



Мирер С.А., Прилепский И.В.

Моделирование динамики
макета малого спутника на
лабораторном стенде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Мирер С.А., Прилепский И.В. Моделирование динамики макета малого спутника на лабораторном стенде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 41. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-41>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

С.А. Мирер, И.В. Прилепский

**Моделирование динамики макета малого спутника
на лабораторном стенде**

Москва - 2009

С.А. Мирер, И.В. Прилепский. Моделирование динамики макета малого спутника на лабораторном стенде. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2008, 28 страниц, 20 рисунков, библиография: 4 наименования.

В работе предложена математическая модель макета спутника с магнитной системой ориентации на лабораторном стенде, включающем струнный подвес и имитатор геомагнитного поля. Описаны результаты численного моделирования и исследования динамики системы. Проведено сравнение эффективности ряда алгоритмов демпфирования нутационного движения. Проанализировано влияние на эффективность конструктивных параметров макета и стенда, характеристик алгоритмов. В частности, исследовано влияние длины струны, смещения точки подвеса, массы макета и формы эллипсоида инерции. Показано, что эффективность демпфирования главным образом определяется инерционными характеристиками макета и смещением его центра масс относительно точки подвеса к струне.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Программы поддержки Ведущих научных школ России.

Ключевые слова: лабораторный стенд, струнный подвес, макет спутника, магнитная ориентация, алгоритмы управления, моделирование динамики.

S.A. Mirer, I.V. Prilepsy. Modeling of Dynamics of a Small Satellite Mockup on a Laboratory Facility. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2009, 28 Pages, 20 Figures, 4 References.

In the paper, the mathematic model of a satellite mockup with magnetic attitude control system on a laboratory facility (consisting of a string suspension and an imitator of the Earth's magnetic field) is suggested. The results of numerical investigation of the system's dynamics are discussed. The comparison of efficiency of some algorithms for nutational oscillations damping is carried out. The dependence of efficiency on several parameters of the facility, the mockup, and the algorithms is studied. It is shown that the inertial characteristics of the mockup and the displacement of the centre of mass relative to the suspension point are the main factors influencing the efficiency.

The work is carried out under support of the Russian Foundation for Basic Research and the Program for support of Leading scientific schools of Russia.

Key words: laboratory facility, string suspension, satellite mockup, magnetic attitude control, control algorithms, modeling of dynamics.

1. Введение

В процессе создания новых образцов космической и авиационной техники необходимо решать задачу экспериментальной отработки соответствующих макетов в лабораторных условиях. При этом используются различные установки – испытательные стенды, на которых должны обеспечиваться условия, максимально приближенные к условиям реального полета. В частности, при разработке магнитных систем ориентации спутников требуется создавать в лаборатории магнитное поле, соответствующее геомагнитному полю вдоль траектории спутника, функционирующего на орбите. Для решения этой задачи служит имитатор геомагнитного поля [1], разработанный и изготовленный в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Прототип спутника помещается в рабочую область имитатора при помощи струнного подвеса, который наряду с имитатором является существенной частью стенда. Использование струнного подвеса обусловлено тем, что он достаточно прост и обеспечивает высокую свободу движения тела относительно центра масс, что крайне важно при отработке и тестировании алгоритмов управления ориентацией спутника.

Вместе с тем следует отметить, что для достижения полной независимости движения центра масс макета на струнном подвесе от движения макета относительно центра масс (а именно такая ситуация имеет место на орбите) макет спутника должен крепиться к струне в центре масс. На практике этому требованию удовлетворить довольно трудно, поэтому необходимо учитывать влияние смещения точки подвеса от центра масс на динамику испытуемого объекта. Фактически, наличие такого смещения приводит к тому, что характер движения макета на стенде отличается от реального углового движения спутника на орбите, причем это отличие тем существеннее, чем больше смещение.

В настоящей работе исследуется динамика прототипа спутника с активной магнитной системой ориентации на струнном подвесе. Обсуждается использование ряда алгоритмов управления угловым движением спутника с токовыми катушками [2] применительно к движению макета на стенде. Предложена и реализована в виде программного комплекса математическая модель твёрдого тела с управляемыми токовыми катушками на струнном подвесе. Проанализировано влияние параметров системы на эффективность алгоритмов управления угловым движением и демпфирования нутационных колебаний.

2. Описание стенда

Разработанный в ИПМ экспериментальный стенд [3] (рис. 1) состоит из имитатора геомагнитного поля и макета спутника.



Рис. 1. Экспериментальный стенд.

Имитатор создает в некоторой области пространства (далее рабочей области имитатора) магнитное поле в соответствии с заданным законом изменения его характеристик - модуля напряженности и направления. Макет спутника помещается в рабочую область при помощи струнного подвеса, верхний конец которого крепится к неподвижной балке-кронштейну. На макете установлены устройства, взаимодействующие с внешним магнитным полем - токовые катушки; величина и направление тока в каждой катушке задаются в соответствии с используемым алгоритмом управления. Следует отметить, что в качестве системы управления на макете может использоваться система управления реального спутника. Это позволяет избежать дополнительных издержек на разработку собственной системы управления макетом. Подробное описание технических характеристик имитатора и токовых катушек приведено в [3].

Для обеспечения системы управления необходимой информацией на макете устанавливаются измерительные устройства и датчики. В частности, во всех рассматриваемых ниже алгоритмах управления предполагается известной по крайней мере одна проекция внешнего магнитного поля на связанные с макетом оси. Для этого используется трехосный магнитометр Honeywell HMR

2300 [3]. Некоторым алгоритмам требуется информация об угловом положении макета, т.е. его ориентации. Поэтому наряду с магнитометром предполагается использовать солнечный датчик [3]. В результате, имея в один и тот же момент времени два неколлинеарных вектора, напряжённость магнитного поля и направление на источник излучения, в неподвижной и связанной с телом системах координат, можно рассчитать матрицу перехода между этими двумя системами и тем самым определить ориентацию макета.

3. Уравнения движения

Рассмотрим твёрдое тело массы m , подвешенное на нерастяжимой и безынерционной струне (рис. 2). В точках O_1 и O_2 струна шарнирно прикреплена к неподвижному основанию и телу соответственно. Точка крепления тела к струне O_2 , вообще говоря, смещена относительно центра масс тела G , $O_2G = d \neq 0$. Предполагается, что трение в шарнирах отсутствует, а струна натянута, т.е. $O_1O_2 = l = \text{const}$; фактически, струна заменяется безынерционным абсолютно жёстким стержнем. Далее струну считаем отрезком прямой, а шарниры – материальными точками.

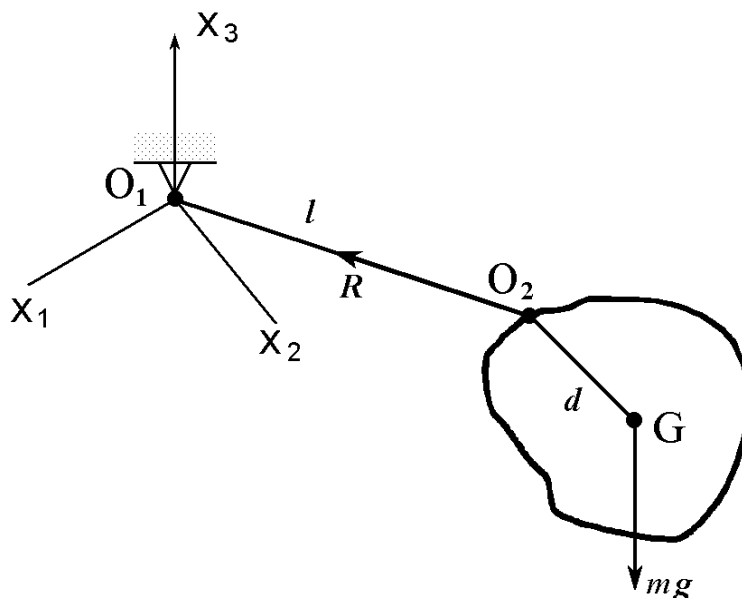


Рис. 2. Твёрдое тело на струнном подвесе.

Введём неподвижную систему координат $O_1x_1x_2x_3$ с началом в точке O_1 (ось O_1x_3 направлена вертикально вверх) и связанную с телом систему координат $Gz_1z_2z_3$ с осями вдоль его главных центральных осей инерции.

Обозначим тензор инерции в связанных осях $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$. Введем также систему координат $O_1y_1y_2y_3$, связанную со струной; ось O_1y_3 направлена вдоль продолжения струны. Положение $O_1y_1y_2y_3$ относительно $O_1x_1x_2x_3$ определим двумя углами α и β (рис. 3).

