



Сазонов В.В.

Применение усредненных
уравнений движения
космических объектов для
аппроксимации траекторных
измерений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сазонов В.В. Применение усредненных уравнений движения космических объектов для аппроксимации траекторных измерений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 74. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-74>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

В.В. Сазонов

**ПРИМЕНЕНИЕ УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ
КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ
ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Москва – 2009

Аннотация

Оценка накопления космического мусора в околоземном пространстве требует исследования эволюции движения большой совокупности тел, имеющих разнообразные орбиты. Здесь необходимо использовать средства достаточно точного и быстрого расчета движения одного тела с учетом основных возмущающих факторов: сжатия Земли, сопротивления атмосферы, притяжения Луны и Солнца, светового давления. Традиционным и удобным средством такого рода является система уравнений в оскулирующих элементах, усредненная по орбитальному движению тела. В данной работе оценивается точность применения усредненной системы для аппроксимации движения реальных спутников Земли, совершающих неуправляемое движение и аналогичных в этом отношении телам космического мусора. Рассмотрены низкоорбитальный спутник «Фотон М-3» и резонансный спутник «Молния-2». Движение этих спутников описывается разными усредненными системами, точность которых оценивается двумя способами – сравнением их решений с решениями соответствующих полных систем уравнений движения и посредством аппроксимации решениями усредненных и полных систем наборов двухстрочных элементов, полученных для выбранных спутников на сравнительно продолжительных интервалах времени. Первый из этих способов показал, что усредненные системы достаточно точно описывают вековое изменение орбитальных элементов, второй способ показал, что решения полных уравнений аппроксимируют двухстрочные элементы в 1.5 – 2 раза точнее.

V.V. Sazonov. Application of average equations of space body for approximation of trajectory measurements. Evaluation of space debris accumulation in the near-Earth space demands investigations of time evolution of motions of a large set of space bodies with various orbits. A means of fast and precise calculation of a body orbit is needed for these investigations and the calculation must take into account the main disturbing factors: Earth oblateness, atmosphere drag, gravitation of Moon and Sun, solar radiation pressure. The most abundant means of the orbit evolution study is an averaged system of differential equations for osculating orbital elements. We evaluate in this paper the accuracy of averaged systems for approximation of motion of real Earth satellites that move without any control and are similar in this relation to space debris bodies. We consider two satellites: low-orbiting Foton M-3 and resonance Molniya 2. The different averaged systems are used for description of their motion. We evaluate the accuracy of those systems by two ways. First, we compare solutions of each system with solutions of appropriate full equations of satellite motion. Second, we try to approximate the satellite two line elements by solutions of the averaged and full systems. It turned out, that the averaged systems give a sufficiently precise description of secular variation of satellite orbital elements but give 1.5 – 2 times greater errors at approximating of two line elements than the full systems.

1. Усредненная система. Фазовыми переменными усредненной системы, описывающей движение тела (космического аппарата или частицы мусора) на околоземной орбите, служат средняя аномалия M и элементы оскулирующей орбиты тела: большая полуось a , эксцентриситет e , долгота восходящего узла Ω , наклонение i , аргумент широты перигея ω . Последние три элемента относятся ко второй геоэкваatorialной системе координат [1]. Для удобства ссылок усредненную систему запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= F_{a,A} + F_{a,P}, \\
 \frac{de}{dt} &= F_{e,E} + F_{e,A} + F_{e,M} + F_{e,S} + F_{e,P}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= F_{\Omega,E} + F_{\Omega,A} + F_{\Omega,M} + F_{\Omega,S} + F_{\Omega,P}, \\
 \frac{di}{dt} &= F_{i,E} + F_{i,A} + F_{i,M} + F_{i,S} + F_{i,P}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= F_{\omega,E} + F_{\omega,A} + F_{\omega,M} + F_{\omega,S} + F_{\omega,P}, \\
 \frac{dM}{dt} &= n + F_{M,E} + F_{M,A} + F_{M,M} + F_{M,S} + F_{M,P}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t – время, $n = \sqrt{\mu_E / a^3}$ – среднее движение тела, μ_E – гравитационный параметр Земли, первый индекс у слагаемых в правой части указывает на соответствующую фазовую переменную, второй индекс указывает на описываемое возмущение. Слагаемые со вторым индексом E учитывают вторую, третью и четвертую зональные гармоники гравитационного потенциала Земли. Эти члены взяты из работ [2, 3]. Слагаемые со вторыми индексами M и S учитывают гравитационные возмущения со стороны Луны и Солнца соответственно, слагаемые со вторым индексом P учитывают возмущения от светового давления прямого излучения Солнца. Эти три типа слагаемых рассчитываются по формулам работы [4]. Слагаемые со вторым индексом A учитывают сопротивление атмосферы. Усреднение возмущающего действия атмосферы и решение системы (1) выполнялось численно. Более детально система (1) описана в [5]. Там же описано сравнение решений этой системы с решениями уравнений, которые являются исходными при ее выводе.

