



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 40 за 2009 г.



Березин А.В., Крюков А.А.,
Плющенко Б.Д.

Неявная разностная схема
для решения уравнений
Максвелла

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Березин А.В., Крюков А.А., Плющенко Б.Д. Неявная разностная схема для решения уравнений Максвелла // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 40. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-40>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.КЕЛДЫША РАН

А.В. Березин, А.А. Крюков,
Б.Д. Плющенко

НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Москва, 2009

А.В. Березин, А.А. Крюков, Б.Д. Плющенко
НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

АННОТАЦИЯ

Настоящая работа посвящена описанию численного метода решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в лабораторном времени. Описана неявная разностная схема, используемая для аппроксимации уравнений Максвелла с различными граничными условиями.

Рассмотрены математические алгоритмы решения системы уравнений, возникающей при использовании неявной схемы.

A.V. Berezin, A.A. Kryukov, B.D. Plyushchenkov
IMPLICIT DIFFERENCE SCHEME FOR SOLUTION
OF MAXWELL'S EQUATIONS

ABSTRACT

The present paper is devoted to the description of numerical approach of solution problem Koshi for systems of Maxwell's equations in usual time. The implicit difference scheme used for approximation of Maxwell's equations with various boundary conditions is described.

Mathematical algorithms of the decision of system of the equations arising at use the implicit scheme are considered.

Введение.

В работе описана численная методика решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в лабораторном времени. Введена разностная сетка по пространству и времени, определены сеточные функции, соответствующие компонентам поля. Представлена неявная разностная схема, аппроксимирующая уравнения Максвелла на данной сетке. Рассмотрены различные типы граничных условий.

Для решения системы уравнений, возникающей при использовании неявной схемы, использовались пакеты прикладных программ SPARSKIT и BLAS. Описаны математические алгоритмы, реализованные в данных пакетах и их программная реализация.

Рассмотрена тестовая задача расчета электромагнитного поля при заданной плотности тока в области с разрывной электропроводностью. На примере этого решения неявная схема сравнивается с явной схемой типа "крест".

1. Неявная разностная схема для уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{I} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{aligned}$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} - электрическое и магнитное поля, ε и μ - диэлектрическая и магнитная проницаемость, c - скорость света.

$$\mathbf{I} = \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}),$$

σ - проводимость, \mathbf{J} - сторонние токи.

Решение будем искать в декартовой системе координат внутри прямоугольной области:

$$\{x, y, z : x \in [x_{\min}, x_{\max}], y \in [y_{\min}, y_{\max}], z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}.$$

Запишем уравнения Максвелла покомпонентно:

$$\begin{aligned}
\partial_y H^z - \partial_z H^y &= \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}^x + I^x; & \partial_z E^y - \partial_y E^z &= \frac{\mu}{c} \dot{H}^x; \\
\partial_z H^x - \partial_x H^z &= \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}^y + I^y; & \partial_x E^z - \partial_z E^x &= \frac{\mu}{c} \dot{H}^y; \\
\partial_x H^y - \partial_y H^x &= \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}^z + I^z; & \partial_y E^x - \partial_x E^y &= \frac{\mu}{c} \dot{H}^z.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Для разностной аппроксимации область разбивается на ячейки. Различные компоненты электромагнитного поля приписываются различным пространственным точкам. Такая сетка называется разнесённой по пространству. Для переменной x сетка вводится по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
x_i &= x_{i-1} + \Delta x_i^{05}; \quad i = 1, \dots, N_x \\
x_0 &= x_{\min}, \quad x_{N_x} = x_{\max} \\
x_i^{05} &= (x_i + x_{i-1}) / 2; \quad i = 1, \dots, N_x \\
x_0^{05} &= x_0 - \Delta x_1^{05} / 2, \quad x_{N_x+1}^{05} = x_{N_x} + \Delta x_{N_x}^{05} / 2 \\
\Delta x_i &= x_{i+1}^{05} - x_i^{05}; \quad i = 0, \dots, N_x,
\end{aligned}$$

где N_x - число разбиения по соответствующему направлению. Для остальных направлений разбиение вводится аналогично. Точки x_i соответствуют границам ячеек, точки x_i^{05} - центрам. По времени вводится неравномерная сетка, на которой все компоненты электромагнитного поля приписываются одному слою по времени:

$$\begin{aligned}
t_n &= t_{n-1} + \Delta t_n; \quad n = 1, \dots, N_t \\
t_0 &= t_{\min}, \quad t_{N_t} = t_{\max},
\end{aligned}$$

где t_{\min}, t_{\max} - моменты времени, в которые начинается и заканчивается численный эксперимент, N_t - число разбиения по времени.

Сеточные компоненты электрического поля приписываются ребрам ячеек по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
E_{i,j,k}^x &\cong E^x(x_i^{05}, y_j, z_k); \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_y, \quad k = 0, \dots, N_z \\
E_{i,j,k}^y &\cong E^y(x_i, y_j^{05}, z_k); \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y, \quad k = 0, \dots, N_z \\
E_{i,j,k}^z &\cong E^z(x_i, y_j, z_k^{05}); \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_y, \quad k = 1, \dots, N_z.
\end{aligned}$$

Сторонние токи задаются в тех же точках пространства, что и электрические поля:

$$J_{i,j,k}^x \cong J^x(x_i^{05}, y_j, z_k); i=1, \dots, N_x, j=0, \dots, N_y, k=0, \dots, N_z$$

$$J_{i,j,k}^y \cong J^y(x_i, y_j, z_k^{05}); i=0, \dots, N_x, j=1, \dots, N_y, k=0, \dots, N_z$$

$$J_{i,j,k}^z \cong J^z(x_i, y_j, z_k^{05}); i=0, \dots, N_x, j=0, \dots, N_y, k=1, \dots, N_z.$$

Сеточные компоненты магнитного поля приписываются граням ячеек по следующим правилам:

$$H_{i,j,k}^x \cong H^x(x_i, y_j, z_k^{05}); i=0, \dots, N_x, j=0, \dots, N_y+1, k=0, \dots, N_z+1$$

$$H_{i,j,k}^y \cong H^y(x_i^{05}, y_j, z_k^{05}); i=0, \dots, N_x+1, j=0, \dots, N_y, k=0, \dots, N_z+1$$

$$H_{i,j,k}^z \cong H^z(x_i^{05}, y_j, z_k); i=0, \dots, N_x+1, j=0, \dots, N_y+1, k=0, \dots, N_z.$$

В описании сетки мы ввели дополнительные слои магнитного поля вне расчетной области. Покажем расположение такого слоя на примере компоненты магнитного поля H^z у границы $x = x_{\min}$ (рисунок 1).

