



Аванесов Г.А., Красиков В.А.,
Никитин А.В., [Сазонов В.В.](#)

Оценка точности
определения параметров
ориентации осей систем
координат
астроизмерительных
приборов семейства БОКЗ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Оценка точности определения параметров ориентации осей систем координат астроизмерительных приборов семейства БОКЗ / Г.А.Аванесов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 70. 48 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-70>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Г.А. Аванесов, В.А. Красиков, А.В. Никитин, В.В. Сазонов

**ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРИЕНТАЦИИ
ОСЕЙ СИСТЕМ КООРДИНАТ АСТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ
СЕМЕЙСТВА БОКЗ**

Москва – 2009

Аннотация

Астроизмерительные приборы (звездные датчики) семейства БОКЗ позволяют определять параметры ориентации осей собственной системы координат относительно осей инерциальной системы по наблюдениям участков звездного неба. В качестве инерциальной используется вторая геоэквиаториальная система координат, реализованная координатами звезд бортового каталога на эпоху J2000. Поскольку на точность определения параметров ориентации влияет большое число факторов и оценка вклада каждого из них в общую ошибку не всегда возможна, ниже анализируются флуктуации сравнительно продолжительных рядов определений параметров ориентации, полученных приборами БОКЗ при проведении наземных испытаний и в условиях реального космического полета. На основании обработки этих данных предложена математическая модель погрешности измерений приборов семейства БОКЗ.

G.A.Avanesov, V.A.Krasikov, A.V.Nikitin, V.V.Sazonov. Accuracy estimation of determining attitude of coordinate systems of BOKZ astromasuring devices. Astromasuring devices (star sensors) of BOKZ family allow to find parameters, which define the attitude of their own coordinate systems with respect to the Geocentric Equatorial Inertial System, by observing regions the star sky. The last system is realized by star coordinates related to the epoch J2000 in the on board catalogue. Accuracy of definition of attitude parameters is influenced by a great number of factors; therefore an estimation of the contribution of each of them in the total error is not always possible. On that reason, we analyze fluctuations of rather long series of definitions of attitude parameters received by BOKZ devices in ground-based tests and in the conditions of a real space flight. On the basis of processing of this data the mathematical model of an error of measurements of devices of family BOKZ is offered.

1. Принятые системы координат и связь между ними. Ниже используются две правые, декартовы системы координат. Система $x_1x_2x_3$ – внутренняя система координат датчика. Плоскость x_1x_2 параллельна плоскости ПЗС-матрицы, ось x_3 направлена от матрицы к объективу датчика. В инерциальной системе координат $X_1X_2X_3$ плоскость X_1X_2 совпадает с плоскостью среднего земного экватора эпохи 2000.0, оси X_1 и X_3 направлены соответственно в точку среднего равноденствия этой эпохи и северный полюс мира.

Связь между введенными системами координат задается ортогональной матрицей перехода $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где a_{ij} – косинус угла между осями X_i и x_j . Элементы матрицы перехода будем задавать двумя способами: 1) тремя углами, характеризующими взаимное расположение этих систем, 2) компонентами кватерниона. Используемые ниже углы α , δ и A имеют простой геометрический смысл. Первые два угла суть прямое восхождение и склонение оси x_3 в системе $X_1X_2X_3$, третий угол – азимут оси x_2 относительно плоскости x_3X_3 . Направление отсчета угла A согласовано с направлением оси x_3 . Элементы матрицы перехода выражаются через введенные углы по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\cos\alpha \sin\delta \sin A - \sin\alpha \cos A, \\ a_{12} &= -\cos\alpha \sin\delta \cos A + \sin\alpha \sin A, \\ a_{13} &= \cos\alpha \cos\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\sin\alpha \sin\delta \sin A + \cos\alpha \cos A, & a_{31} &= \cos\delta \sin A, \\ a_{22} &= -\sin\alpha \sin\delta \cos A - \cos\alpha \sin A, & a_{32} &= \cos\delta \cos A, \\ a_{23} &= \sin\alpha \cos\delta, & a_{33} &= \sin\delta. \end{aligned}$$

Углы α , δ и A не удобны для параметризации матрицы $\|a_{ij}\|$ в случае, когда оси x_3 и X_3 почти коллинеарны, т. е. в окрестности положений датчика, определяемых условием $\cos\delta = 0$. Универсальную параметризацию можно получить с помощью нормированного кватерниона $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\|\mathbf{q}\| = 1$. Элементы матрицы перехода выражаются через компоненты кватерниона с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & a_{21} &= 2(q_2q_1 + q_0q_3), \\ a_{12} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3), & a_{22} &= q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2, \\ a_{13} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2), & a_{23} &= 2(q_2q_3 - q_0q_1), \\ & & a_{31} &= 2(q_3q_1 - q_0q_2), \\ & & a_{32} &= 2(q_3q_2 + q_0q_1), \\ & & a_{33} &= q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2. \end{aligned}$$

2. Оценка точности определения параметров ориентации по результатам наземных натуральных испытаний. Датчик был закреплен на неподвижном основании, ось x_3 направлена в зенит, ось x_1 – на восток. Показания датчика регистрировались в течение примерно одного часа через каждые 3 с. Показания получены для 1200 моментов времени. Результаты определения углов α , δ и A в момент t_n обозначим α_n , δ_n и A_n ($n=1, 2, \dots, N$). В данном случае $N=1200$.

Учитывая способ установки датчика, полученные показания следует аппроксимировать выражениями

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0(t - t_1), \quad \delta = \delta_0, \quad A = A_0. \quad (1)$$

Здесь α_0 , δ_0 , A_0 и ω_0 – постоянные величины, ω_0 – угловая скорость вращения Земли. Аппроксимация строилась отдельно для каждого угла методом наименьших квадратов с равными весами. Величины δ_0 и A_0 равны средним арифметическим значениям измерений соответствующих углов, для отыскания α_0 и ω_0 решалась задача линейной регрессии. Такая обработка дала следующие результаты. Стандартные отклонения ошибок аппроксимации углов α , δ и A : $\sigma_\alpha = 2.27''$, $\sigma_\delta = 1.56''$, $\sigma_A = 16.0''$; оценки наиболее интересных параметров (оценка \pm стандартное отклонение): $\omega_0 = 15.03583 \pm 0.00060''/\text{с}$, $\delta_0 = 56^\circ 00' 03.133'' \pm 0.045''$, $A_0 = 4' 48.05'' \pm 0.46''$. Истинное значение $\omega_0 = 15.04107''/\text{с}$. Таким образом, часы датчика немного спешили.

На рис. 1 приведены графики ошибок аппроксимации

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_n &= \alpha_n - \alpha_0 - \omega_0(t_n - t_1), & \Delta\delta_n &= \delta_n - \delta_0, \\ \Delta A_n &= A_n - A_0 \quad (n=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (2)$$

Они выглядят как ломаные с почти вертикальными звеньями. Верхний график представляет собой ломаную, смежные вершины которой суть соседние члены последовательности точек $(t_n, \Delta\alpha_n)$. Средний и нижний графики – аналогичные ломаные с вершинами в точках $(t_n, \Delta\delta_n)$ и $(t_n, \Delta A_n)$. Горизонтальные прямые на этом рисунке задаются уравнениями $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\delta = 0$, $\Delta A = 0$. Как видно из графиков, ошибки аппроксимации содержат плавно меняющуюся со временем составляющую – тренд, которая явно имеет неслучайный характер. Причиной возникновения тренда могли быть изменения теплового режима датчика, деформации основания и т. п. Звездный датчик "чувствовал" тренд, поэтому последний не следует относить к случайной погрешности датчика. Чтобы точнее оценить эту погрешность, тренд из ошибок аппроксимации (2) необходимо исключить.

Выделение тренда в явном виде выполнялось с помощью конечных рядов Фурье [1]. Тренд в ошибках аппроксимации $\Delta\alpha_n$ задавался выражением

$$\chi_{\alpha}(t) = \alpha_{M+1} + \alpha_{M+2}(t - t_1) + \sum_{m=1}^M a_m \sin \frac{\pi m(t - t_1)}{t_N - t_1},$$

коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_{M+2} которого находились методом наименьших квадратов из условия наилучшего сглаживания этим выражением точек $(t_n, \Delta\alpha_n)$. Аналогичным образом строились функции $\chi_{\delta}(t)$ и $\chi_A(t)$, выражавшие тренды в ошибках аппроксимации $\Delta\delta_n$ и ΔA_n . Числа M в выражениях для функций $\chi_{\alpha}(t)$, $\chi_{\delta}(t)$ и $\chi_A(t)$ брались равными.

Графики этих функций в случае $M = 30$ и $M = 80$ приведены на рис. 2а и 3а соответственно. Здесь они изображены на фоне графиков ошибок аппроксимации (2) и представляют собой плавные линии. Горизонтальные прямые на этих рисунках задаются уравнениями $\Delta\alpha = \pm\sigma_{\alpha}$, $\Delta\delta = \pm\sigma_{\delta}$, $\Delta A = \pm\sigma_A$. На рис. 2б и 3б изображены графики остатков

$$\begin{aligned} e_{\alpha n} &= \Delta\alpha_n - \chi_{\alpha}(t_n), & e_{\delta n} &= \Delta\delta_n - \chi_{\delta}(t_n), \\ e_{An} &= \Delta A_n - \chi_A(t_n) \quad (n=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3)$$

Горизонтальные прямые на этих рисунках задаются уравнениями $e_{\alpha} = \pm\bar{e}_{\alpha}$, $e_{\delta} = \pm\bar{e}_{\delta}$, $e_A = \pm\bar{e}_A$, где \bar{e}_{α} , \bar{e}_{δ} и \bar{e}_A – стандартные отклонения ошибок сглаживания данных (2) функциями $\chi_{\alpha}(t)$, $\chi_{\delta}(t)$ и $\chi_A(t)$. Рисунки показывают, что вид графиков остатков (3) слабо зависит от числа M гармоник в сглаживающих функциях.

Выделение тренда было выполнено еще для нескольких значений M . Полученные стандартные отклонения \bar{e}_{α} , \bar{e}_{δ} и \bar{e}_A приведены в табл. 1. Там же указаны коэффициенты парной корреляции остатков (3) $r_{\alpha\delta}$, $r_{\alpha A}$ и $r_{\delta A}$. Как видно из таблицы, стандартные отклонения слабо зависят от выбора M . Объяснение этого факта дано в следующем пункте. Там показано, что наиболее адекватные значения M лежат в диапазоне от 30 до 50. Вычисленные при таких M стандартные отклонения \bar{e}_{α} , \bar{e}_{δ} и \bar{e}_A могут служить характеристикой случайных ошибок в показаниях звездного датчика. На основании данных табл. 1 заключаем, что стандартные отклонения случайных ошибок в измерениях углов α , δ и A составляют соответственно 1.9", 1.2" и 15".

Коэффициенты корреляции $r_{\alpha\delta}$ и $r_{\delta A}$ в табл. 1 пренебрежимо малы. Коэффициент $r_{\alpha A}$ не так мал. Он отрицателен и при изменении M меняется плавно и монотонно. Возможно, такое поведение $r_{\alpha A}$ обусловлено вращением датчика вокруг оси x_2 . С некоторой натяжкой коэффициентом $r_{\alpha A}$ также можно пренебречь и считать ряды (3) некоррелированными.

Малые ошибки в задании ориентации системы $x_1 x_2 x_3$ удобно описывать в терминах вектора ее бесконечно малого поворота $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ и стандартных отклонений σ_i его компонент θ_i (компоненты относятся к системе

$x_1x_2x_3$). В силу определения углов α , δ и A в данном примере (при $\delta = \delta_0$, $A = 0$) имеют место соотношения $\sigma_1 = \sigma_\delta$, $\sigma_2 = \sigma_\alpha \cos \delta_0$, $\sigma_3^2 = \sigma_A^2 + \sigma_\alpha^2 \sin^2 \delta_0$. Отсюда $\sigma_1 = 1.2''$, $\sigma_2 = 1.3''$, $\sigma_3 = 15''$.

Таблица 1. Среднеквадратичные значения и коэффициенты корреляции ошибок аппроксимации измерений звездного датчика, полученных в земных условиях

M	$\bar{e}_\alpha (")$	$\bar{e}_\delta (")$	$\bar{e}_A (")$	$r_{\alpha\delta}$	$r_{\alpha A}$	$r_{\delta A}$
3	2.124	1.241	15.64	-0.018	-0.25	0.061
5	2.080	1.242	15.44	-0.011	-0.24	0.058
10	2.025	1.219	15.33	-0.0053	-0.23	0.049
20	1.967	1.212	15.26	0.021	-0.22	0.044
30	1.938	1.212	15.20	0.023	-0.21	0.043
40	1.935	1.207	15.25	0.023	-0.21	0.041
50	1.921	1.195	15.28	0.018	-0.21	0.044
60	1.921	1.195	15.31	0.022	-0.21	0.043
70	1.922	1.183	15.35	0.017	-0.21	0.036
80	1.924	1.179	15.40	0.018	-0.20	0.036
100	1.915	1.168	15.45	0.026	-0.20	0.037
120	1.902	1.155	15.40	0.0040	-0.18	0.054
140	1.882	1.145	15.45	-0.0031	-0.17	0.057
160	1.885	1.148	15.41	-0.0060	-0.17	0.060
180	1.886	1.130	15.31	-0.018	-0.16	0.087
200	1.890	1.122	15.21	-0.029	-0.16	0.10
220	1.886	1.106	15.13	-0.031	-0.15	0.13

Выше плавная составляющая в данных измерений выделялась в два этапа. Сначала строилась аппроксимация (1), затем ее ошибки (2) сглаживались функциями χ_α , χ_δ и χ_A . Это сделано для наглядного представления результатов. Учитывая вид функций χ_α , χ_δ и χ_A , можно было бы аппроксимировать данные измерений непосредственно ими и вместо остатков (3) рассматривать остатки $e_{\alpha n} = \alpha_n - \chi_\alpha(t_n)$, $e_{\delta n} = \delta_n - \chi_\delta(t_n)$, $e_{An} = A_n - \chi_A(t_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Результаты, приведенные на рис. 2, 3 и в табл. 1, при этом не изменились бы.

3. Периодограммы рядов ошибок аппроксимации. Временные ряды остатков (3) на рис. 2б, 3б выглядят как стационарные. Удобным средством анализа таких рядов являются периодограммы [2]. Они, в частности, позволяют найти гармонические составляющие ряда (т. н. циклические тренды), и служат исходной информацией для оценки его спектра. Ниже применение периодограмм служит более простым целям. Во-первых, они будут использованы для

обоснования выбора числа гармоник в функциях $\chi_\alpha(t)$, $\chi_\delta(t)$ и $\chi_A(t)$, во-вторых, дадут представление о спектральных свойствах рядов (2) и (3).

Ниже используются два вида периодограмм. Они определяются так. Пусть в дискретные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N$ заданы значения функции $x(t)$: $x_n = x(t_n)$. Исследуем возможность аппроксимации этих значений и шире самой функции суммой конечного числа гармоник с несоизмеримыми, вообще говоря, частотами. Поиск таких гармоник начнем с попытки аппроксимировать точки (t_n, x_n) выражением

$$x_{ap}(t) = a_0 + a \cos 2\pi ft + b \sin 2\pi ft, \quad (4)$$

где a_0 , a , b и f – параметры. Значения параметров будем искать методом наименьших квадратов. Составим выражение

$$\Psi_0(a_0, a, b, f) = \sum_{n=1}^N [x_n - x_{ap}(t_n)]^2.$$

Согласно методу наименьших квадратов определение параметров a_0 , a , b и f сводится к минимизации по ним функции Ψ_0 . Эта функция имеет, как правило, много локальных минимумов, поэтому ее минимизация проводится поэтапно. Сначала в результате решения ряда одинаковых линейных задач наименьших квадратов вычисляются значения функции

$$\Psi(f) = \min_{a_0, a, b} \Psi_0(a_0, a, b, f)$$

в узлах достаточно мелкой равномерной сетки на отрезке $0 \leq f \leq F$ (значение F определено ниже), строится график этой функции. Затем перебором по сетке находятся приближенные значения точек минимума $\Psi(f)$. Абсциссы значимых (с достаточно малыми ординатами) точек минимума могут быть частотами искомых гармоник.

Поиск гармоник в ряде случаев является весьма содержательной задачей, но здесь эта задача до конца решаться не будет. Гармоники упомянуты только для пояснения введения функции $\Psi(f)$. Эта функция является первой используемой ниже периодограммой.

Вторая периодограмма определяется формулами

$$I(f) = \left[\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}) \cos 2\pi f t_n \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}) \sin 2\pi f t_n \right]^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n.$$

Как правило, значимые минимумы функции $\Psi(f)$ весьма точно совпадают со значимыми максимумами функции $I(f)$. Такое совпадение служит критерием правильности нахождения частот.

Использование периодограммы $\Psi(f)$ можно считать естественным, но введение периодограммы $I(f)$ требует пояснения. Польза $I(f)$ обосновывается довольно просто, если разности $t_{n+1} - t_n$ неизменны. Временные ряды, рассматриваемые в данном разделе, не обладают этим свойством, но у них разности $t_{n+1} - t_n$ представляют собой целые кратные 3с , причем в подавляющем большинстве случаев $t_{n+1} - t_n = 3\text{ с}$. Указанное свойство упрощает мотивацию применения $I(f)$, делая ее такой же, как в случае равномерной временной сетки $\{t_n\}$. Приведем ее.

Пусть функция $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k \cos 2\pi\lambda_k t + \beta_k \sin 2\pi\lambda_k t), \quad (5)$$

причем все $\lambda_k > 0$ и среди них нет одинаковых. Составим выражение

$$I_1(f) = \left\{ \sum_{n=1}^N [x(t_n) - \alpha_0] \cos 2\pi f t_n \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^N [x(t_n) - \alpha_0] \sin 2\pi f t_n \right\}^2.$$

Его можно преобразовать к виду

$$I_1(f) = \frac{N^2}{4} \sum_{k=1}^K (\alpha_k^2 + \beta_k^2) [W(f - \lambda_k) + W(f + \lambda_k)] + \Delta I_1(f),$$

$$\Delta I_1(f) = \sum_{k < l} \sum_m \left\{ A_m \cos 2\pi [\Omega_m t_k + \Omega'_m t_l + f(t_l - t_k)] + \right.$$

$$\left. + B_m \sin 2\pi [\Omega_m t_k + \Omega'_m t_l + f(t_l - t_k)] \right\}.$$

В выражении для $\Delta I_1(f)$ частоты Ω_m и Ω'_m принадлежат множеству чисел $\{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_K\}$, коэффициенты A_m и B_m выражаются через α_k и β_k ($k = 1, 2, \dots, K$).

Функция $W(f)$ называется функцией окна [2]. Она – четная и удовлетворяет соотношениям $0 \leq W(f) \leq 1$, $W(0) = 1$. Для временной сетки $\{t_n\}$ рядов предыдущего пункта фрагменты ее графика изображены на рис. 4. Поскольку у рассматриваемых данных разности $t_{n+1} - t_n$ представляют собой целые кратные 3с , функция окна периодическая с периодом $1/3\text{ Гц}$. Значимые максимумы функции окна равны 1 и достигаются в точках $F_l = l/3\text{ Гц}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$). Вне малых окрестностей этих точек $W(f) < 0.01$. В силу сказанного функция окна полностью определяется своими значениями на отрезке $0 \leq f \leq 1/6\text{ Гц}$.

Для $\Delta I_1(f)$ не удастся найти простых эффективных оценок, но при $f(t_N - t_1) \gg 1$, большом N и достаточно равномерном распределении точек t_n значения этой функции оказываются намного меньше первого слагаемого в

выражении для $I_1(f)$. При анализе значимых максимумов функции $I_1(f)$ таким слагаемым можно пренебречь и принять

$$I_1(f) \approx \frac{N^2}{4} \sum_{k=1}^K (\alpha_k^2 + \beta_k^2) [W(f - \lambda_k) + W(f + \lambda_k)].$$

Отсюда, учитывая поведение функции $W(f)$, легко найти точки этих максимумов. Они определяются соотношениями $|f \pm \lambda_k| = F_l$. Пусть все $\lambda_k < F_1/2$. Тогда на отрезке $0 \leq f \leq F_1/2$

$$I_1(f) \approx \frac{N^2}{4} \sum_{k=1}^K (\alpha_k^2 + \beta_k^2) W(f - \lambda_k),$$

и отыскание значимых максимумов функции $I_1(f)$ на этом отрезке позволяет в принципе определить все частоты выражения (5). Частота $F = F_1/2$ называется частотой Найквиста. Именно она служит верхней границей F диапазона частот, для которых вычисляется функция $\Psi(f)$.