Сравнение проводилось в несколько этапов. На каждом этапе в системе (1) сохранялись только некоторые возмущающие члены (остальные отбрасывались), и решения такой усеченной системы сравнивались с решениями соответствующих исходных уравнений движениями тела, которые были записаны в декартовых координатах во второй геоэкваatorialной системе [1] и в которых учитывались те же возмущения, что и в (1). Элементы орбиты и среднюю аномалию тела, рассчитанные вдоль решения исходных уравнений, обозначим

$a_1(t)$, $e_1(t)$, $\Omega_1(t)$, $i_1(t)$, $\omega_1(t)$ и $M_1(t)$. Сравнение заключалось в выделении из функций $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $M_1(t)$ вековой составляющей и аппроксимации ее решением системы (1). Во всех случаях такая аппроксимация оказалась достаточно точной на продолжительных отрезках времени [5]. Ниже сравнение продолжено более сложными способами и в более сложных задачах.

2. Тестирование членов усредненной системы, описывающих нецентральность гравитационного поля Земли. Согласно теории Liu [2, 3] усредненная система, в которой учитывается только нецентральность гравитационного поля Земли, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = F_{e,E}(a, e, i, \omega), \quad \frac{d\Omega}{dt} = F_{\Omega,E}(a, e, i, \omega), \\ \frac{di}{dt} = F_{i,E}(a, e, i, \omega), \quad \frac{d\omega}{dt} = F_{\omega,E}(a, e, i, \omega), \quad \frac{dM}{dt} = n(a) + F_{M,E}(a, e, i, \omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Как уже говорилось, в этой системе учитывается вторая, третья и четвертая зональные гармоники гравитационного потенциала Земли. Кроме системы (2), в [2, 3] приведены также близкие к тождественным выражения

$$a' = g_a(a, e, i, \omega, f), \quad e' = g_e(a, e, i, \omega, f), \quad i' = g_i(a, e, i, \omega, f), \quad (3)$$

$$\Omega' = g_\Omega(a, e, i, \omega, M, f), \quad \omega' = g_\omega(a, e, i, \omega, M, f), \quad M' = g_M(a, e, i, \omega, f),$$

которые учитывают главные колебательные члены (они имеют частоты, кратные среднему движению n) в функциях $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $M_1(t)$. Здесь f – истинная аномалия, которая должна быть выражена через среднюю аномалию M . Наличие уточняющих выражений (3) позволяет провести еще один тест теории Liu, который не был рассмотрен в [5].

Исходными уравнениями для системы (2) будем считать уравнения, в которых учитывается единственное возмущение, создаваемое нецентральностью гравитационного поля Земли порядка (4,4). Здесь имеется в виду максимальный порядок сохраняемых шаровых функций в разложении геопотенциала в ряд по таким функциям. Рассмотрим решение исходных уравнений с начальными условиями, заданными в восходящем узле орбиты тела в момент $t_0 = 0^h$ UTC 27.12.2008 соотношениями: радиус перигея $r_\pi = r_E + 100$ км, радиус апогея $r_\alpha = r_E + 600$ км, $\Omega = 150^\circ$, $i = 51^\circ$, $\omega = 30^\circ$. Графики функций $a_1(t)$, $e_1(t)$, $\Omega_1(t)$, $i_1(t)$, $\omega_1(t)$ и $\delta M(t) = M_1(t) - (t - t_0)[M_1(T + t_0) - M_1(t_0)]/T$ в этом решении приведены на рис. 1. Решение вычислено на отрезке времени длиной $T \approx 2$ сут; графики суть ломаные, абсциссы вершин которых образуют равномерную временную сетку $\{t_l\}_{l=0}^L$, $L = 692$, $t_{l+1} - t_l = 250$ с.

