



Иванов Д.С., Карпенко С.О.,
Овчинников М.Ю.

Алгоритм оценки
параметров ориентации
малого космического
аппарата с использованием
фильтра Калмана

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Алгоритм оценки параметров ориентации малого космического аппарата с использованием фильтра Калмана // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 48. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-48>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им.М.В.КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Д.С. Иванов, С.О. Карпенко, М.Ю. Овчинников

**АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОРИЕНТАЦИИ
МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЛЬТРА КАЛМАНА**

Москва

2009

Алгоритм оценки параметров ориентации малого космического аппарата с использованием фильтра Калмана. Д.С. Иванов, С.О. Карпенко, М.Ю. Овчинников. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, Москва, 32 страницы, 31 рисунок, библиография 8 наименований.

Дано описание построения фильтра Калмана, использующего для оценки параметров ориентации измерения магнитометра, солнечного датчика и датчика угловой скорости. Линеаризована математическая модель движения малого космического аппарата с учетом управляющих моментов со стороны маховиков. Задача исследования точности фильтра Калмана и скорости его сходимости сведена к поиску оптимальных значений нескольких параметров фильтра Калмана.

Ключевые слова: магнитометр, солнечный датчик, датчик угловой скорости, определение ориентации, фильтр Калмана.

Kalman Filter Algorithm for Satellite Attitude Parameters Estimation, D.S.Ivanov, S.O.Karpenko, M.Yu.Ovchinnikov, Preprint of KIAM RAS, Moscow, 32 Pages, 31 Figures, 8 References.

Kalman Filter using magnetometer, sun sensor and angular rate sensor measurements is developed. Mathematical model of motion of the small satellite with respect to flywheel torques is linearized. Problem of the Kalman filter accuracy and convergence study is transferred to search of optimal values of a several Kalman filter parameters.

Key words: magnetometer, sun sensor, angular rate sensor, attitude determination, Kalman filter.

1. Введение

Для решения задачи управления малым космическим аппаратом (МКА) необходимо знать параметры ориентации тела относительно заданной системы координат (СК). В качестве параметров ориентации часто принимают кватернион поворота орбитальной СК в связанную с аппаратом СК и вектор угловой скорости связанной СК относительно инерциальной СК. Знание текущих параметров ориентации МКА необходимо не только для задач управления относительно центра масс, но и для задач управления движением центра масс аппарата. Однако вследствие ряда причин параметры ориентации известны с некоторой точностью, и эта ошибка в знании параметров приводит к ошибкам в исполнении управляющих воздействий, а, значит, и к ошибкам исполнения миссии аппарата. По этой причине задача определения параметров ориентации МКА с максимально возможной точностью, или с допустимой для задачи управления точностью, имеет большое значение.

Параметры ориентации МКА определяются с помощью данных бортовых датчиков, таких как: датчик солнца, датчик горизонта, звёздный датчик, магнитометр, датчик угловой скорости. Возможно также определение ориентации с помощью данных фотометрии – снимков с Земли освещённого солнцем аппарата. Данные бортовых датчиков можно обрабатывать на Земле и получать параметры ориентации с помощью, например, метода наименьших квадратов. Однако наземная постполётная обработка не подходит для задач активного управления ориентацией, для которых необходимо знание текущих параметров ориентации, поэтому для рассматриваемой задачи обработка данных с датчиков производится непосредственно на бортовом компьютере МКА. Причем метод наименьших квадратов нельзя использовать на бортовом компьютере вследствие больших затрат времени на определение параметров и необходимости накопления массива измерений. Поэтому для решения задачи определения параметров ориентации в режиме реального времени часто выбирается фильтр Калмана – рекурсивный метод оценки параметров, использующий для работы математическую модель движения объекта и текущий вектор измерений.

Фильтр Калмана довольно часто используется на МКА. В качестве примера можно привести португальский микроспутник PoSAT-1, фильтр строится на показаниях солнечного датчика, звёздного датчика и магнитометра [1]. Для миссии немецкой ABRIXAS был разработан фильтр Калмана, основанный на данных солнечного датчика и магнитометра [2]. Египетский спутник EgyptSat-1 использовал фильтр, основанный только на показаниях магнитометра [3]. Существуют также системы, которые наряду с позиционными датчиками используют измерения датчика угловой скорости для полу-

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 09-01-00431 и 07-01-00040).

чения оценки параметров ориентации [4]. Однако, несмотря на большую популярность фильтра Калмана как метода оценки параметров ориентации в режиме реального времени, существует ряд серьёзных проблем в его использовании. Перечислим основные.

1. *Проблема задания начальных приближений параметров ориентации.* Для эффективной работы фильтра необходимо иметь достаточно хороший начальный вектор состояния. Для определённых начальных условий фильтр может не сойтись.

2. *Проблема линеаризации.* Фильтр Калмана для своей работы использует линеаризованную модель движения. При достаточно медленных движениях (или при достаточно частых измерениях) фильтр даёт удовлетворительную оценку вектора состояния. В противном случае фильтр будет давать постоянную и растущую ошибку в оценке вектора состояния.

3. *Проблема настройки.* Фильтр использует в своей работе ковариационные матрицы ошибок, настройка которых сильно влияет на основные характеристики фильтра: скорость сходимости и ошибка оцениваемого вектора состояния после сходимости.

Каждая из этих проблем для каждого конкретного аппарата решается по-своему в зависимости от поставленных задач, поэтому нет общепринятой методики, как работать с фильтром. Первый вопрос, касающийся задания начального вектора состояния аппарата, можно решить, например, с помощью локального метода определения параметров ориентации, который даёт довольно грубое начальное приближение. Второй вопрос накладывает определённые ограничения на допустимые движения спутника: в случае необходимости достаточно быстрого маневрирования аппарата закладывается возможность увеличения частоты опроса датчиков ориентации.

Основной, третий, вопрос относительно настройки матриц ковариации, который влияет на точность и сходимость фильтра, в литературе решается в основном двумя путями:

1. Начальные значения матриц ошибок подбираются вручную, методом подбора, путём прогона фильтра в имитирующей программе с выбираемыми элементами матриц (например в [3]). Сложность такого метода заключается в том, что, к примеру, для 6-ти мерного вектора состояния число подбираемых параметров с учетом диагональности матриц составляет 155, и подбор вручную может занимать очень длительное время. Понятно, что подбор параметров вручную не гарантирует нахождения минимума ошибки в оценке параметров ориентации. Кроме того, рассматриваемый метод не касается вопроса области сходимости фильтра в случае неточного задания начального приближения.

2. Начальные значения матриц ошибок находятся с помощью генетических алгоритмов (например, в [5]). Генетический алгоритм представляет собой автоматизированный прогон фильтра в имитирующей программе, с помощью которого путём последовательных малых изменений определяется набор параметров (элементов матриц ковариации), который даёт наилучший результат по определённому критерию (например, точность). Минусом тако-

го алгоритма является то, что он находит локальный минимум по исследуемому функционалу. Кроме того, при большом количестве параметров, получение искомого набора параметров может занять очень много времени. Генетический алгоритм также не даёт ответа на вопрос, касающийся области и времени сходимости фильтра.

В различных работах, касающихся построения и настройки фильтра Калмана можно найти различные модификации рассмотренных выше методов. Например, в [6] начальные значения матриц находятся вручную, однако число параметров уменьшается до шести. В [7] генетический алгоритм работал для поиска всего десяти параметров. А в [8] пробовали оба способа и получали разные точности. Однако очень редко в качестве функционала качества фильтра приводят скорость сходимости при плохо заданном начальном векторе состояния, хотя это имеет очень важное значение, так как при определённых условиях фильтр может не сойтись.

В настоящей работе предложен третий способ настройки фильтра. При определённых предположениях относительно корреляции ошибок в знании начального вектора состояния, число параметров настройки фильтра сводится к двум - трем. После чего на этих параметрах строится сетка с заданным шагом, и в узлах этой сетки проводится моделирование работы фильтра с контролем точности фильтра и времени сходимости. По результатам расчетов на сетке строятся трёхмерные графики, по которым можно визуально выбрать требуемый набор параметров, при которых будет необходимая точность и время сходимости. Также по графикам можно определить область сходимости фильтра при заданной ошибке начального приближения, из которой необходимо выбирать параметры фильтра, и увидеть, что область высокой точности фильтра не совпадает с областью сходимости. Другими словами, предел по точности фильтра не обязательно будет достигаться, если задать ошибку в начальном векторе состояния, то есть не будет устойчивости.

Структура настоящей работы следующая. Сначала кратко приведена теория фильтра Калмана, далее описано построение фильтра для конкретных датчиков ориентации, после чего приводятся результаты по точности и сходимости фильтра по методике, кратко описанной выше.

2. Элементы теории фильтра Калмана

Фильтр Калмана – последовательный рекурсивный алгоритм, использующий принятую модель динамической системы для получения оценки, которая может быть существенно скорректирована в результате анализа каждой новой выборки измерений во временной последовательности. Этот алгоритм находит применение в процессе управления многими сложными динамическими системами, например, непрерывными производственными процессами, самолетами, кораблями и космическими аппаратами. При управлении динамической системой, прежде всего, необходимо полностью знать ее фазовое состояние в каждый момент времени. Но измерение всех переменных, которыми необходимо управлять, не всегда возможно. В этих случаях фильтр Калмана является тем средством, которое позволяет восстановить недостающую информацию посредством имеющихся неточных (зашумленных) измерений. При изложении элементов теории фильтра Калмана будем следовать обзорной работе [9].