В случае функции (5) имеем $\bar{x} \approx \alpha_0$ и $I(f) \approx I_1(f)$. Если функция $I(f)$ имеет значимый максимум в точке f_0 , то f_0 близка одной из частот выражения (5). При $f_0 \approx \lambda_k$ величина $2\sqrt{I(f_0)}/N \approx \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$, т. е. является оценкой амплитуды гармоники с частотой λ_k . Если принять f_0 в качестве оценки частоты, то погрешность этой оценки определяется шириной главного максимума функции окна. Примем в качестве меры погрешности ширину лепестка главного максимума на половине его высоты. Для функции окна на рис. 4 такое значение погрешности составляет 0.00023 Гц.

Во всех рядах измерений, рассматриваемых ниже в п. 4, временные сетки $\{t_n\}$ очень близки сетке рядов из п. 2. Поэтому и функции окна, и ошибки в определении частот для этих рядов примерно одинаковы и совпадают с приведенными в данном пункте.

Ниже для удобства вместо графиков функций $\Psi(f)$ и $I(f)$ приводятся графики функций

$$E(f) = \sqrt{\frac{\Psi(f)}{N-3}}, \quad A(f) = \frac{2}{N} \sqrt{I(f)}. \quad (6)$$

Минимумы функции $E(f)$ дают оценки среднеквадратической ошибки аппроксимации функции $x(t)$ выражением (4), максимумы функции $A(f)$ – оценки амплитуды $\sqrt{a^2 + b^2}$. Эти функции также будем называть периодограммами. Для рядов (2) и (3), рассматривавшихся в предыдущем пункте, графики периодограмм (6) изображены на рис. 5 – 7. Верхние графики представляют $E(f)$, нижние – $A(f)$. Левые графики на каждом рисунке относятся к од-

ному из рядов (2), средние и правые графики – к соответствующим рядам (3). Последние были вычислены для $M = 35$ и $M = 120$. Абсциссы значимых минимумов периодограммы $E(f)$ и значимых максимумов периодограммы $A(f)$ отличаются не более чем на 0.001 Гц.

Сравнение графиков на одном и том же рисунке показывает, что в рядах (3) по сравнению с рядами (2) отсутствуют низкочастотные составляющие. В частности, в окрестности точки $f = 0$ имеем $A(f) \approx 0$. С ростом M эта окрестность увеличивается. Полученный результат понятен – при большом M высокочастотные составляющие рядов (2) аппроксимируются функциями $\chi_\alpha(t)$, $\chi_\delta(t)$, $\chi_A(t)$ и тем самым исключаются из рядов (3). Построив графики периодограмм (6) для рядов (3) при нескольких значениях M и сравнив эти графики с аналогичными графиками для рядов (2), можно понять какие значения M следует считать физически адекватными. В данной работе принято следующее правило. По графикам функций (6) для рядов (2) назначается такое число f_* , что на отрезке $0 \leq f \leq f_*$ средние значения этих функций существенно отличаются от их же средних значений на отрезке $f_* \leq f \leq F$. Число f_* выбирается по возможности малым. Физически адекватными считаются те по возможности малые значения M , для которых $A(f) \approx 0$ при $0 \leq f \leq f_*$.

Понятно, что такое правило допускает некоторый произвол, тем не менее, оно достаточно эффективно. В случае данных п. 2 физически адекватными оказались значения $M = 30 \div 50$. Заметим, что для каждого ряда (3) может быть найдено свое число f_* , однако указанный произвол позволяет, как правило, взять это число одинаковым для всех рядов.

Вид графиков периодограмм (6) для рядов (3) объясняет характер зависимости от M среднеквадратических отклонений \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A . Введем величину $f_\chi = M(t_N - t_1)^{-1}/2$. Это – максимальная частота тригонометрических членов в функциях $\chi_\alpha(t)$, $\chi_\delta(t)$, $\chi_A(t)$. Напомним, число M у этих функций одинаково. Величина f_χ примерно равна правому концу интервала, на котором выполняются соотношения $A(f) \approx 0$. В терминах f_χ и f_* можно сформулировать следующее приближенное правило. Если при изменении M частота f_χ меняется внутри интервала $0 < f < f_*$, то изменение \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A может быть заметным, особенно, если f_χ меняется вблизи нуля. Если же при изменении M частота f_χ меняется внутри интервала $f_* < f < F$, то изменение \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A будет малым. Исключения из этого правила очевидны: надо, чтобы внутри интервала $f_* < f < F$ находились подынтервалы с большими значениями $A(f)$.

В случае данных п. 2 выбранное по графикам периодограмм (6) значение $f_* = 0.004$ Гц совпадает с f_χ при $M = 30$. Заметим еще, что на рис. 5 – 7 выде-

ляются значимые экстремумы периодограмм, отвечающее частотам 0.036, 0.146 и 0.159 Гц. Физическая интерпретация этих частот неизвестна.

4. Оценка точности показаний датчика, полученных на стенде. Стенд динамических испытаний ИКИ РАН позволяет моделировать функционирование звездного датчика в условиях космического полета. На нем имитируется движение датчика по неизменной круговой орбите спутника Земли с заданными значениями среднего движения, наклона и долготы восходящего узла. При этом ось x_3 постоянно направлена вдоль геоцентрического радиуса-вектора датчика, а ось x_1 составляет постоянный угол с плоскостью орбиты. Если задать нулевое среднее движение, то стенд имитирует покой датчика в абсолютном пространстве. Ниже рассматриваются только орбиты, лежащие в плоскости экватора. В этом случае угловое движение датчика описывается формулами (1), где теперь ω_0 – среднее движение спутника.

С целью оценки точности показаний датчика были обработаны измерения углов α , δ и A , полученные при имитации движения по орбите геостационарного спутника, орбите низколетящего спутника и при имитации покоя в абсолютном пространстве. Измерения выполнялись с шагом 3с. Для обработки брались отрезки данных длиной около 60 мин. Такая длина выбрана для удобства сравнения результатов, полученных на стенде, с результатами обработки наземных измерений. Исследование точности выполнялось по схеме пп. 2, 3. Ниже без дополнительных пояснений используются введенные выше обозначения.

При имитации на стенде полета по *орбите геостационарного спутника* был получен файл с данными, содержащий $N = 1260$ моментов времени с измерениями и охватывающий отрезок времени длиной $t_N - t_1 = 3777$ с (63.0 мин). Аппроксимация этих данных формулами (1) дала следующие результаты. Стандартные отклонения ошибок в измерениях углов α , δ и A : $\sigma_\alpha = 3.69''$, $\sigma_\delta = 3.35''$, $\sigma_A = 50.0''$; оценки наиболее интересных параметров: $\omega_0 = 14.99677 \pm 0.000095''/с$, $\delta_0 = 7' 55.232'' \pm 0.094''$, $A_0 = 268^\circ 37' 15.9'' \pm 1.4''$. Графики ошибок аппроксимации (2) приведены на рис. 8а и повторены на рис. 9а. Эти графики выглядят как ломаные, соседние звенья которых в ряде случаев образуют весьма острые углы. Горизонтальные прямые на рис. 8а и 9а задаются уравнениями $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha$, $\Delta\delta = \pm\sigma_\delta$, $\Delta A = \pm\sigma_A$.

Как видно из рис. 8, 9, ряды (3) в данном примере содержат тренд, имеющий неслучайный характер. Причиной возникновения тренда мог быть способ моделирования звезд на стенде. Чтобы отделить тренд от ошибок, имеющих по видимости случайный характер, ошибки аппроксимации (2) сглаживались с помощью конечных рядов Фурье. С этой целью по данным (2) строились функции $\chi_\alpha(t)$, $\chi_\delta(t)$ и $\chi_A(t)$. Графики этих функций в случае $M = 40$ и $M = 160$ приведены на рис. 8а и 9а на фоне графиков ошибок аппроксимации (2). На рис. 8б и 9б изображены графики остатков (3). Горизонтальные прямые на этих рисунках задаются уравнениями $e_\alpha = \pm\bar{e}_\alpha$, $e_\delta = \pm\bar{e}_\delta$,

$e_A = \pm \bar{e}_A$. Выделение тренда было выполнено еще для нескольких значений M . Все полученные среднеквадратичные отклонения \bar{e}_α , \bar{e}_δ , \bar{e}_A и коэффициенты корреляции $r_{\alpha\delta}$, $r_{\alpha A}$, $r_{\delta A}$ приведены в табл. 2.

Рис. 10 – 12 содержат графики периодограмм (6) для рядов (2) и (3). Здесь левые графики относятся к одному из рядов (2), средние и правые графики – к соответствующим рядам (3). Последние были вычислены при $M = 35$ и $M = 160$. Абсциссы значимых экстремумов обеих периодограмм практически совпадают.

Таблица 2. Среднеквадратичные значения и коэффициенты корреляции ошибок аппроксимации измерений звездного датчика, полученных на стенде при имитации полета по геостационарной орбите

M	\bar{e}_α (")	\bar{e}_δ (")	\bar{e}_A (")	$r_{\alpha\delta}$	$r_{\alpha A}$	$r_{\delta A}$
3	3.063	2.261	35.96	-0.026	0.76	-0.061
5	2.849	2.088	35.03	-0.067	0.77	-0.010
10	2.145	1.877	28.77	-0.18	0.65	-0.11
20	1.874	1.351	25.19	-0.20	0.62	-0.010
30	1.632	1.145	22.40	-0.18	0.60	-0.050
40	1.601	1.060	21.00	-0.19	0.61	-0.097
50	1.521	0.967	19.29	-0.16	0.57	-0.0035
60	1.403	0.939	18.13	-0.17	0.53	-0.023
70	1.333	0.886	17.28	-0.15	0.51	0.011
80	1.284	0.837	16.66	-0.098	0.51	0.011
120	1.206	0.743	15.56	-0.052	0.47	0.021
160	1.157	0.715	15.23	-0.011	0.44	0.049
220	1.139	0.684	15.12	-0.018	0.41	0.075

Как видно из рисунков и таблицы, значения \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A заметно зависят от M . Причина заключается в том, что ошибки (2) в исследуемом примере содержат три достаточно четко выраженных временных масштаба своего изменения. Первый масштаб – примерно 250 – 300с. Он проявляется в низкочастотных трендах рядов (2) с большими амплитудами. Характерные величины этих амплитуд – указанные выше значения σ_α , σ_δ и σ_A (половины расстояний между горизонтальными прямыми на рис. 8а). Этот масштаб согласуется с величиной $f_* \approx 0.004$ Гц, которую можно определить по графикам периодограмм на рис. 10 – 12. В данном примере, как и в предыдущем, физически адекватные значения M лежат в пределах от 30 до 50. При $M \geq 30$ указанные низкочастотные тренды в рядах (3) отсутствуют.

Второй масштаб – это примерно 130 – 150с. Ему отвечают значимые экстремумы периодограмм на рис. 10 – 12 в диапазоне частот от 0.0066 до 0.0077 Гц. Соответствующие тренды имеют характерные амплитуды, равные

примерно значениям \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A при $M = 40$ (половины расстояний между горизонтальными прямыми на рис. 8б). Третий масштаб – около 16 с. Ему отвечают значимые экстремумы периодограмм в окрестности частоты $f = 0.061$ Гц. Соответствующие амплитуды равны значениям \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A при $M > 140$ (см. рис. 9б). При увеличении M всё бóльшая часть среднемасштабных колебаний переходит из ошибок сглаживания (3) в функции χ_α , χ_δ и χ_A , что приводит к уменьшению \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A .

По-видимому, только мелкомасштабные колебания остатков (3) можно с уверенностью отнести к случайным ошибкам датчика в рассматриваемом примере. Крупномасштабные колебания обусловлены спецификой моделирования звезд на стенде. Что касается среднемасштабных колебаний, то их природа нуждается в дополнительном исследовании.

Интерпретация среднемасштабных колебаний влияет на оценку случайных ошибок прибора. Если эти колебания считать порожденными стендом, то стандартные отклонения случайных ошибок в измерениях углов α , δ и A следует принять равными 1.2", 0.7" и 15" соответственно (ср. строку в табл. 2 для $M = 160$). Если же считать, что эти колебания обусловлены свойствами датчиком, то для указанных стандартных отклонений следует принять значения 1.6", 1.1" и 21" (строка в табл. 2 для $M = 40$).

Рассмотрим поведение коэффициентов корреляции в табл. 2. Коэффициент $r_{\delta A}$ пренебрежимо мал. Коэффициент $r_{\alpha\delta}$ не так мал, отрицателен и при изменении M меняется плавно. Коэффициент $r_{\alpha A}$ достаточно велик. Он положителен и при изменении M меняется плавно и монотонно. Естественно предположить, что такое поведение $r_{\alpha A}$ и $r_{\alpha\delta}$ обусловлено спецификой моделирования звезд на стенде.

Перейдем к анализу файла, полученного при имитации на стенде полета *низкорбитального спутника*. В этом случае $N = 1200$, $t_N - t_1 = 3597$ с (60.0 мин). Аппроксимация данных формулами (1) дала следующие результаты: $\sigma_\alpha = 3.46''$, $\sigma_\delta = 7.33''$, $\sigma_A = 42.9''$, $\omega_0 = 239.95844 \pm 0.000096''/\text{с}$, $\delta_0 = 25' 00.652'' \pm 0.21''$, $A_0 = 270^\circ 36' 31.7'' \pm 1.2''$. Графики ошибок аппроксимации (2) приведены на рис. 13а и повторены на рис. 14а (ломаные с острыми углами между соседними звеньями). Горизонтальные прямые, изображенные на фоне этих графиков, задаются уравнениями $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha$, $\Delta\delta = \pm\sigma_\delta$, $\Delta A = \pm\sigma_A$. На фоне графиков ошибок (2) изображены также графики функций $\chi_\alpha(t)$, $\chi_\delta(t)$ и $\chi_A(t)$ (гладкие кривые), представляющих тренды. Графики трендов построены при $M = 80$ и $M = 200$. На рис. 13б и 14б изображены графики остатков (3). Горизонтальные прямые на этих рисунках задаются уравнениями $e_\alpha = \pm\bar{e}_\alpha$, $e_\delta = \pm\bar{e}_\delta$, $e_A = \pm\bar{e}_A$. Выделение тренда было выполнено еще для ряда значений M . Полученные значения \bar{e}_α , \bar{e}_δ , \bar{e}_A и $r_{\alpha\delta}$, $r_{\alpha A}$, $r_{\delta A}$ приведены в табл. 3. Рис. 15 – 17 содержат графики периодограмм (6) для рядов (2) и

(3). Ряды (3), взятые для построения периодограмм, были вычислены при $M = 25$ и $M = 100$.

Таблица 3. Среднеквадратичные значения и коэффициенты корреляции ошибок аппроксимации измерений звездного датчика, полученных на стенде при имитации полета по низкой орбите

M	\bar{e}_α (")	\bar{e}_δ (")	\bar{e}_A (")	$r_{\alpha\delta}$	$r_{\alpha A}$	$r_{\delta A}$
3	3.465	3.877	42.65	-0.16	0.068	-0.13
5	3.465	3.547	42.54	-0.16	0.066	-0.11
10	3.465	3.389	42.36	-0.16	0.064	-0.13
20	3.434	3.020	42.25	-0.17	0.072	-0.15
40	3.168	2.624	40.22	-0.12	0.11	-0.13
60	2.525	2.395	34.77	-0.060	0.063	-0.19
80	2.015	2.234	31.68	-0.054	-0.070	-0.20
100	1.930	2.154	30.94	-0.039	-0.097	-0.20
120	1.837	2.106	30.50	-0.032	-0.096	-0.19
140	1.747	2.083	28.87	-0.034	-0.076	-0.20
160	1.713	2.011	27.70	-0.032	-0.070	-0.19
180	1.705	1.894	27.03	-0.033	-0.05*5	-0.18
200	1.659	1.725	26.15	-0.053	-0.024	-0.19
220	1.629	1.612	25.18	-0.071	-0.029	-0.19

Как и в предыдущем примере, значения \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A заметно зависят от M . Причина – та же: данные (2) содержат три временных масштаба своего изменения. Крупный масштаб с характерным временем около 250с соответствует частоте $f_* = 0.004$ Гц, которая примерно совпадает с частотой f_χ для $M = 25$. Средний масштаб – около 170с ($f \approx 0.006$ Гц), мелкий масштаб – примерно 50 – 90с ($f = 0.016 \div 0.020$ Гц). Эти масштабы соответствуют группам значимых экстремумов периодограмм на рис. 15 – 17. Если считать, что только мелко-масштабные колебания остатков (3) могут служить моделью случайных ошибок датчика, то стандартные отклонения случайных ошибок в измерениях углов α , δ и A следует принять равными 1.7", 2.0" и 28" (см. строку табл. 3 для $M = 160$). Если же из остатков (2) удалять только крупномасштабный тренд, то для указанных стандартных отклонений получим оценки 3.2", 2.6" и 40" (строка для $M = 40$ в табл. 3).

Коэффициенты корреляции $r_{\alpha\delta}$ и $r_{\alpha A}$ в табл. 3 пренебрежимо малы. Коэффициент $r_{\delta A}$ не так мал, но и далеко не велик. Он отрицателен и при изменении M меняется мало.

Файл, полученный при имитации на стенде *покоя в абсолютном пространстве* содержит $N = 997$ моментов времени с измерениями и охватывает отрезок длиной $t_N - t_1 = 2998$ с (49.8 мин). Аппроксимация этих данных фор-

мулами (1) при $\omega_0 = 0$ дала следующие результаты: $\sigma_\alpha = 0.126''$, $\sigma_\delta = 0.491''$, $\sigma_A = 2.12''$, $\alpha_0 = 359^\circ 44' 03.3079'' \pm 0.0080''$, $\delta_0 = 5' 42.195'' \pm 0.016''$, $A_0 = 37' 56.708'' \pm 0.067''$.

Графики ошибок аппроксимации (2) приведены на рис. 18а и повторены на рис. 19а (ломаные с острыми углами между соседними звеньями). Горизонтальные прямые, изображенные на фоне этих графиков, задаются уравнениями $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha$, $\Delta\delta = \pm\sigma_\delta$, $\Delta A = \pm\sigma_A$. На фоне графиков ошибок (2) изображены также графики функций $\chi_\alpha(t)$, $\chi_\delta(t)$ и $\chi_A(t)$ (гладкие кривые), представляющих тренды. Графики трендов построены при $M = 20$ и $M = 80$. На рис. 18б и 19б изображены графики остатков (3). Горизонтальные прямые на этих рисунках задаются уравнениями $e_\alpha = \pm\bar{e}_\alpha$, $e_\delta = \pm\bar{e}_\delta$, $e_A = \pm\bar{e}_A$. Выделение тренда было выполнено еще для ряда значений M . Полученные значения \bar{e}_α , \bar{e}_δ , \bar{e}_A и $r_{\alpha\delta}$, $r_{\alpha A}$, $r_{\delta A}$ приведены в табл. 4. Рис. 20 – 22 содержат графики периодограмм (6) для рядов (2) и (3). Ряды (3), взятые для построения периодограмм, были вычислены при $M = 20$ и $M = 50$.

