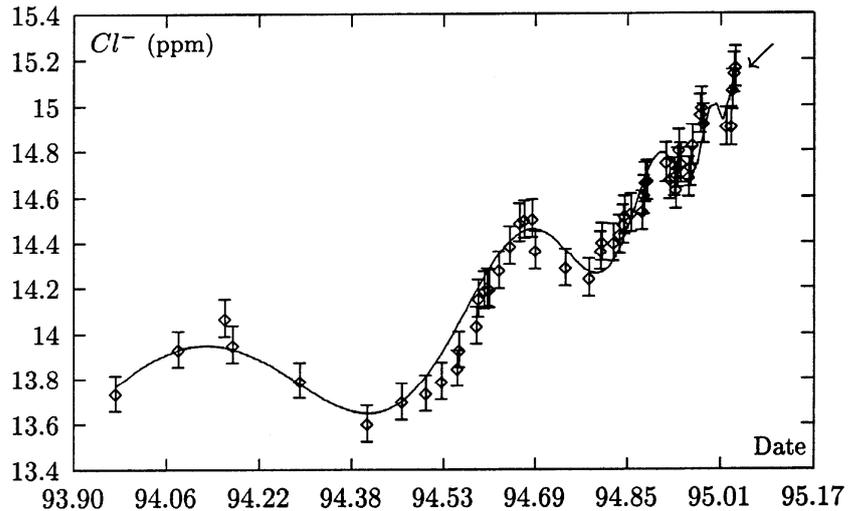
Может показаться, что режим (2) – не более чем математическая абстракция, не имеющая никакого отношения к реальности. Однако, как показано в ра-

ботах Дидье Сорнетта и Андерса Йохансена, это не так. Лог-периодические колебания, накладывающиеся на возрастающий тренд, наблюдаются в системах, склонных к катастрофам, служа их предвестниками.

На рис. 1 приведен график изменения концентрации ионов в подземных водах перед разрушительным землетрясением в Кобе (Япония). На возрастающий тренд накладываются ускоряющиеся колебания, уменьшение периода которых позволяет предсказать момент катастрофы куда точнее, чем можно это сделать на основании анализа тренда.

Другой пример дает рис. 2, на котором показано развитие событий, предшествовавшее Черному вторнику (биржевому краху, с которого началась Великая депрессия). Поскольку физический смысл имеют не сами деньги, а их логарифм, то для анализа был взят логарифм индекса Доу-Джонса, характеризующего стоимость акций крупнейших американских компаний.

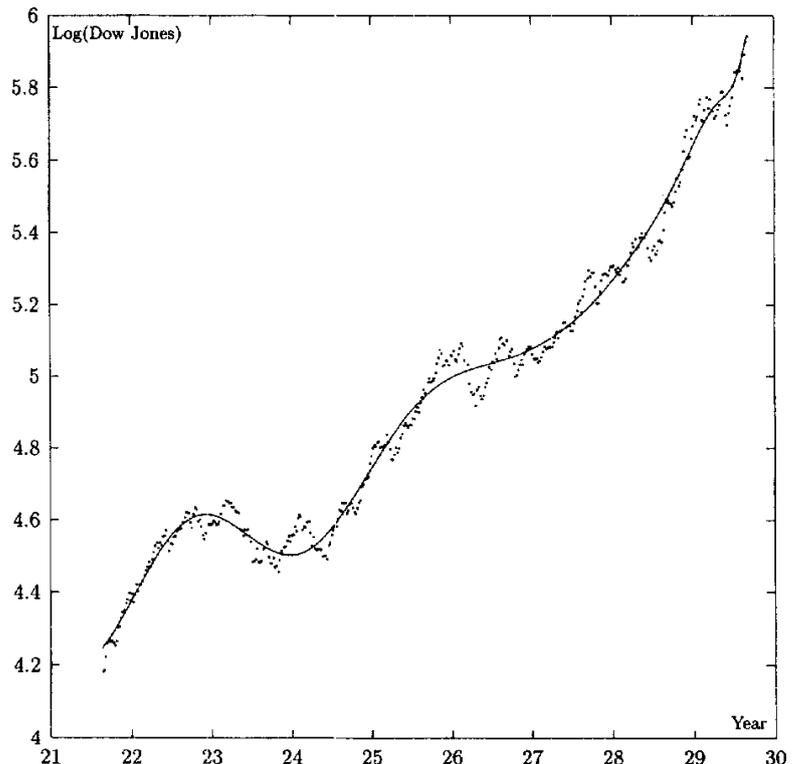
Другие многочисленные примеры лог-периодических колебаний, предшествовавших



**Рис. 1. Концентрация ионов хлора в подземных источниках перед землетрясением в Кобе (17 января 1995 г.)**

Показаны сглаженные данные и аппроксимация несглаженных данных формулой (3). Предсказанный на основе этой аппроксимации момент катастрофы отстоит от реального (отмеченного стрелкой) всего на два дня.

Иллюстрация взята из работы [5].



**Рис. 2. Логарифм индекса Доу-Джонса перед крахом 23 октября 1929 г.**

Сплошная линия соответствует аппроксимации данных формулой (3).

Иллюстрация взята из работы [6].

катастрофическим событиям как сейсмологической, так и экономической природы, описаны в работах [7,8,9,10,11,12].

Такой подход дает альтернативный взгляд на природу катастрофы. Ее можно рассматривать не только как неограниченное возрастание какой-то величины, характеризующей текущее состояние системы, но и как неограниченное ускорение происходящих в ней колебательных процессов.

## ДИСКРЕТНАЯ МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Степенные зависимости с накладывающимися на них лог-периодическими колебаниями встречаются в дискретных системах регулярной структуры, хотя следует заметить, что при этом не возникает выделенного момента времени или выделенного значения какой-либо другой величины, исполняющей его роль.

### *Самоподобные фракталы*

Первый пример такого рода [7,12] дают *фракталы*. Это геометрические объекты, метрическая размерность которых превышает топологическую [13]. Если покрывать фрактал элементами (например, кругами или квадратами) линейного размера  $\varepsilon$ , то при его стремлении к нулю их количество, необходимое для этого, возрастает согласно формуле