2.1. Линейная задача. Основные понятия

Предполагаем, что стохастическая система может быть описана моделями динамики и измерений (для непрерывного и дискретного случаев), представленными в табл.2.1

Табл.2.1

Модель	Непрерывное время	Дискретное время
Система	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\omega}(t)$	$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_k$
Измерения	$\mathbf{z} = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$	$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$
Шум системы	$E\langle \boldsymbol{\omega}(t) \rangle = 0$ $E\langle \boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\omega}^T(s) \rangle = \delta(t-s)\mathbf{Q}(t)$	$E\langle \boldsymbol{\omega}_k \rangle = 0$ $E\langle \boldsymbol{\omega}_k\boldsymbol{\omega}_i^T \rangle = \Delta(k-i)\mathbf{Q}_k$
Шум измерений	$E\langle \mathbf{v}(t) \rangle = 0$ $E\langle \mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(s) \rangle = \delta(t-s)\mathbf{R}(t)$	$E\langle \mathbf{v}_k \rangle = 0$ $E\langle \mathbf{v}_k\mathbf{v}_i^T \rangle = \Delta(k-i)\mathbf{R}_k$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ вектор состояния динамической системы, который является случайным Гауссовским процессом, \mathbf{z}_k – измерения, полученные в момент времени t_k . Шум системы и шум измерений $\boldsymbol{\omega}_k$ и \mathbf{v}_k также являются Гауссовскими случайными процессами с нулевым математическим ожиданием. Другими словами, мы предполагаем наличие в системе и измерениях *белого шума*.

Задача фильтрации состоит в том, чтобы найти оценку вектора состояния системы \mathbf{x}_k , которую мы будем обозначать $\hat{\mathbf{x}}_k$, являющуюся функцией измерений $\mathbf{z}_1 \dots \mathbf{z}_k$ и которая минимизирует среднеквадратичную ошибку

$$E \left\langle [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k]^T \mathbf{M} [\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k]^T \right\rangle,$$

где \mathbf{M} симметричная положительно-определенная матрица.

Фильтр Калмана работает по системе прогноз-коррекция. Допустим, что в момент времени t_{k-1} получена оценка вектора состояния системы $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ и теперь хотим получить оценку в момент t_k . Для этого строим прогноз оценки $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, базируясь на $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$, получаем измерения \mathbf{z}_k и далее корректируем оценку в момент t_k , базируясь на прогнозе и измерениях, и получаем окончательную оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ (рис. 2.1). $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ называют априори оценкой, $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ называют апостериори оценкой.

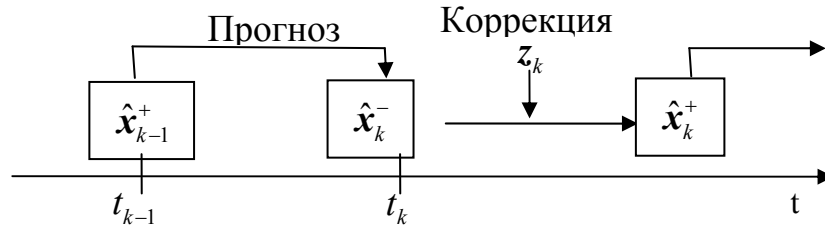


Рис. 2.1. Принцип работы фильтра Калмана

Второй момент случайного процесса может быть описан в терминах ковариационной матрицы

$$\mathbf{P}(t) = E \left\langle [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)][\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]^T \right\rangle, \quad (2.1)$$

Матрица $\mathbf{P}(t)$ называется ковариационной матрицей ошибки оценки вектора состояния (далее – ковариационная матрица ошибки).

Очевидно, что для получения прогнозируемой оценки $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ необходимо интегрировать модельное динамическое уравнение $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$ с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$. А каким образом мы можем получить прогнозируемую оценку ковариационной матрицы ошибки? Для того чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим непрерывную модель системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\omega}(t), \quad (2.2)$$

приведенную в табл.2.1. Решение этого уравнения с начальным условием $\mathbf{x}(t_0)$ и переходной матрицей состояния $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ записывается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau.$$

Математическое ожидание этой величины –

$$E \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)E \langle \mathbf{x}(t_0) \rangle + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau) \langle \boldsymbol{\omega}(\tau) \rangle d\tau.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}(t) - E \langle \mathbf{x}(t) \rangle] = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)[\mathbf{x}(t_0) - E \langle \mathbf{x}(t_0) \rangle] + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1), производя некоторые преобразования и вычисляя первую производную функции $P(t)$, в результате получим

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q. \quad (2.4)$$

Это матричное дифференциальное уравнение Риккати. Итак, мы получили уравнение продолжения ковариационной матрицы ошибки. Путем интегрирования уравнения (2.4) с начальным условием $P(0) = P_{k-1}^+$ получим прогнозируемую оценку ковариационной матрицы ошибки P_k^- .

2.2. Матрица коэффициентов обратной связи

Предположим, что измерения были сделаны в момент времени t_k и эта информация используется для оценки вектора состояния x стохастической системы в момент времени t_k . Предполагается также, что измерения линейно зависят от вектора состояния и описываются уравнением

$$z_k = H_k x_k + v_k. \quad (2.5)$$

Оценка \hat{x}_k^+ базируется на наблюдениях (или измерениях) z_k . Таким образом, она является функцией априори оценки \hat{x}_k^- и измерения z_k и может быть записана в следующем виде:

$$\hat{x}_k^+ = K_k^1 \hat{x}_k^- + \bar{K}_k z_k. \quad (2.6)$$

Матрицы K_k^1 и \bar{K}_k пока неизвестны и их значения будут определяться таким образом, чтобы новая оценка \hat{x}_k^+ удовлетворяли *принципу ортогональности*, условия которого могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} E \left\langle \left[x_k - \hat{x}_k^+ \right] z_i^T \right\rangle &= 0, i = 1, 2, \dots, k-1, \\ E \left\langle \left[x_k - \hat{x}_k^+ \right] z_k^T \right\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя в уравнение (2.7) значения x_k и \hat{x}_k^+ из выражений (2.1) и (2.6) и учитывая тот факт, что случайные последовательности ω_k и v_k некоррелированы, после некоторых преобразований [7] выражаем матрицы коэффициентов обратной связи в следующем виде:

$$K_k^1 = I - K_k H_k, \quad (2.8)$$

$$\bar{K}_k = P_k^- H_k^T \left[H_k P_k^- H_k^T + R_k \right]^{-1}. \quad (2.9)$$

Эта матрица коэффициентов является функцией от *априори* значения ковариационной матрицы ошибки.

2.3. Коррекция значения ковариационной матрицы ошибки оценки вектора состояния

Теперь выведем формулу для *апостериори* значения ковариационной матрицы ошибки (для корректировки ковариационной матрицы ошибки). По определению она записывается в виде

$$P_k(+)=E\langle\tilde{\mathbf{x}}_k^+\tilde{\mathbf{x}}_k^{+T}\rangle, \quad (2.10)$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+=\hat{\mathbf{x}}_k^+-\mathbf{x}_k, \quad \tilde{\mathbf{x}}_k^-=\hat{\mathbf{x}}_k^--\mathbf{x}_k. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.8) в (2.6), получим

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+=\hat{\mathbf{x}}_k^-+\bar{K}_k[z_k-H_k\hat{\mathbf{x}}_k^-]. \quad (2.12)$$

Вычтем \mathbf{x}_k из обеих частей (2.12) и подставим в него значение z_k в соответствии с уравнением (2.5). В результате получим

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+-\mathbf{x}_k=\hat{\mathbf{x}}_k^-+\bar{K}_kH_k\mathbf{x}_k+\bar{K}_k\mathbf{v}_k-\bar{K}_kH_k\hat{\mathbf{x}}_k^--\mathbf{x}_k$$

или с учетом (2.11)

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+=(I-\bar{K}_kH_k)\tilde{\mathbf{x}}_k^-+\bar{K}_k\mathbf{v}_k. \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.10) и принимая во внимание, что $E\langle\tilde{\mathbf{x}}_k^-\mathbf{v}_k^T\rangle=0$ получим

$$P_k^+=(I-K_kH_k)P_k^-. \quad (2.14)$$

2.4. Фильтр Калмана для нелинейных систем (расширенный фильтр)

Большинство динамических систем и сенсоров не являются линейными. Но методы фильтрации, разработанные для линейных систем, могут быть применены и для нелинейных систем. В этом разделе рассматриваются методы, которые позволяют перенести методологию фильтрации Калмана на нелинейные задачи.

Предположим, что непрерывная или дискретная стохастическая система может быть представлена нелинейным динамическим уравнением и модельным уравнением, описывающим измерения (табл.2.2).