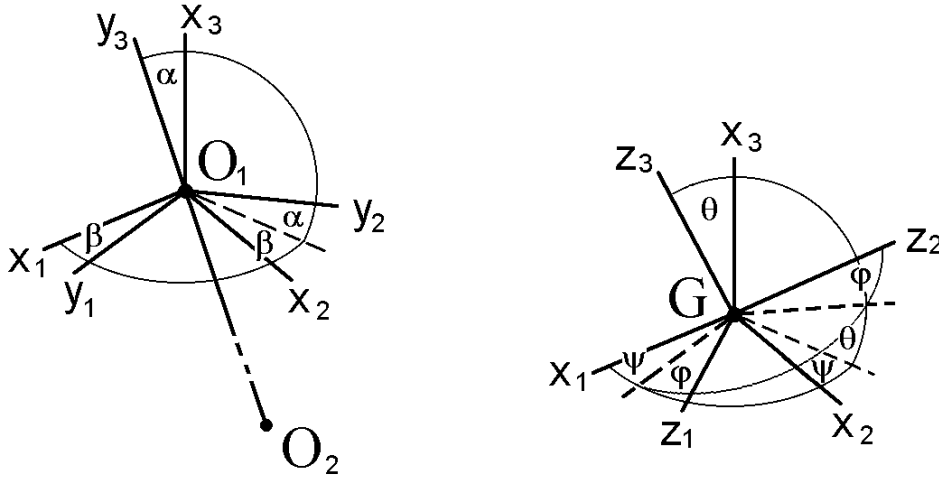


Рис. 3. Системы координат

В ходе вывода уравнений движения тела на струнном подвесе был проведен сравнительный анализ уравнений Лагранжа 1-го и 2-го рода. В результате выбор был сделан в пользу уравнений Лагранжа 1-го рода, поскольку уравнения 2-го рода имеют довольно громоздкий вид, предполагают вычисление большого числа тригонометрических функций и при этом затруднительно аналитически обратить матрицу вторых производных.

Итак, запишем уравнения сил и моментов для твердого тела, подвешенного на струне,

$$\begin{aligned} m(\ddot{\mathbf{l}} + \ddot{\mathbf{d}}) &= \mathbf{F} + \mathbf{R}, \\ \dot{\mathbf{K}}_G &= \mathbf{M} - \mathbf{d} \times \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m - масса тела; $\mathbf{l} = \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$, $\mathbf{d} = \mathbf{O}_2\mathbf{G}$; \mathbf{F} - главный вектор внешних сил, приложенных к телу; \mathbf{R} - сила реакции струны; \mathbf{K}_G - кинетический момент тела относительно центра масс; \mathbf{M} - управляющий механический момент.

Учитывая, что сила реакции направлена вдоль струны (связь идеальная) имеет место равенство $\mathbf{R} = \lambda \mathbf{l}$, с учетом которого уравнения (1) принимают вид

$$m(\ddot{\mathbf{l}} + \ddot{\mathbf{d}}) = \mathbf{F} + \lambda \mathbf{l}, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M} - \lambda \mathbf{d} \times \mathbf{l}. \quad (3)$$

Чтобы определить λ , умножим (2) скалярно на l и учтем очевидные соотношения $l^2 = l^2$, $\dot{l} \cdot l + l \dot{l}^2 = 0$. В результате получаем

$$\lambda = \left(-m\dot{l}^2 + ml \cdot \ddot{\mathbf{d}} - l \cdot \mathbf{F} \right) / l^2.$$

Кроме того, принимая во внимание равенства

$$\ddot{l} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times l + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times l),$$

$$\ddot{\mathbf{d}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{d}) - \mathbf{d}\omega^2,$$

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$ - угловые скорости струны и тела соответственно, приводим уравнения (2), (3) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times l = \frac{l}{l^2} \left[-\dot{l}^2 - l\mathbf{F}/m + l(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) + (l\boldsymbol{\omega})(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) - (l\mathbf{d})\omega^2 \right] + \mathbf{F}/m - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} - \\ - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{d})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}\omega^2 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times l), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{m}{l^2} (\mathbf{d} \times l) \left[-l(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) + \dot{l}^2 + l\mathbf{F}/m - (l\boldsymbol{\omega})(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) + (l\mathbf{d})\omega^2 \right] + \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (5)$$

Будем считать, что вектор \mathbf{F} задан в неподвижной системе координат $O_1x_1x_2x_3$, векторы l и $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ в связанной со струной системе $O_1y_1y_2y_3$, векторы \mathbf{d} и $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ в связанной с телом системе $Gz_1z_2z_3$. Тогда, разрешая (5) относительно $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, преобразуем систему уравнений (4), (5) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \Omega_2\Omega_3 + \frac{\mathbf{u}_2}{l} \left[\frac{1}{m} \mathbf{F} - \mathbf{A}^T(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) - \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\omega} \mathbf{d})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}^T \mathbf{d}\omega^2 \right], \\ \dot{\Omega}_2 &= -\Omega_1\Omega_3 + \frac{\mathbf{u}_1}{l} \left[\frac{1}{m} \mathbf{F} - \mathbf{A}^T(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) - \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\omega} \mathbf{d})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}^T \mathbf{d}\omega^2 \right], \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{V}^{-1} \left\{ \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{d} \times \mathbf{A}\mathbf{u}_3) \left[ml(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - \mathbf{u}_3 \mathbf{F} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m(\mathbf{A}\mathbf{u}_3, \boldsymbol{\omega})(\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}) + m(\mathbf{A}\mathbf{u}_3, \mathbf{d})\omega^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь \mathbf{A} - матрица перехода из системы $Gz_1z_2z_3$ в систему $O_1x_1x_2x_3$; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ - строки матрицы перехода \mathbf{U} из системы $O_1y_1y_2y_3$ в систему $O_1x_1x_2x_3$;

$$\mathbf{V} = m \left[(\mathbf{d} \times \mathbf{A}\mathbf{u}_3)(\mathbf{d} \times \mathbf{A}\mathbf{u}_3)^T \right] + \mathbf{J}. \quad (7)$$

Отметим, что векторное уравнение (4) равносильно двум скалярным (третье уравнение, соответствующее проекции на ось O_1y_3 , вырождается в тождество).

В случае подвеса тела в центре масс $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ и система (6) принимает вид

$$\dot{\Omega}_1 = \Omega_2 \Omega_3 + \mathbf{u}_2 \mathbf{F} / ml, \quad \dot{\Omega}_2 = -\Omega_1 \Omega_3 + \mathbf{u}_1 \mathbf{F} / ml, \quad \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega},$$

т.е. уравнения движения разделяются. Таким образом, движение макета относительно центра масс перестает влиять на движение центра масс и реализуются условия, имеющие место на орбите. На практике такой подвес обеспечить достаточно сложно, поэтому при моделировании необходимо учитывать смещение точки подвеса относительно центра масс ($d \neq 0$) и исследовать влияние величины d на характер движения макета.

Для получения замкнутой системы уравнений движения необходимо добавить кинематические соотношения, связывающие угловые скорости и параметры, определяющие ориентацию макета. В работе используется матричное дифференциальное уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A}, \quad (8)$$

причем достаточно рассматривать только 6 из 9 уравнений и условия ортогональности и нормировки вида $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$, где \mathbf{a}_i - строки матрицы \mathbf{A} . Кроме того, следует добавить кинематические соотношения для углов, определяющих положение струны, например,

$$\dot{\alpha} = -\Omega_2, \quad \dot{\beta} = \Omega_1 / \sin \alpha = \Omega_3 / \cos \alpha. \quad (9)$$

Элементы соответствующей матрицы \mathbf{U} имеют вид

$$\begin{aligned} U_{11} &= \cos \beta \cos \alpha, & U_{12} &= \sin \beta \cos \alpha, & U_{13} &= \sin \alpha, \\ U_{21} &= -\sin \beta, & U_{22} &= \cos \beta, & U_{23} &= 0, \\ U_{31} &= -\cos \beta \sin \alpha, & U_{32} &= -\sin \beta \sin \alpha, & U_{33} &= \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем используются также соотношения между элементами матрицы \mathbf{A} и углами Эйлера (рис. 3):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{23} &= \cos \varphi \sin \theta, \\ a_{12} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{31} &= \sin \psi \sin \theta, \\ a_{13} &= \sin \varphi \sin \theta, & a_{32} &= -\cos \psi \sin \theta, \\ a_{21} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, & a_{33} &= \cos \theta, \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

Управляющий момент задается выражением

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{B}, \quad (12)$$

где \mathbf{e}_i - единичные векторы осей, вдоль которых установлены управляющие катушки, μ_i - магнитные моменты катушек, которые формируются в соответствии с описанными ниже алгоритмами.

4. Описание алгоритмов управления

Управляющий механический момент \mathbf{M} , как видно из (12), создается в результате взаимодействия суммарного магнитного момента установленных на макете катушек с внешним магнитным полем. Величины токов в катушках и, следовательно, величина магнитного момента формируется в соответствии с используемым алгоритмом управления [4]. Приведем краткое описание принципов работы и функциональных возможностей алгоритмов, которые в дальнейшем будут тестироваться.

4.1. Алгоритмы управления ориентацией оси вращения макета

В [4] предложены два алгоритма управления ориентацией оси вращения спутника, основанные на минимизации рассогласования требуемого (номинального) кинетического момента \mathbf{K}_f и фактического его значения \mathbf{K} . При этом управление ориентацией оси вращения осуществляется с помощью одной токовой катушки, установленной вдоль оси вращения.