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}, \quad (5)$$

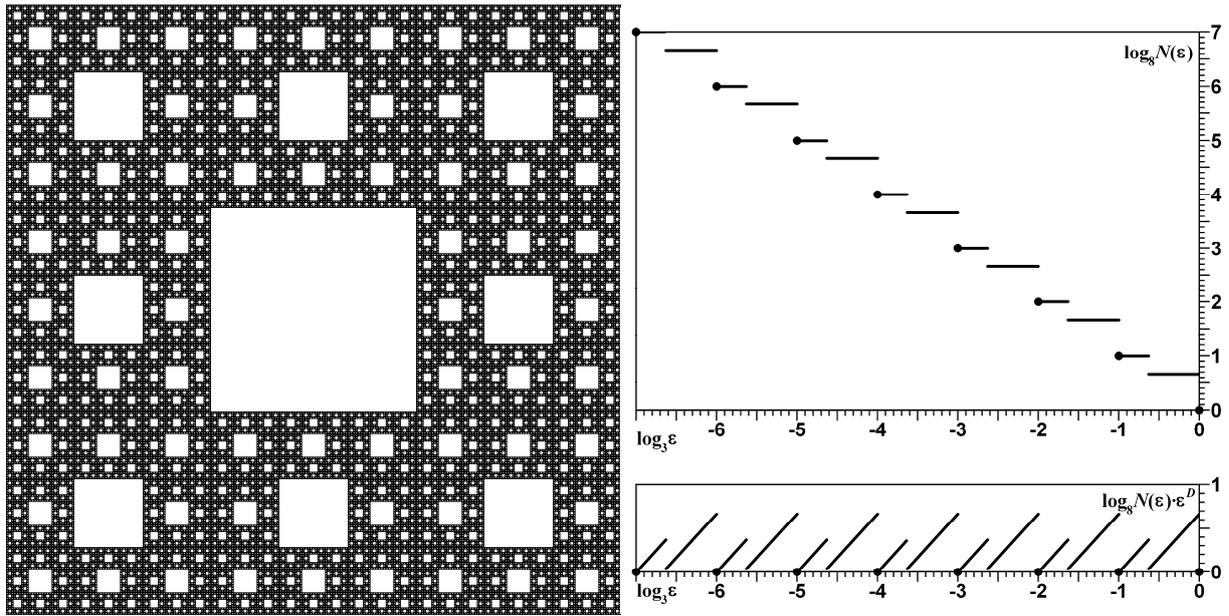
где  $D$  – *размерность фрактала*.

На рис. 3 приведен пример *самоподобного фрактала*, получающегося из квадрата в результате деления его на 9 квадратов, имеющих втрое меньшую сторону, с удалением среднего из них и повторением этой процедуры для 8 оставшихся. То геометрическое множество, которое остается от любого из этих квадратов, при увеличении линейных размеров втрое отобразится на весь фрактал. В этом выражается его самоподобие, или, иначе говоря, *масштабная инвариантность*. И если бы она имела место при произвольном преобразовании размеров, то формула (5) выполнялась бы точно. Однако масштабная инвариантность самоподобных фракталов *дискретна* [5,7,10,12]. Для рассмотренного фрактала растяжения с коэффициентами, не являющимися степенями тройки, не позволяют отобразить его на себя. Это приводит к наложению на зависимость (5) возмущения, периодического в логарифмическом масштабе, и, как следствие, возникновению спектра комплексных фрактальных размерностей (см. рис. 3)

$$D_n = \log_3 8 + 2\pi ni / \ln 3, \quad n \in \mathbf{Z},$$

соответствующих разным частотам разложения этого возмущения в ряд Фурье.

Следует заметить, что самоподобные фракталы, выглядящие совершенно одинаково на некоторых разных масштабах, представляют собой искусствен-



**Рис. 3. Комплексная размерность самоподобных фракталов**

Слева показан ковер Серпинского [14]. При утроении масштаба часть этого фрактального множества совпадает с целым, что означает его самоподобие.

Справа сверху приведена зависимость количества квадратов  $N$ , необходимых для покрытия ковра, от их стороны  $\epsilon$ . Жирные точки соответствуют «удобным» квадратам со стороной  $1, 1/3, 1/9\dots$ , при использовании которых фрактал покрывается без наложений и излишков. Поскольку таких квадратов требуется  $1, 8, 64\dots$ , его размерность  $D = \log_3 8 \approx 1,89\dots$

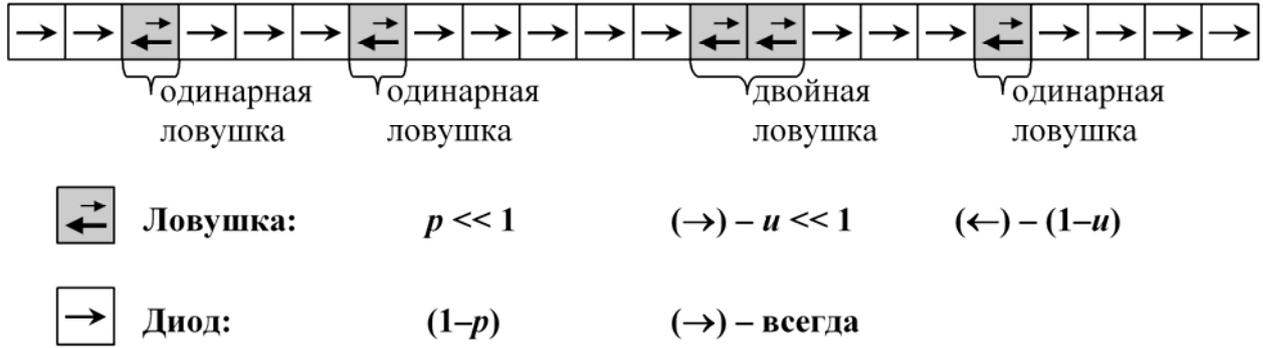
При использовании квадратов других размеров зависимость  $N(\epsilon)$  отклоняется от вида (5). Детрендрованное отклонение, изображенное справа внизу, – периодическая (в логарифмическом масштабе) функция, Фурье-компоненты которой дают комплексные размерности.

ные объекты. Реальные фракталы не самоподобны – они на разных масштабах выглядят очень похоже (так что невозможно определить, на каком именно масштабе они рассматриваются), но всё-таки немного по-разному. И хотя для несамоподобных фракталов зависимость (5) всё равно неточна, после ее детрендрования уже не получается периодической функции. А, следовательно, несамоподобные фракталы уже не обладают дискретным спектром комплексных размерностей, как не обладают дискретным спектром комплексных показателей и многие реальные системы, развивающиеся в режиме с обострением.

### ***Диффузия на анизотропной решетке с закрепленными случайностями***

Другой пример возникновения дискретной масштабной инвариантности дает анизотропная диффузия [12,15]. В простейшем варианте она реализуется как блуждание на решетке, ячейки которой делятся на два типа: *диоды*, составляющие основную массу ячеек, и *ловушки*, доля которых  $p \ll 1$  (см. рис. 4).

Попав в ячейку-диод, блуждатель на следующем шаге смещается в выделенном направлении, а оказавшись в ячейке-ловушке, он может пройти в этом направлении лишь с вероятностью  $u \ll 1$ , а с вероятностью  $(1 - u)$  делает шаг в противоположном направлении. Если за ловушкой находится диод, то миновав



**Рис. 4. Диффузия на анизотропной решетке с закрепленными случайностями**

Блуждатель свободно двигается слева направо по диодам, составляющим основную долю ячеек, пока не встретит ловушку, которая с большой вероятностью отбрасывает его налево, поэтому на ее прохождение ему потребуется много попыток.

Если несколько ячеек-ловушек выстраиваются подряд, образуется кратная ловушка, преодоление которой еще более затруднено.

ее, блуждатель никогда к ней более не возвращается, а если же за ней оказывается еще одна ловушка, то с большой вероятностью и уже пройденную ловушку придется преодолевать еще много раз. В результате кратные ловушки оказываются препятствием качественно иного уровня. В каком-то смысле ловушки разной кратности схожи с разными масштабами рассмотрения иерархических систем вроде самоподобных фракталов.