Табл.2.2

Модель	Непрерывное время	Дискретное время
Система	$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t)+\boldsymbol{\omega}(t)$	$\mathbf{x}_k=\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1},k-1)+\boldsymbol{\omega}_{k-1}$
Измерения	$z(t)=\mathbf{h}(\mathbf{x}(t),t)+v(t)$	$z_k=\mathbf{h}(\mathbf{x}_k,k)+v_k$

Применяемый метод линеаризации требует, чтобы функции \mathbf{f} и \mathbf{h} были дважды непрерывно дифференцируемые. Обозначим символом δ малое отклонение от оцениваемой траектории:

$$\delta\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_k-\hat{\mathbf{x}}_k^-,$$

$$\delta z_k=z_k-\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-,k),$$

тогда $\mathbf{f}(\mathbf{x},k-1)$ в окрестности $\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1},k-1)=\mathbf{x}_k^-+\left.\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x},k-1)}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-}\delta\mathbf{x}_{k-1}.$$

Таким образом, получаем

$$\delta \mathbf{x}_k \approx \Phi_{k-1}^{[1]} \delta \mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_{k-1},$$

где

$$\Phi_{k-1}^{[1]} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, k-1)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-} \delta \mathbf{x}_{k-1}. \quad (2.15)$$

В свою очередь, измерения могут быть представлены в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_k^-$ следующим образом:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-} \delta \mathbf{x}_k \text{ и } \delta \mathbf{z}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-} \delta \mathbf{x}_k.$$

Слагаемые выше первого порядка малости здесь опущены. Если в разложении мы пренебрегаем членами высокого порядка, то возмущение \mathbf{z}_k может быть представлено в виде

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k^{[1]} \delta \mathbf{x}_k,$$

где

$$\mathbf{H}_k^{[1]} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-}. \quad (2.16)$$

В случае непрерывной системы матрицы частных производных имеют следующий вид:

$$\mathbf{F}^{[1]} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{H}^{[1]} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}. \quad (2.18)$$

2.5. Использование фильтра Калмана

Подведем некоторый итог всего вышеизложенного на примере *непрерывно-дискретной* системы (непрерывная динамическая система с дискретными измерениями), которая и описывает большинство реальных задач. Такая система записывается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \boldsymbol{\omega}(t),$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}(t_k)) + \mathbf{v}_k.$$

Допустим, что в момент времени t_{k-1} получены *апостериори* значения $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ и \mathbf{P}_{k-1}^+ , то есть на шаге t_{k-1} задача фильтрации выполнена и теперь необходимо определить $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ и \mathbf{P}_k^+ .

Априори значения оценок вектора состояния и ковариационной матрицы ошибки \mathbf{x}_k^- и \mathbf{P}_k^- можно получить путем интегрирования модельного уравнения и уравнения типа Риккати

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t), \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{Q}(t)$$

с начальными условиями $\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ и $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{k-1}^+$. Так как рассматриваем нелинейную задачу, то для определения матриц $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ воспользуемся уравнением (2.17). Выполнив эту процедуру, получим $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ и \mathbf{P}_k^- . Далее, находим

линеаризованную матрицу чувствительности $H_k(\hat{x}_k^-)$ согласно уравнению (2.16). Определяем матрицу коэффициентов обратной связи \bar{K}_k , используя уравнение (2.9). Находим *апостериори* значения P_k^+ по формуле (2.14), а \hat{x}_k^+ по формуле

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \bar{K}_k [z_k - h(\hat{x}_k^-, k)]. \quad (2.19)$$

3. Модель движения МКА

Для того чтобы использовать фильтр Калмана, необходимо иметь математическую модель движения тела. Однако предполагается, что фильтр Калмана будет работать на бортовом компьютере космического аппарата, обладающего весьма ограниченными вычислительными ресурсами. Поэтому имеет смысл построить достаточно грубую модель движения аппарата, учитывающую только основные моменты, действующие на тело. По этой причине учтём только влияние гравитационного момента.

Довольно часто на МКА в качестве исполнительных органов ориентации устанавливаются маховичные системы и магнитные катушки. Однако магнитные катушки обычно используются только с целью разгрузки маховиков или для разворота солнечных батарей на солнце, и для этих действий высоких точностей ориентации не требуется. Фильтр Калмана в основном используют для получения достаточно точной текущей ориентации для чёткого выполнения манёвров только маховиками в задачах, к примеру, дистанционного зондирования Земли. Поэтому в настоящей работе рассмотрены также управляющие моменты маховиков, действующие на МКА. Для конкретности выбрано линейное управление по рассогласованию, стабилизирующее аппарат относительно орбитальной системы координат.

Теперь установим на борт спутника набор датчиков определения ориентации. Обзор используемых на МКА средств определения ориентации показывает, что наиболее часто на борт малых аппаратов устанавливаются магнитометр с паре с солнечным датчиком. Причиной этому является факт, что векторы направления на Солнце и вектор индукции магнитного поля Земли в орбитальной системе координат позволяет определить текущую ориентацию спутника, а также по причине относительно малого собственного веса и невысокой стоимости. Однако, эта пара датчиков позволяет определить ориентацию только, если аппарат находится на солнце и когда вектор направления на Солнце не коллинеарен вектору магнитного поля Земли. Кроме того, рассматриваемые датчики являются позиционными, то есть с их помощью нельзя непосредственно измерить угловую скорость аппарата. Поэтому дополним систему датчиком угловой скорости, который будет измерять вектор угловой скорости связанной системы координат относительно инерциальной системы координат. Фильтр Калмана, построенный на измерениях этих трёх датчиков будет давать оценку вектора состояния с довольно высокой точностью, так

как неточности в измерениях каждого отдельного датчика будут компенсироваться фильтром.

Теперь выберем вектор оцениваемых параметров ориентации. Для управления маховиками необходимо знать текущее положение связанной с аппаратом относительно орбитальной систем координат и вектор угловой скорости относительно этими системами координат (СК). Положение СК удобно задать с помощью кватерниона, так как у него нет вырождений по сравнению с матрицей направляющих косинусов. Так как датчик угловой скорости выдает значение угловой скорости относительно инерциальной СК и уравнения Эйлера записываются именно относительно инерциальной СК, то в качестве оцениваемых параметров удобно выбрать именно вектор угловой скорости связанной СК относительно инерциальной СК. Для кинематических уравнений удобно из этого вектора вычесть орбитальную скорость вращения, которая рассчитывается, и получить угловую скорость вращения связанной СК относительно орбитальной СК. Далее учтем специфическую особенность датчика угловой скорости, которая заключается в необходимости постоянного отслеживания значения поля измерений, без достаточно точного знания которого использование этого датчика не имеет смысла. Поэтому включим в вектор оцениваемых параметров ещё и вектор смещения поля датчика угловой скорости.

В настоящей работе исследуются два варианта компоновки системы ориентации: с использованием магнитометра и солнечного датчика и с использованием дополнительно датчика угловой скорости. Поэтому будут фигурировать и два вектора параметров ориентации: векторная часть кватерниона поворота от орбитальной СК к связанной СК плюс вектор угловой скорости связанной СК относительно инерциальной СК, и дополнительно к этому вектор смещения поля датчика угловой скорости в случае использования трёх датчиков.

3.1. Обозначения

Далее будем использовать следующие системы координат (рис. 3.1):

Связанная СК (ССК) $Ox^s y^s z^s$ – правая ортогональная СК с началом в центре масс спутника. Ось Oz^s направлена в сторону от Земли при штатной ориентации аппарата на Землю. Ось Ox^s сонаправлена со средней осью эллипсоида инерции спутника. Ось Oy^s сонаправлена с минимальной осью эллипсоида инерции спутника.

Орбитальная СК (ОСК) $Ox^o y^o z^o$ – правая ортогональная система координат с центром в центре масс спутника. Ось Oz^o параллельна направлению от центра масс Земли к центру масс спутника и направлена в зенит (от Земли), ось Ox^o перпендикулярна плоскости орбиты и направлена в сторону, противоположную вектору орбитальной скорости вращения аппарата; ось Oy^o дополняет систему до правой. Эта СК является базовой для системы определения ориентации.

Инерциальная СК (ИСК) $O^i X^i Y^i Z^i$ – правая инерциальная СК с центром в центре масс Земли. Ось $O^i Z^i$ параллельна оси вращения Земли вокруг Солнца и направлена к Северному полюсу мира. Ось $O^i X^i$ параллельна линии, соединяющей центр Земли с точкой Весеннего равноденствия.

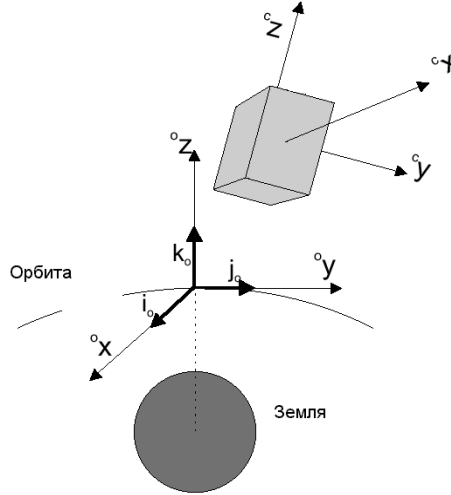


Рис. 3.1. Орбитальная и связанная системы координат

Также введём следующие обозначения:

- v^s, v^o, v^i – вектор \mathbf{v} задан в ССК, ОСК и ИСК соответственно,
- v_o^x, v_o^y, v_o^z – x, y и z компоненты вектора \mathbf{v}_0 ,
- $\hat{\mathbf{v}}$ – прогнозируемое значение вектора \mathbf{v} ,
- $\dot{\mathbf{v}}$ – производная вектора \mathbf{v} по времени,
- $|\mathbf{v}|$ – модуль вектора \mathbf{v} ,

$$[\mathbf{v} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ – эквивалент векторного произведения.}$$

3.2. Уравнения движения МКА

В векторном виде динамическое уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$I\boldsymbol{\omega}^{si} = N_{ctrl} + N_{gg} - [\boldsymbol{\omega}^{si} \times](I\boldsymbol{\omega}^{si} + \mathbf{h}) \quad (3.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}^{si}$ – это вектор угловой скорости собственной СК относительно ИСК, I – тензор моментов инерции относительно главных осей (они совпадают с осями собственной СК), N_{ctrl} – совокупный управляющий момент, N_{gg} – гравитационный момент, \mathbf{h} – кинетический момент маховиков.