Таблица 4. Среднеквадратичные значения и коэффициенты корреляции ошибок аппроксимации измерений звездного датчика, полученных на стенде при имитации покоя в абсолютном пространстве

M	$\bar{e}_\alpha (")$	$\bar{e}_\delta (")$	$\bar{e}_A (")$	$r_{\alpha\delta}$	$r_{\alpha A}$	$r_{\delta A}$
3	0.1175	0.1714	1.921	0.30	-0.36	0.30
5	0.1173	0.1703	1.921	0.30	-0.36	-0.12
10	0.1155	0.1590	1.921	0.26	-0.37	-0.15
20	0.1145	0.1531	1.912	0.24	-0.38	-0.16
40	0.1141	0.1467	1.906	0.23	-0.38	-0.18
60	0.1140	0.1468	1.898	0.23	-0.37	-0.17
80	0.1143	0.1454	1.877	0.22	-0.35	-0.16
100	0.1139	0.1445	1.889	0.22	-0.35	-0.15
120	0.1132	0.1444	1.887	0.21	-0.34	-0.15
140	0.1132	0.1442	1.862	0.21	-0.32	-0.15
160	0.1135	0.1443	1.866	0.22	-0.32	-0.16

Вид периодограмм поясняет, почему значения величин \bar{e}_α , \bar{e}_δ и \bar{e}_A слабо зависят от M и при $M > 20$ могут служить характеристиками случайных ошибок в показаниях звездного датчика. В данном примере ошибки (2) имеют два характерных масштаба – очень крупный и очень мелкий. Крупномасштабные вариации ошибок уже при $M = 20$ учитываются в функциях χ_α , χ_δ и χ_A , тогда как мелкомасштабные при рассмотренных (разумных) значениях M почти не учитываются. Ситуация в целом похожа на описанную в п. 2 с той разницей, что там крупномасштабные вариации были обусловлены физическими причинами, а в рассматриваемом примере они вызваны спецификой моделирования

звезд на стенде. Заметим, что тренд в примере п. 2.2 имеет несколько характерных масштабов и, вообще, выглядит достаточно прихотливо. Однако мелкомасштабные вариации ошибок (2) в этом примере имеют достаточно высокие частоты и при $M < 200$ практически не устраняются функциями χ_α , χ_δ и χ_A .

Для покоя в абсолютном пространстве стандартные отклонения случайных ошибок в измерениях углов α , δ и A следует принять равными 0.11", 0.15" и 1.9" соответственно (см. в табл. 2 строку для $M = 20$).

Коэффициенты корреляции в табл. 4 слабо зависят от M , причем их значения не малы. По-видимому, такое поведение этих коэффициентов обусловлено спецификой моделирования звезд на стенде (ср. случай геостационарной орбиты).

Сопоставляя результаты анализа данных измерений, полученных при имитации на стенде движений с разными угловыми скоростями датчика, можно заключить, что ошибки в этих данных существенно зависят от угловой скорости. Проявив определенную осторожность можно привести следующие оценки. При не очень малой величине угловой скорости характерные значения этих ошибок по углам α , δ и A составляют соответственно 3.5", 2.6" и 40". Для покоя в абсолютном пространстве имеем соответственно 0.11", 0.15" и 1.9".

Из анализа коэффициентов корреляции в табл. 2 – 4, следует, что эти коэффициенты также зависят от угловой скорости датчика. Однако зависимость эта, во-первых, неизвестна, во-вторых, слаба. В такой ситуации при обработке измерений, полученных для произвольных движений датчика, выбор коэффициентов корреляции следует подчинить какому-либо единому универсальному правилу. В случае приборов БОКЗ следует взять эти коэффициенты нулевыми, т. е. считать ряды остатков (3) некоррелированными.

5. Оценка точности показаний датчика, полученных в условиях космического полета. Файл с показаниями звездного датчика, полученными по телеметрии с борта низкоорбитального спутника Земли, содержит 94 момента времени с измерениями. Измерения охватывают временной отрезок длиной 348 с (5.8 мин) и представлены в кватернионной форме в виде последовательностей t_n , \mathbf{q}_n ($n=1, 2, \dots, N$). Здесь \mathbf{q}_n – приближенное значение кватерниона ориентации системы $x_1x_2x_3$ в момент t_n . Как правило, $t_{n+1} - t_n = 3$ с, но для некоторых значений n эта разность равна 6, 9, 12... с.

Точное движение спутника, в котором были получены данные, неизвестно. Известно только, что это был режим астрокоррекции. Следовательно, движение спутника было плавным. С учетом этого обстоятельства оценить точность показаний датчика можно с помощью приема, использованного выше, – по ошибкам аппроксимации данных измерений с помощью конечных рядов Фурье. С учетом замечания, сделанного в конце п. 2, применим эти ряды непосредственно для аппроксимации данных, не используя содержательную модель движения спутника.

Поскольку исследуемые данные получены на коротком отрезке времени, кватернионы \mathbf{q}_n лежат в достаточно малой окрестности их "среднего значения"

$$\mathbf{q}_c = \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|}, \quad \mathbf{Q} = \sum_{n=1}^N \mathbf{q}_n.$$

Сглаживающую функцию будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\text{sm}}(t) &= \mathbf{q}_c \circ \mathbf{s}(t), \quad \mathbf{s}(t) = (s_0(t), s_1(t), s_2(t), s_3(t)) \\ s_0(t) &= \frac{1 - z_1^2(t) - z_2^2(t) - z_3^2(t)}{1 + z_1^2(t) + z_2^2(t) + z_3^2(t)}, \\ s_i(t) &= \frac{2z_i(t)}{1 + z_1^2(t) + z_2^2(t) + z_3^2(t)} \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned}$$

где $z_i(t)$ задаются теми же выражениями, что и функции χ_α , χ_δ , χ_A в п. 2. Числа M в этих выражениях возьмем равными, коэффициенты выражений выберем из условия минимума функционала

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_c \circ \mathbf{s}(t_n)\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n - \mathbf{s}(t_n)\|^2. \quad (7)$$

Использованные здесь величины z_i называются параметрами Родрига [3]. При такой параметризации $\|\mathbf{s}(t)\| \equiv 1$.

Заметим, что кватернион \mathbf{q}_c является решением задачи

$$\sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{q}} \quad \text{при условии} \quad \|\mathbf{q}\| = 1,$$

поэтому в данном случае $\|\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n - 1\| \ll 1$ и, значит, $|z_i(t)| \ll 1$ ($i=1, 2, 3$).

Пусть нормированные кватернионы $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ и $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ параметризованы параметрами Родрига u_i и v_i соответственно. В таком случае $u_i = p_i / (1 + p_0)$, $v_i = q_i / (1 + q_0)$ ($i=1, 2, 3$). При $|u_i| \ll 1$, $|v_i| \ll 1$ справедливо соотношение

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 \approx 4 \sum_{i=1}^3 (u_i - v_i)^2$$

с ошибкой четвертого порядка малости относительно величин u_i и v_i . Указанный факт позволяет упростить задачу отыскания функций $z_i(t)$.

Выразим кватернионы $\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n$ через параметры Родрига $z_i^{(n)}$ и представим формулу (7) в виде

$$\Phi \approx 4 \sum_{i=1}^3 \Phi_i, \quad \Phi_i = \sum_{n=1}^N [z_i^{(n)} - z_i(t)]^2.$$

Минимизация правой части последней формулы для Φ по коэффициентам выражений $z_i(t)$ сводится к независимой минимизации слагаемых Φ_i . Получаем три независимых линейных задачи наименьших квадратов. Если построенные функции $z_i(t)$ обеспечивают приемлемую точность аппроксимации величин $z_i^{(n)}$, то можно ожидать, что кватернионная функция $\mathbf{q}_{sm}(t)$ будет достаточно точной аппроксимацией вращательного движения системы координат $x_1x_2x_3$.

Если движение системы $x_1x_2x_3$ выражено через параметры Родрига $z_i(t)$, то ее угловую скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ также можно выразить через эти параметры. Введем вектор $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))$. Тогда [3]

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{4}{(1 + \mathbf{z} \cdot \mathbf{z})^2} \left[(1 - \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) \frac{d\mathbf{z}}{dt} - 2 \left(\mathbf{z} \times \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right) + 2 \left(\mathbf{z} \cdot \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right) \mathbf{z} \right].$$

Компоненты вектора \mathbf{z} и определяемого последней формулой вектора $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ относятся к системе $x_1x_2x_3$. В данном примере графики функций $\omega_i(t)$ использовались при выборе числа M в выражениях $z_i(t)$.

Примеры аппроксимации величин $z_i^{(n)}$ выражениями $z_i(t)$, построенными при различных значениях M , приведены на рис. 23а, 24а. В подписях к рисункам указаны σ_i – увеличенные в 4 раза стандартные отклонения соответствующих ошибок аппроксимации. Коэффициент 4 появляется при пересчете ошибок в параметрах Родрига в ошибки определения углов поворота датчика вокруг осей x_i (бесконечно малому повороту системы $x_1x_2x_3$, задаваемому вектором $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, отвечают параметры Родрига $z_i = \theta_i / 4$). На рис. 23б, 24б изображены графики остатков

$$e_i^{(n)} = 4[z_i^{(n)} - z_i(t_n)] \quad (n = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Горизонтальные прямые на фоне этих графиков задаются уравнениями $e_i = \pm \sigma_i$. На рис. 23в, 24в приведены графики компонент угловой скорости $\omega_i(t)$. Построение аппроксимации было выполнено еще для ряда значений M . Полученные стандартные отклонения σ_i приведены в табл. 5. Там же указаны коэффициенты парной корреляции остатков (8) r_{12} , r_{13} и r_{23} .

Рис. 25 – 28 содержат графики функции окна $W(f)$ для временной сетки $\{t_n\}$ ряда измерений данного примера и графики периодограмм (6) для рядов (8). Ряды, взятые для построения периодограмм, были вычислены при $M = 5, 30, 50$. Ширина лепестка главного максимума функции $W(f)$ на половине его высоты в случае функции на рис. 25 составляет 0.0013 Гц. Рассматриваемый ряд измерений – короткий, а периодограммы при анализе коротких рядов измерений не так эффективны, как в случае длинных рядов. Тем не менее, здесь они показывают, что число гармоник M в сглаживающих выражениях $z_i(t)$

должно быть не меньше 20, и объясняют заметную зависимость от M стандартных отклонений σ_i .

В данном примере периодограммы трудно использовать для более точного выбора M . Однако, для решения этой задачи можно привлечь графики компонент угловой скорости. Сопоставляя эти графики с периодограммами и графиками рядов (8) при разных значениях M , можно заключить, что ошибки аппроксимации, отвечающие реальным случайным ошибкам датчика имеют место при $M = 30 \div 40$. Стандартные отклонения ошибок определения углов поворота датчика вокруг осей x_1 , x_2 и x_3 составляют соответственно 1.0" 1.4" и 17". Эти значения примерно соответствуют значениям, полученным в п. 2.

Таблица 5. Среднеквадратичные значения и коэффициенты корреляции ошибок аппроксимации измерений звездного датчика, полученных в условиях космического полета

M	σ_1 (")	σ_2 (")	σ_3 (")	r_{12}	r_{13}	r_{23}
5	22.72	11.42	31.25	-0.28	0.43	0.48
10	9.493	2.963	19.26	-0.054	0.39	0.080
15	3.538	2.235	17.28	-0.39	0.11	-0.075
20	1.642	1.454	17.49	0.025	0.21	-0.038
30	1.150	1.463	17.59	0.044	0.22	-0.0085
40	0.848	1.306	17.22	0.056	0.16	0.043
50	0.800	1.194	17.04	0.032	0.13	0.037
60	0.849	1.260	17.32	0.0063	0.068	0.012

Коэффициенты корреляции r_{12} , r_{13} и r_{23} в табл. 5 при $M \geq 30$ можно считать малыми и принять $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 0$. Ситуация здесь очень похожа на описанную в п. 2. Надо только учесть соответствие между индексами $1 \leftrightarrow \alpha$, $2 \leftrightarrow \delta$, $3 \leftrightarrow A$.

6. Заключение. Проведенное исследование показало, что при малой угловой скорости ошибки показаний звездного датчика, полученных на Земле и в условиях космического полета, примерно одинаковы и составляют около 1.5" по углам поворота датчика вокруг осей x_1 , x_2 и около 15 ÷ 20" по углу его поворота вокруг оси x_3 . Ошибки показаний, соответствующие разным осям следует считать независимыми.

Малое число натуральных экспериментов по оценке точности приборов БОКЗ в определенной степени компенсируется экспериментами на стенде динамических испытаний. Однако интерпретация стендовых экспериментов требует определенной осторожности. Ошибки измерений, полученные на стенде, зависят от угловой скорости датчика в моделируемом движении. При нулевой угловой скорости ошибки по углам поворота датчика вокруг осей x_1 , x_2 весьма малы (0.11" ÷ 0.15") и обусловлены, по-видимому, собственными шумами

БОКЗ. При не очень малой угловой скорости характерные значения ошибок по углам поворота датчика вокруг осей x_1 , x_2 составляют $3.0'' \div 3.2''$. Это примерно в два раза больше, чем в натуральных экспериментах. В случае экспериментов на стенде ошибки показаний датчика, соответствующие разным осям также следует считать независимыми.

Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 08-01-00467).

Литература

1. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
2. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М., Наука, 1992.
3. Shuster M.D. A survey of attitude representation. The Journal of the Astronautical Sciences, 1993, vol. 41, No. 4, pp. 439-517.+

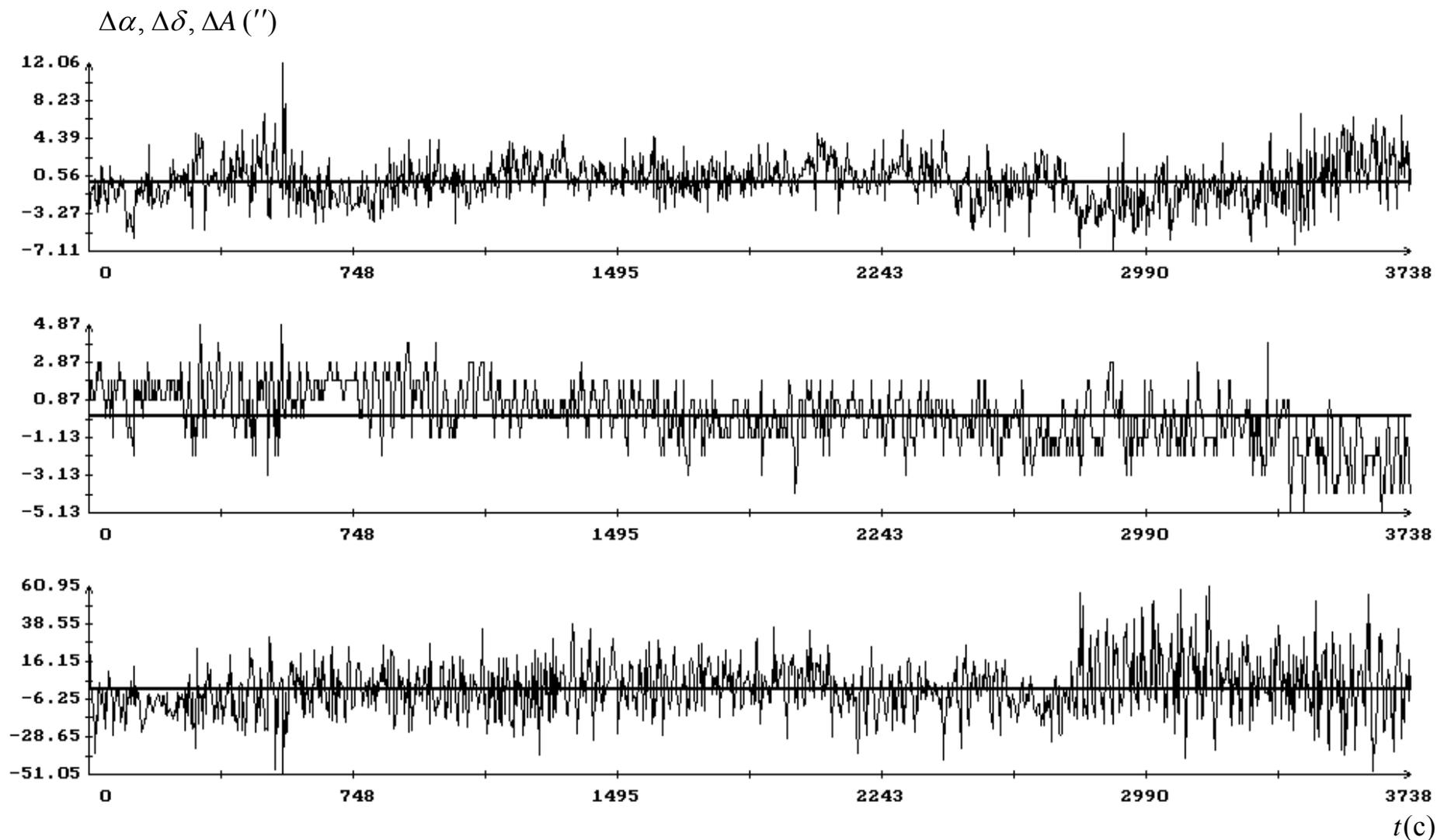


Рис. 1. Измерения на Земле. Графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_0 - \omega_e(t_n - t_1)$, $\Delta\delta_n = \delta_n - \delta_0$, $\Delta A_n = A_n - A_0$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Среднеквадратические значения ошибок: $\sigma_\alpha = 2.27''$, $\sigma_\delta = 1.56''$, $\sigma_A = 16.0''$. Горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\delta = 0$, $\Delta A = 0$.

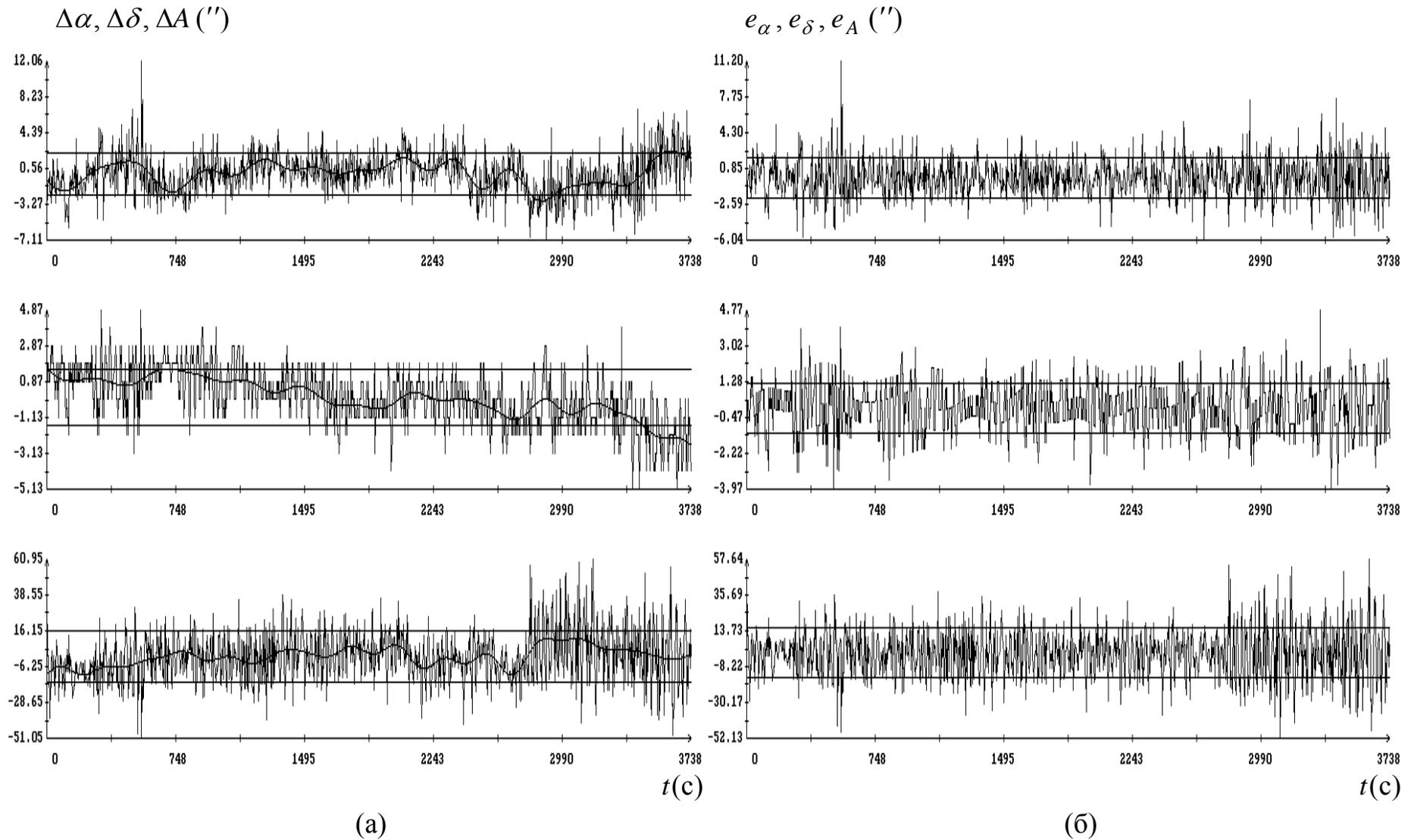


Рис. 2. Измерения на Земле; (а) графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n, \Delta\delta_n, \Delta A_n$ и функций $\chi_\alpha, \chi_\delta, \chi_A$ для $M = 30$, горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha, \Delta\delta = \pm\sigma_\delta, \Delta A = \pm\sigma_A$; (б) графики остатков $e_{\alpha n}, e_{\delta n}, e_{A n}$, горизонтальные прямые: $e_\alpha = \pm 1.94''$, $e_\delta = \pm 1.21''$, $e_A = \pm 15.2''$.