Ловушка кратности  $k$  встречается в среднем один раз на  $x_k = p^{-k}$  ячеек, а на ее прохождение тратится порядка  $t_k = u^{-k}$  шагов. А всего на прохождение дистанции  $x_k$  тратится (с учетом преодоления ловушек меньшей кратности) время

$$\sum_{i=0}^k p^i u^{-(k-i)} = t_k \cdot \frac{1 - (u/p)^{k+1}}{1 - u/p}.$$

В случае  $u \ll p$  оно отличается от  $t_k$  лишь коэффициентом. Поэтому можно считать, что  $x_k$  – это положение блуждателя в момент времени  $t_k$ .

Таким образом, возникает *перенормировочное уравнение*

$$px(t) = x(ut), \tag{6}$$

которое бы свидетельствовало об однородной (масштабно-инвариантной) зависимости  $x(t)$ , если бы выполнялось при произвольных  $u$  или  $p$ . В этом случае его решение имело бы вид

$$x(t) \sim t^\nu, \tag{7}$$

с показателем  $\nu = \log_u p$ . Но будучи справедливым только при тех  $u$  и  $p$ , которые взяты в постановке задачи, уравнение (6) указывает лишь на лог-периодичность детрендриванной зависимости  $y(t) = x(t) \cdot t^{-\nu}$ :

$$y(t) = y(ut),$$

что рождает целый спектр комплексных показателей для формулы (7)

$$\nu_n = \log_u p + 2\pi i n / \ln u, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Дискретный характер этого спектра, как и в случае с размерностью самоподобных фракталов, обусловлен наличием четко выделенных уровней. В случае фрактала они связаны с номером итерации процесса построения фрактала, в случае с анизотропной диффузией – с кратностью ловушки. Но в любом случае, эти уровни строго дискретны. Если допустить наличие ячеек-ловушек с переменной величиной  $u$ , т.е. возникновение ловушек нецелой кратности, то лог-периодическая компонента зависимости  $x(t)$  исчезнет, точно так же как исчезает она в зависимости числа элементов покрытия от их размера для несамоподобных фракталов.

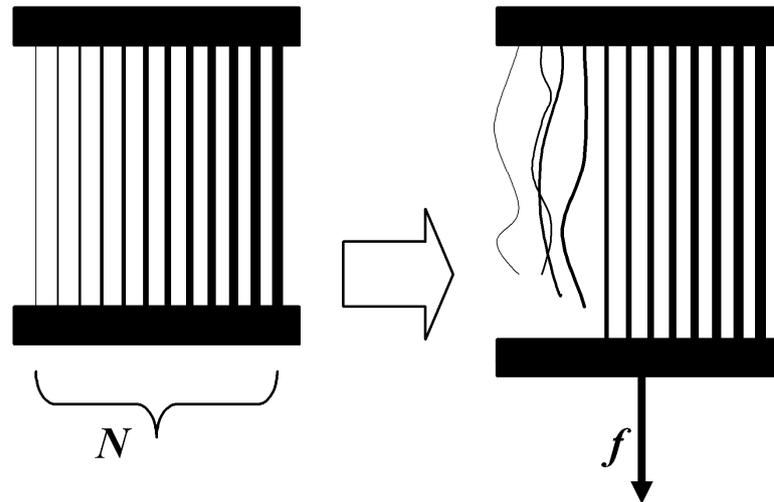
## МОДЕЛЬ РАЗРЫВА ПУЧКА ВОЛОКОН

Рассмотренные выше системы, демонстрируя дискретную масштабную инвариантность, всё-таки не вполне соответствуют решаемой задаче. Они предполагают наличие явно заданных или фактически возникающих дискретных иерархических уровней, что совершенно не реалистично.

А вот отсутствие выделенного значения времени или иной изменяемой переменной, с точки зрения исследования лог-периодичности колебаний, не есть принципиальный недостаток. Если совместить в одной модели геометрию самоподобного фрактала и критические свойства, как это сделано в работах [12,16], то легко добиться возникновения колебаний, стягивающихся к выделенному моменту времени в согласии с формулой (2). Однако природа дискретной масштабной инвариантности нуждается в объяснении в той же мере, как и природа лог-периодичности. И еще неизвестно, что сделать проще.

### *Правила модели и ее свойства*

Но есть и другой путь, который дает классическая *модель разрыва пучка волокон* [17,18]. В ней рассматривается пучок, состоящий изначально из  $N$  параллельных волокон, к которому приложено усилие  $f$ , которое делится поровну между волокнами (см. рис. 5). Каждое волокно характеризуется *прочностью*  $s$  – той пороговой величиной приходящегося на него усилия, при превышении которого волокно необратимо разрывается. При разрыве волокна усилие мгновенно перераспределяется между оставшимися волокнами, что приводит к росту нагрузки на них. Последняя вновь может превысить прочность некоторых волокон, спровоцировав новые разрывы и т.д. После завершения лавины разрывов усилие, приложенное к пучку, повышается до тех пор, пока вновь не будет превышен порог прочности одного из волокон.



**Рис. 5. Разрыв пучка волокон**

Прилагаемое к пучку усилие равномерно распределяется между всеми волокнами. Когда волокно не выдерживает, его разрыв приводит к росту той доли усилия, которая приходится на каждое из оставшихся волокон.

Если пучок держит приложенное усилие, оно наращивается до тех пор, пока не произойдет разрыв.

То, как рвется пучок по мере роста приложенного к нему усилия, существенно зависит от степени неоднородности пучка. Если прочность волокон описывается функцией распределения  $F(s)$ , то пучок содержит в среднем  $n = N \cdot [1 - F(s)]$  волокон прочности не менее  $s$ , способных выдержать суммарное усилие  $f = sn$ . Таким образом, волокно прочности  $s$  рвется по достижении усилием величины

$$f(s) = N \cdot s [1 - F(s)] \quad (8)$$

при условии, что все более слабые волокна уже порвались.