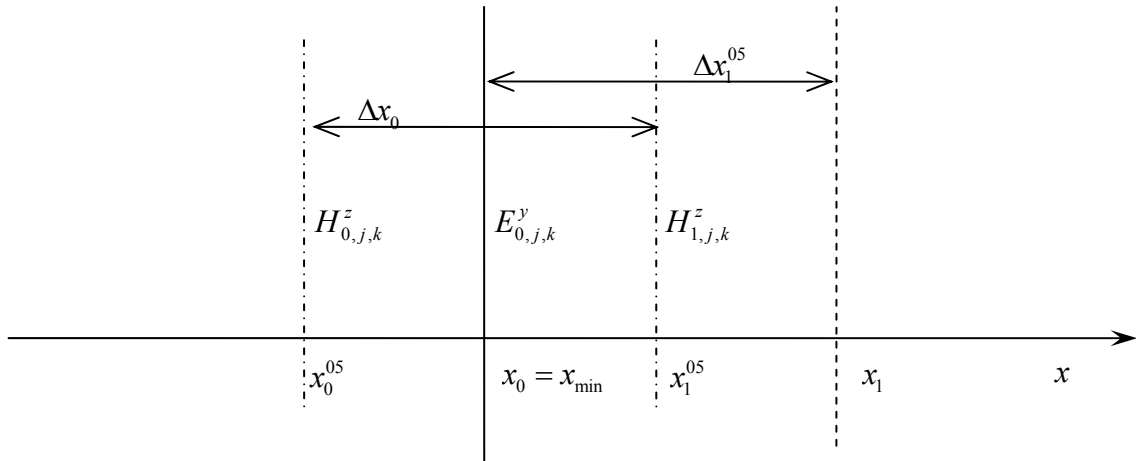


Рисунок 1

Численная методика основана на использовании неявной разностной схемы [1] для решения системы уравнений (1.1). Степень неявности схемы задаётся весом α , т.е. сеточные функции, входящие в разностные аналоги пространственных производных, вводятся по следующей формуле:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \alpha \hat{\mathbf{u}} + (1 - \alpha) \mathbf{u},$$

где параметр α определяет «степень неявности» схемы, $\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$ - значения сеточной функции на верхнем и нижнем временном слое соответственно. Для упрощения вычислительной реализации схемы, в разностных уравнениях значения сеточных функций $\tilde{\mathbf{u}}$ выражены через производные по времени:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \alpha \Delta t_n \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u}.$$

С учётом этого, значения сеточных функций на верхнем слое по времени вычисляются по формуле:

$$\hat{\mathbf{u}} = \Delta t_n \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u}.$$

Диэлектрическая и магнитная проницаемость, а также проводимость считаются заданными в нужных точках по пространству. Для обеспечения устойчивости, в разностной схеме ток проводимости усредняется по следующей формуле:

$$\sigma \tilde{\mathbf{E}} = \alpha_{sig} \hat{\mathbf{E}} + (1 - \alpha_{sig}) \mathbf{E},$$

где параметр α_{sig} не зависит от α , $\hat{\mathbf{E}}, \mathbf{E}$ - значения электрического поля на верхнем и нижнем временном слое соответственно.

2. Разностные уравнения для сеточных функций.

Разностные аналоги уравнений (1.1) записываются для временных производных компонент поля:

Разностный аналог уравнения $\partial_y H^z - \partial_z H^y = \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}^x + I^x$:

$$\left(\frac{\varepsilon(x_i^{05}, y_j, z_k)}{c} + \frac{4\pi}{c} \alpha_{sig} \Delta t_n \sigma(x_i^{05}, y_j, z_k) \right) \dot{E}_{i,j,k}^x + \alpha \Delta t_n \frac{\dot{H}_{i,j,k+1}^y - \dot{H}_{i,j,k}^y}{\Delta z_k} - \alpha \Delta t_n \frac{\dot{H}_{i,j+1,k}^z - \dot{H}_{i,j,k}^z}{\Delta y_j} = \frac{H_{i,j+1,k}^z - H_{i,j,k}^z}{\Delta y_j} - \frac{H_{i,j,k+1}^y - H_{i,j,k}^y}{\Delta z_k} - \frac{4\pi}{c} \left(\sigma(x_i^{05}, y_j, z_k) E_{i,j,k}^x + J_{i,j,k}^x \right), \quad (2.1)$$

для внутренних точек области: $i = 1, \dots, N_x; j = 0, \dots, N_y; k = 0, \dots, N_z$.

Разностный аналог уравнения $\partial_z H^x - \partial_x H^z = \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}^y + I^y$:

$$\left(\frac{\varepsilon(x_i, y_j^{05}, z_k)}{c} + \frac{4\pi}{c} \alpha_{sig} \Delta t_n \sigma(x_i, y_j^{05}, z_k) \right) \dot{E}_{i,j,k}^y + \alpha \Delta t_n \frac{\dot{H}_{i+1,j,k}^z - \dot{H}_{i,j,k}^z}{\Delta x_i} - \alpha \Delta t_n \frac{\dot{H}_{i,j,k+1}^x - \dot{H}_{i,j,k}^x}{\Delta z_k} = \frac{H_{i,j,k+1}^x - H_{i,j,k}^x}{\Delta z_k} - \frac{H_{i+1,j,k}^z - H_{i,j,k}^z}{\Delta x_i} - \frac{4\pi}{c} \left(\sigma(x_i, y_j^{05}, z_k) E_{i,j,k}^y + J_{i,j,k}^y \right), \quad (2.2)$$

для внутренних точек области: $i = 0, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y; k = 0, \dots, N_z$.

Разностный аналог уравнения $\partial_x H^y - \partial_y H^x = \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}^z + I^z$:

$$\left(\frac{\varepsilon(x_i, y_j, z_k^{05})}{c} + \frac{4\pi}{c} \alpha_{sig} \Delta t_n \sigma(x_i, y_j, z_k^{05}) \right) \dot{E}_{i,j,k}^z + \alpha \Delta t_n \frac{\dot{H}_{i,j+1,k}^x - \dot{H}_{i,j,k}^x}{\Delta y_j} - \alpha \Delta t_n \frac{\dot{H}_{i+1,j,k}^y - \dot{H}_{i,j,k}^y}{\Delta z_k} =$$

$$\frac{H_{i+1,j,k}^y - H_{i,j,k}^y}{\Delta z_k} - \frac{H_{i,j+1,k}^x - H_{i,j,k}^x}{\Delta y_j} - \frac{4\pi}{c} \left(\sigma(x_i, y_j, z_k^{05}) E_{i,j,k}^z + J_{i,j,k}^z \right), \quad (2.3)$$

для внутренних точек области: $i = 0, \dots, N_x; j = 0, \dots, N_y; k = 1, \dots, N_z$.