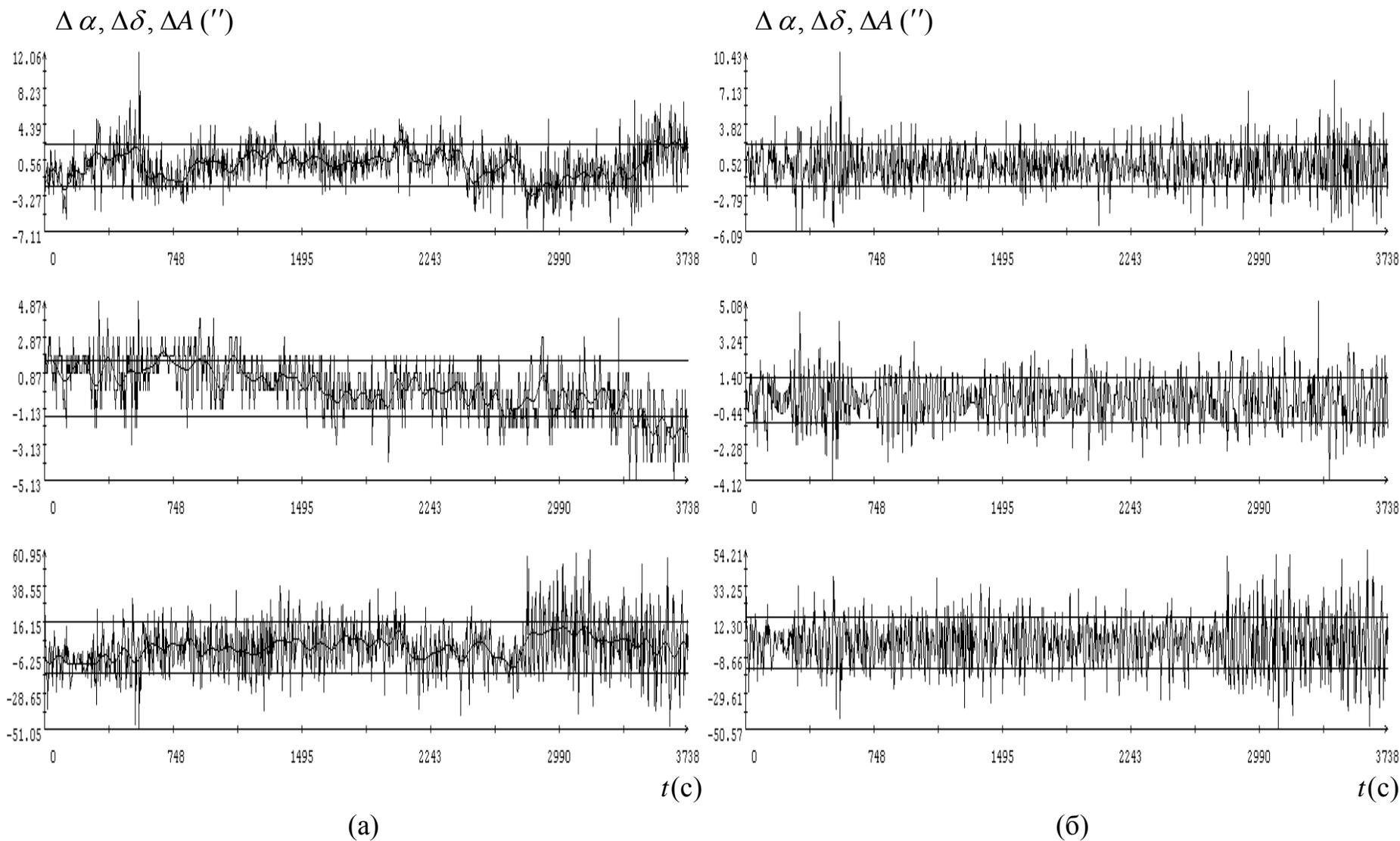


Рис. 3. Измерения на Земле; (а) графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n, \Delta\delta_n, \Delta A_n$ и функций $\chi_\alpha, \chi_\delta, \chi_A$ для $M = 80$, горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha, \Delta\delta = \pm\sigma_\delta, \Delta A = \pm\sigma_A$; (б) графики остатков $e_{\alpha n}, e_{\delta n}, e_{A n}$, горизонтальные прямые: $e_\alpha = \pm 1.92''$, $e_\delta = \pm 1.18''$, $e_A = \pm 15.4''$.

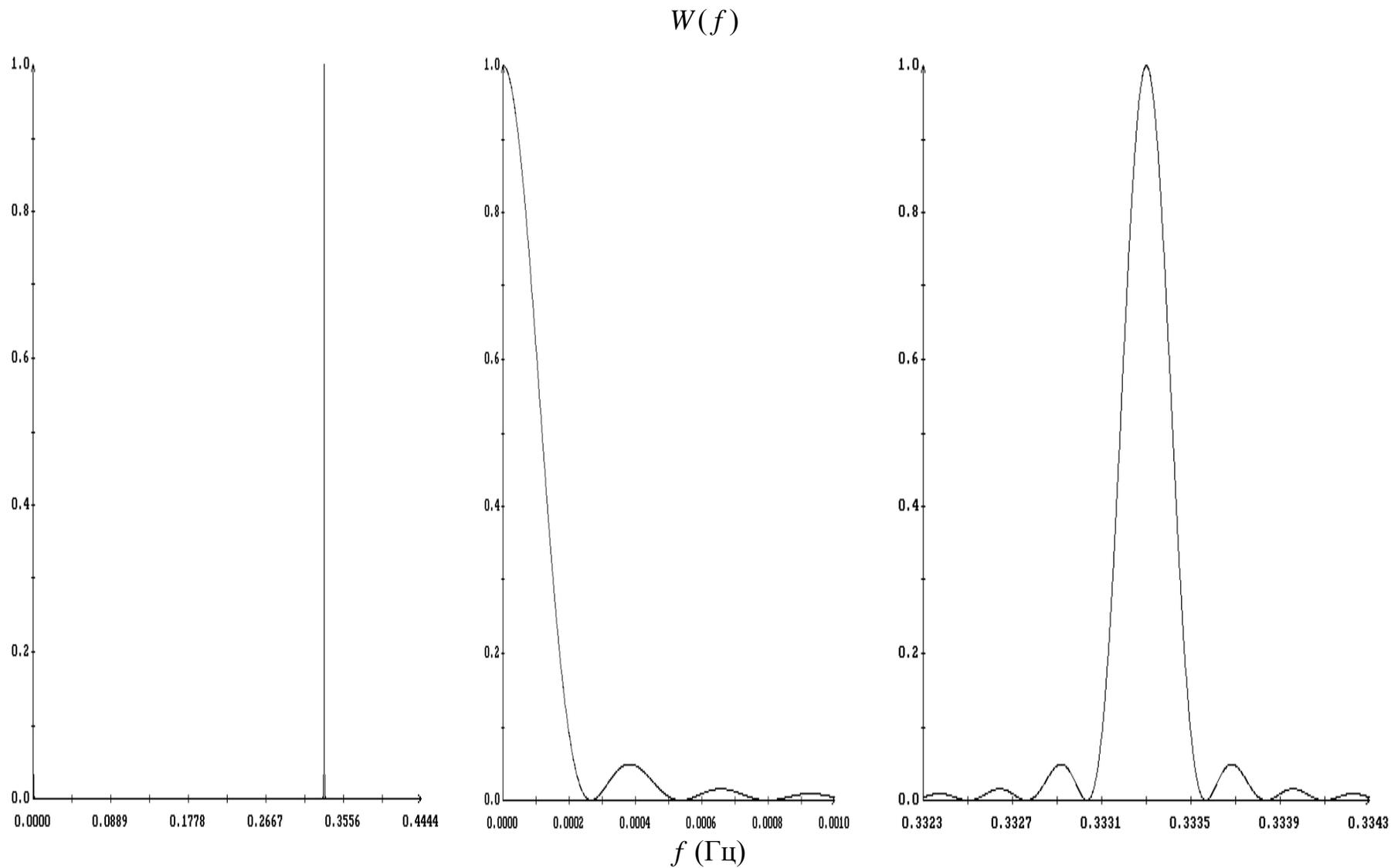
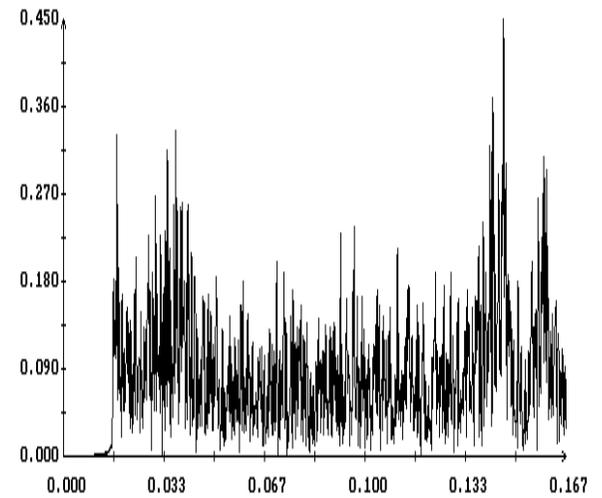
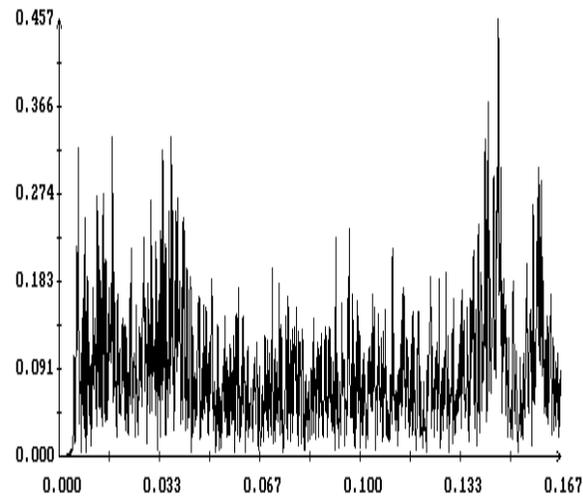
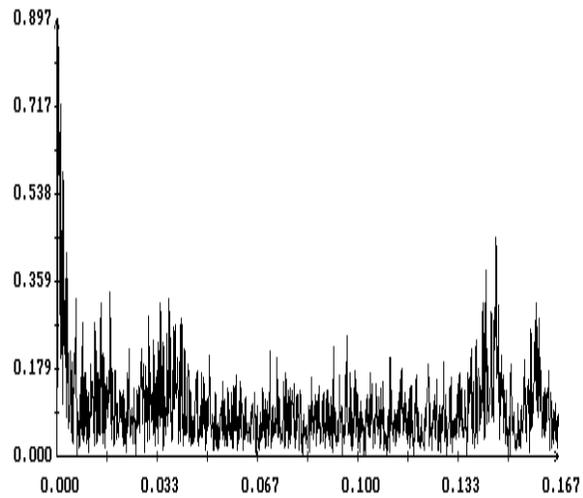
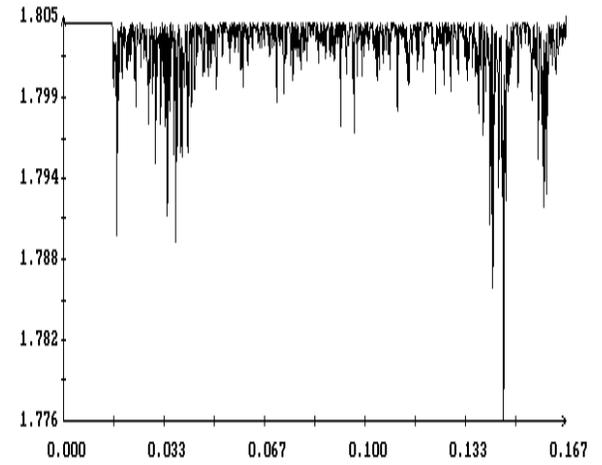
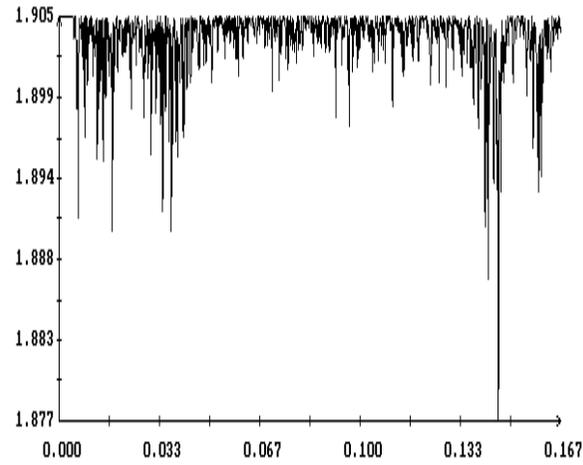
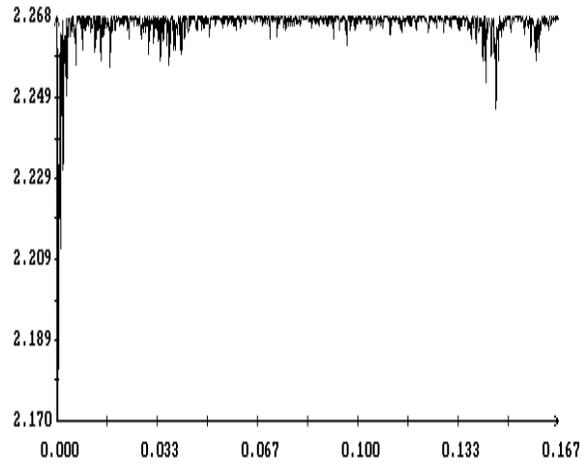


Рис. 4. Измерения на Земле. Графики функции окна, иллюстрирующих два ее последовательных максимума.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

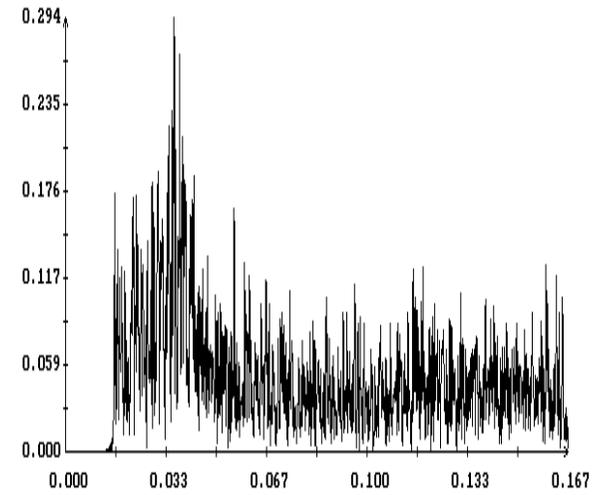
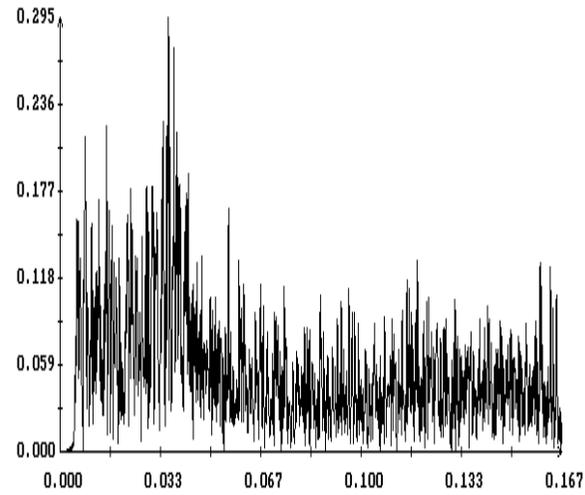
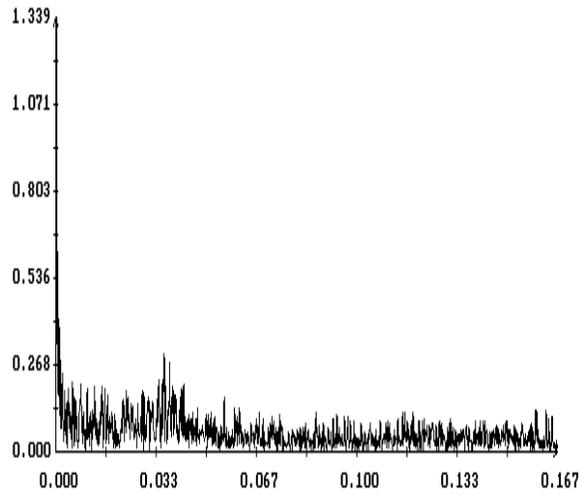
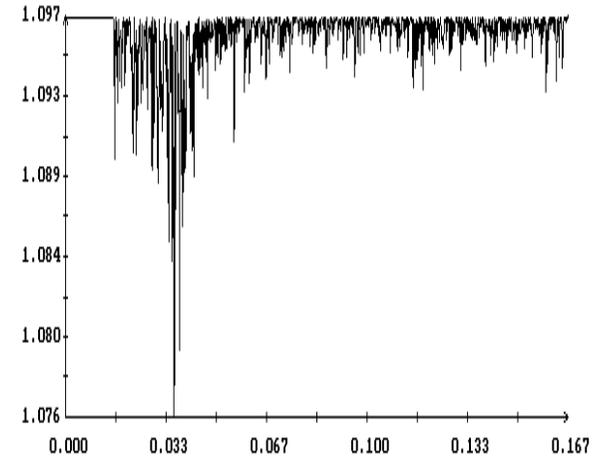
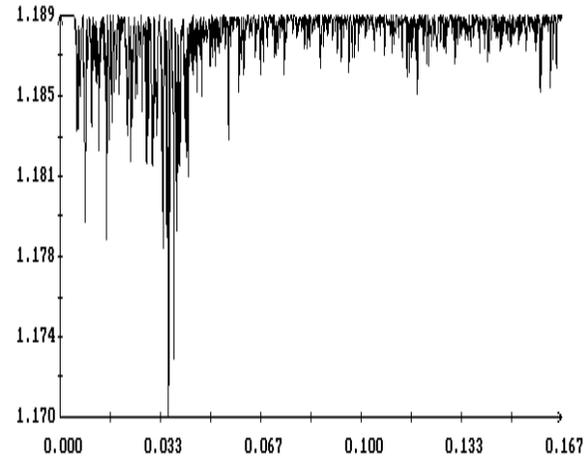
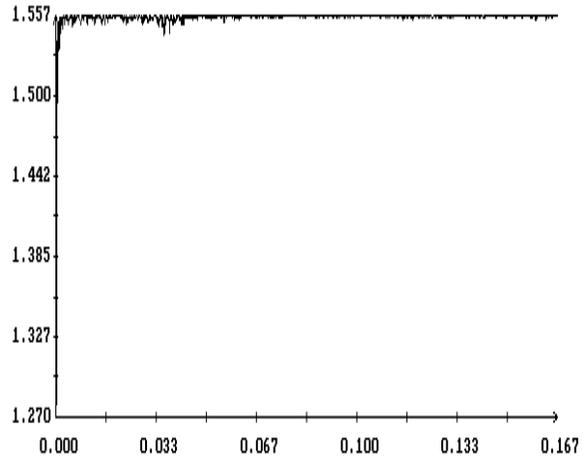
(а)

(б)