Управляющий момент состоит из момента магнитных катушек и магнитного момента маховиков:

$$N_{ctrl} = -N_{wheel},$$

где

$$N_{wheel} = \dot{\mathbf{h}}. \quad (3.2)$$

Здесь $\dot{\mathbf{h}}$ – управляющий момент маховиков. Закон управления маховиков следующий:

$$\dot{\mathbf{h}} = k_\alpha I \mathbf{q}^{so} + k_\omega I \boldsymbol{\omega}^{so} - [\boldsymbol{\omega}^{si} \times] (I \boldsymbol{\omega}^{si} + \mathbf{h}) \quad (3.3)$$

где \mathbf{q}^{so} – векторная часть кватерниона перехода из орбитальной СК в собственную СК $\mathbf{q}^{so} = [\mathbf{q} \quad q_4]$.

Гравитационный момент определяется выражением

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} ([\boldsymbol{\eta}^s \times] I \boldsymbol{\eta}^s)$$

где $\mu = GM_s$ – это гравитационная константа для Земли, R – расстояние от МКА до центра Земли, $\boldsymbol{\eta}^s$ – единичный вектор направления от центра Земли, записанный в ССК.

Таким образом, динамическое уравнение выглядит следующим образом:

$$I \boldsymbol{\omega}^{si} = -k_\alpha I \mathbf{q}^{so} - k_\omega I \boldsymbol{\omega}^{so} + \frac{3\mu}{R^3} ([\boldsymbol{\eta}^s \times] I \boldsymbol{\eta}^s).$$

Теперь перейдём к кинематическим уравнениям

$$\dot{\mathbf{q}}^{so} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}^{so}, \quad (3.4)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z^{so} & -\omega_y^{so} & \omega_x^{so} \\ -\omega_z^{so} & 0 & \omega_x^{so} & \omega_y^{so} \\ \omega_y^{so} & -\omega_x^{so} & 0 & \omega_z^{so} \\ -\omega_x^{so} & -\omega_y^{so} & -\omega_z^{so} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

3.3. Линеаризация уравнений движения

Для работы фильтра Калмана необходима линеаризованная модель движения в окрестности текущей точки (см. 2.4). Произведём линеаризацию уравнений движения.

Линеаризация, по определению, это малое отклонение от точки, в окрестности которой мы рассматриваем уравнения. Вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ можно записать как сумму оцениваемого значения вектора $\hat{\mathbf{x}}(t)$ и отклонения $\delta \mathbf{x}(t)$.

Таким образом, вектор состояния равен:

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \delta \mathbf{x}(t). \quad (3.6)$$

3.3.1. Линеаризация вектора состояния

В качестве вектора состояния примем компоненты кватерниона \mathbf{q} , обеспечивающего переход от ОСК В ССК и вектор смещения поля датчика угловой скорости $\boldsymbol{\beta}$.

Согласно (3.6) вектор состояния МКА может быть записан в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \boldsymbol{\beta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}(t) + \delta\mathbf{q}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}(t) + \delta\boldsymbol{\beta}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Однако в уравнении (3.7) сложение кватернионов подразумевает собой сложение вращений, а сложение вращений, выраженных кватернионами, есть произведение кватернионов

$$\mathbf{q} = \delta\mathbf{q}\hat{\mathbf{q}}. \quad (3.8)$$

3.3.2. Линеаризация кинематических уравнений

Из уравнения (3.8) выразим

$$\delta\mathbf{q} = \mathbf{q}\hat{\mathbf{q}}^{-1}. \quad (3.9)$$

Кинематическое уравнение (3.4) можно переписать так

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{w}\mathbf{q},$$

где $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \omega_x^{so} & \omega_y^{so} & \omega_z^{so} & 0 \end{bmatrix}$ – кватернион.

Тогда запишем цепочку равенств:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{w}\mathbf{q}\hat{\mathbf{q}}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{q}(\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{q}})^{-1}$$

Используя выражение (3.9)

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{w}}\delta\mathbf{q} - \delta\mathbf{q}\hat{\mathbf{w}}) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{w}\delta\mathbf{q}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$2\delta\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ -\hat{\boldsymbol{\omega}}^T & 0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{q} + \begin{bmatrix} -[\delta\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \delta\hat{\boldsymbol{\omega}} \\ -\delta\hat{\boldsymbol{\omega}}^T & 0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{q} - \begin{bmatrix} [\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ -\hat{\boldsymbol{\omega}}^T & 0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{q}$$

или

$$2\delta\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -2[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] - [\delta\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \delta\hat{\boldsymbol{\omega}} \\ -\delta\hat{\boldsymbol{\omega}}^T & 0 \end{bmatrix} \delta\mathbf{q}$$

Пренебрегая членами второго порядка, получаем линеаризованные кинематические уравнения

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{q}^{so} = -[\hat{\boldsymbol{\omega}}^{so} \times] \delta\mathbf{q}^{so} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega}^{so} \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt}\delta q_4 = 0.$$

Однако угловая скорость должна быть записана в ССК относительно ИСК. Используем выражение

$$\boldsymbol{\omega}_{so}^s = \boldsymbol{\omega}_{si}^s - \boldsymbol{\omega}_{oi}^s,$$

Подставляем его в (3.10)

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{q} = -[\hat{\boldsymbol{\omega}}^{si} \times] \delta \mathbf{q} + [\hat{\boldsymbol{\omega}}^{oi} \times] \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\omega}^{si} - \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\omega}^{oi}. \quad (3.11)$$

Используя выражения

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^s = A_o^s(\mathbf{q}) \hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^o,$$

$$\delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^s = A_o^s(\delta \mathbf{q}) A_o^s(\hat{\mathbf{q}}) \hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^o = A_o^s(\delta \mathbf{q}) \hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^s,$$

$$\delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^s = (\mathbf{1} - 2[\delta \mathbf{q} \times]) \hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^s = \mathbf{1} \hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^s + 2[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^s \times] \delta \mathbf{q}$$

и, принимая, что $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{oi}^s$ – фактически константа на орбитах, близких к круговым, выражение (3.11) упрощается до следующего:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}^{so} = -[\hat{\boldsymbol{\omega}}^{si} \times] \delta \mathbf{q}^{so} + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\omega}^{si}. \quad (3.12)$$

Подчеркнём, что в качестве оцениваемых параметров разумно брать только векторную часть кватерниона, так как скалярная часть вычисляется по формуле

$$q_4 = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^3 q_i^2}.$$

3.3.3. Линеаризация динамических уравнений

Запишем уравнение (3.1) в следующем виде:

$$I \dot{\boldsymbol{\omega}}^{si} = -k_\alpha I \mathbf{q}^{so} - k_\omega I \boldsymbol{\omega}^{so} + \frac{3\mu}{R^3} ([\boldsymbol{\eta}^s \times] I \boldsymbol{\eta}^s). \quad (3.13)$$

Теперь проведём его линеаризацию

$$\delta \dot{\boldsymbol{\omega}}^{si} = I^{-1} (-k_\alpha I \delta \mathbf{q}^{so} - k_\omega I \delta \boldsymbol{\omega}^{so} + \delta N_{gg}). \quad (3.14)$$

3.3.4. Линеаризация гравитационного момента

Запишем снова выражение для гравитационного момента:

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} (\boldsymbol{\eta}^s \times I \boldsymbol{\eta}^s),$$

где $\boldsymbol{\eta}^s$ – единичный вектор направления от центра Земли, записанный в ССК, может быть выражен как $\boldsymbol{\eta}^s = A^{so}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\eta}^o$, где $A^{so}(\mathbf{q})$ – это матрица перехода от ОСК в ССК. Таким образом, запишем

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} (A(\mathbf{q}) \boldsymbol{\eta}^o \times I A(\mathbf{q}) \boldsymbol{\eta}^o).$$

Согласно (3.8) матрицу перехода можно расписать так

$$A(\mathbf{q}) = A(\delta \mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}})$$

или, что то же самое,

$$A(\mathbf{q}) = A(\delta\mathbf{q})A(\hat{\mathbf{q}}).$$

Тогда перепишем уравнение для гравитационного момента

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} \left(A(\delta\mathbf{q})A(\hat{\mathbf{q}})\boldsymbol{\eta}^o \times IA(\delta\mathbf{q})A(\hat{\mathbf{q}})\boldsymbol{\eta}^o \right)$$

или

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} \left(A(\delta\mathbf{q})\boldsymbol{\eta}^s \times IA(\delta\mathbf{q})\boldsymbol{\eta}^s \right). \quad (3.15)$$

Согласно определению кватерниона в тригонометрическом представлении и так как $\delta\mathbf{q}$ мал, то справедлива цепочка соотношений

$$\delta\mathbf{q} = \begin{bmatrix} e_1 \sin(\delta\Phi/2) \\ e_2 \sin(\delta\Phi/2) \\ e_3 \sin(\delta\Phi/2) \\ \cos(\delta\Phi/2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Так как матрица перехода может быть записана через компоненты кватерниона в виде

$$A(\mathbf{q}) = (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{1} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_0[\mathbf{q} \times],$$