В алгоритме «1А» управление величиной дипольного момента μ_3 (здесь и далее в п. 4 μ_i, ω_i, B_i обозначают проекции соответствующих векторов на главные центральные оси инерции спутника) минимизирует величину $(\Delta\mathbf{K})^2$, где $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_f - \mathbf{K}$. Исходя из этого требования в [4] получено соотношение

$$\mu_3 = \mu_{\max} \text{sign}(\Delta\mathbf{K} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B})), \quad (13)$$

где μ_{\max} - максимальный магнитный момент, создаваемый катушкой, \mathbf{e}_3 - единичный вектор вдоль оси симметрии спутника.

Для работы алгоритма «1А» необходимо иметь проекции вектора угловой скорости на оси связанной с макетом системы координат. Их, вообще говоря, можно определить, дифференцируя матрицу перехода между инерциальной и связанной системами координат. Однако на практике такой способ вычисления угловой скорости используется редко из-за низкой точности. Для определения угловой скорости при проведении экспериментов на стенде предполагается использовать оптоволоконные и микроэлектронные датчики угловой скорости.

Второй алгоритм («1В») не требует знания проекций угловой скорости, однако он может применяться только на быстро вращающемся вокруг оси симметрии спутнике. В этом случае можно приближённо принять $\mathbf{K} = \omega_3 C \mathbf{e}_3$, $\mathbf{K}_f = \omega_3 C \mathbf{e}_{30}$ и

$$\mu_3 = \mu_{\max} \text{sign}(\omega_3) \text{sign}(\mathbf{e}_{30} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B})). \quad (14)$$

Поскольку эффективность алгоритма «1В» максимальна, когда вектор создаваемого механического момента лежит в одной плоскости с векторами \mathbf{e}_3 и \mathbf{e}_{30} [4], в случае малости проекции момента на эту плоскость управление имеет смысл отключать.

Отметим, что вопрос об использовании алгоритмов «1А» и «1В» на стенде требует специального рассмотрения, поскольку во всех случаях, когда точка подвеса тела к струне и центр масс не лежат на одной вертикали, со стороны струны на макет действует значительный возмущающий момент. Соответствующие оценки будут приведены в разделе 4.5.

4.2. Алгоритмы управления скоростью вращения макета (две катушки)

В [4] предложено два алгоритма раскрутки спутника. Как и в разделе 4.1, алгоритмы основаны на минимизации рассогласования $(\Delta \mathbf{K})^2$, причём в качестве \mathbf{K}_f используется величина $\Omega_3 C \mathbf{e}_3$. Здесь Ω_3 - требуемая скорость вращения, C - момент инерции спутника относительно оси симметрии.

Если проекции угловой скорости на оси связанной системы координат известны (алгоритм «2А»), дипольные магнитные моменты μ_1 и μ_2 относительно осей Gx и Gy формируются по правилу [2]

$$\mu_1 = \mu_{\max} \text{sign}(\Delta \mathbf{K} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{B})), \quad \mu_2 = \mu_{\max} \text{sign}(\Delta \mathbf{K} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{B})). \quad (15)$$

В случае спутника-гироскопа, когда фактический кинетический момент определяется выражением $\mathbf{K} = \omega_3 C \mathbf{e}_3$, используется алгоритм «2В». При этом

$$\mu_1 = \mu_{\max} \text{sign}(\Omega_3 - \omega_3) \text{sign}(B_2), \quad \mu_2 = \mu_{\max} \text{sign}(\Omega_3 - \omega_3) \text{sign}(B_1) \quad (16)$$

и относительно оси Gz создается механический момент

$$M_3 = \mu_{\max} \text{sign}(\Omega_3 - \omega_3) (|B_1| + |B_2|). \quad (17)$$

Однако наличие магнитных моментов μ_1 и μ_2 приводит также к появлению проекций механического момента M_1 и M_2 , что может вызвать раскачку

нутационных колебаний. Поэтому, как показано в [4], алгоритм наиболее эффективен в области, где векторы \mathbf{e}_3 и \mathbf{B} достаточно далеки от коллинеарности.

4.3. Алгоритмы гашения нутационных колебаний

В [4] рассмотрено два алгоритма гашения нутационных колебаний. Принцип работы первого (алгоритм «3А») основан на минимизации кинетической энергии нутационного движения спутника. Магнитный момент формируется в виде [4]

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_{\max} \hat{\mathbf{m}}/|\hat{\mathbf{m}}|, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}} &= (\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_1) \times \mathbf{N}_1, \\ \mathbf{N}_0 &= (-B_3\omega_2, B_3\omega_1, B_1\omega_2 - B_2\omega_1), \quad \mathbf{N}_1 = (B_2, -B_1, 0). \end{aligned} \quad (19)$$

Несмотря на то, что алгоритм «3А» предназначен для управления спутником на орбите, расчеты показывают, что он достаточно эффективен и при использовании на макете на испытательном стенде.

Алгоритм «-Bdot» («3В») формирует магнитный момент μ_3 по правилу

$$\mu_3 = -\mu_{\max} \text{sign}(\dot{B}_3). \quad (20)$$

Здесь \dot{B}_3 - производная проекции внешнего магнитного поля на ось Gz_3 . На практике знак производной определяется сравнением показаний магнитометра, измеряющего составляющую магнитного поля вдоль Gz_3 , для двух соседних моментов времени.

Идея алгоритма состоит в имитации работы нутационного демпфера, построенного на использовании на спутнике элемента из магнитомягкого материала, перемагничивание которого вызывает рассеяние энергии вращательного движения тела. Закон управления (20) имитирует магнитный момент идеализированного гистерезисного стержня с прямоугольной петлей гистерезиса [4]. В отличие от алгоритма «3А», алгоритм «-Bdot» может эффективно использоваться не только для управления осесимметричным спутником на орбите; для управления макетом на струнном подвесе он также является в некотором смысле оптимальным в классе демпфирующих алгоритмов, использующих одну катушку (см. раздел 4.6).

4.4. О реализации алгоритмов

Для реализации алгоритмов 1В, 2В, 3В достаточно знания трёх проекций магнитного поля, которые предполагается получать с трёхосного цифрового магнитометра НМР. Данный магнитометр позволяет производить измерения проекций магнитного поля в диапазоне ± 200 мкТ, достаточном для измерения магнитного поля, создаваемого кольцами Гельмгольца. Магнитометр способен проводить до десяти измерений в секунду; интервал времени от посылки магнитометру команды на измерение до получения результата составляет 40мс. Ошибка измерений, по данным изготовителя, не превышает 4 мкТ [3].

Для работы алгоритмов 1А, 2А, 3А необходимы также данные о проекциях угловой скорости, получаемые с соответствующих датчиков. Управление формируется после компьютерной обработки полученной измерительной информации. Следует отметить, что, помимо ошибок из-за неточности измерительной информации, в реальной системе неизбежны ошибки, связанные, например, с неточной установкой токовых катушек и неточным знанием фазового состояния системы в момент синтеза управляющего сигнала.

Циклограмма и параметры алгоритмов

Отдельный цикл работы алгоритма состоит из интервалов пассивного и активного движения. На пассивном интервале происходит сбор, обработка измерительной информации и синтез управления; на активном - обрабатывается управляющий сигнал.

Длительность пассивного интервала ограничена снизу характеристиками магнитометра: например, для алгоритма «-Vdot» она не может быть меньше 0.225с (0.125с - минимальный интервал между измерениями, 0.1с - интервал между командой на измерение и получением результата). Длительности активного и пассивного интервалов (далее Δ_a и Δ_p соответственно) являются важными параметрами алгоритмов, существенно влияющими на динамику исследуемого макета.

4.5. Замечание относительно алгоритма «-Vdot»

В случае неуправляемого движения имеет место интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{l}} + \dot{\mathbf{d}})^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{F}(\mathbf{l} + \mathbf{d}). \quad (21)$$

Здесь \mathbf{F} - сила тяжести. При включении управляющего момента, демпфирующего нутационные колебания, получаем

$$M_3 = 0, \quad \frac{dE}{dt} = \omega_1 M_1 + \omega_2 M_2. \quad (22)$$

Если демпфирующий момент создаётся катушкой, установленной по оси Gz_3 , то

$$M_1 = -\mu B_2, \quad M_2 = \mu B_1 \quad (23)$$

и

$$\frac{dE}{dt} = \mu(-\omega_1 B_2 + \omega_2 B_1). \quad (24)$$

При проведении численного эксперимента можно пренебречь правой частью в выражении

$$\dot{\mathbf{B}}_{sv} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_{sv} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{B}}_{abs}. \quad (25)$$

Здесь \mathbf{B}_{sv} и \mathbf{B}_{abs} – векторы внешнего магнитного поля в связанной и инерциальной системах координат соответственно. Действительно, при массе тела $1.5 \div 5 \text{ кг}$ и смещении точки подвеса от центра масс $1 \div 3 \text{ см}$, как показывают численные расчёты, проекции угловой скорости ω_1 и ω_2 оказываются порядка $0.5 \div 2 \text{ с}^{-1}$ и, следовательно, $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_{sv}| dt \sim |\mathbf{B}_{sv}| dt$, где dt – характерное время измерений и работы алгоритма (порядка 0.3 с). В то же время, если используется модель геомагнитного поля Земли, $|d\mathbf{B}_{abs}| \approx |\dot{\mathbf{B}}_{abs} dt| \sim |\mathbf{B}| du$. Здесь du – изменение аргумента широты за время dt . Поскольку dt мало, то

$$du \approx \frac{v_{sat}}{R_{sat}} dt < \sqrt{\frac{2g}{R_{sat}}} dt \ll dt \quad (26)$$

и, тем самым, малость правой части доказана. Таким образом,

$$-\omega_1 B_2 + \omega_2 B_1 = \dot{B}_3, \quad (27)$$

поэтому следует брать

$$\mu = -\mu_{\max} \text{sign}(\dot{B}_3), \quad (28)$$

т.е. приходим к алгоритму «-Bdot».