(в)

Рис. 5. Измерения на Земле. Периодограммы: а) ряда $\Delta\alpha_n$, б) ряда e_{an} при $M = 35$, в) ряда e_{an} при $M = 120$.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

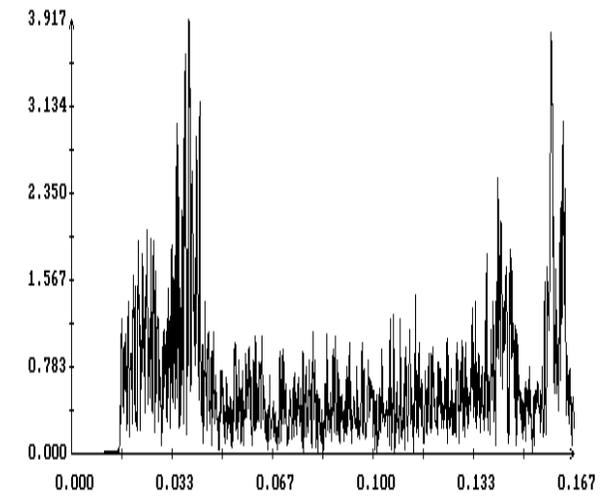
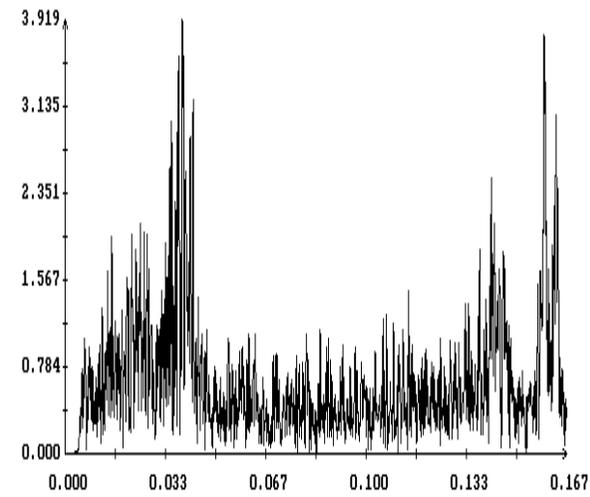
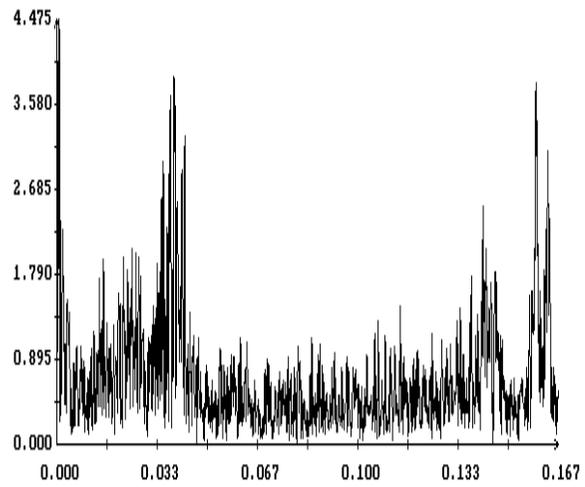
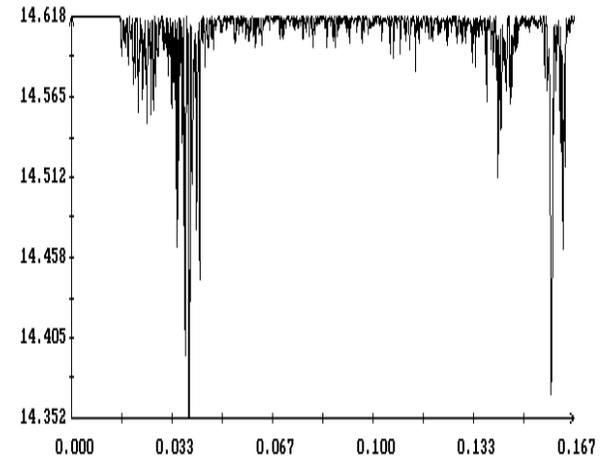
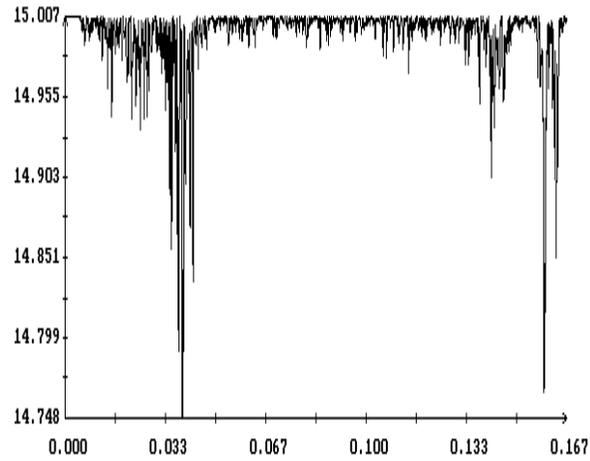
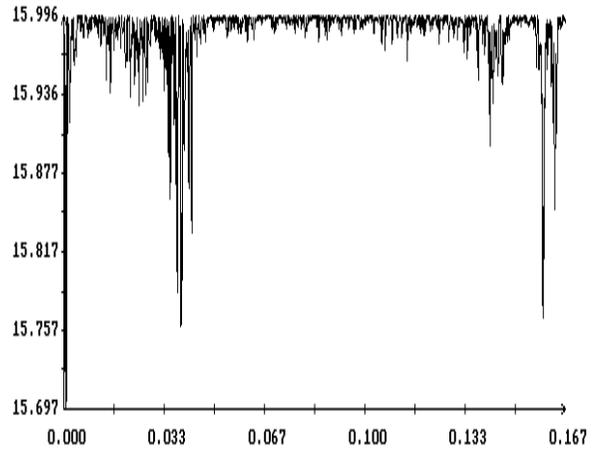
(а)

(б)

(в)

Рис. 6. Измерения на Земле. Периодограммы: а) ряда $\Delta\delta_n$, б) ряда $e_{\delta n}$ при $M = 35$, в) ряда $e_{\delta n}$ при $M = 120$.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

(а)

(б)

(в)

Рис. 7. Измерения на Земле. Периодограммы: а) ряда ΔA_n , б) ряда e_{An} при $M = 35$, в) ряда e_{An} при $M = 120$.

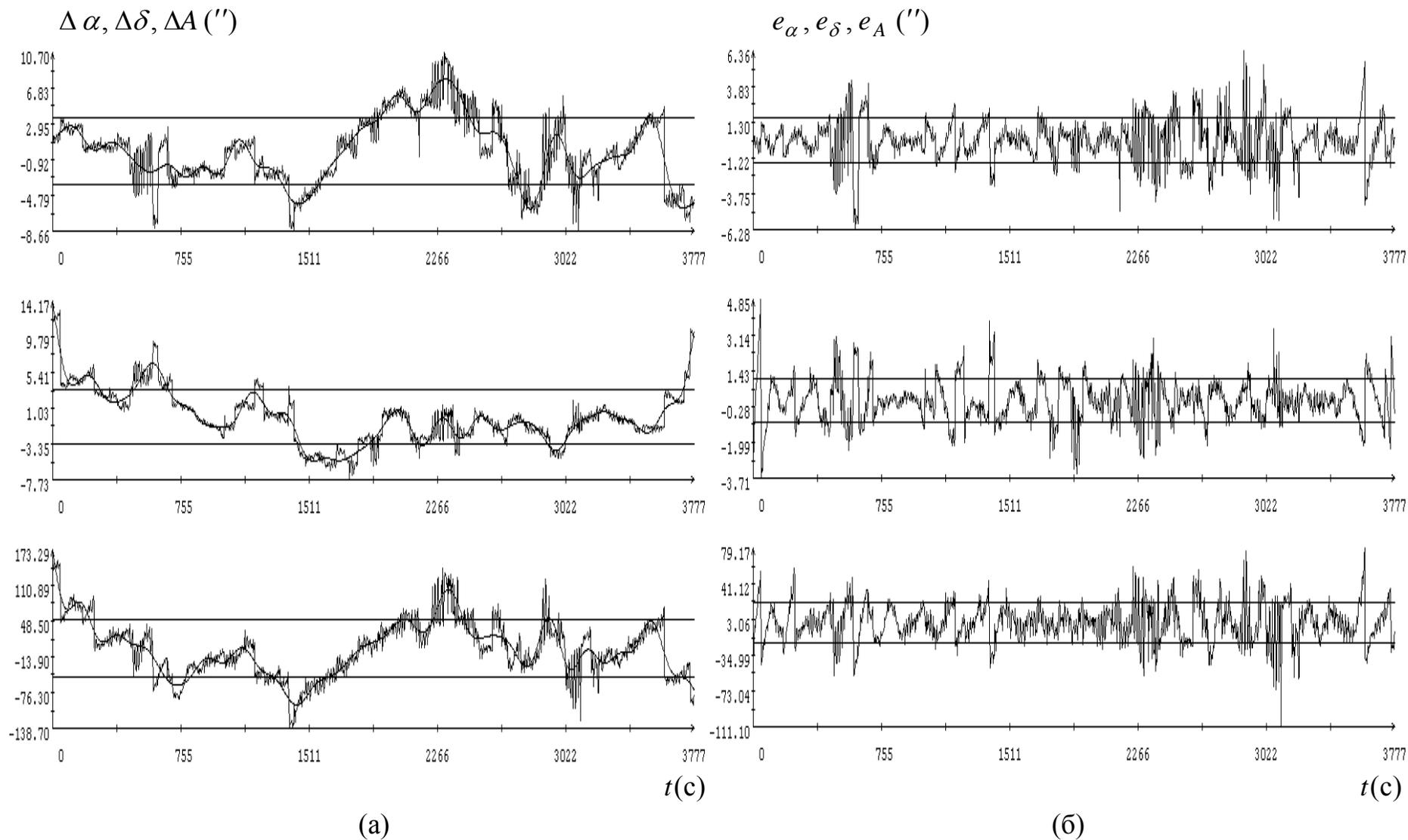


Рис. 8. Имитация геостационарной орбиты; (а) графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n$, $\Delta\delta_n$, ΔA_n и функций χ_α , χ_δ , χ_A для $M = 40$, горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha$, $\Delta\delta = \pm\sigma_\delta$, $\Delta A = \pm\sigma_A$; (б) графики остатков $e_{\alpha n}$, $e_{\delta n}$, $e_{A n}$, горизонтальные прямые: $e_\alpha = \pm 1.60''$, $e_\delta = \pm 1.06''$, $e_A = \pm 19.29$.

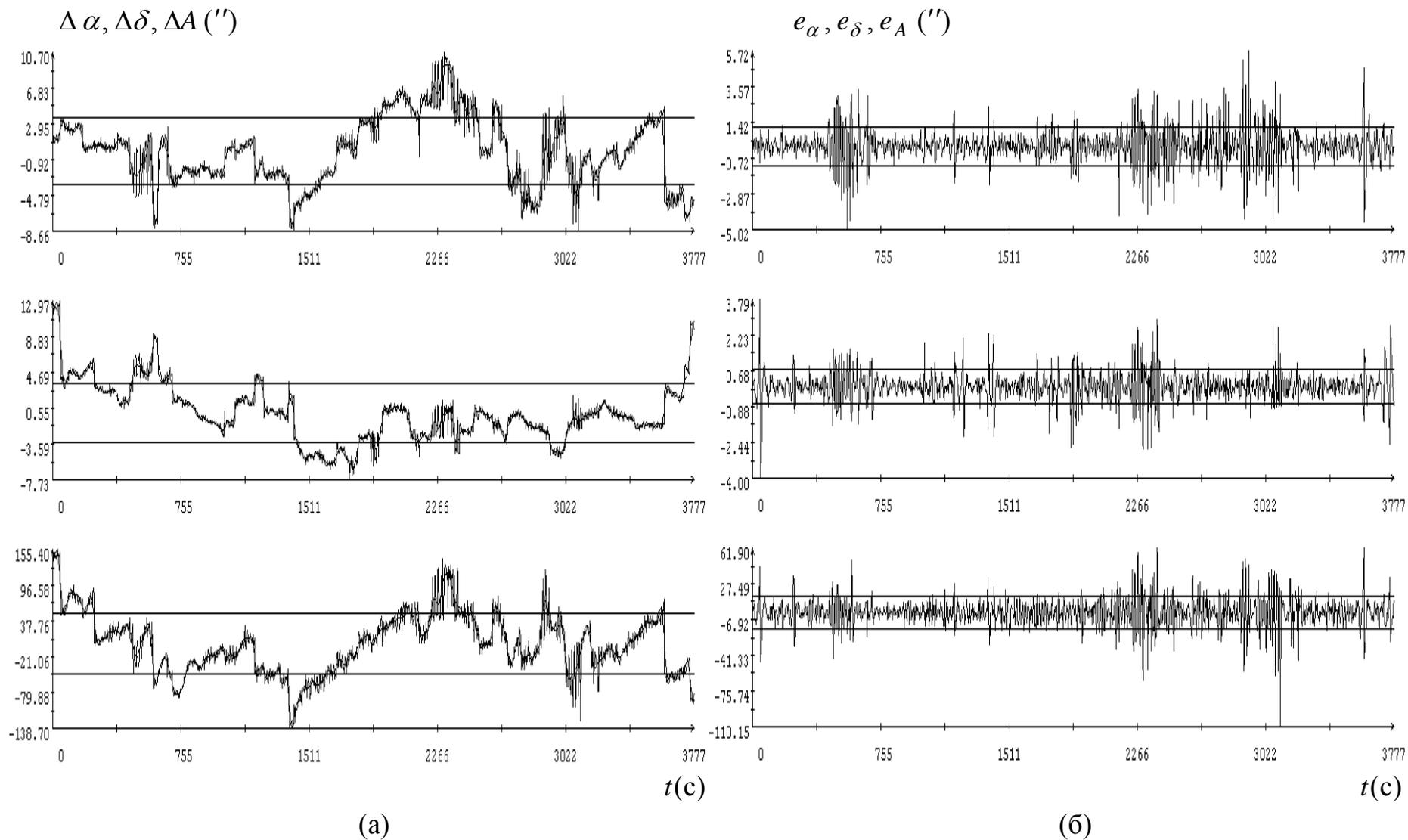
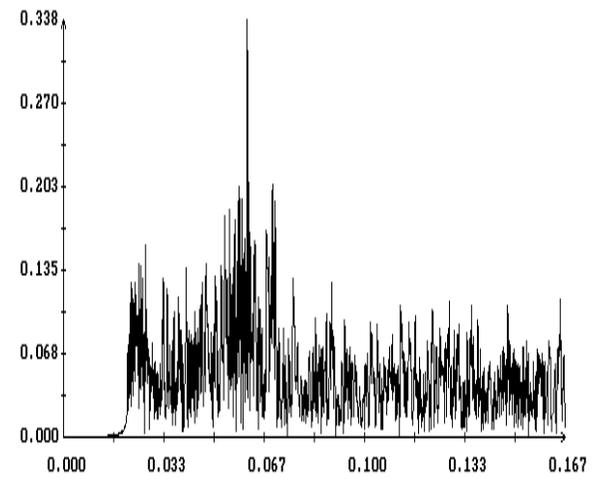
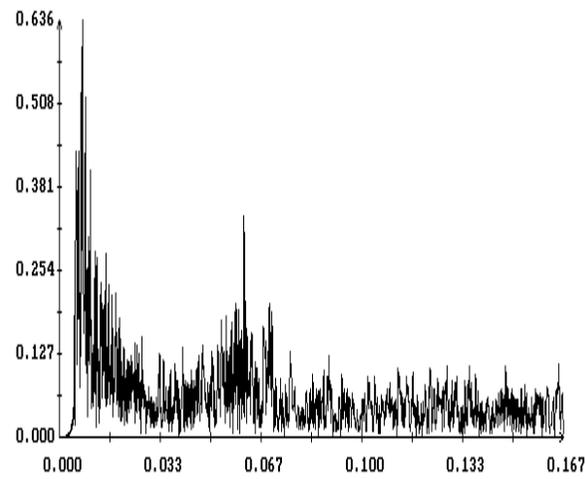
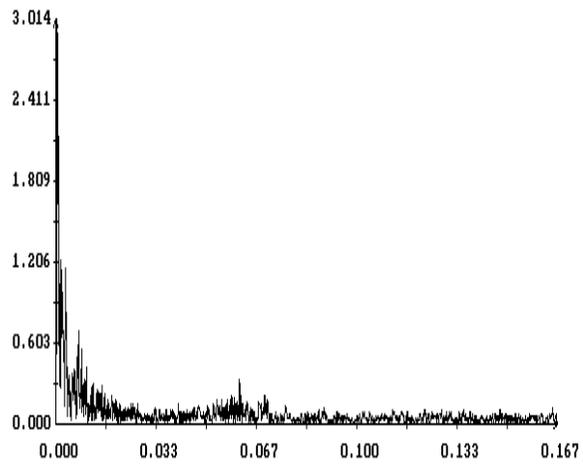
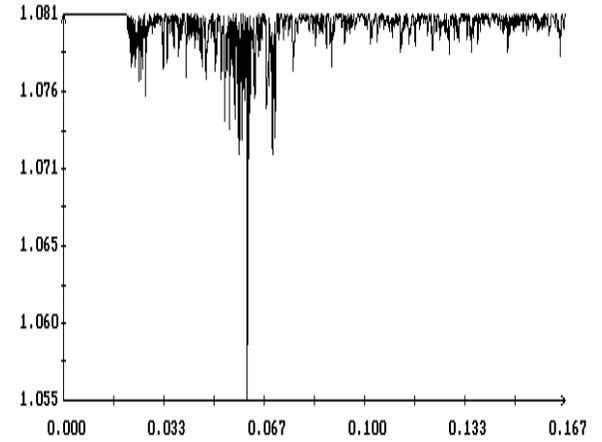
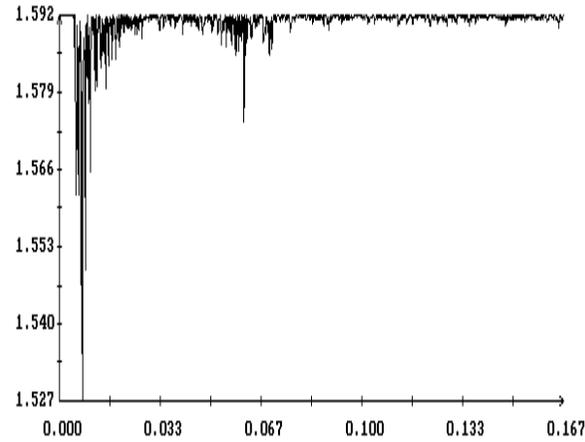
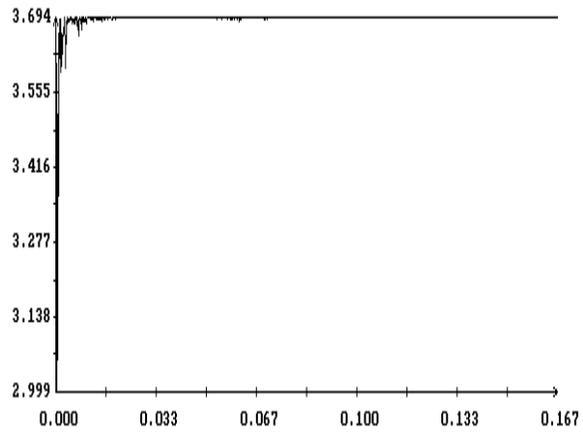


Рис. 9. Имитация геостационарной орбиты; (а) графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n$, $\Delta\delta_n$, ΔA_n и функций χ_α , χ_δ , χ_A для $M = 160$, горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha$, $\Delta\delta = \pm\sigma_\delta$, $\Delta A = \pm\sigma_A$; (б) графики остатков $e_{\alpha n}$, $e_{\delta n}$, $e_{A n}$, горизонтальные прямые: $e_\alpha = \pm 1.16''$, $e_\delta = \pm 0.72''$, $e_A = \pm 15.23''$.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