то перепишем её согласно (3.16)

$$A(\delta\mathbf{q}) = \mathbf{1} - 2[\delta\mathbf{q} \times]. \quad (3.17)$$

Подставим это значение в (3.15)

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} \left[(1 - 2[\delta\mathbf{q} \times])\boldsymbol{\eta}^s \times I(1 - 2[\delta\mathbf{q} \times])\boldsymbol{\eta}^s \right].$$

Пренебрегая членами второго порядка, получим линеаризованный гравитационный момент

$$\delta N_{gg} = \frac{6\mu}{R^3} \left[-\boldsymbol{\eta}^s \times I[\delta\mathbf{q} \times]\boldsymbol{\eta}^s - [\delta\mathbf{q} \times]\boldsymbol{\eta}^s \times I\boldsymbol{\eta}^s \right].$$

Далее, используя равенство

$$[\mathbf{c} \times]\mathbf{b} = -[\mathbf{b} \times]\mathbf{c}, \quad (3.18)$$

запишем

$$\delta N_{gg} = \frac{6\mu}{R^3} \left([\boldsymbol{\eta}^s \times]I[\boldsymbol{\eta}^s \times]\delta\mathbf{q} - [I\boldsymbol{\eta}^s \times][\boldsymbol{\eta}^s \times]\delta\mathbf{q} \right)$$

или

$$\delta N_{gg} = \frac{6\mu}{R^3} \left([\boldsymbol{\eta}^s \times]I[\boldsymbol{\eta}^s \times] - [I\boldsymbol{\eta}^s \times][\boldsymbol{\eta}^s \times] \right) \delta\mathbf{q}. \quad (3.19)$$

Таким образом, линеаризованный гравитационный момент имеет вид

$$\delta N_{gg} = \frac{6\mu}{R^3} F_g \delta\mathbf{q},$$

где

$$F_g = \begin{bmatrix} (\eta_2^2 - \eta_3^2)(I_2 - I_3) & -\eta_1\eta_2(I_2 - I_3) & \eta_3\eta_1(I_2 - I_3) \\ \eta_1\eta_2(I_3 - I_1) & (\eta_3^2 - \eta_1^2)(I_3 - I_1) & -\eta_3\eta_2(I_3 - I_1) \\ -\eta_1\eta_3(I_1 - I_2) & -\eta_2\eta_3(I_1 - I_2) & (\eta_1^2 - \eta_2^2)(I_1 - I_2) \end{bmatrix}.$$

3.3.5. Линеаризация ухода датчика угловой скорости

Основной проблемой использования датчиков угловой скорости является его калибровка. Калибровка датчика представляет собой задание ноля измерений и нахождение функции перевода значений выходных данных датчика в единицы градусов в секунду. При ошибке задания ноля датчик может сильно навредить в определении ориентации. Проблема заключается ещё в том, что значение ноля зависит от температуры, и не всегда заранее точно удастся его определить. Поэтому при использовании датчика угловой скорости в совокупности с другими датчиками имеет смысл косвенным образом определять это значение ноля.

Используем следующую модель измерения ДУСа:

$$\tilde{\omega} = \omega^{si} + \beta + \eta_v, \quad (3.20)$$

$$\dot{\beta} = \eta_u.$$

Здесь $\tilde{\omega}$ – это измерения датчика угловой скорости, ω – истинное значение угловой скорости, β – это смещение ноля измерений, η_v и η_u – это белые шумы угловой скорости и скорости изменения смещения ноля соответственно $E\langle\eta_v\rangle=0$ и $E\langle\eta_u\rangle=0$. Линеаризация уравнений (3.20) даёт следующее уравнение относительно ухода датчика:

$$\delta\beta = 0. \quad (3.21)$$

То есть при нашей модели уход датчика остаётся постоянным.

Однако примем, что оценка угловой скорости вычисляется по следующей формуле:

$$\hat{\omega} = \tilde{\omega}^{meas} - \hat{\beta}. \quad (3.22)$$

Малое изменение угловой скорости

$$\delta\omega = \omega - \hat{\omega}. \quad (3.23)$$

Далее подставим в уравнение (3.23) выражения (3.22) и (3.20) и получим

$$\delta\omega = -(\delta\beta + \eta_v). \quad (3.24)$$

Подставляем в уравнение (3.12) выражение (3.24)

$$\frac{d}{dt}\delta q^{so} = -[\hat{\omega}^{si} \times] \delta q^{so} - \frac{1}{2}\delta\beta - \frac{1}{2}\eta_v. \quad (3.25)$$

3.3.6. Обобщение по линеаризации

Теперь запишем все выше написанное в виде

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) = F(t) \delta \mathbf{x}(t).$$

Однако матрица F будет зависеть от того, какой вектор состояния выбран. В настоящей работе рассматриваются два фильтра Калмана:

1. Фильтр Калмана, основанный на показаниях ДУСа, солнечного датчика и магнитометра;
2. Фильтр Калмана, основанный на показаниях только солнечного датчика и магнитометра.

Рассмотрим оба фильтра.

ФК, основанный на показаниях ДУСа, СД и М

Для этого фильтра в качестве оцениваемых параметров ориентации выбираем векторную часть кватерниона, определяющего переход из ОСК в ССК и вектор ухода датчика угловой скорости

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{so}(t) & \boldsymbol{\beta}(t) \end{bmatrix}_{1 \times 6}^T. \quad (3.26)$$

Из уравнений (3.21) и (3.25), получаем

$$F(t) = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times]_{3 \times 3} & -\frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}. \quad (3.27)$$

ФК, основанный на показаниях СД и М

Для этого фильтра в качестве оцениваемых параметров ориентации выбираем также векторную часть кватерниона, определяющего переход из ОСК в ССК и вектор угловой скорости из ССК относительно ИСК

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{so}(t) & \boldsymbol{\omega}^{si}(t) \end{bmatrix}_{1 \times 6}^T. \quad (3.28)$$

Собирая воедино уравнения (3.12) и (3.14), получаем

$$F(t) = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times]_{3 \times 3} & \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ I^{-1} (2kF_g(t) - k_\alpha I)_{3 \times 3} & -k_\omega \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}. \quad (3.29)$$

4. Построение фильтра Калмана

Теперь приступим к построению фильтра Калмана, основанного на вышеприведённых уравнениях движения, использующего измерения магнитометра, солнечного датчика и датчика угловой скорости. Как было описано в разделе 2, оценка фильтра Калмана состоит из двух этапов – априори и апостериори. Рассмотрим оба этапа подробнее.

4.1. Априори оценка

Априори оценка представляет собой результат интегрирования уравнений движения. Начальные условия при этом выбираются как значение оцен-

ки ФК на предыдущем шаге, и интегрирование производится до момента получения измерений. Этот этап для обоих фильтров в матричном виде записывается одинаково, но следует помнить, что для фильтров, основанных на показаниях разных датчиков, матрица F имеет конкретный вид (3.27) и (3.29).

Фильтр Калмана предполагает, что уравнения движения линейны и их можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\omega}(t)$$

Если же уравнения нелинейные, следует произвести линеаризацию в окрестности текущей точки, что проделано в главе 2.2. Обычно априори оценку находят из уравнения

$$\mathbf{x}_{k+1}^- = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{x}_k^+,$$

где матрица $\boldsymbol{\Phi}$ называется переходной матрицей состояния. Она равняется

$$\boldsymbol{\Phi}_k \approx \mathbf{1} + F(\mathbf{x}_k^+, t_k)\Delta T + \left(F(\mathbf{x}_k^+, t_k)\Delta T\right)^2 / 2! + \dots$$

Но чтобы сэкономить вычислительные ресурсы при реализации часто берут только первый член разложения.

Однако линеаризация приводит к ошибкам априори оценки, поэтому часто априори оценку вычисляют с помощью численного интегрирования. Рассмотрим следующую схему интегрирования Рунге-Кутты 4-го порядка. Используем уравнение движения (3.1) и запишем его в виде

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, t) = I^{-1} \left(N_{ctrl} + N_{gg} - [\boldsymbol{\omega} \times](I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) \right).$$

После 4-х шагов вычислений

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}_k^+, k),$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\omega}_k^+ + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, k + \frac{h}{2}\right),$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\omega}_k^+ + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, k + \frac{h}{2}\right),$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}_k^+ + h\mathbf{k}_3, k + h)$$

имеем оценку для угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega}_{k+1}^- = \boldsymbol{\omega}_k^+ + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4).$$

Для вычисления априори оценки для кватернионов воспользуемся формулой

$$\mathbf{q}_{k+1}^- = \left[\cos\left(\frac{\bar{\omega}_k \Delta T}{2}\right) \mathbf{I} + \frac{1}{\bar{\omega}_k} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_k \Delta T}{2}\right) \boldsymbol{\Omega}_k \right] \mathbf{q}_k^+,$$

где $\bar{\omega}_k = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$, ΔT – разница времени между двумя оценками, $\boldsymbol{\Omega}_k$ выражается уравнением (3.5).

Априори оценка для матрицы ошибки традиционно записывается в виде

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_k^+ \boldsymbol{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}, \quad (4.1)$$

где \mathbf{Q} – матрица ошибки модели движения.

4.2. Апостериори оценка

Апостериори оценка строится как корректировка априори оценки после получения измерений.