4.6. О возможности отработки алгоритма ориентации

Рассмотрим осесимметричное тело, подвешенное на струне в точке на оси симметрии, $O_2G = d$. Пусть требуется обеспечить вращение тела с постоянной угловой скоростью ω_3 вокруг оси симметрии Gz_3 , составляющей заданный угол θ_0 с вертикалью (рис. 4).

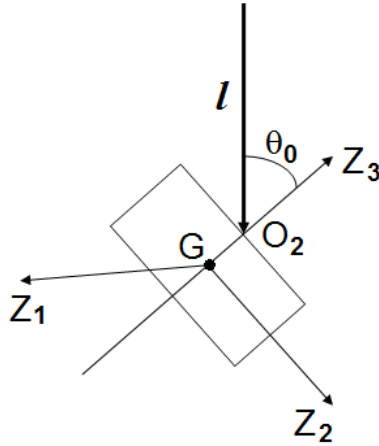


Рис. 4. Осесимметричное тело на вертикальной струне.

Тогда, учитывая, что $\dot{\omega} = \mathbf{0}$, $\omega \times \mathbf{J}\omega = \mathbf{0}$, $\dot{l} = \mathbf{0}$, и $(l \cdot \omega)(d \cdot \omega) = (l \cdot d)\omega^2$, из (5) получаем

$$\mathbf{M} = \frac{1}{l^2}(l \times d)(l \cdot \mathbf{F}),$$

где \mathbf{F} - сила тяжести. Отсюда находим проекции управляющего момента на оси связанной системы координат

$$M_1 = mgd \sin(\theta_0) \cos(\omega_3 t), \quad M_2 = -mgd \sin(\theta_0) \sin(\omega_3 t), \quad M_3 = 0. \quad (29)$$

Такое управление можно реализовать при помощи одной токовой катушки с моментом μ по оси Gz_3 . При этом выполняются соотношения

$$-\mu B_1 = mgd \sin(\theta_0) \sin(\omega_3 t), \quad \mu B_2 = -mgd \sin(\theta_0) \cos(\omega_3 t), \quad (30)$$

где B_1, B_2 - проекции внешнего магнитного поля на связанные оси. В проекциях на неподвижные оси имеем

$$\begin{aligned} B_1 &= B_{x_1} \cos(\omega_3 t) + B_{x_2} \sin(\omega_3 t) \cos(\theta_0) + B_{x_3} \sin(\omega_3 t) \sin(\theta_0), \\ B_2 &= -B_{x_1} \sin(\omega_3 t) + B_{x_2} \cos(\omega_3 t) \cos(\theta_0) + B_{x_3} \cos(\omega_3 t) \sin(\theta_0), \end{aligned} \quad (31)$$

откуда видно, что для обеспечения управления вектор \mathbf{B} должен принадлежать плоскости x_2x_3 . Оценим величину B . Имеем $B \sim mgd \sin(\theta_0) / \mu$ и при $m = 2 \text{ кг}$,

$d = 2 \text{ см}$, $\theta_0 = 0.1 \text{ рад}$, $\mu = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ получаем $B = 0.04 \text{ Т}$. Заметим, что на стенде поле не превышает $300 \text{ мкТ} = 0.0003 \text{ Т}$.

5. Описание программы

Для численного моделирования динамики тела на струне и исследования работы алгоритмов управления разработан программный комплекс в среде MATLAB (версия 7.0). Программный комплекс осуществляет численное интегрирование системы уравнений (6) методом Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом. Входными данными являются следующие параметры стенда и макета: длина струны, смещение точки подвеса, масса и тензор инерции макета. Кроме того, задаются начальные данные, параметры алгоритма управления и модель магнитного поля.

Результатом работы программного комплекса являются зависимости от времени проекций угловой скорости и углов, определяющих ориентацию тела (углов Эйлера либо самолётных углов). Дополнительно может вычисляться нагрузка на узел подвеса струны и энергия системы.

Моделирование, если иное не оговорено, проводилось при следующих параметрах стенда и макета (далее называем их базовыми):

$l = 2 \text{ м}$	длина струны;
$d = 2 \text{ см}$	смещение точки подвеса вдоль оси симметрии макета;
$m = 1.5 \text{ кг}$	масса макета;
$J = \text{diag}(1, 1, 1.8) \times 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	тензор инерции макета;
$\mu_{\text{max}} = 0.23 \text{ А} \cdot \text{м}^2$	максимальный магнитный момент катушки;
$B = 3.5 \times 10^{-4} \text{ Т}$	магнитное поле в рабочей области имитатора.

В начальный момент струна вертикальна и неподвижна, ориентация макета задается углами Эйлера (в радианах)

$\psi = 0$	угол прецессии,
$\theta = 0.3$	угол нутации,
$\varphi = 0$	угол собственного вращения.

При моделировании работы демпфирующего алгоритма начальная угловая скорость тела принимается равной $\omega_0 = (0.1, 0, 0.8) \text{ с}^{-1}$; в случае совместной работы демпфирующего алгоритма и алгоритма раскрутки $\omega_0 = (0.1, 0, 0) \text{ с}^{-1}$.

6. Результаты численного моделирования

Приведем некоторые результаты моделирования работы демпфирующего алгоритма «-Bdot» (на рис. 5а интервал между измерениями магнитного поля, по которым оценивается необходимая для функционирования алгоритма производная \dot{B}_3 , составляет 0.125c ; $\Delta_p = 0.25\text{c}$, $\Delta_a = 0.25\text{c}$) и демпфирующего алгоритма «3А» (на рис. 5б $\Delta_p = 0.25\text{c}$, $\Delta_a = 0.25\text{c}$). На рис. 6 показаны графики зависимости энергии системы от времени (за нулевую принята энергия, соответствующая устойчивому положению равновесия тела). Заметим, что здесь высокочастотные колебания малой амплитуды обусловлены дискретностью управления.

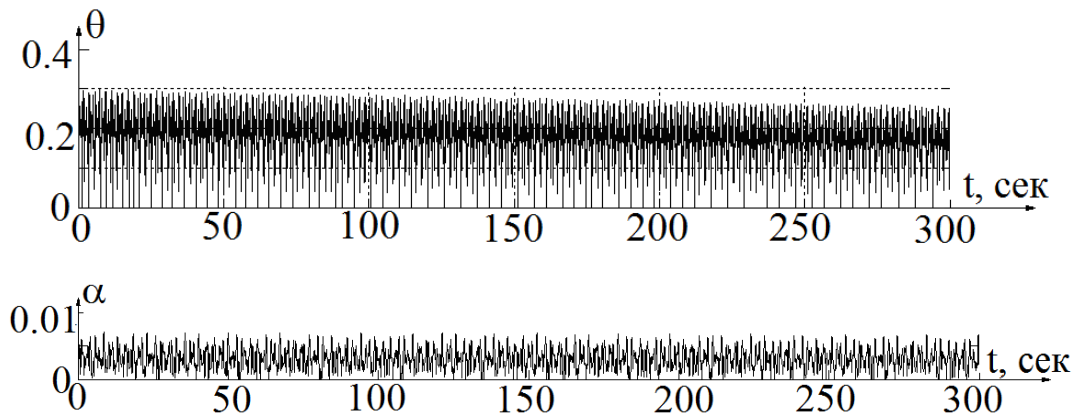


Рис. 5а. Углы нутации макета θ и струны α , алгоритм «-Bdot».