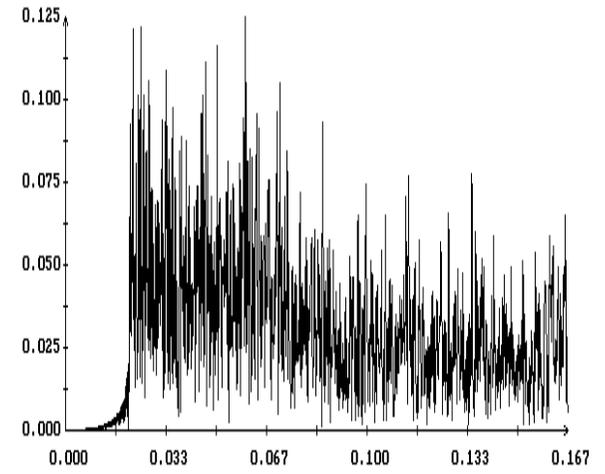
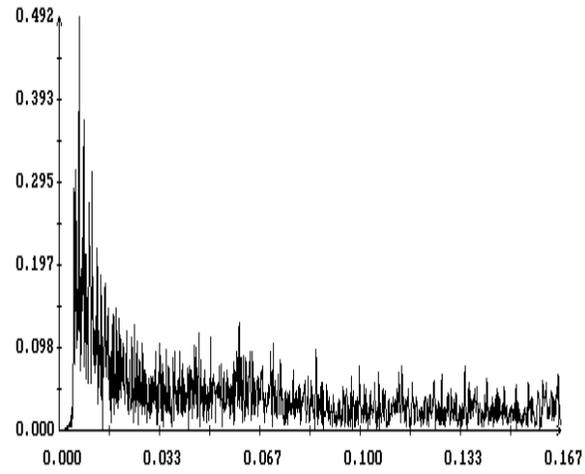
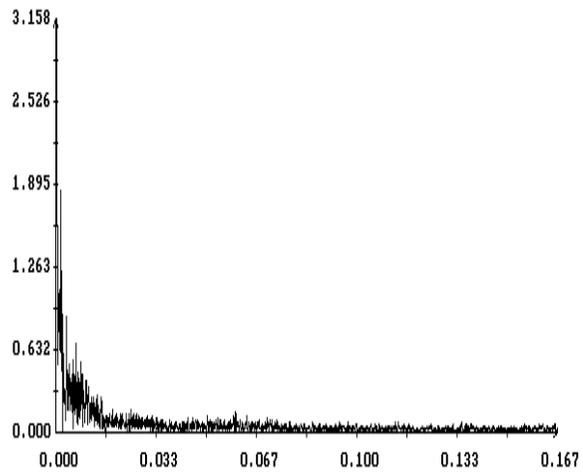
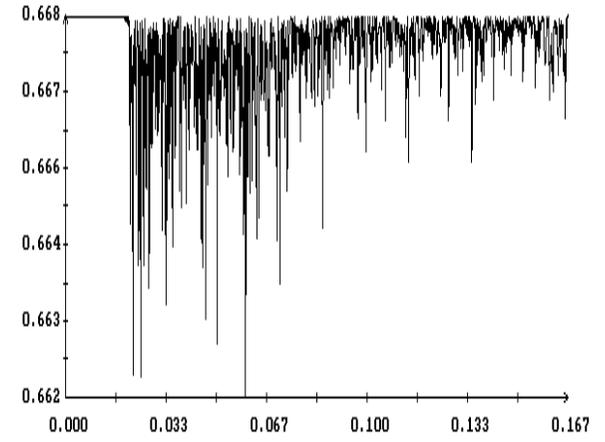
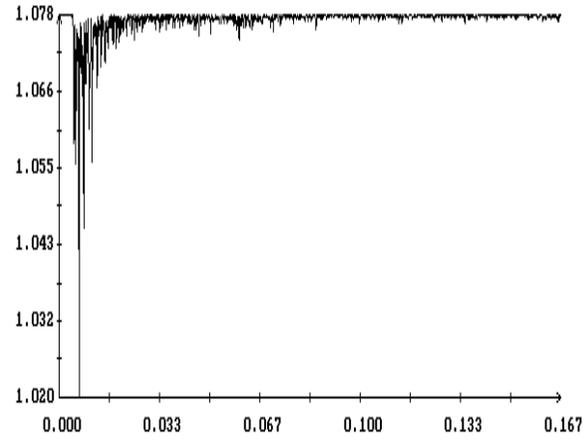
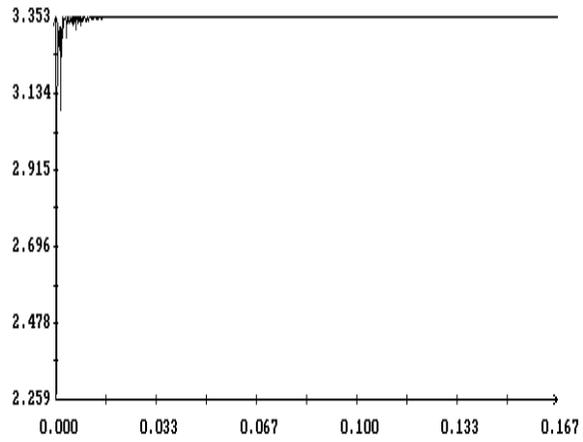
(а)

(б)

(в)

Рис. 10. Имитация геостационарной орбиты. Периодограммы: а) ряда $\Delta\alpha_n$, б) ряда $e_{\alpha n}$ при $M=35$, в) ряда $e_{\alpha n}$ при $M=160$.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

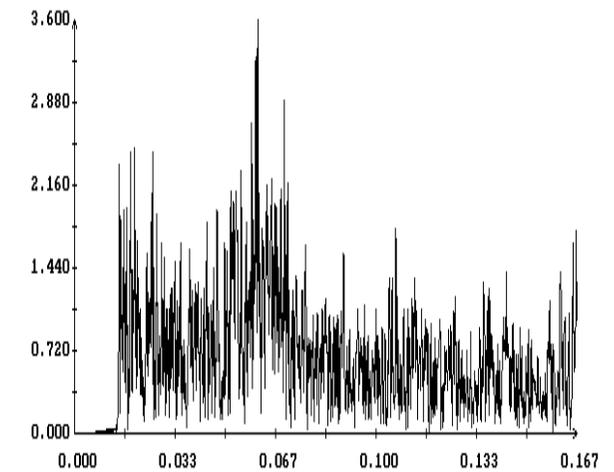
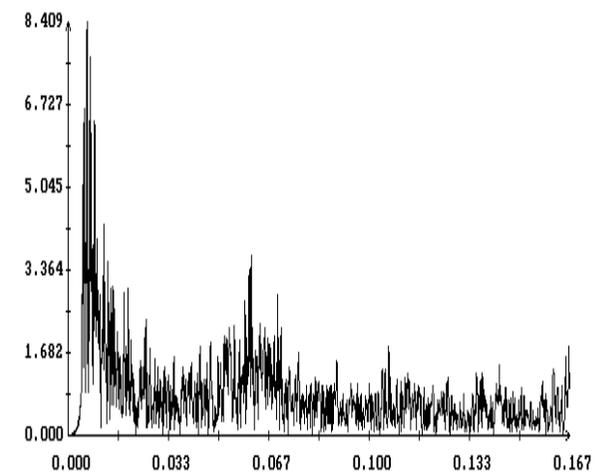
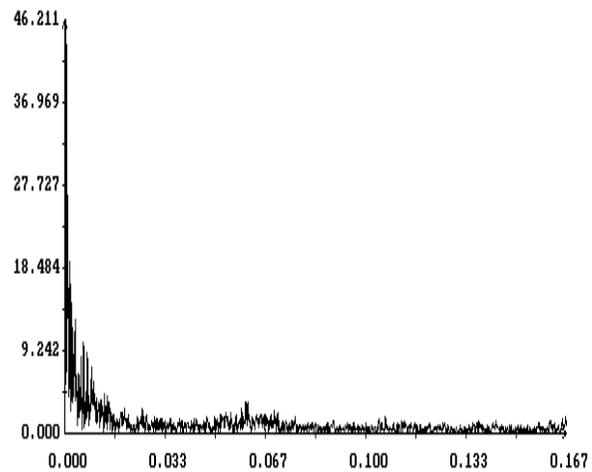
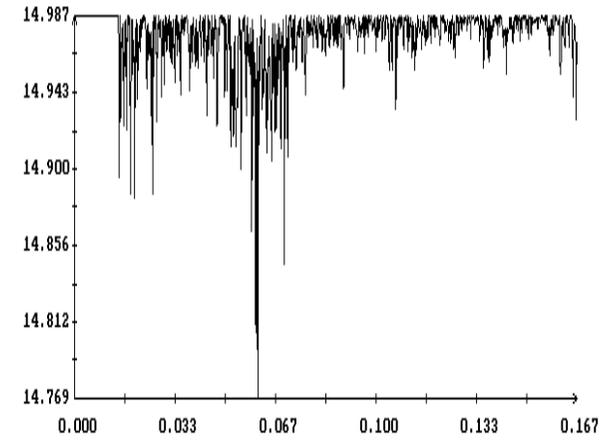
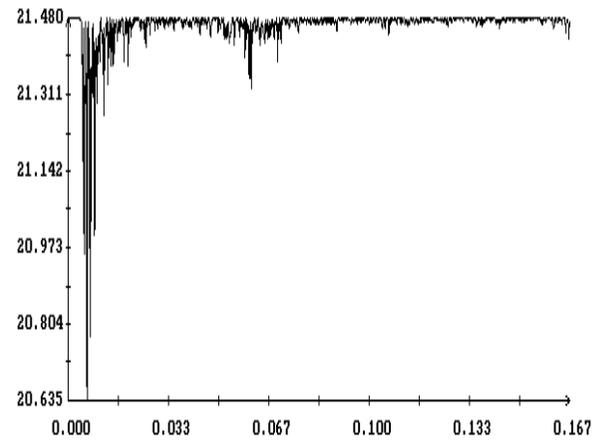
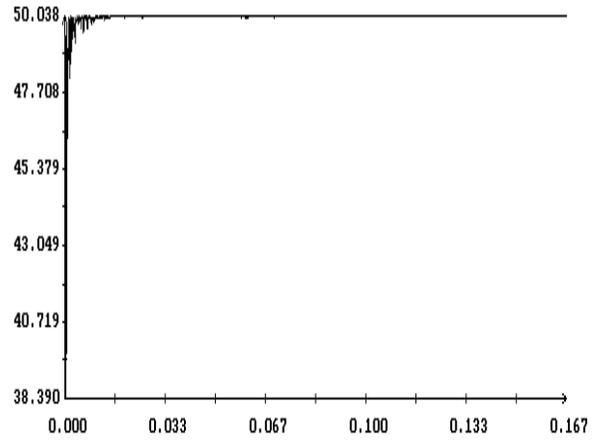
(а)

(б)

(в)

Рис. 11. Имитация геостационарной орбиты. Периодограммы: а) ряда $\Delta\delta_n$, б) ряда $e_{\delta n}$ при $M = 35$, в) ряда $e_{\delta n}$ при $M = 160$.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

(а)

(б)

(в)

Рис. 12. Имитация геостационарной орбиты. Периодограммы: а) ряда ΔA_n , б) ряда e_{An} при $M = 35$, в) ряда e_{An} при $M = 160$.

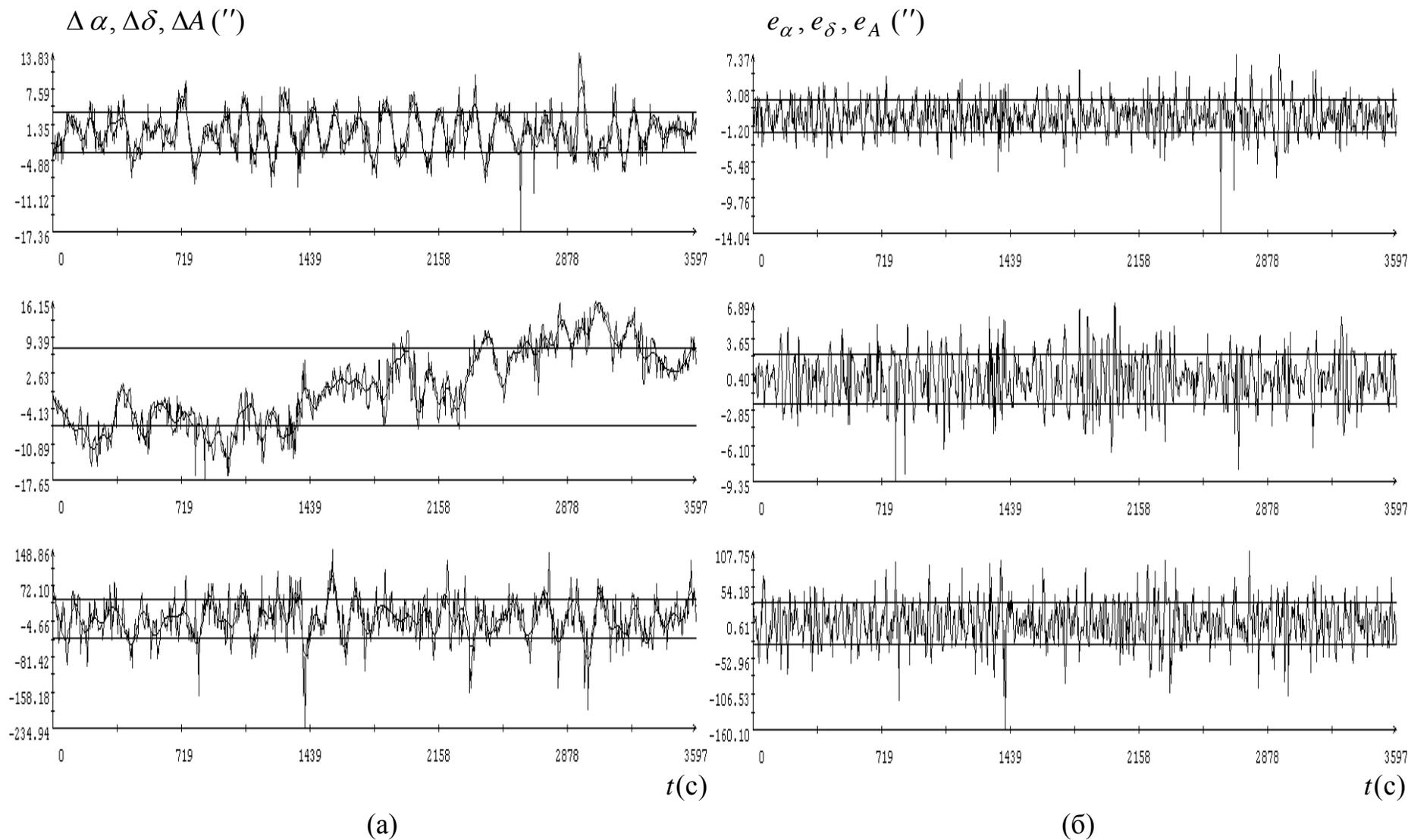


Рис. 13. Имитация низкой орбиты; (а) графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n, \Delta\delta_n, \Delta A_n$ и функций $\chi_\alpha, \chi_\delta, \chi_A$ для $M = 80$, горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha, \Delta\delta = \pm\sigma_\delta, \Delta A = \pm\sigma_A$; (б) графики остатков $e_{\alpha n}, e_{\delta n}, e_{A n}$, горизонтальные прямые: $e_\alpha = \pm 2.02''$, $e_\delta = \pm 2.23''$, $e_A = \pm 31.68''$.

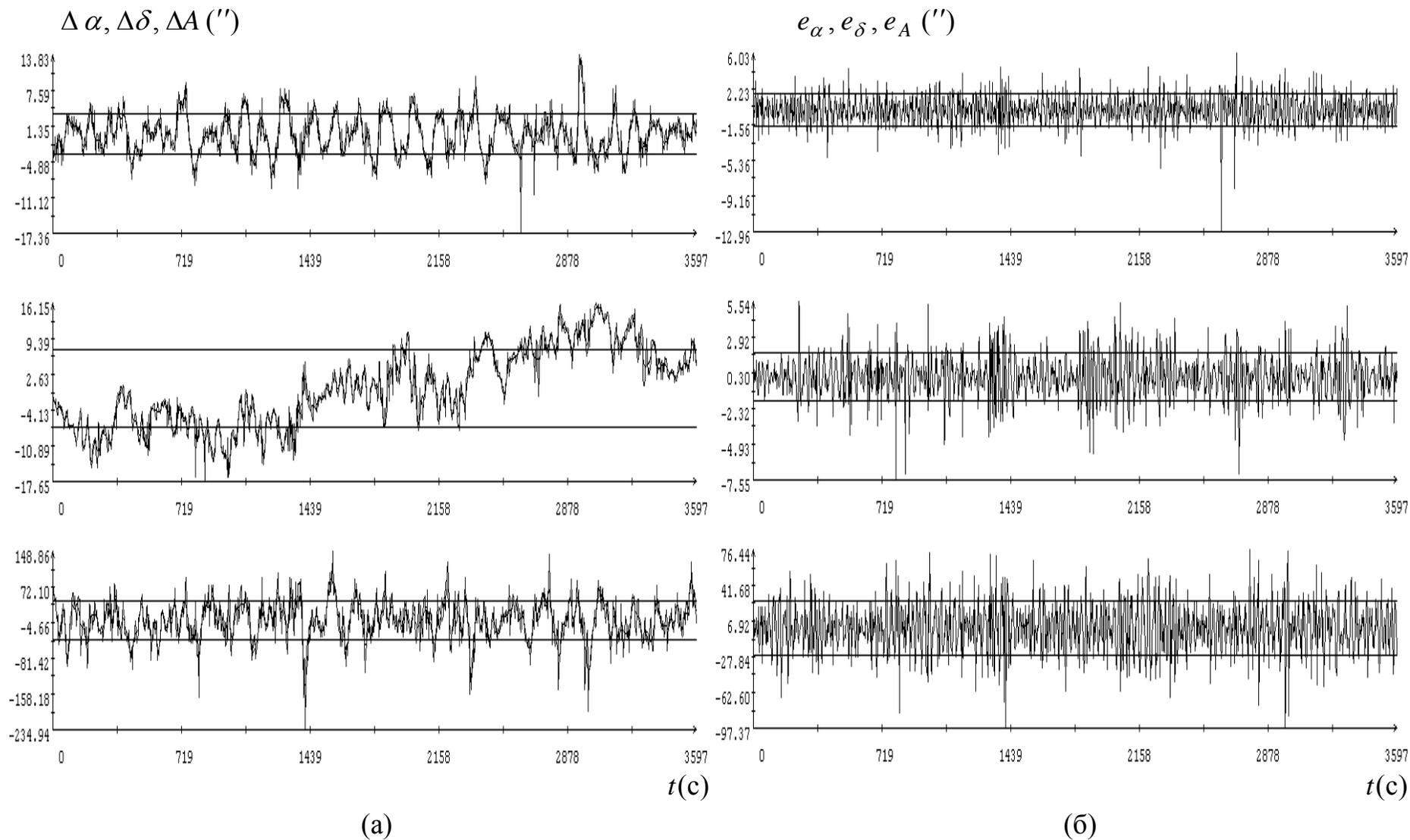
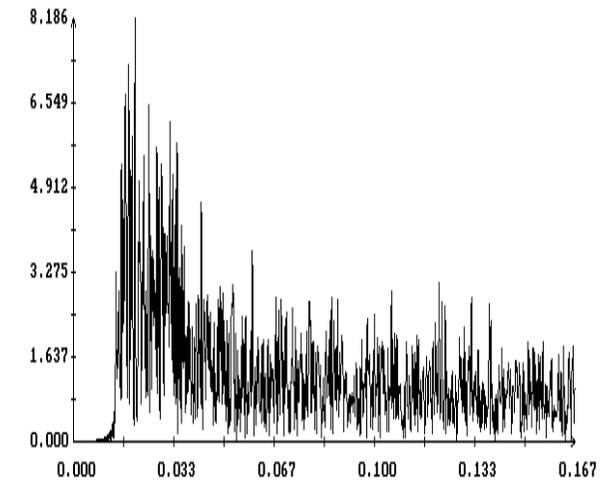
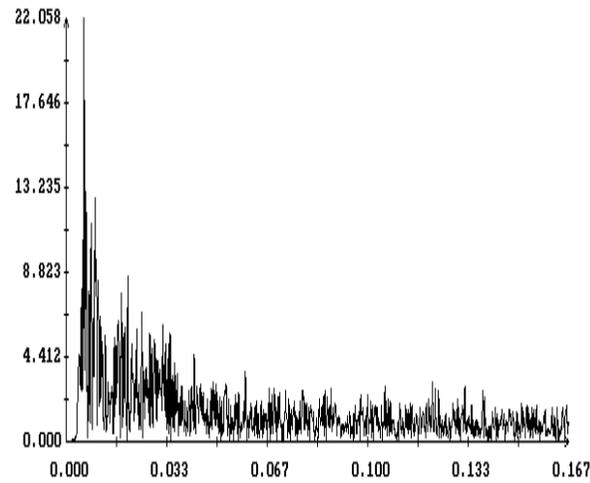
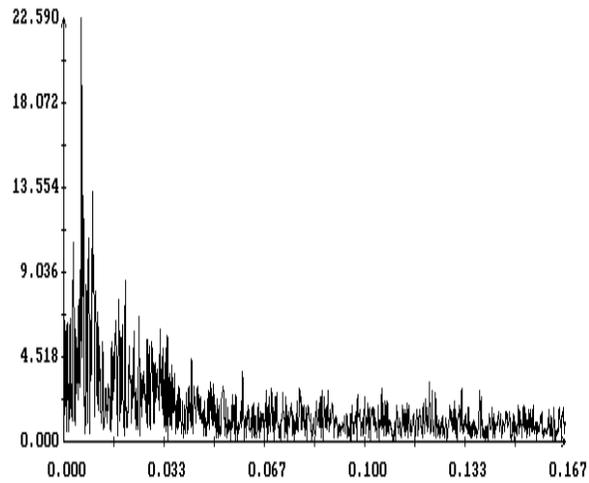
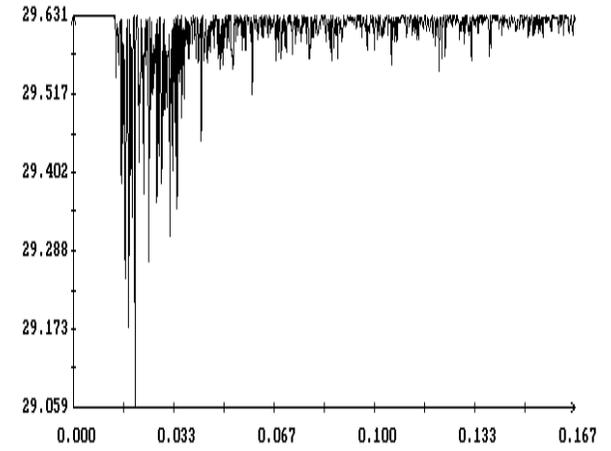
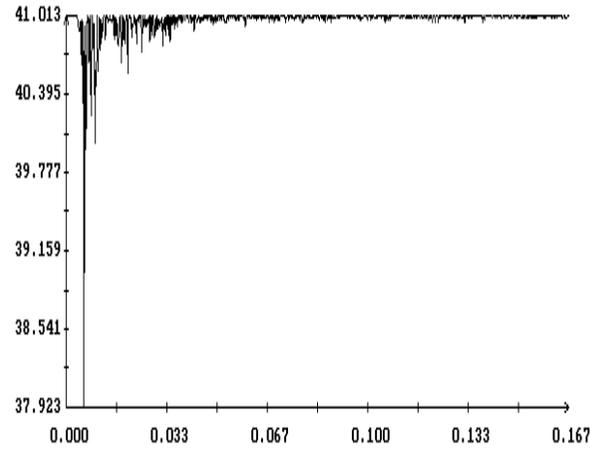
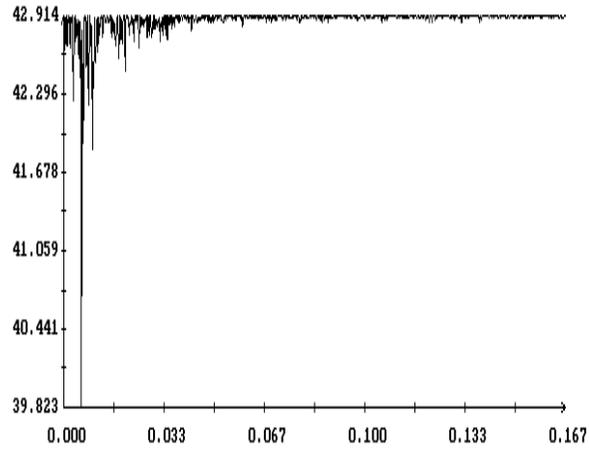