Подчеркнём, что в матричном виде, формулы для расчета апостериори оценки записываются одинаково для обоих фильтров, однако следует помнить, что различие состоит в векторах состояния, которые имеют конкретный вид (3.26) и (3.28). А также главное различие состоит в получении оценки для вектора угловой скорости. Для фильтра, основанного на показаниях всех трёх датчиков, оценка угловой скорости строится из показаний ДУСа. А для фильтра, основанного на показаниях СД и М, оценка угловой скорости входит в вектор оцениваемых параметров, то есть является непосредственным выходом фильтра.

В нашем случае вектор измерений нелинейно зависит от вектора состояния:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k \quad (4.2)$$

Здесь \mathbf{z}_k – это полученный на k -м шаге вектор измерений, $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k)$ – это модель измерений, а вектор измерений состоит из вектора магнитного поля в ССК, вектора направления на Солнце в ССК

$$\mathbf{z} = [\mathbf{b}_{meas} \quad \mathbf{s}_{meas}]^T.$$

Вектор \mathbf{h} можно записать как

$$\mathbf{h} = [A_{so}(\mathbf{q})\mathbf{b}^o \quad A_{so}(\mathbf{q})\mathbf{s}^o]^T,$$

где A_{so} – это матрица перехода от ОСК к ССК, \mathbf{b}^o и \mathbf{s}^o – вектора магнитного поля и направления на Солнце, записанные в ОСК. Заметим, что датчик угловой скорости даёт ещё вектор угловой скорости ССК относительно ОСК $\boldsymbol{\omega}_{meas}$. Однако в модель измерений $\boldsymbol{\omega}_{meas}$ не входит по той причине, что оценка угловой скорости будет вычисляться по следующей формуле:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{meas} - \hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Теперь построим матрицу чувствительности согласно (2.16). Для измерений магнитного поля и направления на Солнце матрица чувствительности рассчитывается следующим образом. Измеренные величины можно записать так:

$$\mathbf{b}_{meas} = \mathbf{b}^s = A_{so}(\mathbf{q})\mathbf{b}^o,$$

$$\mathbf{s}_{meas} = \mathbf{s}^s = A_{so}(\mathbf{q})\mathbf{s}^o.$$

Таким образом, на борту МКА заложены модели магнитного поля Земли и направления на Солнце, и бортовой компьютер способен вычислить в требуемый момент времени векторы \mathbf{b}^o и \mathbf{s}^o в ОСК. Так как вектор магнитного поля и вектор направления на Солнце непосредственно не дают информации о векторе угловой скорости и тем более значении поля ДУСа, то в матрице чувствительности для этих измеряемых величин будут только кватернионные составляющие. Таким образом, полная матрица чувствительности имеет выражение

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 \mathbf{b}^o & h_2 \mathbf{b}^o & h_3 \mathbf{b}^o & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ h_1 \mathbf{s}^o & h_2 \mathbf{s}^o & h_3 \mathbf{s}^o & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6},$$

где h_i определяется из уравнения

$$h_i = \left[\frac{\partial A(q_k)}{\partial q_{k,i}} \right], \quad (4.3)$$

$$A = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}.$$

Если подставить матрицу A в (4.3), то получим

$$h_1 = 2 \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_2 & -q_1 & q_4 \\ q_3 & -q_4 & -q_1 \end{bmatrix} \quad h_2 = 2 \begin{bmatrix} -q_2 & q_1 & -q_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ q_4 & q_3 & -q_2 \end{bmatrix} \quad h_3 = 2 \begin{bmatrix} -q_3 & q_4 & q_1 \\ -q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}.$$

Теперь, построив матрицу чувствительности, мы можем вычислить матрицу коэффициентов обратной связи из уравнения (2.9)

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \left[\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right]^{-1}. \quad (4.4)$$

Матрица коэффициентов обратной связи по сути является матрицей весовых коэффициентов для отклонения измерения от ожидаемой величины. Ожидаемый вектор измерений, построенный, как уже говорилось ранее, на моделях наблюдений выглядит следующим образом:

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k).$$

Апостериори оценка ФК выглядит так:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \bar{\mathbf{K}}_k \left[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k) \right].$$

Апостериори оценка для матрицы ошибки имеет вид

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-.$$

4.3. Проблема настройки фильтра

Теперь, когда ФК формально построен, возникают следующие вопросы:

- Какова точность ФК и от чего она зависит?
- Сходится ли ФК при неточном задании начального вектора состояния и за какое время?

Точность ФК, как уже было сказано выше, по сути, зависит от матрицы обратных коэффициентов (4.4). Элементы этой матрицы сложным образом зависят от начального значения матрицы ошибок $\mathbf{P}(0)$, от задания матрицы ошибки модели движения \mathbf{Q} и матрицы шума измерений \mathbf{R} . Аналитически зависимость между элементами матрицы обратной связи и значениями матриц $\mathbf{P}(0)$, \mathbf{Q} , \mathbf{R} не получить удастся.

Часто матрицы $P(0)$, Q , R настраиваются вручную. Однако количество параметров при такой настройке составляет при наших матрицах $P_{6 \times 6}$, $Q_{6 \times 6}$ и $R_{6 \times 6}$, с учетом диагональности матриц составляет $55+55+45=155$ параметров.

Однако если считать, что измерения не коррелированы, то в матрице R остается задать только диагональные члены – значения шума для солнечного датчика и магнитометра, которые известны

$$R = \text{diag}(\sigma_b^2, \sigma_b^2, \sigma_b^2, \sigma_s^2, \sigma_s^2, \sigma_s^2), \quad (4.5)$$

где σ_n^2 – это второй момент ошибки соответствующего датчика.

Теперь рассмотрим смысл матрицы P . По определению (2.1) – это математическое ожидание от квадрата ошибки ФК. Теперь подставим в (2.1) значение $t = 0$

$$P(0) = E \left\langle [\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)][\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)]^T \right\rangle.$$

Тогда по смыслу матрица в начальный момент времени представляет собой математическое ожидание неточного задания начального вектора состояния для ФК. Теперь предположим, что ошибки задания начального вектора состояния не коррелированы. Допустим, что известны максимальные неточности задания вектора состояния по ориентации и угловой скорости, тогда можно приблизительно задать значение квадрата математического ожидания неточности фильтра как

$$P(0) = \text{diag}(\sigma_{erq}^2, \sigma_{erq}^2, \sigma_{erq}^2, \sigma_{er\beta}^2, \sigma_{er\beta}^2, \sigma_{er\beta}^2). \quad (4.6)$$

Таким образом, мы пришли к тому, что матрицы $P(0)$, R заданы.

Теперь рассмотрим матрицу ошибок математической модели движения Q . Сделаем также предположение об отсутствии корреляции в ошибках. Также будем считать, что ошибка по определению ориентации одинакова по всем углам, ошибка по определению угловой скорости одинакова для всех компонент. Тогда имеем матрицу

$$Q = \text{diag}(erq^2, erq^2, erq^2, er\beta^2, er\beta^2, er\beta^2). \quad (4.7)$$

Таким образом, задача настройки ФК сведена к задаче поиска двух параметров erq и $er\beta$.

Эмпирически и из формул (4.1), (4.4), видно, что задание параметров (4.6) влияет на скорость сходимости фильтра, а выбор параметров (4.7) в конечном итоге влияют на точность.

Подчеркнём, что для обоих фильтров выражения (4.6) и (4.7) верны с тем отличием, что в случае фильтра, основанного только на показаниях СД и М, вместо $\sigma_{er\beta}$, величины, характеризующая ошибку начального задания смещения поля датчика угловой скорости, будет фигурировать $\sigma_{er\omega}$, величина, характеризующая ошибку начального задания угловой скорости.

5. Настройка фильтра

Для настройки фильтра Калмана была разработана программа в среде MatLab, позволяющая моделировать движение спутника на орбите, имитировать показания датчиков, и, таким образом, моделировать работу ФК. Для моделирования работы датчиков были выбраны реальные параметры шумов, соответствующие датчикам ориентации, устанавливаемых на борт аппарата «Чибис-М» [9]. Параметры орбиты и массовые характеристики также соответствуют данному спутнику.

5.1. Задание значений

Для работы программы были заданы следующие значения для орбиты движения:

- наклонение орбиты $i = 57^\circ$.
- высота орбиты $h = 500$ км.
- эксцентриситет $e = 0.01$.

Параметры МКА:

- моменты инерции $I = \text{diag}(3.6, 3.1, 1.5)$ кг·м².

Параметры для управляющего момента маховиков (3.3)

- $k_\alpha = 0.03$; $k_\omega = 0.85$.

Параметры шума датчиков из уравнения (4.5)

- $\sigma_b = 250$ нТл, $\sigma_s^2 = 0.1^\circ$.

Ошибки в задании начального значения вектора состояния

- $\Delta\alpha = 15^\circ$ по определению ориентации, $\Delta\beta = 0.2^\circ/c$ по начальному заданию смещения ноля ДУСа и $\Delta\omega = 0.1^\circ/c$ по определению угловой скорости, это максимальные ошибки в задании начального вектора состояния после работы локального метода определения параметров ориентации.

Параметры начального задания матрицы ошибки $P(0)$ (4.6) выбраны из расчета половины от максимальных (так как в матрице ошибок стоят значения математического ожидания ошибки начального задания вектора состояния)

- $\sigma_{erq} = 0.07$, $\sigma_{er\omega} = 0.05^\circ/c$, $\sigma_{er\beta} = 0.1^\circ/c$.

Частота опроса датчиков

- $f = 10$ Гц (допускаем, что все измерения приходят одновременно).

Время моделирования

- $T = 600$ с.