Разностный аналог уравнения $\partial_z E^y - \partial_y E^z = \frac{\mu}{c} \dot{H}^x$:

$$\frac{\mu(x_i, y_j^{05}, z_k^{05})}{c} \dot{H}_{i,j,k}^x + \alpha \Delta t_n \frac{\dot{E}_{i,j,k}^z - \dot{E}_{i,j-1,k}^z}{\Delta y_j^{05}} - \alpha \Delta t_n \frac{\dot{E}_{i,j,k}^y - \dot{E}_{i,j,k-1}^y}{\Delta z_k^{05}} =$$

$$\frac{E_{i,j,k}^y - E_{i,j,k-1}^y}{\Delta z_k^{05}} - \frac{E_{i,j,k}^z - E_{i,j-1,k}^z}{\Delta y_j^{05}}, \quad (2.4)$$

для внутренних точек области: $i = 0, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y; k = 1, \dots, N_z$.

Разностный аналог уравнения $\partial_x E^z - \partial_z E^x = \frac{\mu}{c} \dot{H}^y$:

$$\frac{\mu(x_i^{05}, y_j, z_k^{05})}{c} \dot{H}_{i,j,k}^y + \alpha \Delta t_n \frac{\dot{E}_{i,j,k}^x - \dot{E}_{i,j,k-1}^x}{\Delta z_k^{05}} - \alpha \Delta t_n \frac{\dot{E}_{i,j,k}^z - \dot{E}_{i-1,j,k}^z}{\Delta x_i^{05}} =$$

$$\frac{E_{i,j,k}^z - E_{i-1,j,k}^z}{\Delta x_i^{05}} - \frac{E_{i,j,k}^x - E_{i,j,k-1}^x}{\Delta z_k^{05}} \quad (2.5)$$

для внутренних точек области: $i = 1, \dots, N_x; j = 0, \dots, N_y; k = 1, \dots, N_z$.

Разностный аналог уравнения $\partial_y E^z - \partial_x E^y = \frac{\mu}{c} \dot{H}^z$:

$$\frac{\mu(x_i^{05}, y_j^{05}, z_k)}{c} \dot{H}_{i+1/2, j+1/2, k}^z + \alpha \Delta t_n \frac{\dot{E}_{i+1, j+1/2, k}^y - \dot{E}_{i, j+1/2, k}^y}{\Delta x_i^{05}} - \alpha \Delta t_n \frac{\dot{E}_{i+1/2, j+1, k}^x - \dot{E}_{i+1/2, j, k}^x}{\Delta y_j^{05}} =$$

$$\frac{E_{i+1/2, j+1, k}^x - E_{i+1/2, j, k}^x}{\Delta y_j^{05}} - \frac{E_{i+1, j+1/2, k}^y - E_{i, j+1/2, k}^y}{\Delta x_i^{05}} \quad (2.6)$$

для внутренних точек области: $i = 1, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y; k = 0, \dots, N_z$.

3. Граничные условия и их разностные аналоги.

Для задачи возможны три типа граничных условий:

- **Условия идеального проводника на границе.**
- **Условия излучения.**
- **Заданные поля на границе.**

Рассмотрим разностную реализацию этих условий.

Идеальный проводник:

На границе идеального проводника физическое условие для электрического поля имеет вид:

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}] = 0, \quad (3.1)$$

где \mathbf{n} - вектор нормали к границе расчетной области.

С учетом условия (3.1), для границ $y = y_{\min}, y = y_{\max}; z = z_{\min}, z = z_{\max}$ записывается уравнение:

$$\Delta t_n \dot{E}_{i,j,k}^x + E_{i,j,k}^x = 0,$$

для точек границы $y = y_{\min} : i = 1, \dots, N_x; j = 0; k = 0, \dots, N_z,$

для точек границы $y = y_{\max} : i = 1, \dots, N_x; j = N_y; k = 0, \dots, N_z,$

для точек границы $z = z_{\min} : i = 1, \dots, N_x; j = 0, \dots, N_y; k = 0,$

для точек границы $z = z_{\max} : i = 1, \dots, N_x; j = 0, \dots, N_y; k = N_z.$

Для границ $x = x_{\min}, x = x_{\max}; z = z_{\min}, z = z_{\max}$ записывается уравнение:

$$\Delta t_n \dot{E}_{i,j,k}^y + E_{i,j,k}^y = 0,$$

для точек границы $x = x_{\min} : i = 0; j = 1, \dots, N_y; k = 0, \dots, N_z,$

для точек границы $x = x_{\max} : i = N_x; j = 1, \dots, N_y; k = 0, \dots, N_z,$

для точек границы $z = z_{\min} : i = 0, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y; k = 0,$

для точек границы $z = z_{\max} : i = 0, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y; k = N_z.$

Для границ $x = x_{\min}, x = x_{\max}; y = y_{\min}, y = y_{\max}$ записывается уравнение:

$$\Delta t_n \dot{E}_{i,j,k}^z + E_{i,j,k}^z = 0,$$

для точек границы $x = x_{\min} : i = 0; j = 0, \dots, N_y; k = 1, \dots, N_z,$

для точек границы $x = x_{\max} : i = N_x; j = 0, \dots, N_y; k = 1, \dots, N_z,$

для точек границы $y = y_{\min} : i = 0, \dots, N_x; j = 0; k = 1, \dots, N_z,$

для точек границы $y = y_{\max} : i = 0, \dots, N_x; j = N_y; k = 1, \dots, N_z.$

Условия излучения:

При свободном излучении амплитуды электрического и магнитного поля на границе связаны соотношением [2]:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} |\mathbf{H}|. \quad (3.2)$$

Считая, что стороннего излучения нет, т.е. вектор Пойнтинга направлен наружу, можно получить следующие соотношения для компонент электрического и магнитного поля на границе.

Таблица 1 – уравнения для граничных условий.