Решения системы (2) преобразуем функциями (3) и составим функционал

$$\Phi = \sum_{l=0}^L \left\{ [a_1(t_l) - a'(t_l)]^2 + [e_1(t_l) - e'(t_l)]^2 + [\Omega_1(t_l) - \Omega'(t_l)]^2 + \right.$$

$$+ [i_1(t_l) - i'(t_l)]^2 + [\omega_1(t_l) - \omega'(t_l)]^2 + [M_1(t_l) - M'(t_l)]^2 \}.$$

Здесь углы выражены в радианах, большая полуось – в тысячах км. Будем минимизировать этот функционал по начальным условиям решения системы (2) точке t_0 . Решение, доставляющее этому функционалу минимум, преобразуем функциями (3) и сравним результат с исходными функциями $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $M_1(t)$. При выбранном масштабе рисунков графики одноименных величин из обоих наборов практически неразличимы. На рис. 2 показана разность между исходными функциями и построенными их аппроксимациями. Аналогичные расчеты были проведены для $L = 692 \times 4 = 2768$, $T \approx 8$ сут. Полученные при этом графики разностей между исходными функциями и построенными аппроксимациями приведены на рис. 3.

3. Исследование движения резонансного спутника с помощью усредненной системы. Проведенное в [5] исследование показало, что усредненная система (1) достаточно точна. В связи с этим возникает желание проверить ее на более сложных задачах. Одной из таких сложных задач является прогнозирование движения резонансного спутника Земли. А именно рассмотрим движение спутника с начальными условиями, заданными в восходящем узле орбиты тела в момент $t_0 = 0^h$ UTC 27.03.2008 следующими соотношениями: радиус перигея $r_\pi = r_E + 1400$ км, $n = 2\omega_E$, $\Omega = -145^\circ$, $i = \arccos 5^{-1/2} \approx 63.4^\circ$, $\omega = -90^\circ$. Орбита такого спутника похожа на орбиту спутника «Молния». Здесь имеется резонанс 2:1 между орбитальным движением спутника и собственным вращением Земли. Движение тела с указанными начальными условиями рассматривалось в [5], но там резонанс не возникал, поскольку и в усредненных системах, с помощью которых изучалась эволюция движения, и соответствующих исходных уравнениях не учитывалась нецентральность гравитационного поля Земли. Учет нецентральности меняет ситуацию.

Усредненную систему запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F_{a,RES}, & \frac{de}{dt} &= F_{e,E} + F_{e,M} + F_{e,S} + F_{e,RES}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= F_{\Omega,E} + F_{\Omega,M} + F_{\Omega,S} + F_{\Omega,RES}, & & (4) \\ \frac{di}{dt} &= F_{i,E} + F_{i,M} + F_{i,S} + F_{i,RES}, & \frac{d\omega}{dt} &= F_{\omega,E} + F_{\omega,M} + F_{\omega,S} + F_{\omega,RES}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= n - 2\omega_E + F_{M,E} + F_{M,M} + F_{M,S} + F_{M,RES} + 2(F_{\Omega,E} + F_{\Omega,M} + F_{\Omega,S} + F_{\Omega,RES}). \end{aligned}$$

Здесь $\psi = M + 2(\Omega - \alpha)$ – резонансная переменная, α – звездное время, члены $F_{a,RES}$, $F_{e,RES}$ и т. п. получаются усреднением возмущений, создаваемых гравитационным полем Земли порядка (4,4), в разложении которого по шаровым функциям отсутствует главный член и обнулены коэффициенты, учитываемые

в теории Liu. Функции F_* , в результате усреднения которых получаются $F_{*,RES}$ в (4), зависят от аргументов $a, e, E, \Omega - \alpha, i, \omega$. При усреднении переменные a, e, Ω, i, ω считаются постоянными, а E и α связанными соотношением $E - e \sin E = \psi + 2(\alpha - \Omega)$, где $\psi = \text{const}$. Усреднение выполняется по формуле

$$F_{*,RES} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_*[E(\alpha), \alpha] d\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} F_* \left[E, \Omega + \frac{1}{2}(E - e \sin E - \psi) \right] (1 - e \cos E) dE.$$

В описываемых ниже расчетах интеграл справа вычислялся по формуле прямоугольников на равномерной сетке с 32 узлами.