5.2. Оценка качества ФК

Будем запускать ФК на 600 сек (максимальное время, за которое должен сойтись фильтр), изменяя параметры матрицы Q из (4.7) erq и $er\beta$, будем

оценивать точность работы фильтра и вычислять время, за которое фильтр сойдётся при неточном задании начальных условий.

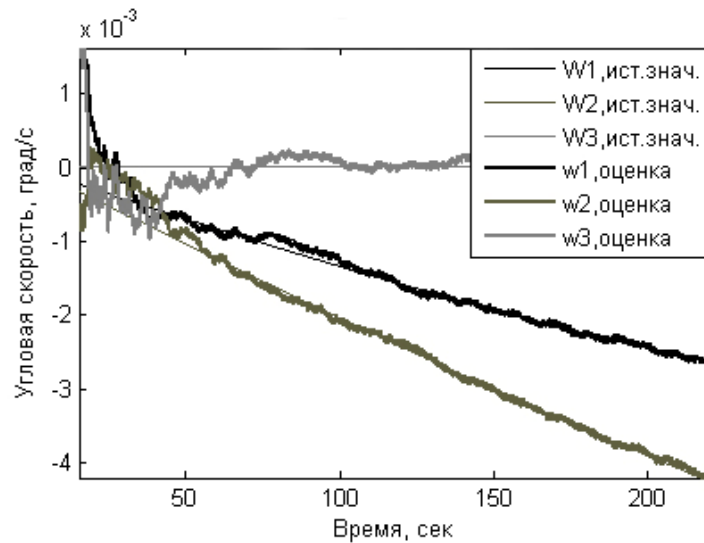


Рис. 5.1. Оценка компонент угловой скорости

На рис. 5.1 изображен график оценки компонент угловой скорости фильтром: тонкие линии – истинные значения компонент, вычисляемые параллельно, жирные линии – оценка, которую даёт фильтр. Как видно из рисунка, в начальный момент времени на вход фильтру Калмана был задан вектор угловой скорости с некоторой ошибкой, и со временем, через 300 секунд, фильтр сошелся к «истинным» значениям. После сходимости фильтра получим среднюю ошибку ФК по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i)^2}{N}},$$

где σ – это вектор средних ошибок ФК после сходимости, \mathbf{x}_i – это вектор «истинных» значений вектора состояния, $\hat{\mathbf{x}}_i$ – это оценка вектора состояния.

5.3. Результаты моделирования для трёх датчиков

В результате расчетов при разных значениях параметров erq и $er\beta$ построены следующие графики:

- график зависимости времени сходимости ФК от параметров (рис. 5.2),
- график зависимости от параметров средней ошибки ФК по определению ориентации (рис. 5.3),
- график зависимости от параметров средней ошибки по определению угловой скорости (рис. 5.4).

Графики построены в логарифмическом масштабе, чтобы понимать, какие значения порядков параметров необходимо задавать. Как видно из рис. 5.2, та область параметров, где время сходимости равно 600 секунд – это область, где ФК не сходится. В случае, когда фильтр не сошелся, средние

ошибки рассчитывались как отклонения от истинных значений за последние 100 секунд работы фильтра.

По приведённым графикам можно выбрать значения параметров erq и $er\beta$, которые при наибольшей ошибке в задании начальных условий параметров ориентации обеспечат фильтру определённую точность и скорость сходимости, то есть на графиках приведены «худшие» результаты при определённых значениях параметров erq и $er\beta$. Это означает, что при меньшей ошибке в задании начальных условий время сходимости будет меньше приведённой, хотя точность фильтра останется прежней.

На графиках также выделена белым квадратом область наилучших значений параметров и в качестве примера приведена точка из этой области. Так при $erq = 10^{-6}$ град и $er\beta = 1.28 \cdot 10^{-7}$ град/с фильтр сходится меньше, чем за $T = 255$ сек, и точность фильтра после сходимости составляет по определению ориентации $\Delta_\alpha = 2.5 \cdot 10^{-5}$ град и по угловой скорости $\Delta_\omega = 8.7 \cdot 10^{-5}$ град/с.

Следует заметить, что моделирование проводилось за период времени, в течение которого угол между векторами магнитного поля и направления на солнце составлял примерно 45 град.

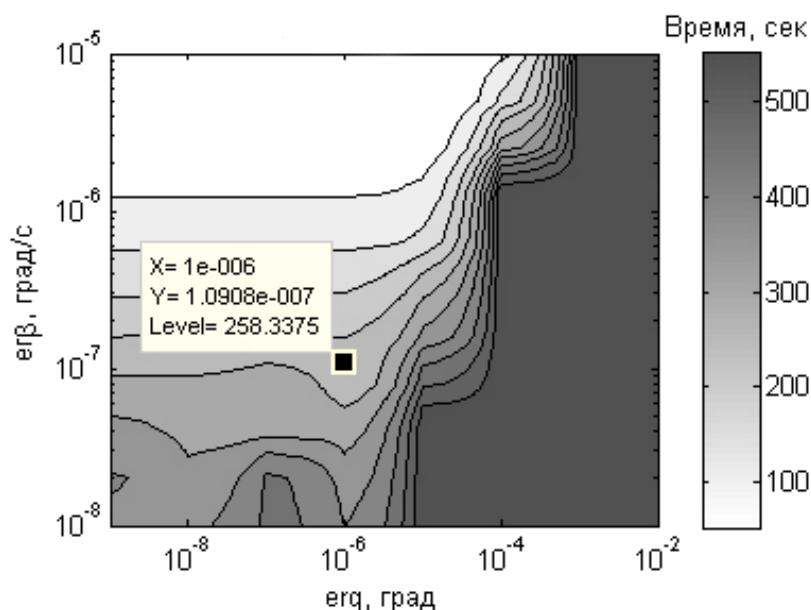


Рис. 5.2. График зависимости времени сходимости ФК от параметров

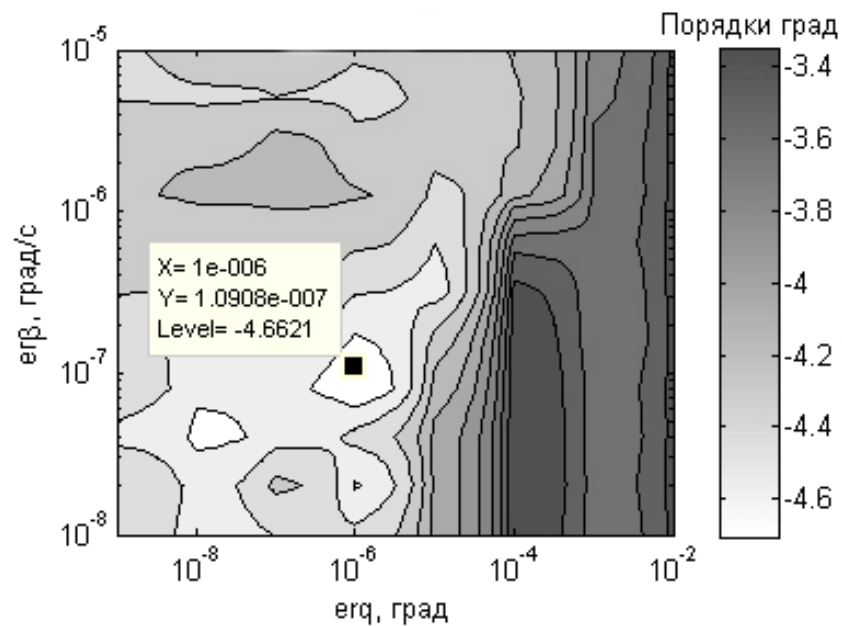


Рис. 5.3. График зависимости от параметров средней ошибки ФК по определению ориентации

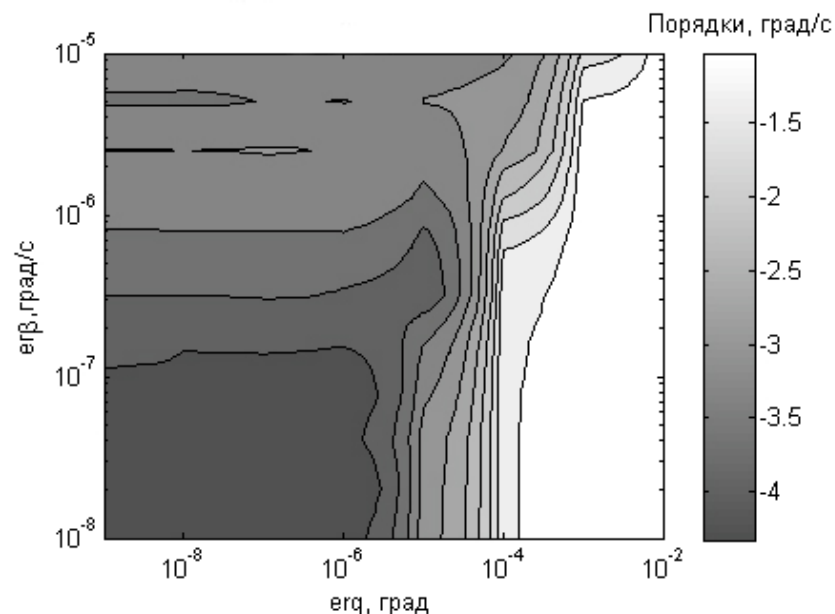


Рис. 5.4. График зависимости от параметров средней ошибки по определению угловой скорости

5.4. Результаты моделирования при работе магнитометра и солнечного датчика

Ниже приведены графики, аналогичные представленным в предыдущем разделе, но для работы фильтра, основанного на измерениях магнетометра и солнечного датчика.