Граница	Граничные условия	
$x = x_{\min}$	$E^y = -\sqrt{\mu/\varepsilon} H^z$	$E^z = \sqrt{\mu/\varepsilon} H^y$
$x = x_{\max}$	$E^y = \sqrt{\mu/\varepsilon} H^z$	$E^z = -\sqrt{\mu/\varepsilon} H^y$
$y = y_{\min}$	$E^x = \sqrt{\mu/\varepsilon} H^z$	$E^z = -\sqrt{\mu/\varepsilon} H^x$
$y = y_{\max}$	$E^x = -\sqrt{\mu/\varepsilon} H^z$	$E^z = \sqrt{\mu/\varepsilon} H^x$
$z = z_{\min}$	$E^x = -\sqrt{\mu/\varepsilon} H^y$	$E^y = \sqrt{\mu/\varepsilon} H^x$
$z = z_{\max}$	$E^x = \sqrt{\mu/\varepsilon} H^y$	$E^y = -\sqrt{\mu/\varepsilon} H^x$

В отличие от условий идеально проводника, эти условия связывают между собой магнитное и электрическое поля. На разнесённых сетках электрическое и магнитное поле находятся в разных точках пространства, и записать условие из таблицы 1 нельзя. Для этого используется дополнительный слой магнитного поля вне расчетной области. Покажем это для компоненты магнитного поля H^z на границе $x = x_{\min}$ (рисунок 1). Усредним магнитное поле по пространству:

$$\langle H^z \rangle_{0,j,k} = \frac{1}{2} (H_{1,j,k}^z + H_{0,j,k}^z)$$

и запишем граничное условие (3.2) в виде:

$$E_{0,j,k}^y = -\sqrt{\mu/\varepsilon} \langle H^z \rangle_{0,j,k} = -\sqrt{\mu/\varepsilon} \frac{1}{2} (H_{1,j,k}^z + H_{0,j,k}^z). \quad (3.3)$$

Аналогично находятся соотношения для компонент магнитного и электрического поля на других границах. Запишем разностные уравнения для

граничных условий, получаемые из соотношения (3.3) и аналогичных ему для других границ.

Таблица 2

Граница	Уравнение
$x = x_{\min}$	$\dot{E}_{0,j,k}^y + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_0, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_0, y_j, z_k)}} (\dot{H}_{1,j,k}^z + \dot{H}_{0,j,k}^z) =$ $-\Delta t_n E_{0,j,k}^y - \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_0, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_0, y_j, z_k)}} (H_{1,j,k}^z + H_{0,j,k}^z)$
	$\dot{E}_{0,j,k}^z - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_0, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_0, y_j, z_k)}} (\dot{H}_{1,j,k}^y + \dot{H}_{0,j,k}^y) =$ $-\Delta t_n E_{0,j,k}^z + \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_0, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_0, y_j, z_k)}} (H_{1,j,k}^y + H_{0,j,k}^y)$
$x = x_{\max}$	$\dot{E}_{N_x,j,k}^y - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_{N_x}, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_{N_x}, y_j, z_k)}} (\dot{H}_{N_x+1,j,k}^z + \dot{H}_{N_x,j,k}^z) =$ $-\Delta t_n E_{N_x,j,k}^y + \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_{N_x}, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_{N_x}, y_j, z_k)}} (H_{N_x+1,j,k}^z + H_{N_x,j,k}^z)$
	$\dot{E}_{N_x,j,k}^z + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_{N_x}, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_{N_x}, y_j, z_k)}} (\dot{H}_{N_x+1,j,k}^y + \dot{H}_{N_x,j,k}^y) =$ $-\Delta t_n E_{N_x,j,k}^z - \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_{N_x}, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_{N_x}, y_j, z_k)}} (H_{N_x+1,j,k}^y + H_{N_x,j,k}^y)$

для точек на границе $x_{\min}, x_{\max} : j = 1, \dots, N_y ; k = 1, \dots, N_z$.

Таблица 3

Граница	Уравнение
$y = y_{\min}$	$\dot{E}_{i,0,k}^x - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_0, z_k)}{\varepsilon(x_i, y_0, z_k)}} (\dot{H}_{i,1,k}^z + \dot{H}_{i,0,k}^z) =$ $-\Delta t_n E_{i,0,k}^x + \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_0, z_k)}{\varepsilon(x_i, y_0, z_k)}} (H_{i,1,k}^z + H_{i,0,k}^z)$

	$\dot{E}_{i,0,k}^z + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_0, z_k)}{\varepsilon(x_i, y_0, z_k)}} (\dot{H}_{i,1,k}^x + \dot{H}_{i,0,k}^x) =$ $-\Delta t_n E_{i,0,k}^z - \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_0, z_k)}{\varepsilon(x_i, y_0, z_k)}} (H_{i,1,k}^x + H_{i,0,k}^x)$
$y = y_{\max}$	$\dot{E}_{i,N_y,k}^x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_{N_y}, z_k)}{\varepsilon(x_i, y_{N_y}, z_k)}} (\dot{H}_{i,N_y+1,k}^z + \dot{H}_{i,N_y,k}^z) =$ $-\Delta t_n E_{i,N_y,k}^x - \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_{N_y}, z_k)}{\varepsilon(x_i, y_{N_y}, z_k)}} (H_{i,N_y+1,k}^z + H_{i,N_y,k}^z)$
	$\dot{E}_{i,N_y,k}^z - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_{N_y}, z_k)}{\varepsilon(x_i, y_{N_y}, z_k)}} (\dot{H}_{i,N_y+1,k}^x + \dot{H}_{i,N_y,k}^x) =$ $-\Delta t_n E_{i,N_y,k}^z + \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_{N_y}, z_k)}{\varepsilon(x_i, y_{N_y}, z_k)}} (H_{i,N_y+1,k}^x + H_{i,N_y,k}^x)$

для точек на границе y_{\min}, y_{\max} : $i = 1, \dots, N_x$; $k = 1, \dots, N_z$.

Таблица 4

Граница	Уравнение
$z = z_{\min}$	$\dot{E}_{i,j,0}^x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_j, z_0)}{\varepsilon(x_i, y_j, z_0)}} (\dot{H}_{i,j,1}^y + \dot{H}_{i,j,0}^y) =$ $-\Delta t_n E_{i,j,0}^x - \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_j, z_0)}{\varepsilon(x_i, y_j, z_0)}} (H_{i,j,1}^y + H_{i,j,0}^y)$
	$\dot{E}_{i,j,0}^y - \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_j, z_0)}{\varepsilon(x_i, y_j, z_0)}} (\dot{H}_{i,j,1}^x + \dot{H}_{i,j,0}^x) =$ $-\Delta t_n E_{i,j,0}^y + \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_j, z_0)}{\varepsilon(x_i, y_j, z_0)}} (H_{i,j,1}^x + H_{i,j+1,0}^x)$

$z = z_{\max}$	$\dot{E}_{i,j,N_z}^x - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_j, z_{N_z})}{\varepsilon(x_i, y_j, z_{N_z})}} (\dot{H}_{i,j,N_z+1}^y + \dot{H}_{i,j,N_z}^y) =$ $-\Delta t_n E_{i,j,N_z}^x + \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_j, z_{N_z})}{\varepsilon(x_i, y_j, z_{N_z})}} (H_{i,j,N_z+1}^y + H_{i,j,N_z}^y)$
	$\dot{E}_{i,j,N_z}^y + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_j, z_{N_z})}{\varepsilon(x_i, y_j, z_{N_z})}} (\dot{H}_{i,j,N_z+1}^x + \dot{H}_{i,j,N_z}^x) =$ $-\Delta t_n E_{i,j,N_z}^y - \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_i, y_j, z_{N_z})}{\varepsilon(x_i, y_j, z_{N_z})}} (H_{i,j,N_z+1}^x + H_{i,j,N_z}^x)$

для точек на границе z_{\min}, z_{\max} : $i=1, \dots, N_x; j=1, \dots, N_y$.