В исходных уравнениях возмущающее ускорение представляет собой сумму гравитационных возмущений со стороны Луны и Солнца, а также возмущения, создаваемого нецентральностью гравитационного поля Земли порядка (4,4). Решение исходных уравнений, пересчитанное в функции $a = a_1(t)$, $e = e_1(t)$, $\Omega = \Omega_1(t)$, $i = i_1(t)$, $\omega = \omega_1(t)$ и $\psi = \psi_1(t)$, приведено на рис. 4. Графики на этом рисунке представляют собой ломаные, абсциссы вершин которых образуют равномерную сетку на оси t с шагом 10000с, а ординаты суть значения элементов орбиты и переменной ψ в узлах сетки. Решение вычислено на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $T = 3650$ сут. Сравнение решений исходных уравнений и системы (4) проведем по схеме, принятой в [5]. Опишем эту схему применительно к рассматриваемой ситуации.

Непосредственное сравнение решения системы (4) с функциями $a_1(t)$, $e_1(t)$, $\Omega_1(t)$, $i_1(t)$, $\omega_1(t)$ и $\psi_1(t)$, затруднительно. Это обусловлено тем, что каждая такая функция содержит медленно меняющуюся составляющую, на которую накладываются сравнительно высокочастотные (с частотами, кратными среднему движению n) колебания малой амплитуды. Решение усредненной системы (4) также содержит медленно меняющуюся составляющую, которая при правильном выборе начальных условий должна быть близка медленно меняющейся составляющей в функциях $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $\psi_1(t)$. В такой ситуации сравнение решений системы (4) и исходных уравнений целесообразно выполнять, основываясь на медленно меняющихся составляющих.

Сравнение выполняется так. Каждая функция $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $\psi_1(t)$ на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, аппроксимируется выражением

$$\chi(t) = \alpha_{K+1} + \alpha_{K+2}(t - t_0) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \sin \frac{\pi k(t - t_0)}{T}, \quad (5)$$

где α_k – коэффициенты. Аппроксимация строится методом наименьших квадратов по значениям функции в узлах упоминавшейся выше равномерной сетки. Для всех функций число K в аппроксимирующих выражениях (5) – одно и то же. Если это число намного меньше числа узлов сетки и подобрано правильно, то построенные выражения (5) описывают медленно меняющуюся компоненту

функций $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $\psi_1(t)$. В таком случае эти выражения обозначим $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$, $\omega_p(t)$, $\psi_p(t)$.

Графики аппроксимирующих выражений (5) для рассматриваемого примера приведены на рис. 5. В данном случае эти выражения построены при $K=100$. Сравнение рис. 4 и 5 показывает, что построенные аппроксимации действительно представляют собой медленно меняющиеся составляющие $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$, $\omega_p(t)$, $\psi_p(t)$.

На решениях системы (4) определим функционал

$$\Phi = \sum_{l=0}^L \left\{ [a_p(t_l) - a(t_l)]^2 + [e_p(t_l) - e(t_l)]^2 + [\Omega_p(t_l) - \Omega(t_l)]^2 + \right. \quad (6)$$

$$\left. + [i_p(t_l) - i(t_l)]^2 + [\omega_p(t_l) - \omega(t_l)]^2 + [\psi_p(t_l) - \psi(t_l)]^2 \right\}, \quad t_l = t_0 + \frac{Tl}{L}.$$

Здесь по-прежнему углы выражены в радианах, большая полуось – в тысячах км. Будем минимизировать (6) по начальным условиям решения в точке t_0 при $L=200$. Решение, доставляющее этому функционалу минимум, обозначим $a_*(t)$, $e_*(t)$, ... $\psi_*(t)$. Именно это решение имеет смысл сравнивать с функциями $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $\psi_1(t)$ и $a_p(t)$, $e_p(t)$, ... $\psi_p(t)$. В данном случае при выбранном масштабе рисунков графики функций $a_*(t)$, $e_*(t)$, ... $\psi_*(t)$ и $a_p(t)$, $e_p(t)$, ... $\psi_p(t)$ неотличимы. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, ... $M_p(t) - M_*(t)$ приведены на рис. 6. Эти графики служат наглядными оценками точности системы (4).