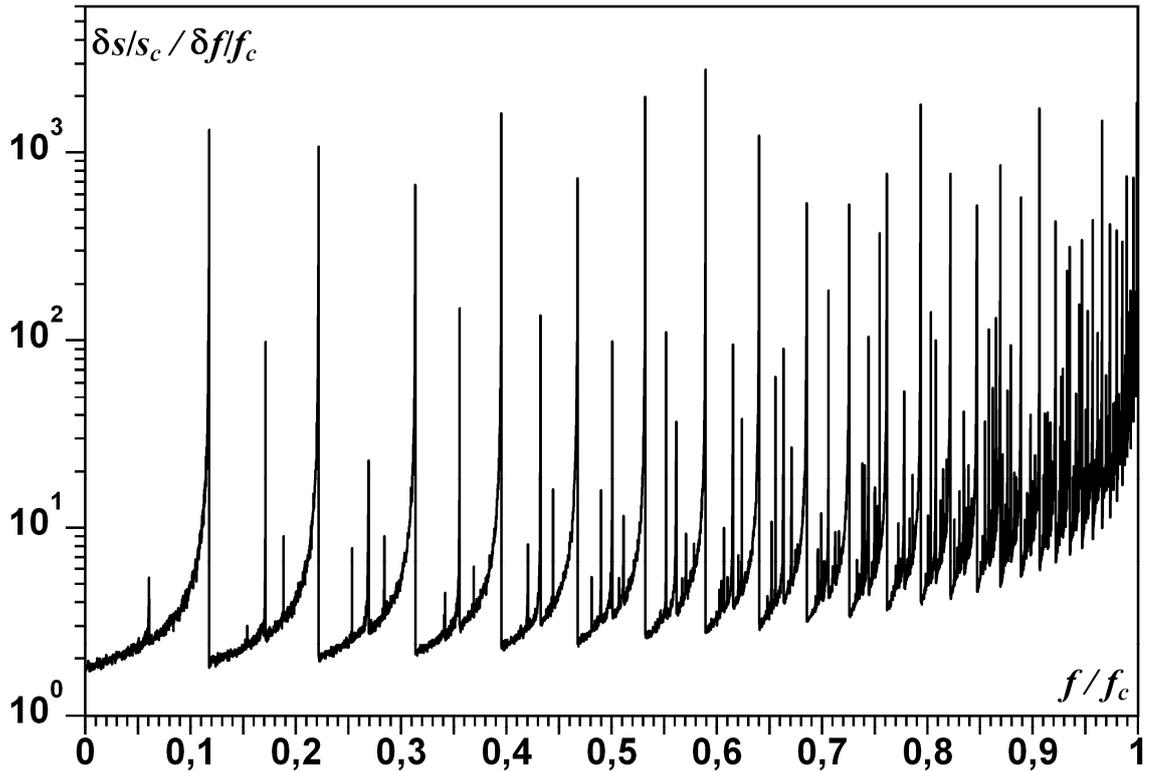
Если функция распределения  $F$  такова, что выражение (8) имеет максимум в некоторой точке  $s_c > 0$ , то вблизи нее разрывающее усилие удовлетворяет формуле

$$f_c - f(s) \sim (s_c - s)^2. \quad (9)$$

При этом запас прочности, необходимый для выживания волокна, расходуется при  $f \rightarrow f_c$  как

$$\frac{ds}{df} \sim (f_c - f)^{-1/2}, \quad (10)$$

т.е.  $f_c$  – критическая точка. В ее окрестности на повышение приложенного усилия пучок будет отвечать разрывом числа волокон, распределенным образом. И лишь после того как  $f$  достигнет  $f_c$ , произойдет разрыв всех



**Рис. 6. Экспериментально измеренная скорость разрыва**

Хотя скорость разрыва расходится при  $f \rightarrow f_c$ , на возрастающий тренд накладываются очень сильные колебания, сгущающиеся по мере приближения к моменту обострения. Результат получен для пучка, состоящего из  $N = 2^{27} \approx 10^8$  волокон.

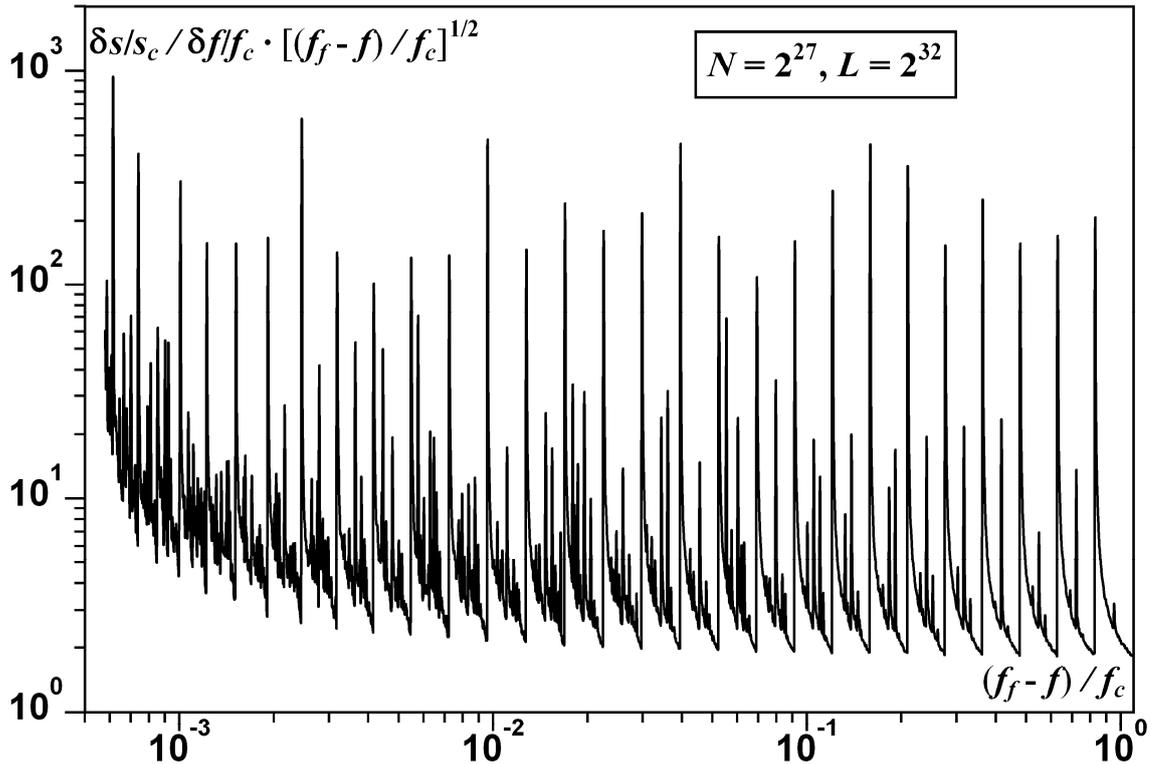
оставшихся волокон – полное разрушение. Соответственно, если рассматривать приложенную силу  $f$  как аналог времени, то значение  $f_c$  выступает в роли момента обострения. Причем вопрос о его природе даже не встает – коль скоро число волокон и их прочность конечны, то, несомненно, при некотором усилии весь пучок будет разорван.

Ограничимся для простоты рассмотрением равномерного распределения волокон по прочности на интервале  $(0;1)$ , которому соответствует  $F(s) = s$ . В этом случае  $s_c = 1/2$  и  $f_c = N/4$ , а формула (9) выполнена для всех  $s$ , а не только для близких к  $s_c$ .

### ***Особенности процесса разрушения в дискретном случае***

Формула (10) для скорости разрыва получена для континуального множества волокон. В случае их конечного числа отношение дифференциалов заменится отношением конечных приращений прочности слабейшего волокна  $\delta s$  и приложенного усилия  $\delta f$ .

На рис. 6 представлена динамика дискретного аналога скорости разрыва, определенная в ходе компьютерного эксперимента для пучка волокон, прочности которых сгенерированы с помощью датчика случайных чисел. Легко видеть, что график сильно отклоняется от тренда, предсказанного формулой (10).