Заданные поля:

Компоненты электромагнитного поля задаются на границах с помощью функций. Разностные уравнения строятся аналогично (3.2) с заменой нуля в правой части на заданную функцию. Для магнитного поля используется слой за границей области, введённый ранее.

В зависимости от задачи возможна комбинация этих условий на границах. Уравнения (2.1) – (2.6) для внутренних точек дополняются или заменяются уравнениями граничных условий. На примере границы x_{\min} покажем возможные комбинации этих условий:

Идеальный проводник:

$$\Delta t_n \dot{E}_{0,j,k}^y + E_{0,j,k}^y = 0; \quad j=1, \dots, N_y; \quad k=0, \dots, N_z$$

$$\Delta t_n \dot{E}_{0,j,k}^z + E_{0,j,k}^z = 0; \quad j=0, \dots, N_y; \quad k=1, \dots, N_z.$$

Заданы компоненты электрического поля:

$$\Delta t_n \dot{E}_{0,j,k}^y + E_{0,j,k}^y = f^{Ey}; \quad j=1, \dots, N_y; \quad k=0, \dots, N_z$$

$$\Delta t_n \dot{E}_{0,j,k}^z + E_{0,j,k}^z = f^{Ez}; \quad j=0, \dots, N_y; \quad k=1, \dots, N_z.$$

Заданы компоненты магнитного поля:

$$\Delta t_n \dot{H}_{0,j,k}^y + H_{0,j,k}^y = f^{Hy}; \quad j=0, \dots, N_y; \quad k=1, \dots, N_z + 1$$

$$\Delta t_n \dot{H}_{0,j,k}^z + H_{0,j,k}^z = f^{Hz}; \quad j=1, \dots, N_y + 1; \quad k=0, \dots, N_z.$$

Заданы компоненты E^y электрического и H^y магнитного поля:

$$\begin{aligned}\Delta t_n \dot{E}_{0,j,k}^y + E_{0,j,k}^y &= f^{E^y} ; j=1,\dots,N_y ; k=0,\dots,N_z \\ \Delta t_n \dot{H}_{0,j,k}^y + H_{0,j,k}^y &= f^{H^y} ; j=0,\dots,N_y ; k=0,\dots,N_z+1.\end{aligned}$$

Заданы компоненты E^z электрического и H^z магнитного поля:

$$\begin{aligned}\Delta t_n \dot{E}_{0,j,k}^z + E_{0,j,k}^z &= f^{E^z} ; j=0,\dots,N_y ; k=1,\dots,N_z \\ \Delta t_n \dot{H}_{0,j,k}^z + H_{0,j,k}^z &= f^{H^z} ; j=0,\dots,N_y+1 ; k=0,\dots,N_z.\end{aligned}$$

Условия излучения:

$$\dot{E}_{0,j,k}^y + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_0, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_0, y_j, z_k)}} (\dot{H}_{1,j,k}^z + \dot{H}_{0,j,k}^z) = -\Delta t_n E_{0,j,k}^y - \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_0, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_0, y_j, z_k)}} (H_{1,j,k}^z + H_{0,j,k}^z)$$

$$\dot{E}_{0,j,k}^z - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_0, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_0, y_j, z_k)}} (\dot{H}_{1,j,k}^y + \dot{H}_{0,j,k}^y) = -\Delta t_n E_{0,j,k}^z + \Delta t_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x_0, y_j, z_k)}{\varepsilon(x_0, y_j, z_k)}} (H_{1,j,k}^y + H_{0,j,k}^y),$$

для точек на границе: $j=1,\dots,N_y ; k=1,\dots,N_z$.

На остальных границах условия вводятся аналогично.

4. Метод решения системы линейных алгебраических уравнений.

При численной реализации неявной схемы возникает система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Рассмотрим методы решения этой системы, которые использовались в численной методике.

Размерность системы линейных уравнений, которую мы получаем при записи разностных уравнений, пропорциональна числу ячеек, на которые разбита область. Использование прямых методов для решения системы такой размерности не эффективно, поэтому использовался итерационный метод. Среди итерационных методов наиболее эффективными и устойчивыми являются проекционные методы, особенно тот класс методов, который использует подпространства Крылова [3, 4].

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (4.1)$$

с невырожденной матрицей \mathbf{A} размерности n и ненулевым вектором \mathbf{b} . В силу невырожденности матрицы существует точное ненулевое решение (4.1):

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (4.2)$$

Для построения методов проекционного типа, нахождение решения (4.2) для (4.1) заменяется следующей задачей:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{l} \in L: (\mathbf{Ax}, \mathbf{l}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{l}) \\ \mathbf{x} &\in K, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $K \subset R^n$ и $L \subset R^n$ некие подпространства. Условие (4.3) называется условием Петрова-Галёркина. Группируя скалярные произведения в (4.3) запишем его для невязки:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{l} \in L: (\mathbf{r}_x, \mathbf{l}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_x &= \mathbf{b} - \mathbf{Ax}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Такая задача называется задачей проектирования решения \mathbf{x} на подпространство K ортогонально подпространству L .