Теперь учтем в усредненной системе световое давление. Запишем эту систему в виде

$$\frac{da}{dt} = F_{a,P} + F_{a,RES},$$

$$\frac{de}{dt} = F_{e,E} + F_{e,M} + F_{e,S} + F_{e,P} + F_{e,RES},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = F_{\Omega,E} + F_{\Omega,M} + F_{\Omega,S} + F_{\Omega,P} + F_{\Omega,RES},$$

$$\frac{di}{dt} = F_{i,E} + F_{i,M} + F_{i,S} + F_{i,P} + F_{i,RES}, \quad (7)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = F_{\omega,E} + F_{\omega,M} + F_{\omega,S} + F_{\omega,P} + F_{\omega,RES},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = n - 2\omega_E + F_{M,E} + F_{M,M} + F_{M,S} + F_{M,P} + F_{M,RES} +$$

$$+ 2(F_{\Omega,E} + F_{\Omega,M} + F_{\Omega,S} + F_{\Omega,P} + F_{\Omega,RES}).$$

Здесь члены $F_{a,P}$, $F_{e,P}$ и т. п. задаются формулами [4] (см. также [5]).

Решение с начальными условиями, указанными в начале данного пункта, представлено на рис. 7, который организован аналогично рис. 4. Графики-ломаные построены на равномерной сетке с шагом 5000 с. Результаты минимизации функционала (6) при $L = 200$ представлены на рис. 8. На этом рисунке графики функций $a_*(t)$, ... $\psi_*(t)$ приведены вместе с графиками функций $a_p(t)$, ... $\psi_p(t)$. При выбранном масштабе рисунка некоторые графики практически совпадают. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, ... $M_p(t) - M_*(t)$ даны на рис. 9.

4. Использование усредненных уравнений для сглаживания двухстрочных элементов. Сначала рассмотрим решение этой задачи для низкоорбитального спутника. Решение изложим на примере спутника «Фотон М-3», который с 14.09.2007 по 26.09.2007 совершал неуправляемый орбитальный полет. Математическую модель движения спутника построим на базе усредненной системы (ср. [5])

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F_{a,A}, & \frac{de}{dt} &= F_{e,E} + F_{e,A}, & \frac{d\Omega}{dt} &= F_{\Omega,E} + F_{\Omega,A}, \\ \frac{di}{dt} &= F_{i,E} + F_{i,A}, & \frac{d\omega}{dt} &= F_{\omega,E} + F_{\omega,A}, & \frac{dM}{dt} &= n + F_{M,E} + F_{M,A}. \end{aligned} \quad (8)$$

В процессе интегрирования этой системы ее решение будем преобразовывать с помощью функций (3) и полученные в результате элементы орбиты будем затем пересчитывать в геоцентрический радиус-вектор тела \mathbf{r} и его производную $d\mathbf{r}/dt$ по формулам задачи Кеплера. В итоге получим функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(t, \beta), \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{q}(t, \beta), \quad \beta = [a(t_0), e(t_0), \Omega(t_0), i(t_0), \omega(t_0), M(t_0), c]^T.$$

Здесь вектор β служит краткой записью начальных условий системы (8) в момент t_0 и баллистического коэффициента спутника c .

Исходной информацией для определения движения спутника служили двухстрочные элементы. По значениям этих элементов, относящимся к моментам времени t_k ($k = 1, 2, \dots, N$; $t_1 < t_2 < \dots < t_N$), во второй геоэквиаториальной системе координат на те же моменты рассчитывались радиусы-векторы спутника \mathbf{R}_k и его скорости \mathbf{V}_k . Задача отыскания решения уравнений движения, аппроксимирующего (\equiv сглаживающего) точки $(t_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{V}_k)$, решалась как задача обработки данных измерений. Предполагалось, что ошибки в измерениях координат и компонент скорости независимы и имеют нормальные распределения с нулевыми средними значениями. Стандартные отклонения ошибок координат (скоростей) одинаковы, но неизвестны. Стандартные отклонения ошибок координат обозначим σ , скоростей – σ/w , где $w = 1 \text{ м} \cdot \text{с}/\text{мм} = 1000 \text{ с}$. Отыскание вектора β , задающего аппроксимирующее эти измерения решение уравнений движения, выполнялось методом наименьших квадратов. А именно, сводилось к минимизации функционала

$$\Phi(\beta) = \sum_{k=1}^N \left\{ [\mathbf{R}_k - \mathbf{p}(t_k, \beta)]^2 + w^2 [\mathbf{V}_k - \mathbf{q}(t_k, \beta)]^2 \right\}. \quad (9)$$