**Рис. 7. Колебательная компонента скорости разрушения**

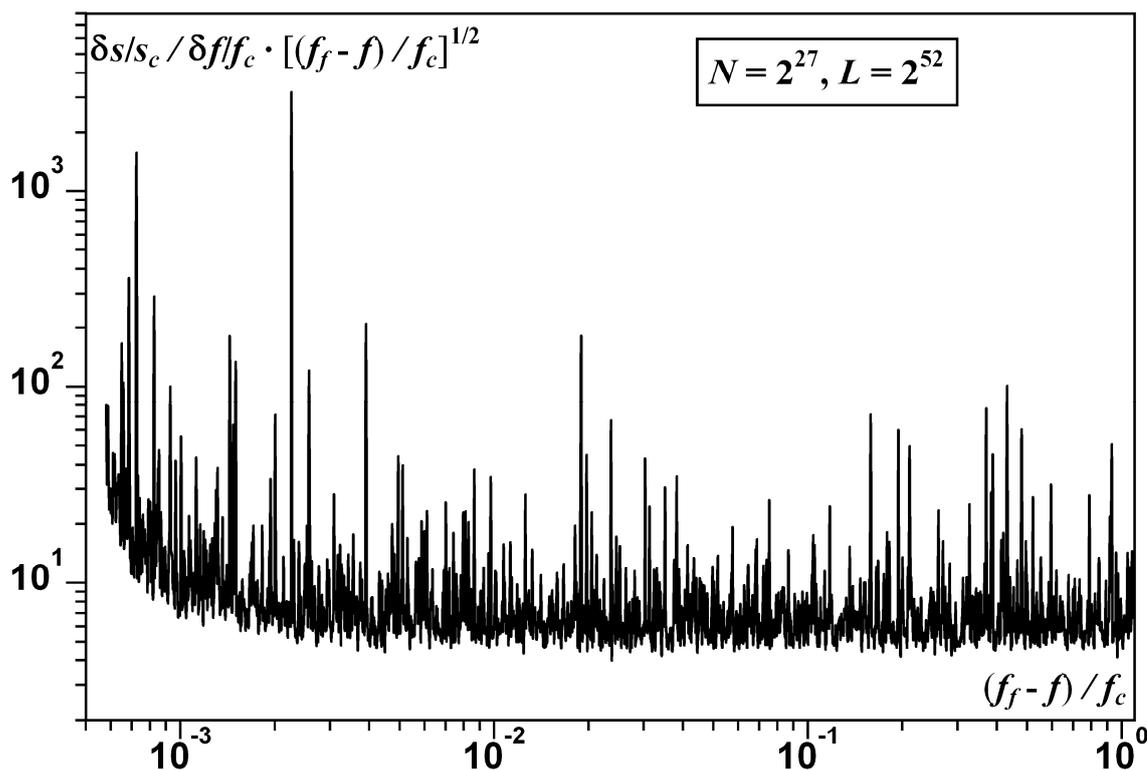
Показана та же зависимость, что и на рис. 6, но со скомпенсированным трендом (10), растущим в режиме с обострением. По абсциссе взята отстройка от эмпирического момента обострения  $f_f$  в логарифмическом масштабе. При этом эквидистантные пики соответствуют лог-периодическим колебаниям.

Глубина использованного датчика случайных чисел – 32 бита.

Рис. 7, где зависимость детрендирована, позволяет установить лог-периодический характер колебаний, наложившихся на тренд.

При анализе на рис. 7 и далее полагается, что моменту обострения соответствует не значение  $f_c$ , а немного большая величина  $f_f$ , подбираемая так, чтобы постоянство частоты колебаний в логарифмическом масштабе выдерживалось максимально строго. В выборе эмпирического момента обострения  $f_f$ , отличного от  $f_c$ , имеется некоторый произвол, однако, не очень большой. С одной стороны, для реальных, а не модельных систем точное положение момента обострения всё равно не известно (т.к. система разрушается до его достижения) и является подгоночным. А с другой стороны, введение дополнительного выделенного значения  $f$  имеет и вполне содержательный математический смысл, который станет понятен позже.

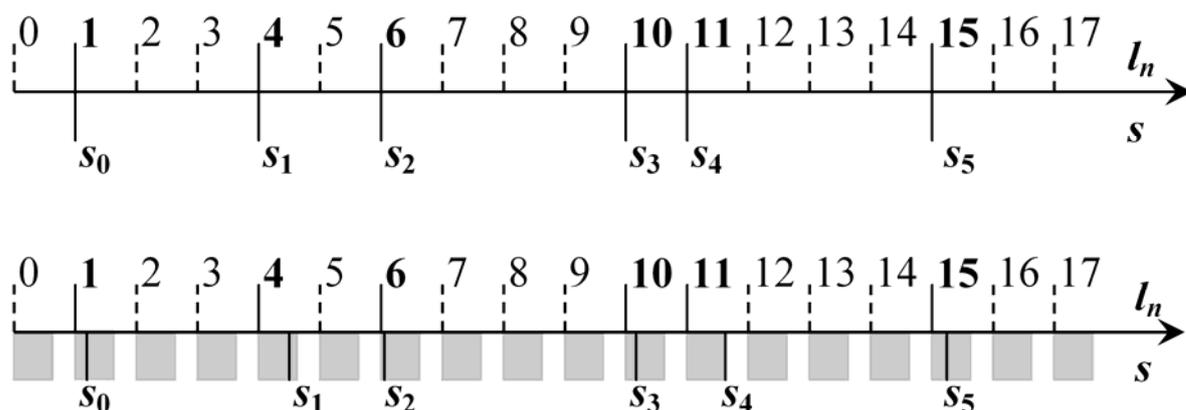
Если бы с реальным пучком дела обстояли так же, как в описанном эксперименте, то вряд ли объяснение лог-периодических колебаний представляло бы существенную трудность. Однако интуиция подсказывает, что подобного поведения быть просто не может. И в самом деле, данный результат является артефактом численного моделирования.



**Рис. 8. Увеличение разрядности датчика**

Та же самая, зависимость, что и на рис. 7, но при генерации набора волокон использовался датчик случайных чисел с глубиной 52 бита. Эквидистантных пиков, соответствующих лог-периодическим колебаниям, здесь нет.