Рис. 14. Имитация низкой орбиты; (а) графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n$, $\Delta\delta_n$, ΔA_n и функций χ_α , χ_δ , χ_A для $M = 200$, горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha$, $\Delta\delta = \pm\sigma_\delta$, $\Delta A = \pm\sigma_A$; (б) графики остатков $e_{\alpha n}$, $e_{\delta n}$, $e_{A n}$, горизонтальные прямые: $e_\alpha = \pm 1.66''$, $e_\delta = \pm 1.73''$, $e_A = \pm 26.15''$.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

(а)

(б)

(в)

Рис. 17. Имитация низкой орбиты. Периодограммы: а) ряда ΔA_n , б) ряда e_{An} при $M = 25$, в) ряда e_{An} при $M = 100$.

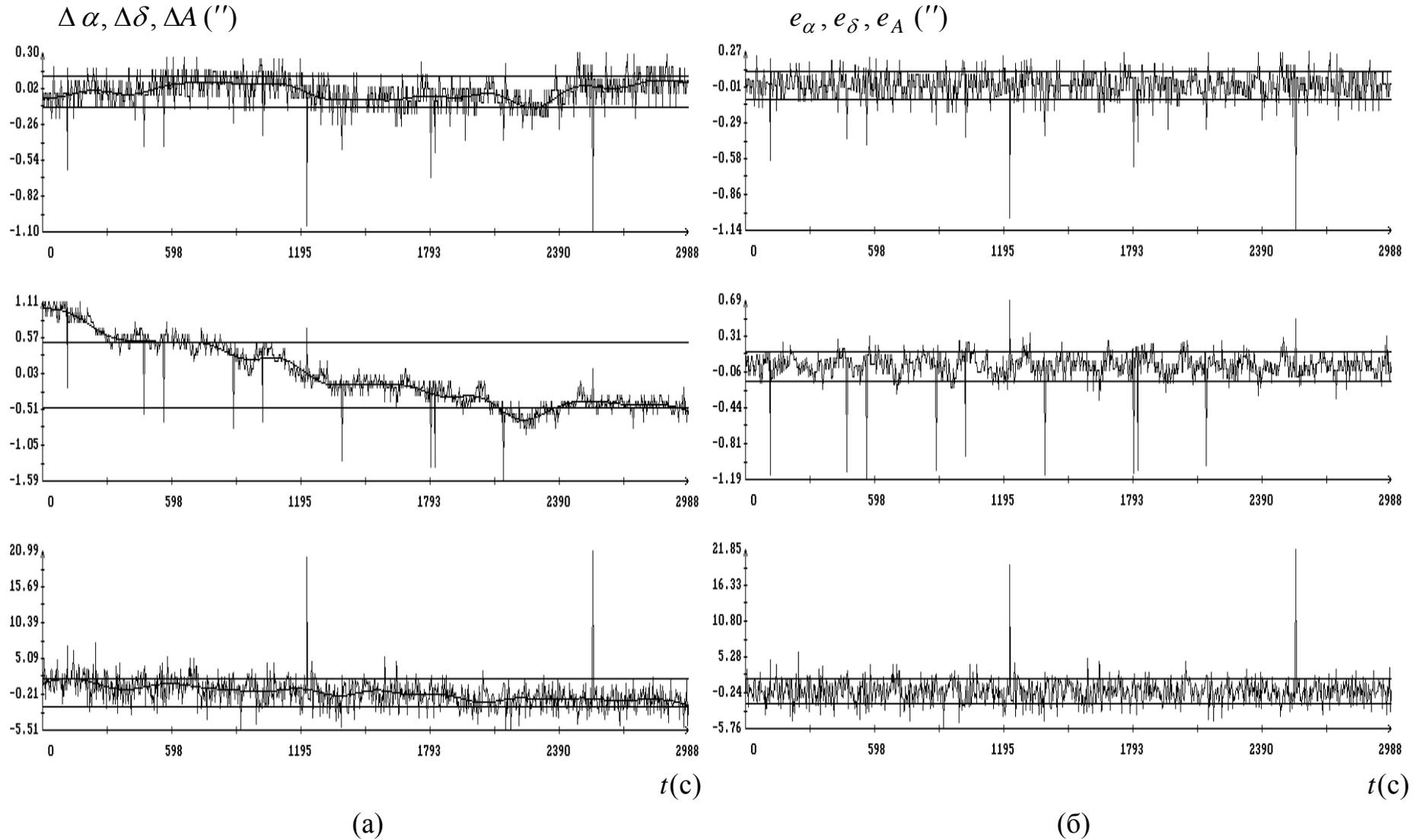


Рис. 18. Имитация покоя в абсолютном пространстве; (а) графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n$, $\Delta\delta_n$, ΔA_n и функций χ_α , χ_δ , χ_A для $M = 20$, горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha$, $\Delta\delta = \pm\sigma_\delta$, $\Delta A = \pm\sigma_A$; (б) графики остатков $e_{\alpha n}$, $e_{\delta n}$, $e_{A n}$, горизонтальные прямые: $e_\alpha = \pm 0.1145''$, $e_\delta = \pm 0.1531''$, $e_A = \pm 1.912''$.

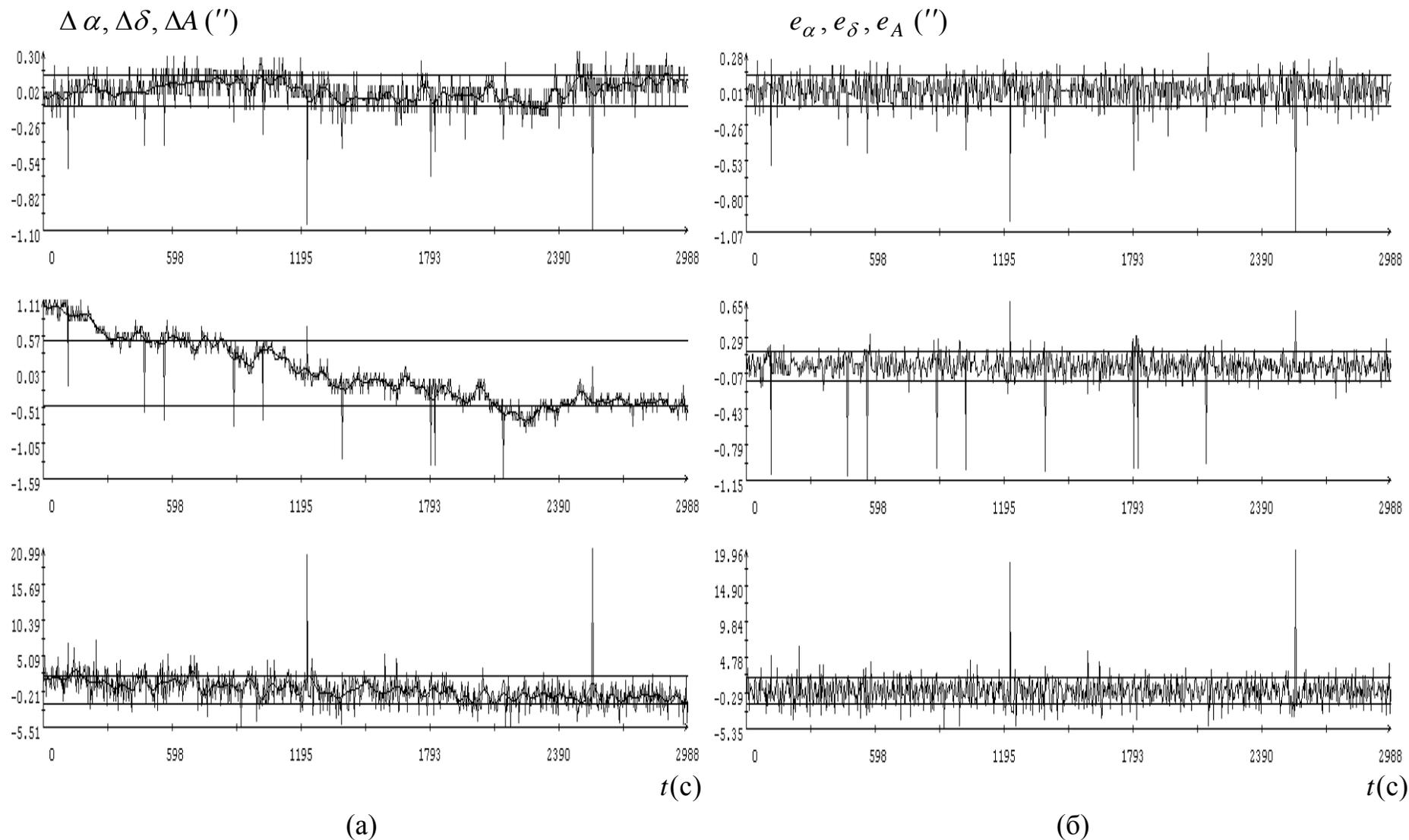


Рис. 19. Имитация покоя в абсолютном пространстве; (а) графики ошибок аппроксимации $\Delta\alpha_n$, $\Delta\delta_n$, ΔA_n и функций χ_α , χ_δ , χ_A для $M = 80$, горизонтальные прямые: $\Delta\alpha = \pm\sigma_\alpha$, $\Delta\delta = \pm\sigma_\delta$, $\Delta A = \pm\sigma_A$; (б) графики остатков $e_{\alpha n}$, $e_{\delta n}$, $e_{A n}$, горизонтальные прямые: $e_\alpha = \pm 0.1143''$, $e_\delta = \pm 0.1454''$, $e_A = \pm 1.877''$.

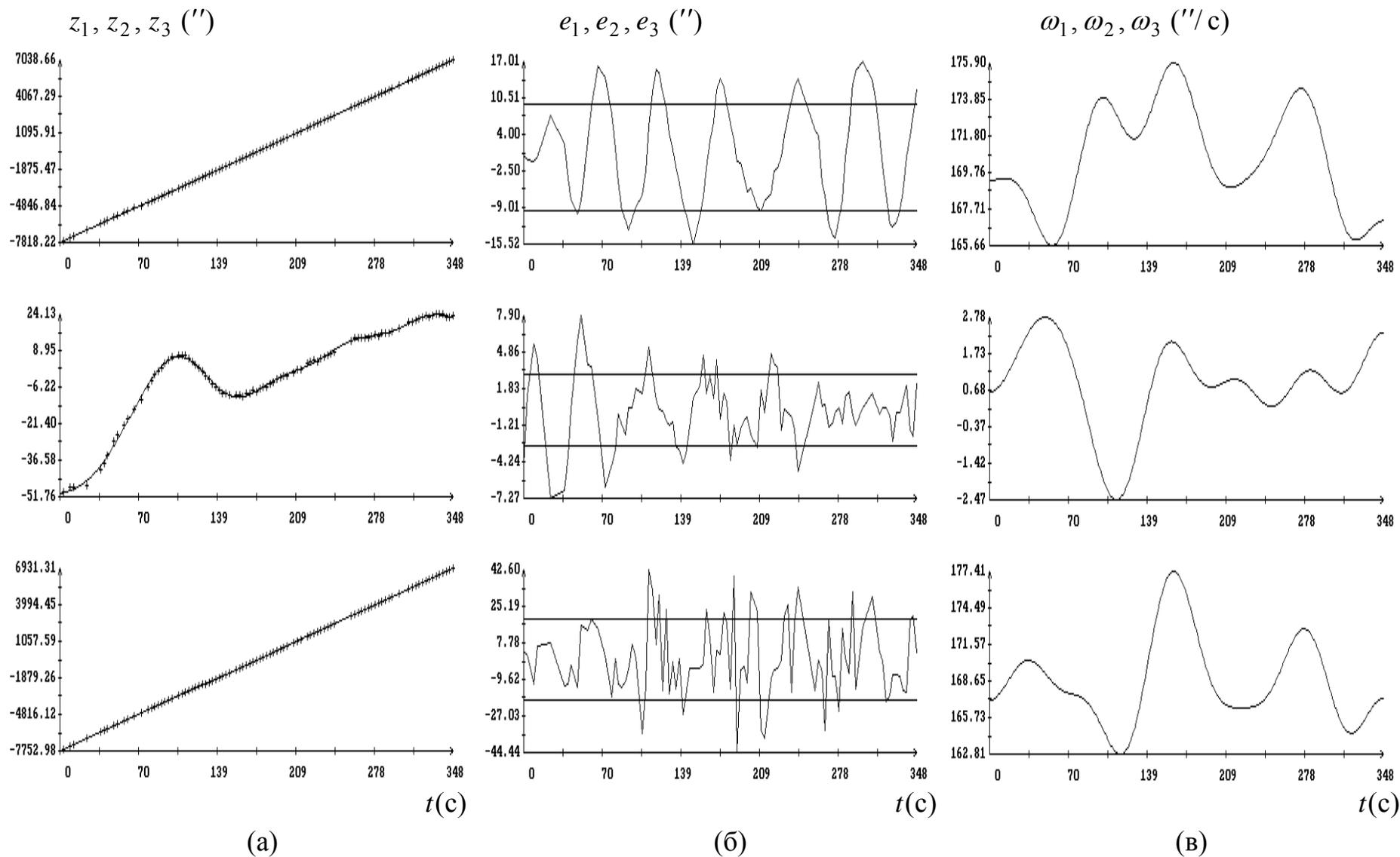


Рис. 23. Данные, полученные в космическом полете; (а) аппроксимация параметров Родрига, $M = 10$, $\sigma_1 = 9.49''$, $\sigma_2 = 2.96''$, $\sigma_3 = 19.3''$; (б) ошибки аппроксимации, горизонтальные прямые: $e_i = \pm \sigma_i$; (в) оценка угловой скорости.

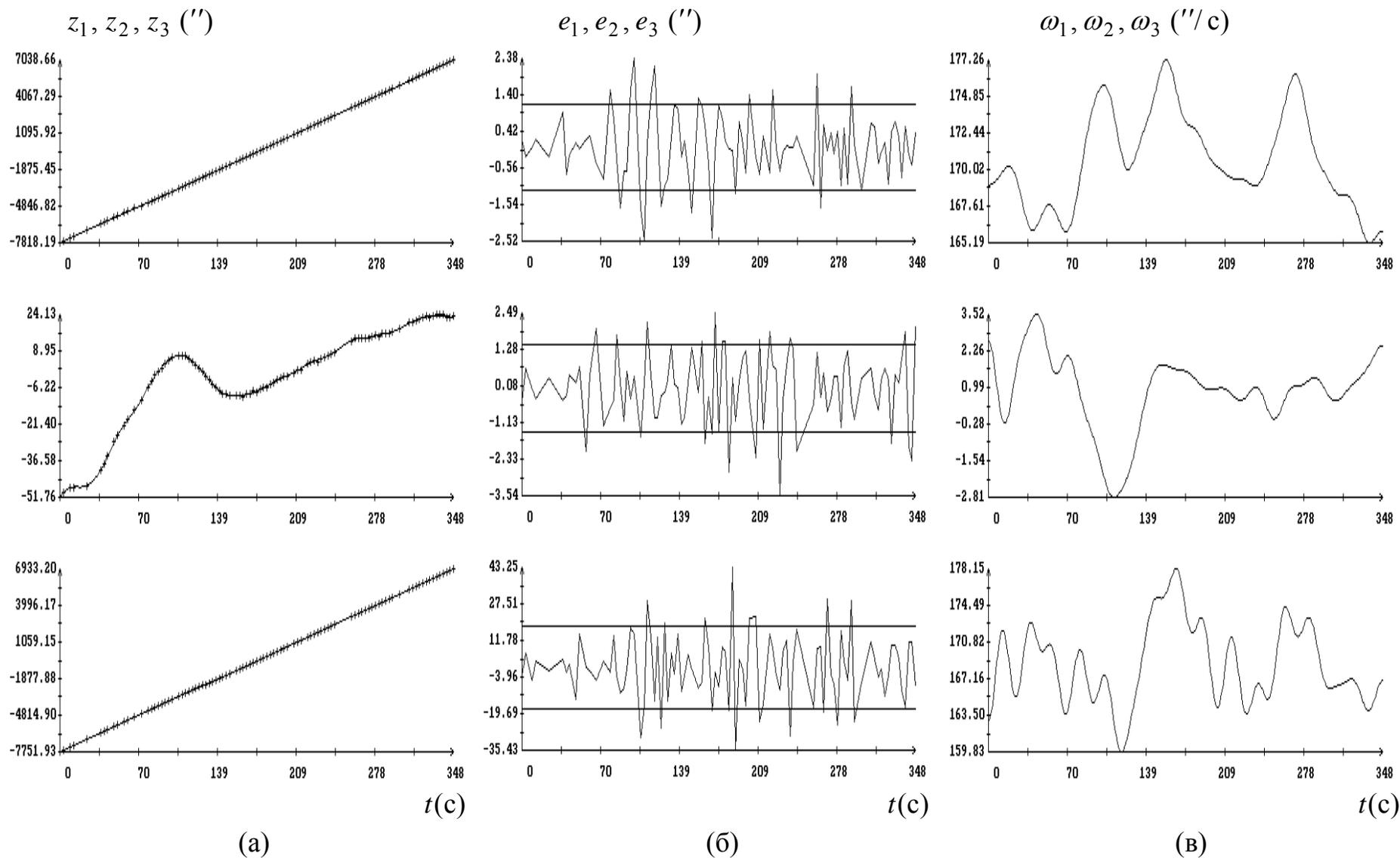


Рис. 24. Данные, полученные в космическом полете; (а) аппроксимация параметров Родрига, $M = 30$, $\sigma_1 = 1.15''$, $\sigma_2 = 1.46''$, $\sigma_3 = 17.6''$; (б) ошибки аппроксимации, горизонтальные прямые: $e_i = \pm \sigma_i$ (в) оценка угловой скорости.