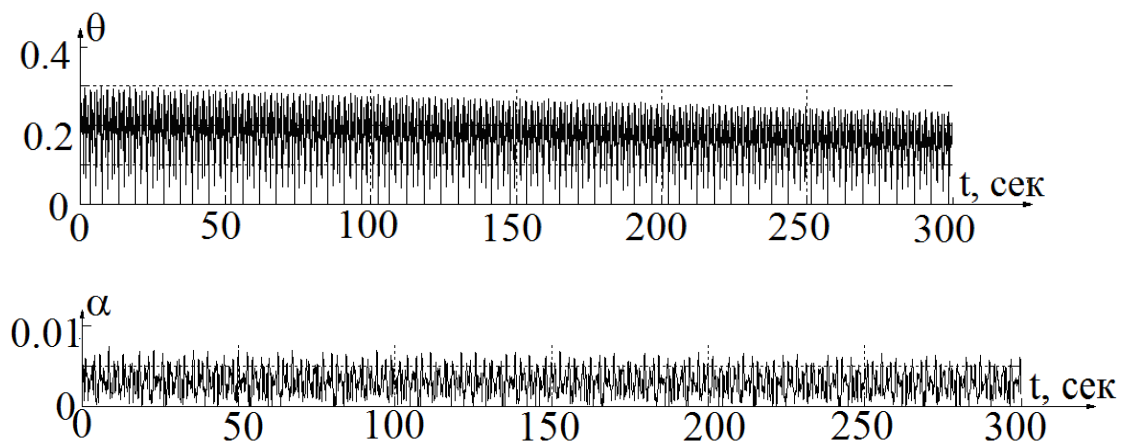


Рис. 5б. Углы нутации макета θ и струны α , алгоритм «3А».

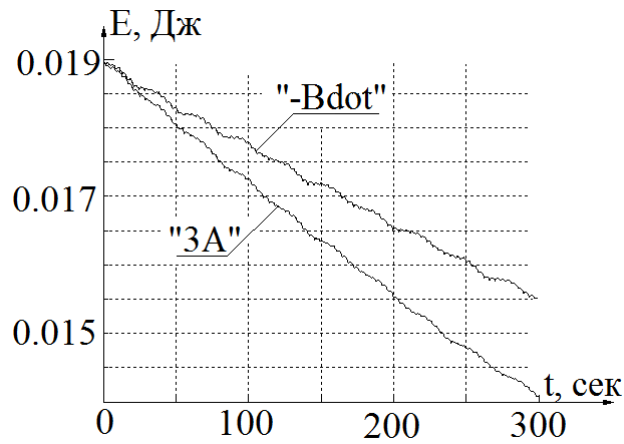


Рис. 6. Зависимость энергии от времени.

Представляет также интерес сигнал, поступающий на управляющую катушку. На рис. 7 для алгоритма «-Bdot» показаны зависимости сигнала от времени для 4-х соседних элементарных циклов управления (слева) и на большом интервале времени (справа), где для удобства не отображаются интервалы пассивного движения.

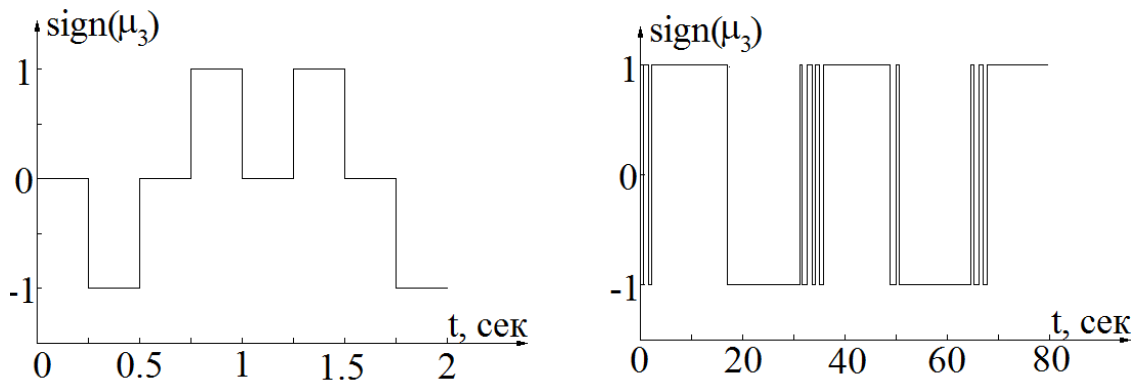


Рис.7. Сигнал, подаваемый на управляющую катушку

Приведем теперь результаты моделирования совместной работы алгоритмов «-Bdot» и раскрутки «2В» (ставится цель закрутить макет вокруг оси симметрии с угловой скоростью 0.1). На рис. 8 и 9 приводятся зависимости угловой скорости вращения и угла нутации от времени.

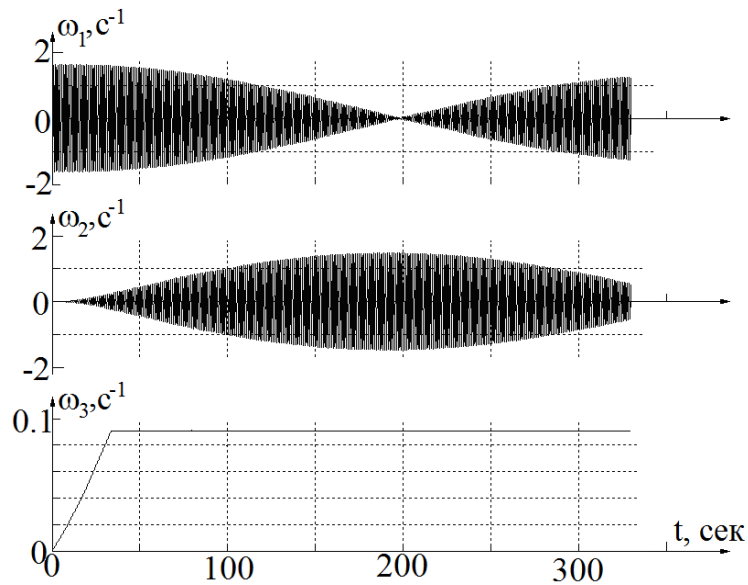


Рис. 8. Проекции угловой скорости.

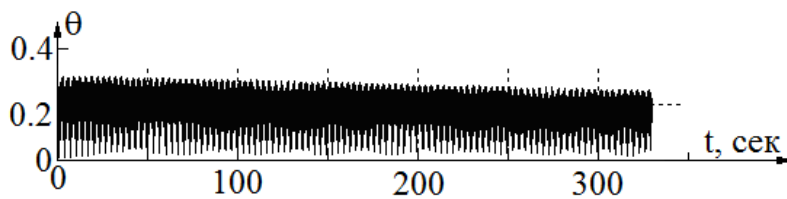


Рис. 9. Угол нутации.

Из представленных результатов можно сделать следующие выводы:

- алгоритм раскрутки работает достаточно эффективно;
- эффективность демпфирования при использовании алгоритма «ЗА» существенно выше, чем «-Vdot»;
- на практике при заданных параметрах стенда естественное затухание нутационных колебаний, вызванное аэродинамическим сопротивлением, трением в шарнирах и т.п., может оказаться даже более существенным, чем затухание, которое обеспечивается управление.

6.1. Влияние параметров алгоритма управления

Здесь приводятся некоторые результаты численного анализа влияния длительности активного интервала элементарного цикла управления Δ_a на эффективность демпфирующего алгоритма. В качестве оценки эффективности алгоритма (ε) берется время, за которое рассеивается 90% начальной энергии

(чем больше ε , тем меньше эффективность). При этом $\Delta_p = 0.13\text{с}$, а параметры системы имеют следующие значения:

$$l = 2\text{м}, \quad d = 0.4\text{см}, \quad m = 0.1\text{кг}, \quad J = \text{diag}(3, 3, 5) \times 10^{-4} \text{кг} \cdot \text{м}^2, \quad \mu_{\max} = 4\text{А} \cdot \text{м}^2.$$

На рис. 10 показана зависимость $\varepsilon(\Delta_a)$ для алгоритма «3А». Соответствующая зависимость для алгоритма «-Vdot» качественно имеет аналогичный вид.

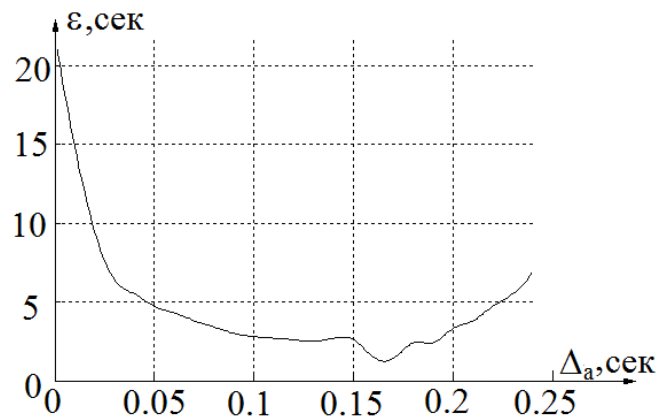


Рис.10. Зависимость $\varepsilon(\Delta_a)$ для алгоритма «3А».

Ухудшение эффективности при $\Delta_a > 0.25\text{с}$ объясняется тем, что за время отработки управления фазовое состояние макета может измениться настолько существенно, что на отдельных участках алгоритм уже не демпфирует, а раскачивает колебания. Заметим, что при дальнейшем увеличении Δ_a алгоритм вообще перестает демпфировать (на рис. 11 показана зависимость энергии от времени для алгоритма «-Vdot» при $\Delta_a = 0.35\text{с}$).