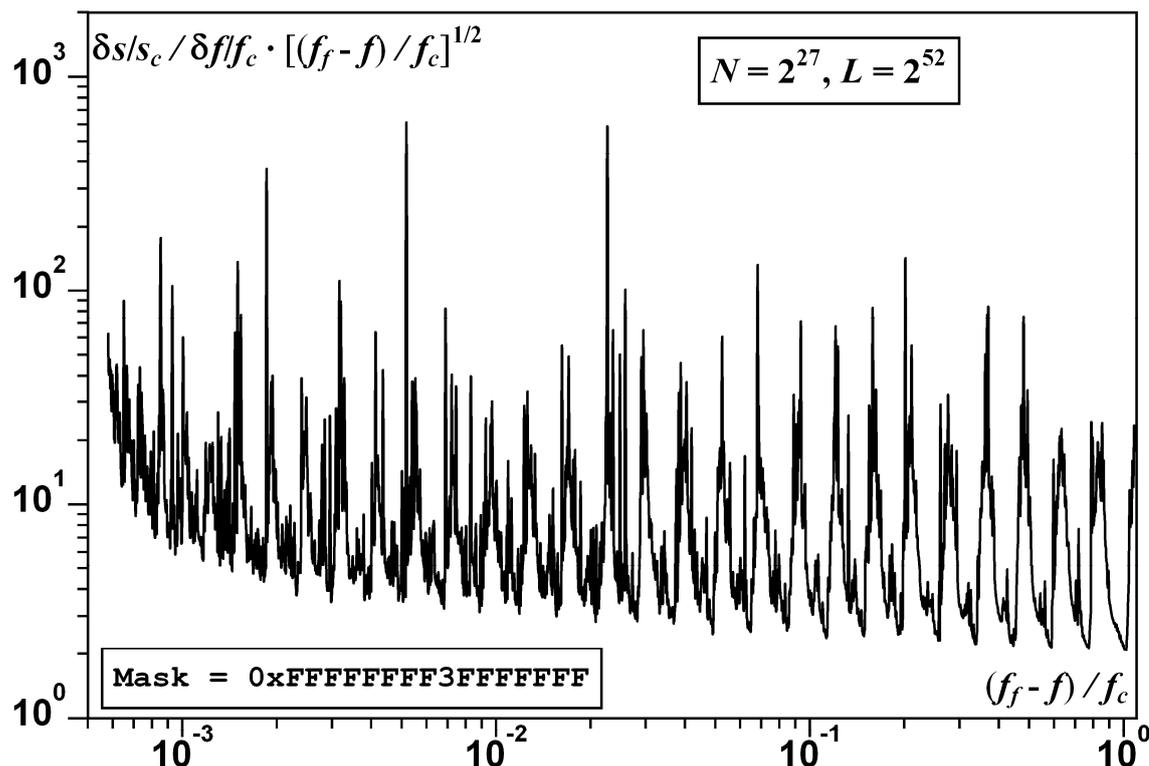
Для устранения возможных разночтений при приготовлении этого и предыдущего рисунков реально использовалась одна и та же генерация случайных чисел, но для рис. 7 у них были сохранены только 32 старших бита, а последующие сброшены в ноль.



**Рис. 9. Связь случайных чисел и прочностей волокон**

Вверху – случай строгой периодичности. Прочности волокон  $s$  выбираются из набора эквидистантных величин, связанных с целочисленными значениями датчика  $l$  формулой  $L \cdot s_n = l_n$ .

Внизу – случай нестрогой периодичности. Здесь уже возможен некоторый допуск и  $L \cdot s_n \in [l_n; l_n + \Delta l]$  с  $\Delta l < 1$ . Однако по-прежнему все возможные значения  $s$  принадлежат периодическому множеству.



**Рис. 10. Случай нестрогой периодичности**

То же самое, что и на рис. 8, но случайные числа только частично загрублены до 32 битов. Посредством конъюнкции с указанной двоичной маской в ноль сброшены не все последующие биты, а лишь 2.

Генерируемые так числа могут отклоняться от возможных значений 32-битного датчика, но не более чем на четверть младшего разряда. Лог-периодичность сохраняется, хотя пики утрачивают четкость.

Наблюдаемый феномен обусловлен особенностями датчика случайных чисел, который использовался для генерации прочностей волокон. Генерируемые случайные числа имели всего 32 двоичных разряда. Если взять датчик с большей разрядностью, то, как можно видеть из рис. 8, лог-периодичность исчезает, и отклонения от тренда принимают случайный характер.

Входным сигналом для рассматриваемой модели является случайная генерация прочностей волокон. И конечная точность датчика случайных чисел означает периодичность сигнала, подаваемого на вход модели. В самом деле, если датчик позволяет сгенерировать  $L$  различных случайных целых чисел  $0 \leq l < L$ , то прочности, получаемые линейным отображением этого диапазона на единичный отрезок, выбираются на периодической решетке, имеющей шаг  $1/L$  (см. рис. 9 вверху). И если отношение  $L/N$ , равное среднему числу шагов решетки, разделяющих два последовательных волокна, не очень велико, то в модели наблюдается лог-периодическое поведение. В случае, представленном на рис. 7, это отношение (определяющее, как будет показано далее, число циклов, проходимых системой до полного разрушения) составляло всего  $2^5 = 32$ . А

при переходе к рис. 8 оно было увеличено в  $2^{20} \approx 1$  млн. раз, что сделало совершенно несущественной принадлежность прочностей периодическому набору.

Заметим, что строгая периодичность входа модели необязательна для получения лог-периодических колебаний. Можно допустить некоторое отклонение прочностей от величин, строго соответствующих точкам целочисленной решетки (как показано на рис. 9 внизу). Важно, однако, чтобы размытие решетки имело регулярный характер, тогда, как можно видеть на рис. 10 эквидистантность пиков сохраняется, хотя они тоже становятся размытыми.

## ПРИРОДА ЛОГ-ПЕРИОДИЧНОСТИ

Осталось разобраться, где именно возникают пики и как именно модель разрыва пучка волокон конвертирует периодическую компоненту входного сигнала в лог-периодический выходной сигнал.

### *Резонансные пики*

Пусть имеется  $N$  волокон и для них  $L$  потенциально возможных прочностей. Обозначим  $n$ -е по величине значение случайного числа в генерации через  $l_n$ . Тогда соответствующая ему прочность

$$s_n = \frac{l_n}{L}, \quad (11)$$

а, кроме того, в силу равномерности распределения волокон по прочности

$$s_n \approx \frac{n}{N}. \quad (12)$$

Усилие, необходимое для разрыва  $n$ -го волокна

$$f_n = s_n(N - n).$$

При увеличении номера волокна  $n \rightarrow n + \delta n$  и  $l_n \rightarrow l_n + \delta l_n$  это усилие возрастает на величину

$$\delta f_n = \frac{l_n + \delta l_n}{L}(N - n - \delta n) - \frac{l_n}{L}(N - n) \approx \frac{(N - n)\delta l_n + l_n \delta n}{L}.$$

Исключение  $n$  и  $l_n$  с помощью формул (11) и (12) окончательно дает

$$\delta f_n \cong \frac{N\delta l_n - s(N\delta l_n + L\delta n)}{L}. \quad (13)$$

Экспериментально наблюдаемые гигантские всплески отношения приращений прочности слабейшего волокна и приложенного усилия (пики) связаны с обращением последнего почти что в ноль. Положив  $\delta f_n = 0$  и потребовав тем