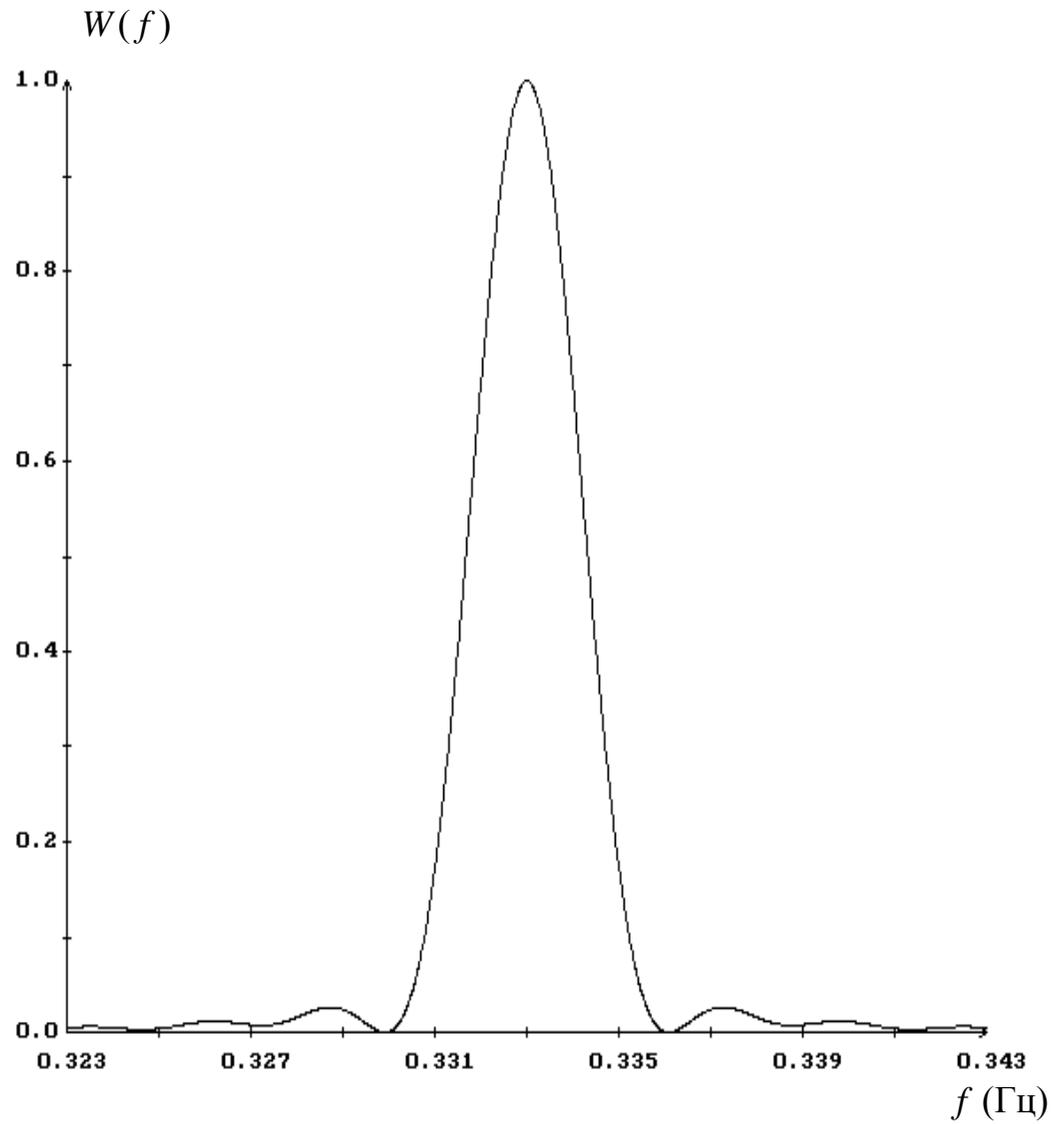
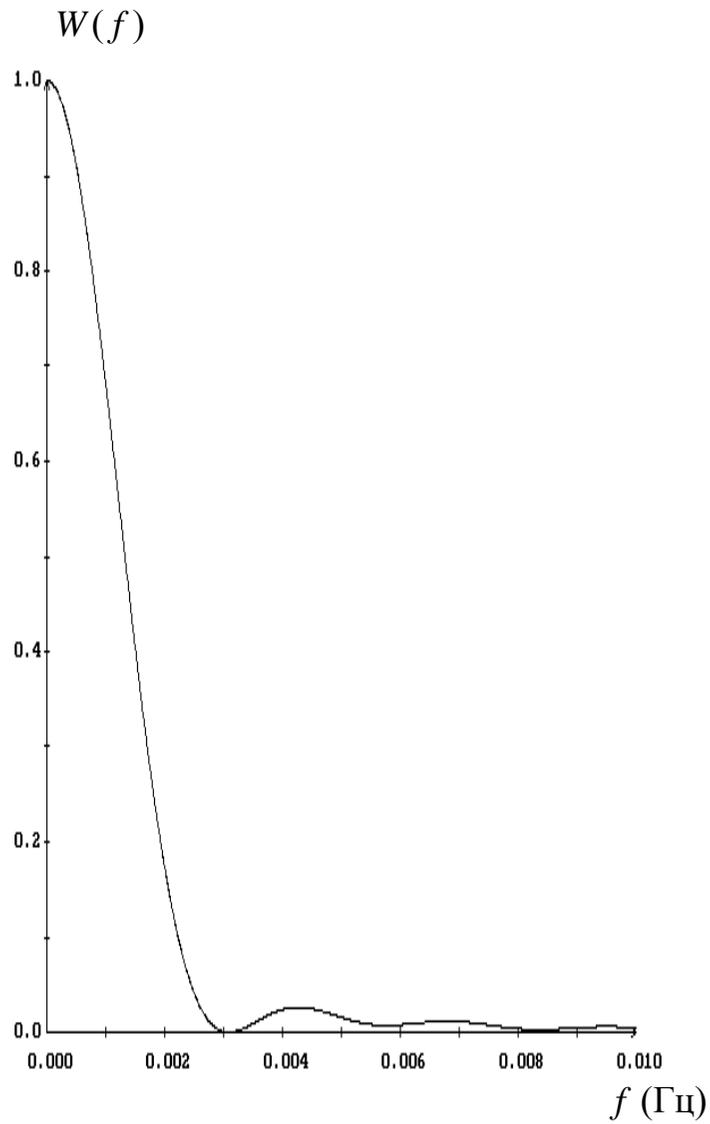
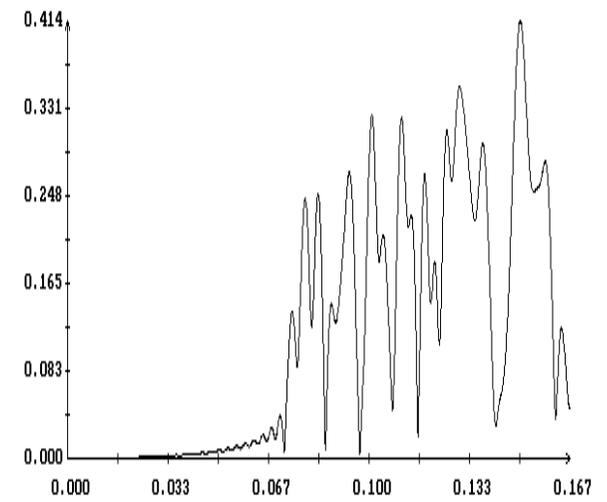
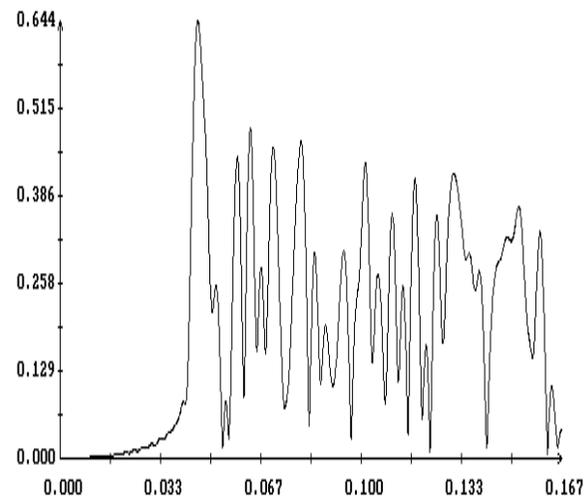
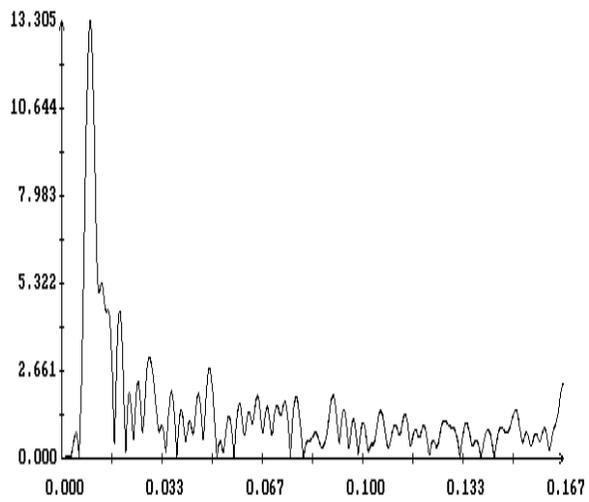
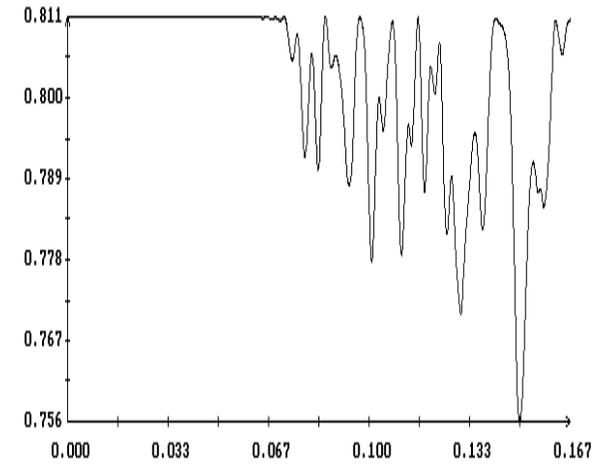
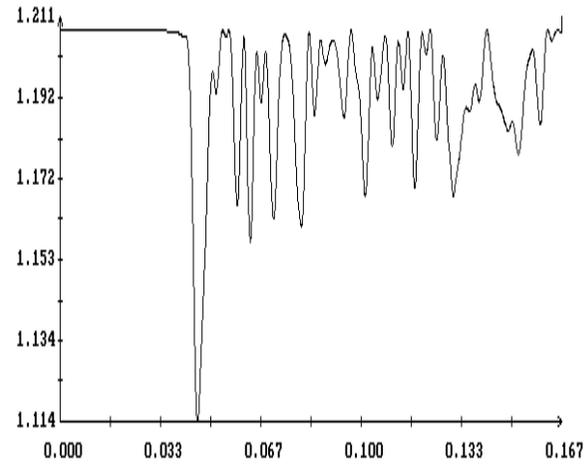
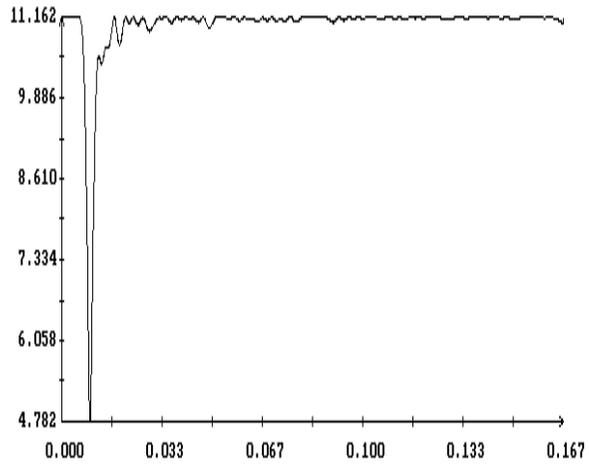


Рис. 25. Измерения в космосе. Графики функции окна, иллюстрирующих два ее последовательных максимума.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

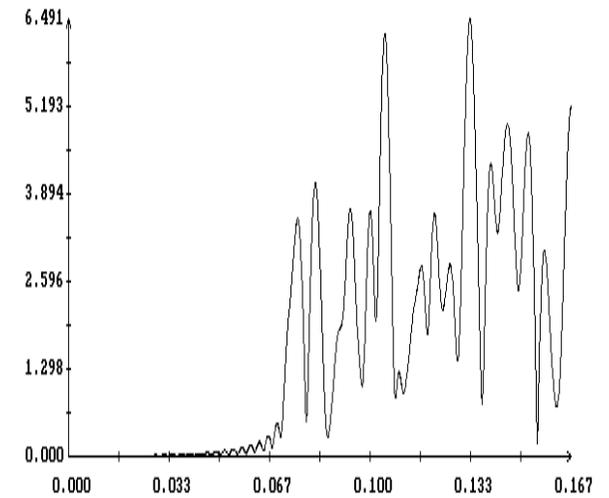
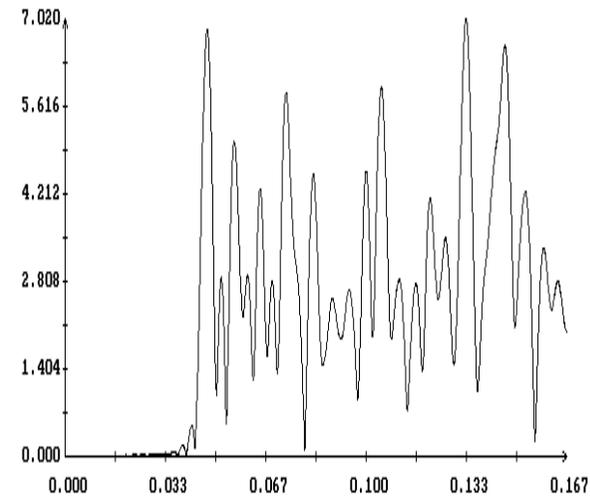
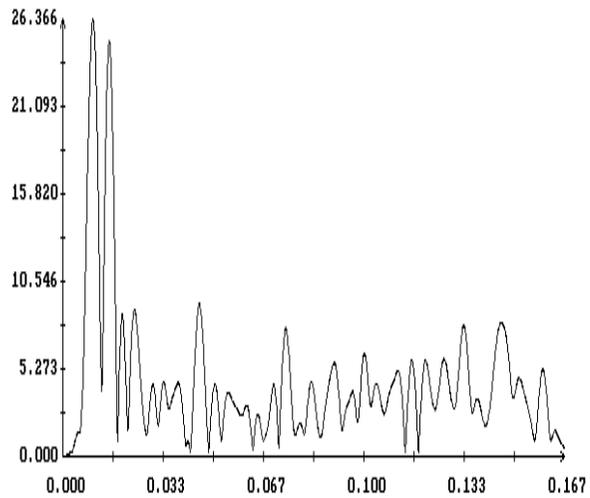
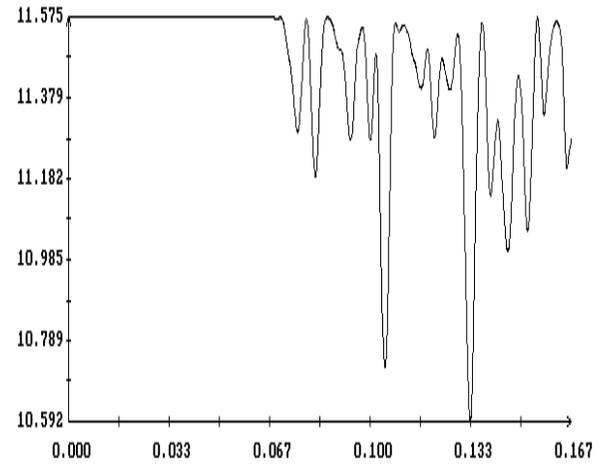
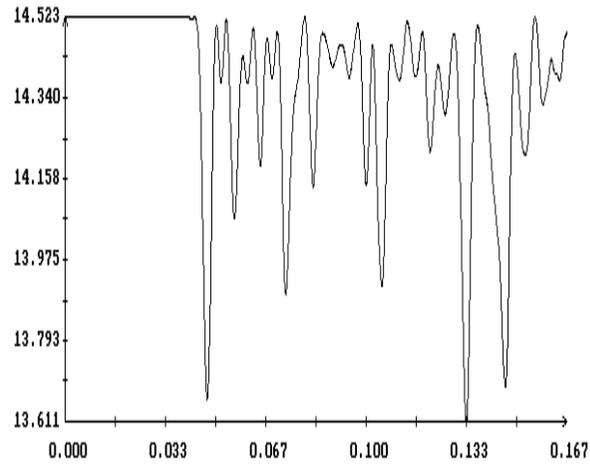
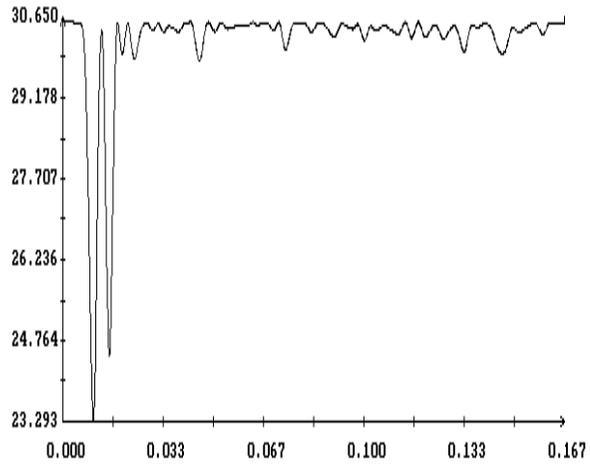
(а)

(б)

(в)

Рис. 27. Измерения в космосе. Периодограммы ряда $e_2^{(n)}$: а) при $M = 5$, б) при $M = 30$, в) при $M = 50$.

$E(f), A(f) (")$



f (Гц)

(а)

(б)

(в)

Рис. 28. Измерения в космосе. Периодограммы ряда $e_3^{(n)}$: а) при $M = 5$, б) при $M = 30$, в) при $M = 50$.