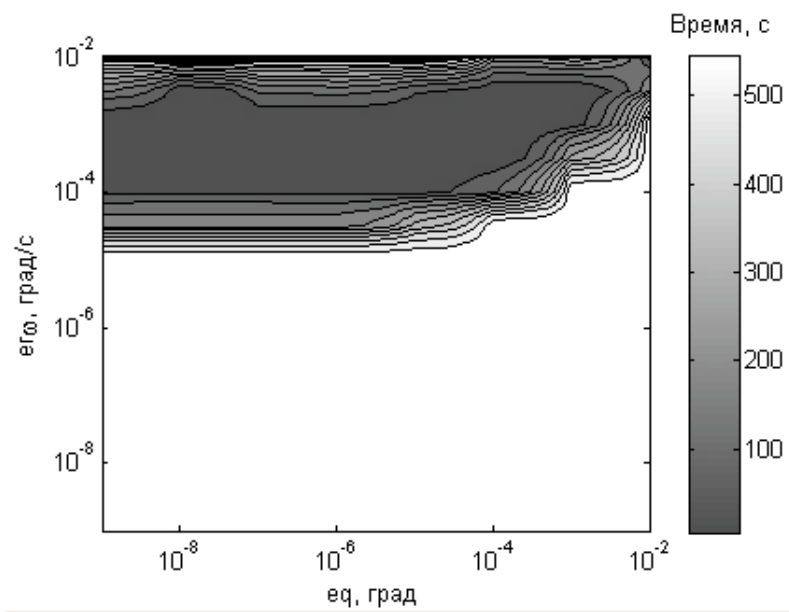


Рис. 5.5. График зависимости времени сходимости ФК от параметров

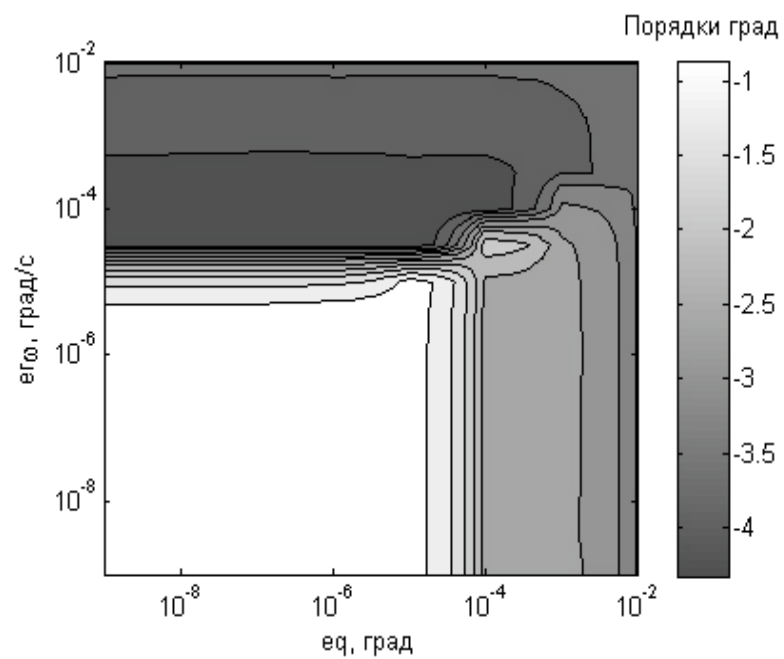


Рис. 5.6. График зависимости от параметров средней ошибки ФК по определению ориентации

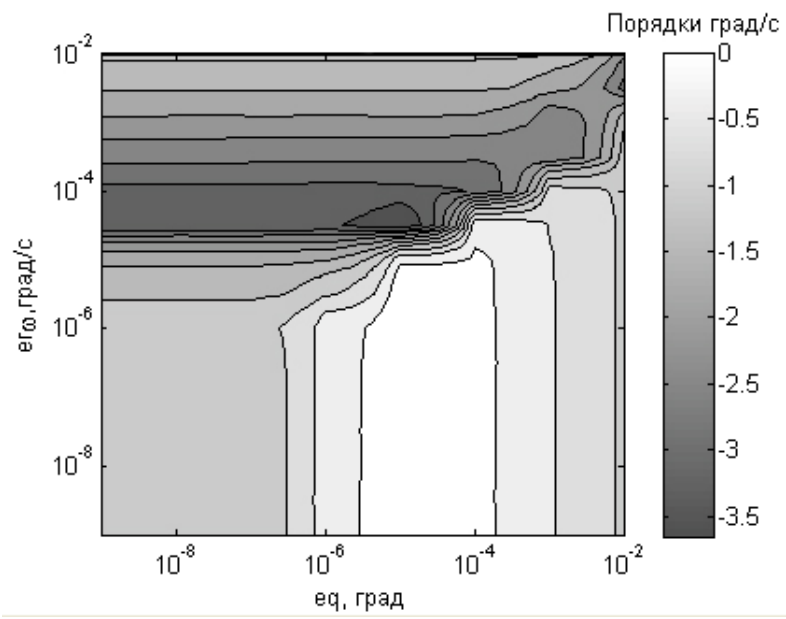


Рис. 5.7. График зависимости от параметров средней ошибки по определению угловой скорости

6. Заключение

В работе описана процедура построения фильтра Калмана, основанного на измерениях датчика угловой скорости, магнитометра и солнечного датчика. Предложен и реализован подход, который позволяет значительно упростить процесс настройки фильтра. Исследована точность и сходимость фильтра.

В таблице № 6.1 приведена точность по параметрам фильтра, при которых фильтр достигает оптимума по точности работы и скорости сходимости при наибольших ошибках в задании вектора состояния.

Табл. № 6.1.

Состав приборов	Значение erq град	Значение $er\omega$, град/с	Время сходимости, с	Точность определения угла град	Точность определения угловой скорости, град/с
Магнитометр, солнечный датчик и датчик угловой скорости	10^{-6}	$1.28 \cdot 10^{-7}$	255	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$8.7 \cdot 10^{-5}$
Магнетометр и солнечный датчик	10^{-5}	$4 \cdot 10^{-5}$	315	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$

Из таблицы № 6.1 следует, что добавление в состав приборов датчика угловой скорости улучшает оценки фильтра практически в 2 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дегтярёв А.А., Тайль Ш. Элементы теории адаптивного расширенного фильтра Калмана / Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2003. – №26. – 35 с.
2. *Bak T.* Spacecraft Attitude Determination – a Magnetometer Approach. / Ph.D. Thesis, Aalborg University, 1999, 192 p.
3. *Marques S.* Small Satellites Attitude Determination Methods. Lisboa, Universidade tecnica de Lisboa, 2000, 137 p.
4. *Шустер М.Д.* Использование фильтров Калмана для оценивания пространственной ориентации КЛА. AIAA Guidance, navigation and control, 82-0070R, 1983, с. 135-150
5. *R. Clements.* Stabilization and Control of Small Satellites. Portugal, Instituto De Sistemas e Robotica, 1999, 50 p.
6. *M.Majji, D.Mortari.* Quaternion Constrained Kalman Filter. Galveston, AIAA Space Flight Mechanics Meeting, AAS 08-215, 2008, 32 p.
7. *Steyn W.H.* Full Satellite State Determination from Vector Observations. Department of Electronic Engineering, University of Stellenbosch Stellenbosch, South Africa, 1987, 12 p.
8. *Bar-Itzhack, I.Y. and Oshman, Y.* Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1985, Vol.21, No.1, pp128-135.
9. *Klimov S. I., Korepanov V. E., Novikov D. I., Ferencz Cs., Lichtenberger J., Marusenkov A., Bodnar L.* The Study of Electromagnetic Parameters of Space Weather, Microsatellite “CHIBIS - M”. 7th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, IAA-B7-0213P, Berlin, Germany, May, 2009.

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ	3
2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРА КАЛМАНА	6
2.1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	6
2.2. МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ	8
2.3. КОРРЕКЦИЯ ЗНАЧЕНИЯ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ОШИБКИ ОЦЕНКИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ	8
2.4. ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ (РАСШИРЕННЫЙ ФИЛЬТР)	9
2.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФИЛЬТРА КАЛМАНА	10
3. МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ МКА	11
3.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ	12
3.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МКА	13
3.3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ	14
3.3.1. <i>Линеаризация вектора состояния</i>	15
3.3.2. <i>Линеаризация кинематических уравнений</i>	15
3.3.3. <i>Линеаризация динамических уравнений</i>	16
3.3.4. <i>Линеаризация гравитационного момента</i>	16
3.3.5. <i>Линеаризация ухода датчика угловой скорости</i>	18
3.3.6. <i>Обобщение по линеаризации</i>	18
4. ПОСТРОЕНИЕ ФИЛЬТРА КАЛМАНА	19
4.1. АПРИОРИ ОЦЕНКА	19
4.2. АПОСТЕРИОРИ ОЦЕНКА	21
4.3. ПРОБЛЕМА НАСТРОЙКИ ФИЛЬТРА	22
5. НАСТРОЙКА ФИЛЬТРА	24
5.1. ЗАДАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ	24
5.2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ФК	24
5.3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ТРЁХ ДАТЧИКОВ	25
5.4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РАБОТЕ МАГНИТОМЕТРА И СОЛНЕЧНОГО ДАТЧИКА	27
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	29