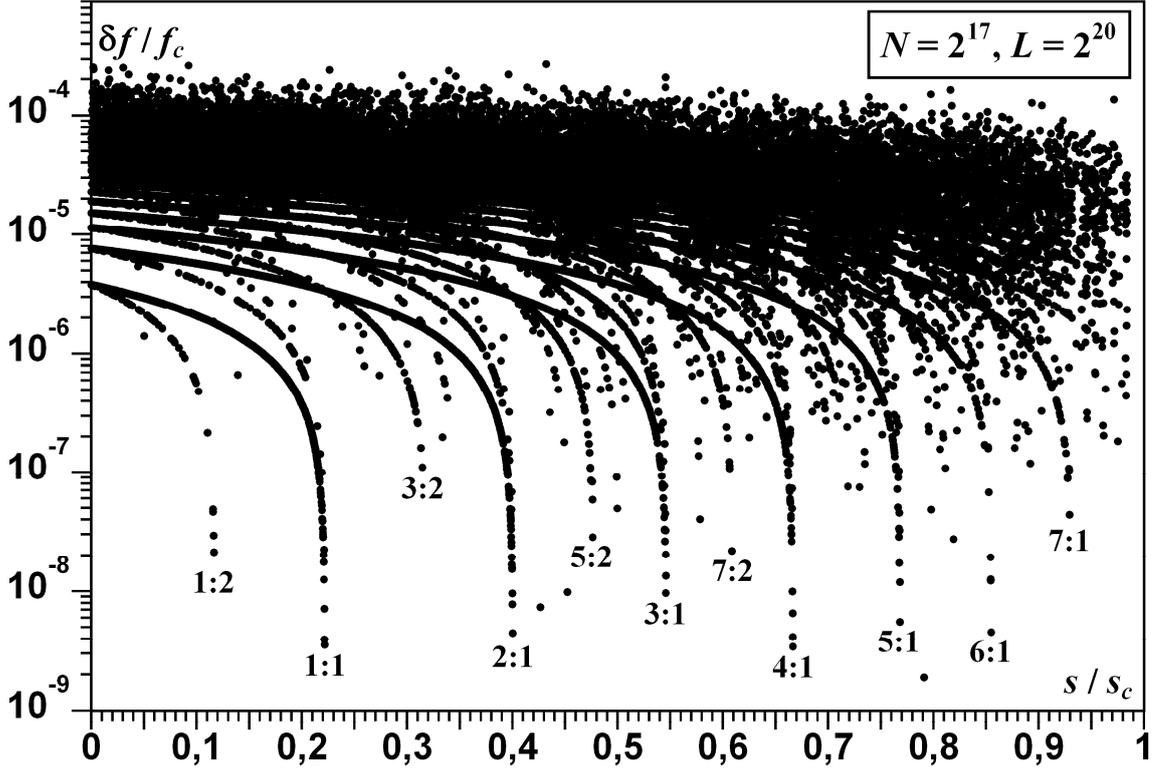


Рис. 11. Приближение к резонансам ( $\delta l_n : \delta n$ )

Малые приращения  $\delta f$  группируются по абсциссе в районе резонансных прочностей, ложась на (прямые в обычном масштабе) линии, заданные уравнением (15).

Самые сильные резонансы с  $\delta n = 1$  (разрыв всего одного волокна в ответ на рост приложенного усилия) соответствуют основной частоте лог-периодических колебаний, вторичные резонансы с  $\delta n \geq 2$  – обертонам.

самым, чтобы разрыв происходил без увеличения приложенного усилия, находим

$$\tilde{s}_n \cong \frac{N\delta l_n}{N\delta l_n + L\delta n}, \quad (14)$$

где тильда над  $s$  означает *резонансное* значение прочности, при котором увеличение номера слабейшего волокна на  $\delta n$  и соответствующего ему значения датчика на  $\delta l_n$  возможно без роста приложенного усилия.

Разумеется, нет никаких гарантий, что в случайно сгенерированном пучке действительно найдется волокно именно с такой прочностью. Однако сгодится и прочность, чуть меньшая резонансной,

$$\tilde{s}'_n = \tilde{s}_n - \Delta s.$$

Как следует из формулы (13), необходимый для разрыва такого волокна рост усилия

$$\delta f'_n = \Delta s \cdot (\delta n + N/L \cdot \delta l_n) \quad (15)$$

будет мал в меру малости отклонения  $\Delta s$ . Следовательно, при резонансных прочностях, задаваемых формулой (14), или близких к ним, возможны пики скорости разрыва.

Рис. 11 показывает измеренные в численном эксперименте приросты усилия, демонстрирующие избыток волокон с прочностями, близкими к резонансным, в реальной генерации.

### ***Преобразование масштабов***

Теперь необходимо установить, как положения резонансов (14) превращаются именно в эквидистантные в логарифмическом масштабе пики.

В соответствии с формулой (9), относительная отстройка усилия от критического значения

$$\frac{f_c - f}{f_c} = \left( \frac{s_c - s}{s_c} \right)^2 = (1 - 2s)^2,$$

поскольку для рассматриваемого варианта модели  $s_c = 1/2$ .

С помощью формулы (14) для положения пиков получаем

$$\frac{f_c - \tilde{f}_n}{f_c} = (1 - 2\tilde{s}_n)^2 = \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right)^2,$$

где 
$$z = \frac{\delta l_n}{\delta n} \cdot \frac{N}{L} = \frac{\tilde{s}_n}{1 - \tilde{s}_n}$$

изменяется от 0 до 1 при изменении  $s$  от 0 до  $1/2$ .

Если принять положение эмпирического момента обострения

$$f_f = f_c \cdot (1 + a),$$

то логарифм относительной отстройки от него, который откладывается по абсциссе на рис. 7, 8 и 10,

$$\frac{f_f - f}{f_c} = g(z) = \ln \left( a + \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right)^2 \right).$$

При  $a \approx 0,03 \div 0,04$  функция  $g(z)$  практически линейна почти на всём отрезке  $[0; 1]$  (см. рис. 12). В ее разложении по степеням  $z$