Минимизация $\Phi(\beta)$ выполнялась методом Гаусса-Ньютона. При сделанных допущениях оценка $\beta_* = \arg \min \Phi$ – случайный вектор, который имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением, равным истинному значению β . Ковариационная матрица этой оценки и оценка дисперсии σ^2 ошибок в измерениях координат вычислялись по формулам

$$K_\beta = \left\| K_{ij} \right\|_{i,j=1}^7 = \sigma_*^2 B^{-1}, \quad \sigma_*^2 = \frac{\Phi(\beta_*)}{6N - 7},$$

где B – вычисленная в точке β_* матрица системы нормальных уравнений, возникающей при минимизации Φ методом Гаусса-Ньютона, $2B \approx \partial^2 \Phi(\beta_*) / \partial \beta^2$. Точность аппроксимации данных измерений с помощью найденного решения системы (8) будем характеризовать стандартным отклонением ошибок измерений σ_* , стандартными отклонениями $\sigma_i = \sqrt{K_{ii}}$ ($i = 1, 2, \dots, 7$) компонент вектора β_* и некоторыми статистическими характеристиками рядов остатков $\delta \mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k - \mathbf{p}(t_k, \beta_*)$, $\delta \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k - \mathbf{q}(t_k, \beta_*)$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

Остатки $\delta \mathbf{R}_k$ и $\delta \mathbf{V}_k$ рассчитываются во второй геоэкваatorialной системе координат, поэтому их трудно соотнести с орбитой спутника. Чтобы естественным образом связать эти остатки с орбитой, будем рассматривать их компоненты в специальных локальных ортонормированных базисах. Пусть $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – геоцентрический радиус-вектор спутника и его абсолютная геоцентрическая скорость в аппроксимирующем решении. Введем ортонормированные векторы

$$\mathbf{e}_1(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{|\mathbf{V}(t)|}, \quad \mathbf{e}_2(t) = \frac{\mathbf{R}(t) \times \mathbf{V}(t)}{|\mathbf{R}(t) \times \mathbf{V}(t)|}, \quad \mathbf{e}_3(t) = \mathbf{e}_1(t) \times \mathbf{e}_2(t).$$

и каждую пару остатков $\delta \mathbf{R}_k$, $\delta \mathbf{V}_k$ будем рассматривать в ее собственном базисе с ортами $\mathbf{e}_1(t_k)$, $\mathbf{e}_2(t_k)$, $\mathbf{e}_3(t_k)$. Компоненты векторов $\delta \mathbf{R}_k$ и $\delta \mathbf{V}_k$ в этом базисе обозначим соответственно ξ_{1k} , ξ_{2k} , ξ_{3k} и ξ_{4k} , ξ_{5k} , ξ_{6k} . Ряд ξ_{ik} ($k = 1, 2, \dots, N$) будем характеризовать его среднеквадратическим значением s_i .

Изложенный способ сглаживания точек $(t_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{V}_k)$ и оценки точности построения сглаживающего решения относится к идеализированной модели содержащихся в значениях \mathbf{R}_k и \mathbf{V}_k ошибок. Однако среди определений этих величин по двухстрочным элементам имеется некоторое число грубых выбросов. Чтобы исключить выбросы из процедуры сглаживания и повысить точность определения β_* , проводилась отбраковка подозрительных точек. Она выполнялась следующим образом. Для сглаживающего решения, построенного по всем точкам, вычислялись модули остатков $|\delta \mathbf{R}_k|$ и их медиана m . Счита-

лись подозрительными и отбрасывались те точки $(t_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{v}_k)$, для которых имело место неравенство $|\delta \mathbf{R}_k| > 3m$. При сделанных выше предположениях относительно ошибок измерений $m \approx 1.54\sigma$, и вероятность появления остатка с указанным значением модуля – менее 0.001 (модули остатков имеют распределение Максвелла с параметром σ). Затем процедура сглаживания повторялась для модифицированного набора точек. Полученная при этом оценка β_* считалась окончательной.