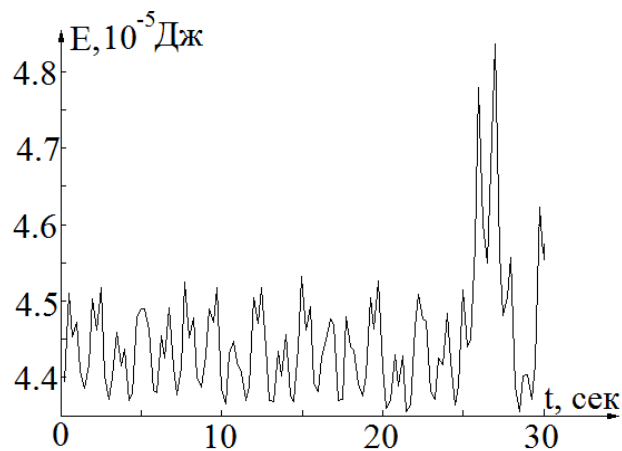


Рис. 11.

Эффект ухудшения эффективности можно пояснить на простом примере. Рассмотрим плоские колебания тела в случае, когда $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ и для демпфирования используется алгоритм «-Vdot». Управляющий механический момент имеет вид

$$M = \mu_3 B \sin \theta = -\mu B \sin \theta \cdot \text{sign}(\theta \dot{\theta}).$$

Сформированный в начале интервала управления ($t = 0.25$ с) магнитный момент (рис. 12в) сначала действительно способствует демпфированию колебаний, так как механический момент имеет нужный знак (рис. 12г), противоположный знаку угловой скорости (рис. 12б). Однако сохранение такого магнитного момента после смены знака угла нутации (рис. 12а) приводит уже не к демпфированию, а к раскачке колебаний, поскольку механический момент также меняет знак. В результате в конце интервала управления угловая скорость (и, соответственно, механическая энергия), оказывается больше, чем в начале (рис. 12б).

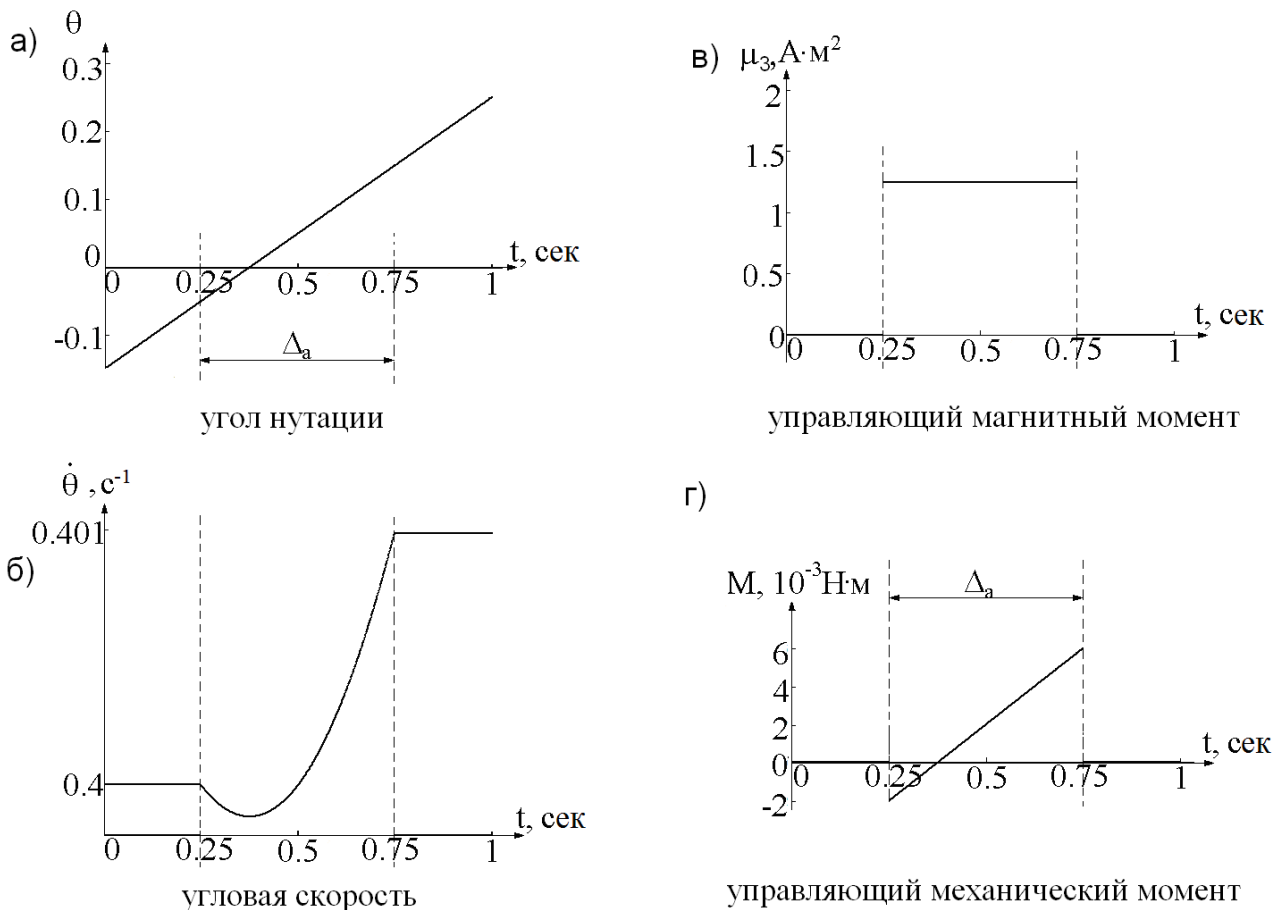


Рис. 12.

Проводились также расчёты при $\Delta_a = \Delta_p$ для алгоритма «-Bdot». Результаты приведены на рис. 13.

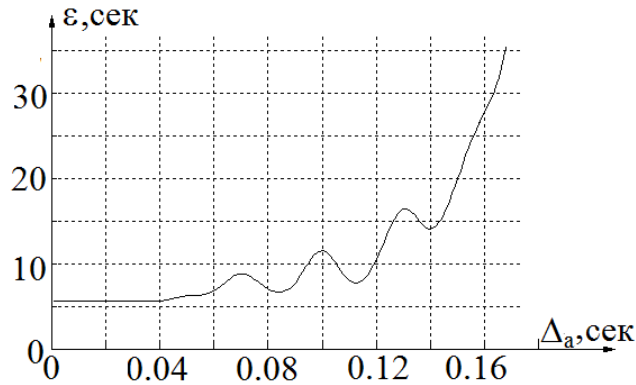


Рис. 13. Алгоритм «-Bdot»: Зависимость $\varepsilon(\Delta_a)$ при $\Delta_a = \Delta_p$.

6.2. Влияние длины струны, смещения точки подвеса от центра масс, инерционных характеристик макета

Рассмотрим влияние длины струны на эффективность демпфирующего алгоритма. Как показали результаты численного моделирования, зависимость $\varepsilon(l)$ имеет немонотонный характер (рис. 14). Для объяснения этого эффекта было проанализировано частное движение тела на струне – плоские колебания.

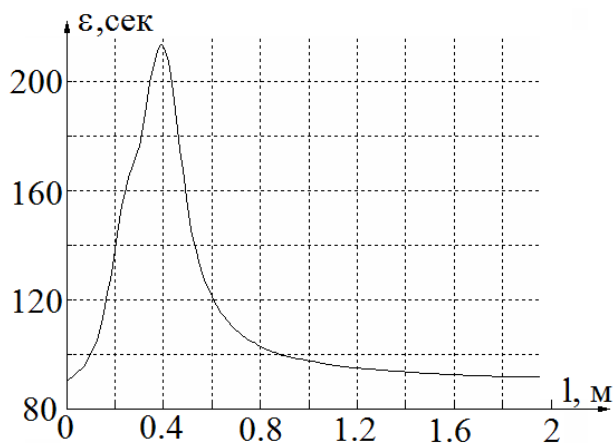


Рис. 14. Зависимость $\varepsilon(l)$.

Выясним сначала, при каких условиях управляемое движение (используется алгоритм «-Bdot») может иметь вид плоских колебаний (рис. 15).