Для итерационных методов задача (4.3), формулируется следующим образом. Пусть для исходной системы (4.1) есть некоторое приближение \mathbf{x}_0 к решению (4.2). Необходимо уточнить его поправкой $\delta_x \in K$ так, чтобы:

$$\forall \mathbf{l} \in L: (\mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 + \delta_x}, \mathbf{l}) = (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0 - \mathbf{A}\delta_x, \mathbf{l}) = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\delta_x, \mathbf{l}) = 0. \quad (4.5)$$

Пусть $\dim K = \dim L = m$. Введём в подпространствах K и L базисы $\{v_j\}_{j=1}^m$ и $\{w_j\}_{j=1}^m$ соответственно. Условие (4.5) можно заменить условием:

$$\forall j, 1 \leq j \leq m: (\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\delta_x, w_j) = 0. \quad (4.6)$$

Введя матричную запись для базисов, перепишем (4.6) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= [w_1 | \dots | w_m], \quad \mathbf{V} = [v_1 | \dots | v_m] \\ \delta_x &= \mathbf{Vy}; \quad \mathbf{y} \in R^m \\ \mathbf{W}^T(\mathbf{r}_0 - \mathbf{AVy}) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где \mathbf{y} - вектор коэффициентов разложения поправки по базису \mathbf{V} .

Делая преобразования в (4.7), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (\mathbf{W}^T \mathbf{AV})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{AV})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{r}_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Пусть имеется набор пар подпространств $\langle K_i, L_i \rangle_{i=1}^q$ такой, что $K_1 \otimes K_2 \otimes \dots \otimes K_q = R^n$ и $L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_q = R^n$, тогда последовательное применение (4.8) приведёт к получению решения x_q удовлетворяющему (4.1).

Для полного описания итерационного метода необходимо ввести подпространства $\langle K_i, L_i \rangle_{i=1}^q$. Часто в качестве таких подпространств выбирают подпространства Крылова:

$$K_m(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \stackrel{def}{=} \{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{v}\}.$$

В качестве вектора \mathbf{v} обычно берётся невязка системы (4.1). Такие методы называются методами Крыловского типа.

Помимо самого итерационного метода важной частью вычислительной методики является предобусловливание системы (4.1). Скорость сходимости итерационных методов зависит от спектральных характеристик матрицы [4, 5], поэтому исходная матрица умножается на некую матрицу предобусловливания, которая улучшает спектр, что увеличивает скорость сходимости. Пусть \mathbf{M} - некоторая невырожденная матрица, размерность которой совпадает с \mathbf{A} . Умножим систему (4.1) на \mathbf{M}^{-1} , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} \\ \hat{\mathbf{b}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} &= \hat{\mathbf{b}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Алгебраически система не изменилась, но если эта операция улучшила спектр, то скорость сходимости изменится, что важно при вычислениях.

Матрица \mathbf{M} должна отвечать следующим условиям:

- быть близкой к \mathbf{A} ;
- быть легко вычислима;
- быть легко обратимой.

При численной реализации итерационного метода явный переход к системе (4.9) не производится, вместо этого на каждом шаге итерации

требуется решение системы с матрицей M . Поэтому последнее условие обратимости можно заменить требованием быстрой разрешимости.

Один из способов построения матрицы M является неполное LU разложение матрицы A . Обычное LU разложение матрицы A даёт нижнетреугольную матрицу L и верхнетреугольную матрицу U . Такое разложение позволяет получить решение путём выполнения прямого хода по матрице L и обратного по матрице U . Для матриц большой размерности такой алгоритм непригоден из-за вычислительных затрат, но его можно использовать для получения матрицы предобусловливания.

Вместо задачи полной факторизации матрицы, ставится задача неполного разложения:

$$A = LU + R. \quad (4.10)$$

Определим портрет матрицы как множество индексов (i, j) , для которых элементы матрицы $a_{i,j} \neq 0$. Будем искать такие матрицы L и U , чтобы их портреты содержались в портрете матрицы A или превосходили его на заданное число пар индексов. Это позволит контролировать расход памяти. Факторизация матрицы производится по алгоритму, похожему на алгоритм Гауссова исключения. Зная портрет искомым матриц заранее, мы будем производить вычисления только с теми элементами, которые принадлежат портрету, что позволяет ускорить вычисления. Результатом разложения (4.10) будет матрица, близкая к матрице A и разложенная на множители, т.е. системы уравнений с ней быстро разрешимы.

5. Программная реализация схемы.

Численная реализация описанных выше алгоритмов сделана в пакетах прикладных программ SPARSKIT [6] и BLAS [7]. Пакет BLAS содержит в себе набор функций линейной алгебры и необходим для пакета SPARSKIT как дополнение. В пакете SPARSKIT реализованы функции итерационного решения и предобусловливания СЛАУ.

6. Тестовая задача.

В тестовой задаче рассчитываются электромагнитные поля, возникающие при заданной плотности тока.

Размеры расчетной области:

$$\{x_{\min} = 0 \text{ см.}, x_{\max} = 100 \text{ см.}, y_{\min} = 0 \text{ см.}, y_{\max} = 100 \text{ см.}, z_{\min} = 0, z_{\max} = 100 \text{ см.}\}.$$

Диэлектрик находится в подобласти:

$$\{x, y, z : x \in [50 \text{ см.}, 100 \text{ см.}], y \in [0 \text{ см.}, 100 \text{ см.}], z \in [0 \text{ см.}, 100 \text{ см.}]\},$$

с параметрами $\varepsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 10^8 \text{ с}^{-1}$. Остальная область – вакуум с параметрами $\varepsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$. Пучок электронов имеет цилиндрическую форму:

$$\left\{x, y, z : x \in [0 \text{ см.}, 100 \text{ см.}], \sqrt{(y - 50 \text{ см.})^2 + (z - 50 \text{ см.})^2} \leq 50 \text{ см.}\right\},$$

направлен вдоль оси x (рисунок 2).

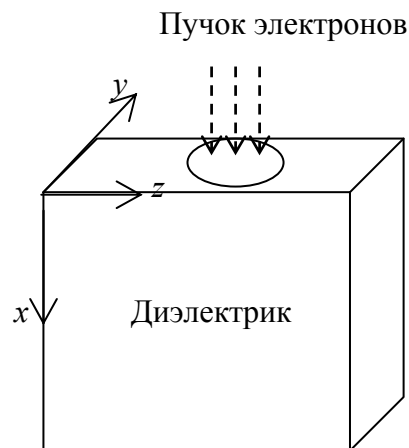


Рисунок 2.

Плотность тока зависит от времени по формуле:

$$\begin{cases} I = -10^{10} \sin(2\pi t \times 10^{08}); & 0 \leq t \leq 5 \times 10^{-9} \\ I = 0; & 5 \times 10^{-9} < t \end{cases}$$

Время численного эксперимента 15×10^{-9} сек.

Параметры сетки: $N_x = 40, N_y = 40, N_z = 40, N_t = 450$.

На границе заданы условия излучения. Степень неясности схемы $\alpha = \frac{1}{2}, \alpha_{\text{sig}} = \frac{1}{2}$.