$$g(z) = \ln(1 + a) - \frac{4}{1 + a} z + \frac{8a}{(1 + a)^2} z^2 - \dots$$

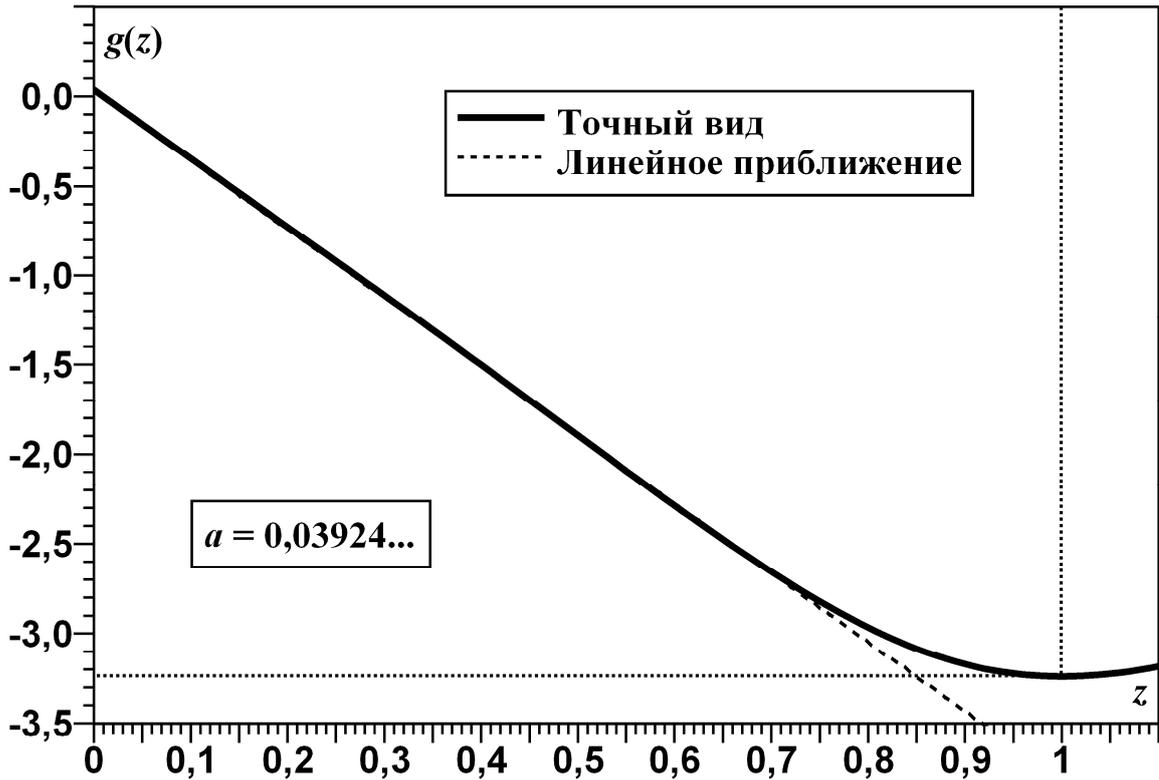


Рис. 12. Функция  $g(z)$

При выбранной величине  $a$  для  $z \leq 0,75$  график функции неотличим от графика ее разложения в ряд до линейного члена.

Уменьшение  $a$  позволяет несколько расширить участок, на котором имеет смысл использовать линейное приближение, за счет некоторого ухудшения качества последнего. И поскольку никаких четких критериев выбора  $a$  нет, в данной работе принято такое значение, при котором на линейном участке  $g(z) \sim 1 - 100 \cdot z$ .

отношение второго члена к первому мало в меру малости  $a \cdot z$ , что позволяет сохранить высокую точностью, если ограничить разложение первым членом.

Иными словами,  $\log(f_f - f)$  практически линейно зависит от отношения  $\delta l_n : \delta n$ , вследствие чего резонансы при фиксированном  $\delta n$  и последовательных значениях  $\delta l_n$  будут эквидистантны. Таким образом, динамика системы на протяжении почти всего времени ее существования описывается формулой (2). И лишь в непосредственной близости от момента обострения, где система уже практически ненаблюдаема, происходит отклонение от такого поведения. Однако и там это отклонение носит лишь количественный, а не качественный характер. Сгущение колебаний сохраняется, хотя более и не подчиняется простой формуле (2).

Пучок сохраняется при прочностях слабейшего волокна  $s < s_c = 1/2$ . Наложение этого ограничения на резонансные прочности формулы (14) дает ограничение на количество резонансов

$$\delta l_n < L/N \cdot \delta n .$$

Основной частоте колебаний следуют пики, возникающие при  $\delta n = 1$  (см. рис. 11). Их количество ограничено отношением  $L/N$ , которое, следовательно, не должно быть очень большим, чтобы можно было различить отдельные циклы колебаний.

Следует заметить, что реально наблюдаемое число циклов лог-периодических колебаний несколько меньше, чем  $L/N$ , поскольку вблизи момента обострения происходят столь быстрые изменения, что картина смазывается. Дополнительные искажения вносятся также работой с отстройкой усиления не от критического значения  $f_c$ , а от эмпирического момента обострения  $f_f$ , что, однако, не меняет качественных свойств системы.

## ВЫВОДЫ

Модель разрыва пучка волокон при генерации их прочностей с помощью датчика случайных чисел, имеющего ограниченную точность, демонстрирует колебания, ускоряющиеся по мере приближения усиления к критическому значению. Эти колебания являются периодической функцией логарифма отстройки усиления от эмпирического момента обострения, и постоянство периода сохраняется почти до самого момента обострения.

Причиной возникновения лог-периодических колебаний в критической системе может быть преобразование входного сигнала, периодического в линейном масштабе, в выходной сигнал, периодический в логарифмическом масштабе. Модель разрыва пучка волокон демонстрирует пример такого преобразования.

## Литература

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
2. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур/ Сборник статей/ Ред. Г.Г. Малинецкий/ Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения. – М.: Наука, 1998. – 255 с.
3. Режимы с обострением: эволюция идеи / Сборник статей/ Под ред. Г.Г. Малинецкого/ 2-е изд. испр. и доп. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.
4. Ма Ш. Современная теория критических явлений. – М.: Мир, 1980. – 298 с.
5. Johansen A., Sornette D., Wakita H., Tsunogai U., Newman W.I., Saleur H. Discrete scaling in earthquake pre-cursory phenomena: Evidence in the Kobe earthquake, Japan// J. Phys. I (France). 1996. V.6, p.1391-1402.
6. Sornette D., Johansen A. Large financial crashes// Physica A. 1997. V.245, N3-4, p.411-422. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9704127>
7. Сорнетте Д. Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах. – М.: Интернет-трейдинг, 2003. – 400 с.
8. Sornette D., Sammis C.G. Complex critical exponents from renormalization group theory of earthquakes: Implications for earthquake predictions// J. Phys. I (France). 1995. V.5, N5, p.607-619.
9. Johansen A., Sornette D. Critical Crashes// Risk. 1999. V.12, N1, p.91-94. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9901035>

10. *Johansen A., Sornette D., Ledoit O.* Predicting financial crashes using discrete scale invariance// *Journal of Risk*. 1999. V.1, N4, p.5-32. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/9903321>
11. *Sornette D., Johansen A.* Significance of log-periodic precursors to financial crashes// *Quantitative Finance*. 2001. V.1, N4, p.452-471. <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0106520>
12. *Saleur H., Sammis C.G., Sornette D.* Discrete scale invariance, complex fractal dimensions and log-periodic fluctuations in seismicity// *J. Geophys. Res.* 1996. V.101, p.17661-17677.
13. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
14. [http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski\\_carpet](http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_carpet)
15. *Stauffer D.* New simulations on old biased diffusion// *Physica A*. 1999. V.266, N1-4, p.35-41.
16. *Sornette D., Johansen A.* A hierarchical model of financial crashes// *Physica A*. 1998. V.261, N3-4, p.351-358.
17. *Andersen J.V., Sornette D., Leung K.-T.* Tri-critical behavior in rupture induced by disorder// *Phys. Rev. Lett.* 1997. V.78. P.2140-2143.
18. *Zhang S., Fan Q, Ding E.* Critical processes, Langevin equation and universality// *Physics Letters A*. 1995. V.203. P.83-87.

## Содержание

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Введение .....</b>  | <b>3</b>  |
| <b>Предвестник катастроф .....</b>                               | <b>4</b>  |
| <b>Дискретная масштабная инвариантность .....</b>                | <b>6</b>  |
| Самоподобные фракталы .....                                      | 6         |
| Диффузия на анизотропной решетке с закрепленными случайностями.. | 7         |
| <b>Модель разрыва пучка волокон.....</b>                         | <b>9</b>  |
| Правила модели и ее свойства .....                               | 9         |
| Особенности процесса разрушения в дискретном случае .....        | 11        |
| <b>Природа лог-периодичности .....</b>                           | <b>15</b> |
| Резонансные пики .....   | 15        |
| Преобразование масштабов .....                                   | 17        |
| <b>Выводы .....</b>  | <b>19</b> |