Если $\psi = \varphi = 0$, $\beta = \pi/2$, $\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \dot{\beta} = 0$, то из (6) следует $M_2 = M_3 = 0$, откуда $B_1 = 0$. Пусть $B_1 = B_2 = 0$. Система уравнений (6) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}l + \ddot{\theta}d \cos(\theta - \alpha) - \dot{\theta}^2 d \sin(\theta - \alpha) + g \sin \alpha = 0, \\ \left[A + md^2 \sin^2(\theta - \alpha) \right] \ddot{\theta} - M - mdl \sin(\theta - \alpha) \dot{\alpha}^2 - \\ + mgd \cos \alpha \sin(\theta - \alpha) - md^2 \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) \dot{\theta}^2 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь M - величина управляющего момента. Для алгоритма «-Bdot» имеем

$$M = -\mu B \sin \theta \cdot \text{sign}(\dot{\theta} \sin \theta).$$

Полагая α, θ малыми, линеаризуем систему (32), вводя обозначения

$$\omega_B^2 = \frac{\mu B}{A}, \quad \omega_I^2 = \frac{mgd}{A}, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \kappa = \frac{d}{l}, \quad \rho = \frac{md^2}{A}. \quad (33)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha + \kappa \ddot{\theta} = 0, \\ \ddot{\theta} + \left[\omega_I^2 + \omega_B^2 \text{sign}(\theta \dot{\theta}) \right] \theta - \omega_I^2 \alpha = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

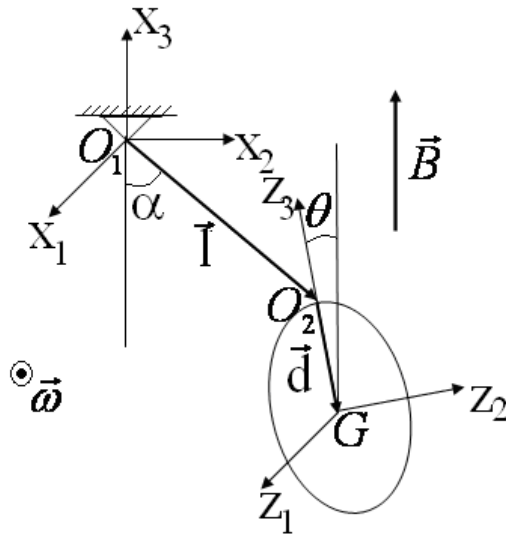


Рис. 15. Плоские колебания тела на струне.

Пусть характерная величина управляющего механического момента много меньше характерной величины момента силы тяжести относительно точки подвеса тела к струне, т.е. $\mu B \ll mgd$ (что эквивалентно $\omega_B^2 \ll \omega_I^2$).

Решение системы (34) будем искать в виде разложений по малому параметру $\nu = \mu B/mgd$

$$\theta(t) = \theta^{(0)}(t) + \nu\theta^{(1)}(t) + \dots, \quad \alpha(t) = \alpha^{(0)}(t) + \nu\alpha^{(1)}(t) + \dots$$

Члены нулевого порядка имеют вид $\theta^{(0)}(t) = Be^{i\lambda t}$, $\alpha^{(0)}(t) = \Lambda e^{i\lambda t}$. Здесь λ - корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left[\omega^2 + \omega_I^2 (1 + \kappa) \right] + \omega^2 \omega_I^2 = 0,$$

решая которое, находим

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega^2 + (1 + \kappa) \omega_I^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \omega_I^2)^2 + 2\kappa \omega_I^2 (\omega^2 + \omega_I^2) + \kappa^2 \omega_I^4} \right],$$

$$\Lambda = B \frac{\kappa \lambda^2}{\omega^2 - \lambda^2}. \quad (35)$$

Пусть в начальный момент $\alpha^{(0)}(0) = \dot{\alpha}^{(0)}(0) = \dot{\theta}^{(0)}(0) = 0$, $\theta^{(0)}(0) = \theta_0$, тогда

$$\theta^{(0)}(t) = B_1 \cos(\lambda_1 t) + B_2 \cos(\lambda_2 t),$$

$$\alpha^{(0)}(t) = B_1 \frac{\kappa \lambda_1^2}{\omega^2 - \lambda_1^2} \cos(\lambda_1 t) + B_2 \frac{\kappa \lambda_2^2}{\omega^2 - \lambda_2^2} \cos(\lambda_2 t),$$

где, с учетом начальных условий,

$$B_1 = \theta_0 \frac{\lambda_2^2 (\omega^2 - \lambda_1^2)}{\omega^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad B_2 = -\theta_0 \frac{\lambda_1^2 (\omega^2 - \lambda_2^2)}{\omega^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}. \quad (36)$$

При анализе влияния параметров системы на эффективность демпфирования ε интерес, прежде всего, представляет характер изменения энергии E . При $\nu = 0$ энергия является интегралом движения. С учетом членов первого порядка по ν имеем $\dot{E} = \omega M = -\nu mgd \left| \dot{\theta} \sin \theta \right|$, т.е. в линейном приближении $\dot{E} = -\nu mgd \left| \theta \dot{\theta} \right|$.

Рассмотрим влияние длины струны l на эффективность демпфирования. Пусть $l \rightarrow \infty$, тогда $\kappa \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$ и $\lambda_1 \approx \omega_I \sqrt{1 + \kappa} \approx \omega_I$, $\lambda_2 = \omega \sqrt{1 + \kappa/2} \approx \omega$, откуда в силу (36) $B_1 \approx \theta_0$, $B_2 \approx -\kappa \theta_0 / 2 \approx 0$. Таким образом, получаем

$$\dot{E} = -\nu mgd \theta_0^2 \omega_I \left| \sin(2\omega_I t) \right|.$$

Усредняя по t , окончательно получаем

$$\dot{\bar{E}} = -2vmgd\theta_0^2\omega_l/\pi. \quad (37)$$

Пусть теперь $l \rightarrow 0$. Тогда $\kappa \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$. Из (36) получаем

$$\lambda_1 \approx \omega\sqrt{1+\rho}, \quad \lambda_2 \approx \omega_l \frac{1}{\sqrt{1+\rho}}.$$

Поскольку при линеаризации пренебрегаем $md^2 \sin^2(\theta - \alpha)$ по сравнению с A , полагаем, что $\rho \ll 1$ и находим $\lambda_1 \approx \omega$, $\lambda_2 \approx \omega_l$, $B_1 \approx 0$, $B_2 \approx \theta_0$. Таким образом, вновь получаем уравнение (37), т.е. при $l \rightarrow 0$ и $l \rightarrow \infty$ эффективность демпфирования одинаковая, что подтверждается и численными расчётами (см. рис. 14).

Рассмотрим далее случай $\omega = \omega_l$, т.е. $l = \frac{A}{md}$. Тогда $\lambda_1 \approx \omega(1 + \sqrt{\kappa}/2)$,

$\lambda_2 \approx \omega(1 - \sqrt{\kappa}/2)$, откуда $B_1 \approx B_2 \approx \theta_0/2$ и, следовательно,

$$\theta^{(0)}(t) \approx \theta_0 \cos(\omega t) \cos(\sqrt{\kappa}\omega t/2), \quad \alpha^{(0)}(t) \approx \theta_0 \sqrt{\kappa} \sin(\omega t) \sin(\sqrt{\kappa}\omega t/2).$$

Для изменения энергии имеем

$$\dot{E} = -vmgd |\dot{\theta}\dot{\theta}| \approx -vmgd\theta_0^2\omega_l |\sin(2\omega_l t)| \cos^2(\sqrt{\kappa}\omega t/2),$$

т.е. имеются быстрая ($2\omega_l$) и медленная ($\sqrt{\kappa}\omega_l/2$) частоты. Усреднив по быстрой частоте, находим

$$\dot{\bar{E}} = -\frac{2}{\pi}vmgd\theta_0^2\omega_l \cos^2(\sqrt{\kappa}\omega_l t/2). \quad (38)$$

Если теперь усреднить ещё и по «медленной» частоте, получим

$$\dot{\bar{E}} = -vmgd\theta_0^2\omega_l/\pi. \quad (39)$$

Сравнивая (37) и (39), отмечаем, что при данном значении l эффективность демпфирования падает в два раза по сравнению со случаями $l \rightarrow 0$ и $l \rightarrow \infty$, что качественно согласуется с рис. 14.

Из формулы (37) также следует, что зависимость $\varepsilon(d)$ имеет вид $\varepsilon \sim \sqrt{d}$ (поскольку $\omega_l = \sqrt{mgd/A}$), по крайней мере, при $d < d_0 = \sqrt{A/m}$ (так как при линеаризации пренебрегали $md^2 \sin^2(\theta - \alpha)$ по сравнению с A). Результаты расчётов приведены на рис. 16 (вертикальная прямая проходит через точку $d = d_0$).

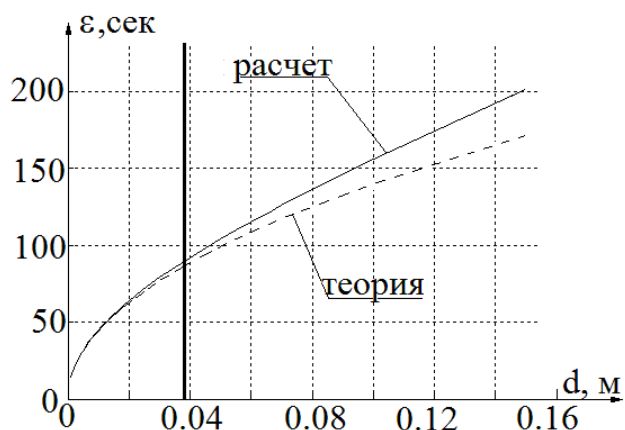


Рис. 16. Зависимость $\varepsilon(d)$.