Результаты теста сравнивались с результатами, полученными с помощью явной схемы. На рисунках 3-6 непрерывной линией изображены результаты

расчета схемой “крест” ($\Delta t = 0.33 \times 10^{-10}$ с), пунктиром - неявной схемой с $\Delta t = 1 \times 10^{-10}$ с, штрих-пунктиром - неявной схемой с $\Delta t = 2 \times 10^{-10}$ с.

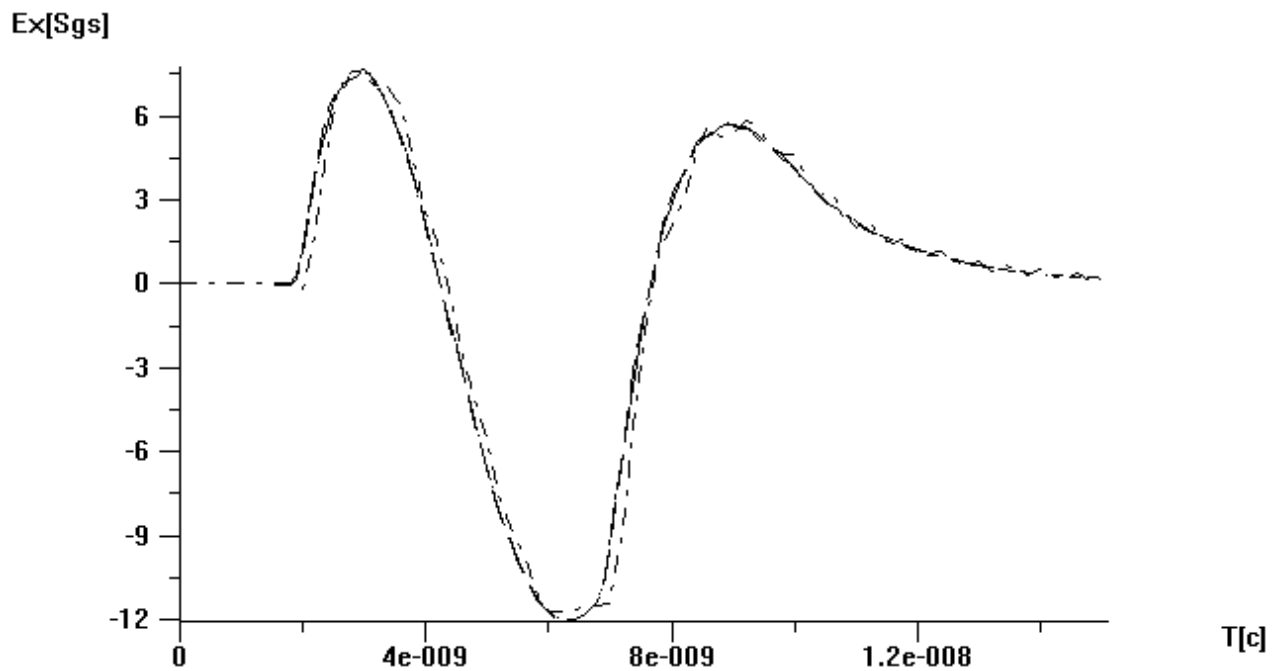


Рисунок 3. Зависимость напряжённости компоненты электрического поля E^x от времени в точке ($x = 51.25$ см., $y = 50$ см., $z = 50$ см.).

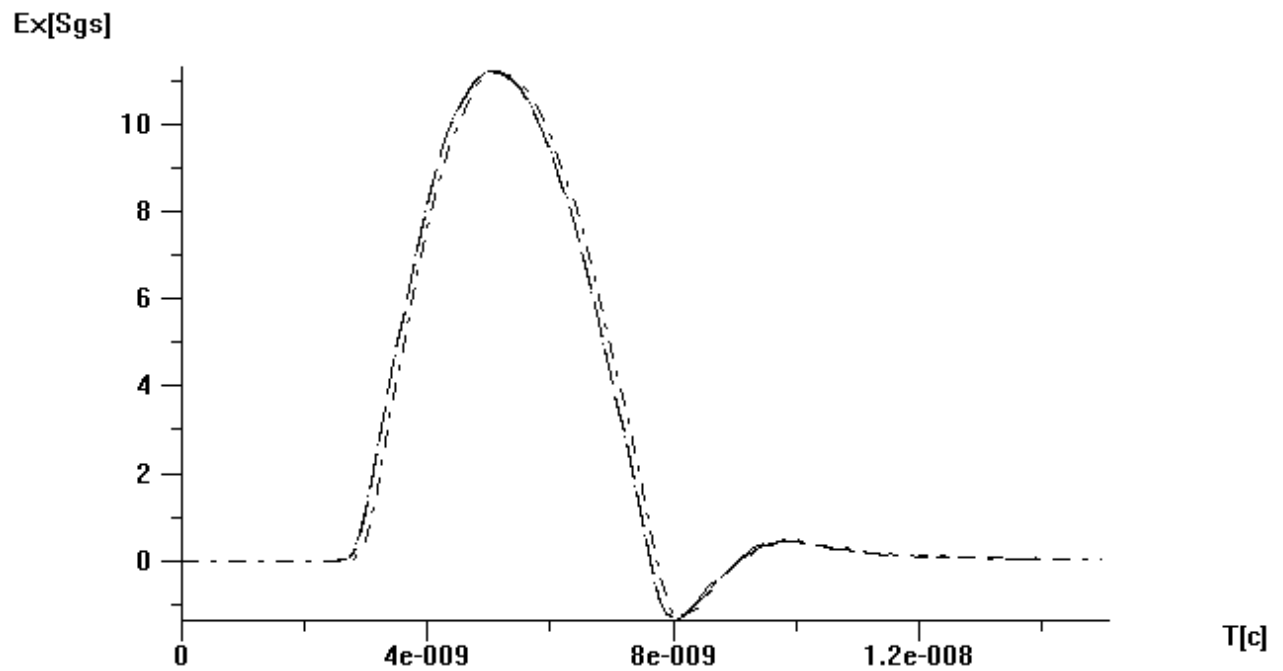


Рисунок 4. Зависимость напряжённости компоненты электрического поля E^x от времени в точке ($x = 76.25$ см., $y = 30$ см., $z = 30$ см.).