Перейдём к рассмотрению влияния инерционных характеристик макета, массы m и момента инерции A на ε . Из (37) следует, что, если A изменяется пропорционально m , то и ε линейно зависит от m . Это подтверждается результатами численных расчетов (см. рис. 17).

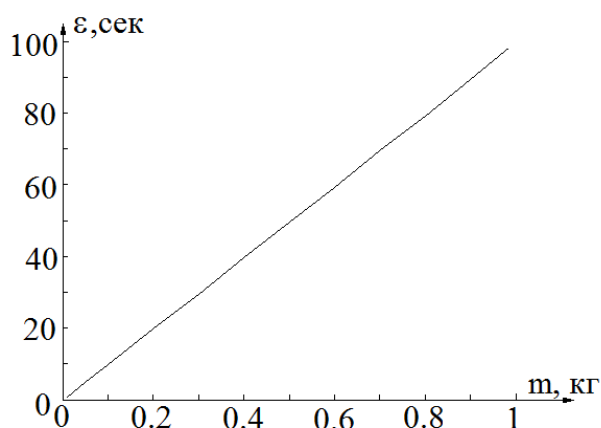


Рис. 17. Зависимость эффективности от массы макета.

Будем теперь изменять A при фиксированном m . При $A \rightarrow \infty$ $\omega_l \rightarrow 0$, $\lambda_1 \approx \omega$, $\lambda_2 \approx \omega_l$, $B_1 \approx 0$, $B_2 \approx \theta_0$ и вновь приходим к выражению (37). При $A \rightarrow 0$ $\omega_l \rightarrow \infty$, $\lambda_1 \approx \omega_l$, $\lambda_2 \approx \omega$, $B_1 \approx \theta_0$, $B_2 \approx 0$ и также получаем (37). Случай $A = mdl$ отвечает соотношению $\omega = \omega_l$ и уже рассмотрен выше. Соответственно, при $A \rightarrow \infty$ и $A \rightarrow 0$ скорость рассеяния энергии $\sim 1/\sqrt{A}$. Этот результат подтверждается численными расчетами, за исключением области очень малых значений A ($A \ll md^2$), где линеаризованная модель неприменима.

6.3. Случай смещённой точки подвеса

В случае, когда точка подвеса смещена относительно оси симметрии, а алгоритмы раскрутки не используются, алгоритмы демпфирования приводят макет в состояние, когда его центр масс, точка крепления к струне и точка подвеса струны лежат на одной вертикали. Эффективность демпфирования при этом не отличается существенно от случая, когда точка крепления к струне лежит на оси симметрии.

В случае же, когда используются алгоритмы раскрутки, их применение приводит к вращению тела не вокруг оси симметрии, а вокруг вертикали, причём это вращение сопровождается биениями. Ниже приводятся графики углов Эйлера и угловых скоростей, соответствующих смещению точки крепления на 1 см вдоль оси симметрии и на 0.5 см в поперечном направлении.

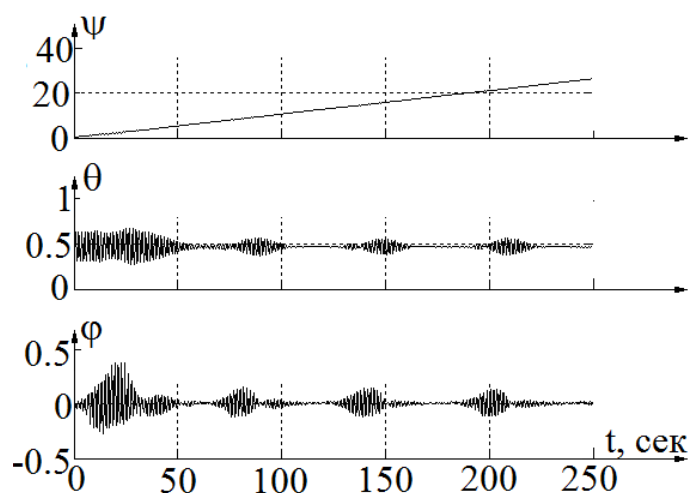


Рис. 18. Углы Эйлера.

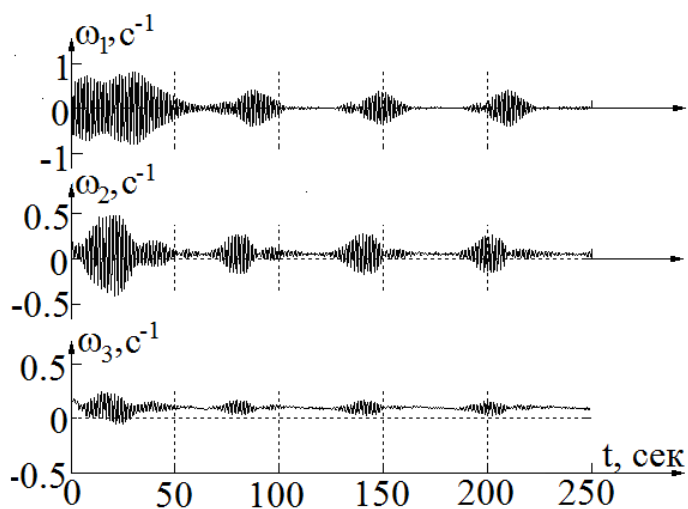


Рис. 19. Проекция угловой скорости.

6.4 Влияние ошибок измерений

Важным фактором, влияющим на работу алгоритма управления, является точность используемой измерительной информации. Ошибочное представление о фазовом состоянии системы снижает эффективность управления, а при достаточно высоком уровне ошибок может привести и к полной потере его работоспособности. В случае использования алгоритма «-Vdot» требуемая измерительная информация это проекции магнитного поля на связанные оси. Ошибка показаний магнитометра (шум) моделировался путём добавления равномерно распределённой случайной величины с амплитудой 5% от реального поля. На рис. 20 приведены графики энергии для незашумлённого и зашумлённого случаев. Видно, что в случае незашумлённого сигнала рассеяние энергии происходит в среднем на 25% быстрее.

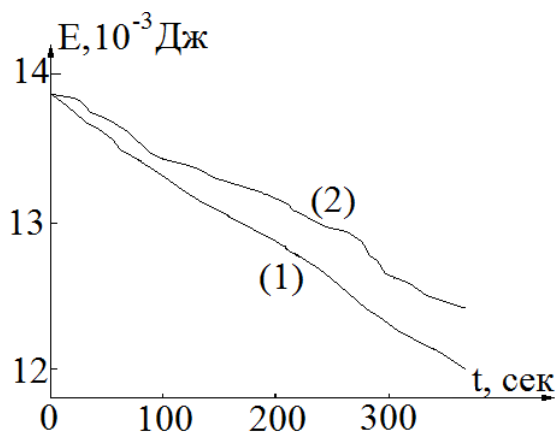


Рис. 20. Графики энергии для незашумлённого (1) и зашумлённого (2) случаев.

6.5. Об однородности магнитного поля

Результаты моделирования показывают, что горизонтальное отклонение струны не превышает (для вышеприведённых примеров) 1 см (см., например, рис. 5 а, б). Поэтому магнитное поле в области нахождения макета можно считать однородным с достаточной степенью точности, поскольку характерный размер области однородности поля имитатора составляет 20 см [1].

Заключение

В работе предложена математическая модель для анализа динамики прототипа малого спутника с активной магнитной системой ориентации на испытательном стенде и описан соответствующий программный комплекс.

Проведено численное моделирование управляемого движения макета при использовании двух алгоритмов демпфирования и одного алгоритма раскрутки до требуемой угловой скорости. Результаты исследования показывают, что алгоритм раскрутки в реальных условиях может быть достаточно эффективным, в то время как скорость демпфирования нутационных колебаний может быть сопоставима со скоростью естественного затухания. Исследована зависимость эффективности алгоритмов демпфирования от параметров стенда и макета, а также от характеристик самих алгоритмов. Отмечена необходимость выбора адекватного соотношения интервалов пассивного и управляемого движения. Для частного вида движения (плоских колебаний) получена зависимость эффективности от смещения точки подвеса и инерционных характеристик макета. Обсуждается также влияние ошибок измерений магнитного поля на эффективность демпфирования.

Список литературы

1. Овчинников М.Ю., Цветков Е.А. Проектирование имитатора геомагнитного поля в составе лабораторного стенда для отработки способов управления ориентацией микроспутников. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005, №55.
2. Зараменских И.Е., Овчинников М.Ю. Расчет токовых катушек для управления макетом спутника в лабораторных условиях. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005, №93.
3. Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Лабораторный стенд для полунатурной отработки систем ориентации микро- и наноспутников. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2008, №38.
4. Ильин А.А., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Алгоритмы магнитной ориентации спутника, стабилизируемого собственным вращением. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005, №19.