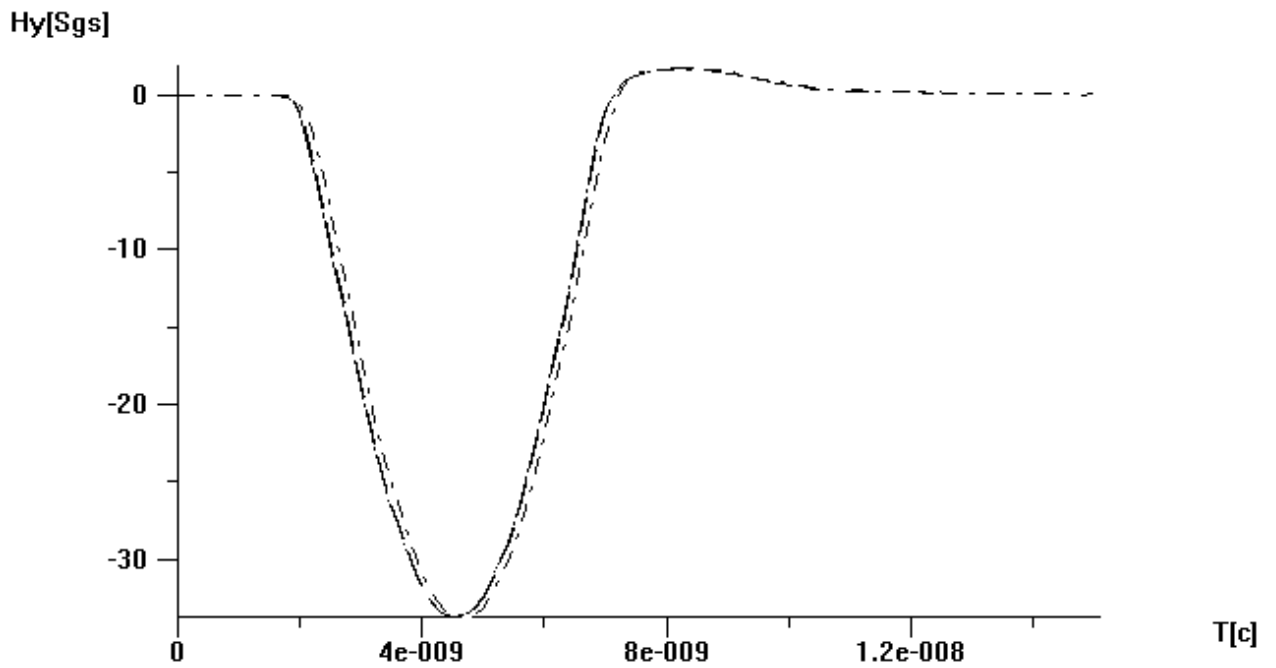


Рисунок 5. Зависимость напряжённости компоненты магнитного поля H^y от времени в точке ($x = 51.25$ см., $y = 30$ см., $z = 31.25$ см.).

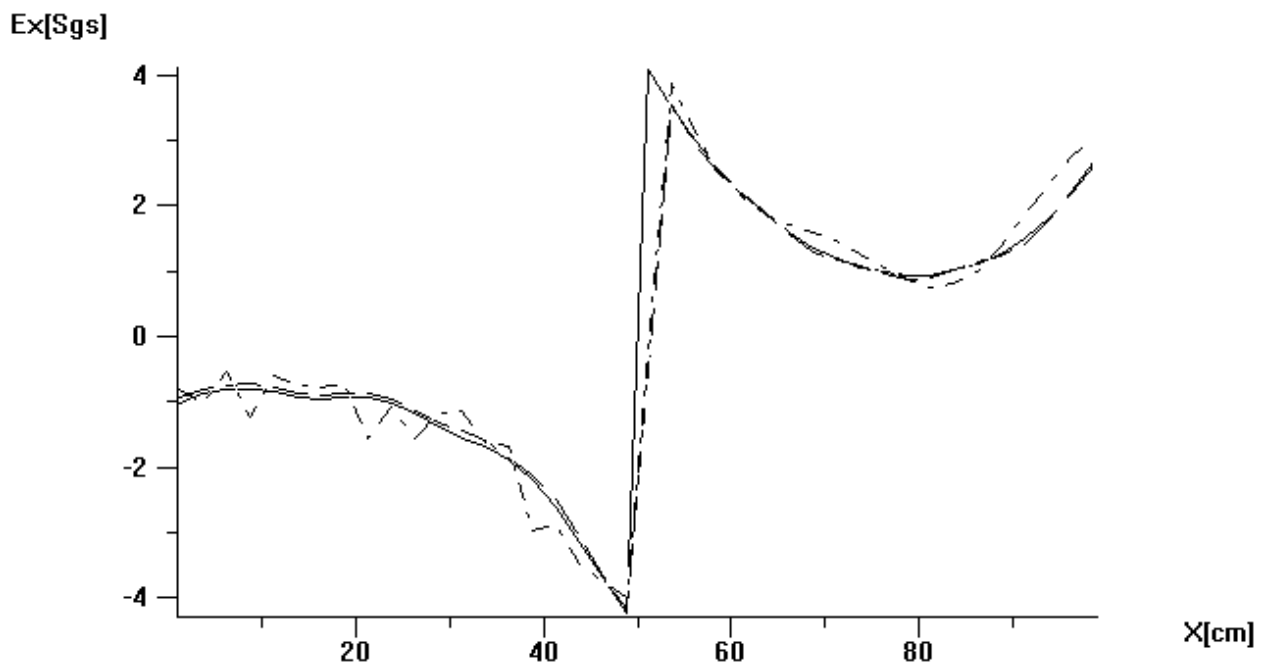


Рисунок 6. Зависимость напряжённости компоненты электрического поля E^x в точке ($y = 50$ см., $z = 50$ см.) в момент времени $t = 10^{-8}$ с от координаты x .

Сравнение результатов тестирования показало работоспособность неявной схемы при нарушении условия Куранта в три раза. Дальнейшее

увеличение шага по времени привело к потере гладкости, т.к. шаг по времени велик для корректного описания источника.

Список литературы.

- 1 А.В. Березин, М.Б. Марков, Б.Д. Плющенко Локально-одномерная разностная схема для электродинамических задач с заданным волновым фронтом. М. Препринт ИПМ им. Келдыша РАН, 2005 №31
- 2 Тамм. И. Е. Основы теории электричества. Москва. Наука. 1989 г.
- 3 Баландин. М. Ю., Шурина Э. П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск. НГТУ. 2000 г.
- 4 Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems (2ed.). 2000 г.
- 5 Эстербю. О., Златев. З. Прямые методы для разреженных матриц. Москва. Мир. 1987 г.

Список ссылок в интернете.

- 6 <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/software/SPARSKIT/> - University of Minnesota, Department of Computer Science and Engineering.
- 7 <http://www.netlib.org/blas/> - библиотека стандартных функций линейной алгебры.