Полет «Фотона М-3» проходил 14.09 – 26.09.2007, причем в период с 12:00 UTC 14 сентября до 01:09 UTC 25 сентября на спутник не действовали никакие управляющие силы и моменты. По двухстрочным элементам, относящимся к отрезку неуправляемого движения «Фотона М-3», была рассчитана последовательность значений фазового вектора этого спутника, которая содержала 35 членов. Из этой последовательности посредством отбрасывания крайних членов были выделены 3 пересекающиеся подпоследовательности, обозначенные как интервалы 1, 2 и 3. Каждый из этих коротких интервалов охватывает отрезок времени длиной более 3 сут. Характеристики выбранных для сглаживания последовательностей данных (интервалов) приведены в табл. 1. Здесь N – начальное число сглаживаемых точек на данном интервале, t_1 и t_N – моменты времени начальной и конечной точки по шкале времени UTC. В табл. 2 указаны использованные на выбранных интервалах значения параметров модели атмосферы [6] F , F_{81} и A_p .

Таблица 1. Интервалы аппроксимации движения «Фотона М-3»

Интервал	t_1 , сент. 2007 г., время UTC (h:m:s)	t_N , сент. 2007 г., время UTC (h:m:s)	$t_N - t_1$, 10^3 с	N
1	14, 15:21:20	19, 21:43:37	454.9	17
2	18, 19:54:28	22, 23:00:28	356.8	16
3	20, 18:37:21	24, 20:04:20	350.8	16

Таблица 2. Средние значения индексов солнечной и геомагнитной активности на интервалах аппроксимации движения «Фотона М-3»

Интервал	F	F_{81}	A_p
1	66.8	69.6	3.4
2	66.8	69.4	7.0
3	66.7	69.2	13.1

Во всех случаях начальные условия сглаживающих решений задавались в момент $t_0 = t_1$. Некоторые характеристики точности отыскания этих решений и качества сглаживания исходных данных приведены в табл. 3, 4. Табл. 3 содержит оценку σ_* стандартного отклонения σ ошибок задания исходных дан-

ных, оценку баллистического коэффициента спутника c и стандартное отклонение этой оценки σ_c . В табл. 4 приведены среднеквадратичные значения s_i рядов остатков ξ_{ik} ($k = 1, 2, \dots, N$) для $i = 1, 2, \dots, 6$. Данные, полученные с помощью описанной выше модели, находятся в строках, помеченных буквой У. В строках, помеченных буквой Т, находятся аналогичные данные, полученные с помощью стандартной модели определения параметров орбиты низколетящего спутника Земли (ср. [7, 8]). В стандартной модели использована та же модель атмосферы [6], что и в системе (8), а нецентральность гравитационного поля Земли учитывается до порядка (16,16) включительно в разложении геопотенциала в ряд по шаровым функциям. Как видно из таблиц, модель, построенная на базе усредненной системы, заметно уступает по точности стандартной модели.

Таблица 3. Стандартные отклонения ошибок данных измерений, и баллистический коэффициент спутника.

Интервал	Модель	N	σ_* , м	c , кг/м ²	σ_c , кг/м ²
1	Т	17	416	0.001296	$2.6 \cdot 10^{-6}$
	У	15	523	0.001169	$3.1 \cdot 10^{-6}$
2	Т	16	982	0.001311	$9.4 \cdot 10^{-6}$
	У	16	1412	0.001282	$1.3 \cdot 10^{-5}$
3	Т	15	283	0.001409	$2.6 \cdot 10^{-6}$
	У	15	602	0.001430	$5.8 \cdot 10^{-6}$

Таблица 4. Средние квадратичные значения рядов остатков сглаживающих решений.

Интервал	Система	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
		м			мм/с		
1	Т	477	219	254	310	342	660
	У	891	154	393	395	300	720
2	Т	1538	161	209	261	211	1729
	У	2390	127	675	699	184	2092
3	Т	449	188	146	191	211	389
	У	679	91	552	529	200	673

Точность построенных аппроксимаций можно оценить, сравнивая их с результатами определения движения спутника стандартными российскими средствами. Табл. 5 содержит результаты трех способов вычисления моментов прохождения спутника через некоторые восходящие узлы его орбиты. Первый способ – по данным штатного радиоконтроля орбиты (РКО). Найденные этим

способом значения моментов были получены из ЦСКБ. В таблице они указаны в строках, которые в графе «Решение» содержат аббревиатуру «РКО». Второй и третий способы – это использование аппроксимирующих решений стандартной и усредненной систем соответственно. В графе «Решение» соответствующие строки содержат номер интервала, сглаживанием которого получено решение, использованное для вычисления фазового вектора в данном узле, а в скобках указано обозначение системы. Для наглядности у результатов, полученных вторым и третьим способами, опущены цифры в старших разрядах, совпадающие с соответствующими цифрами момента времени из данных РКО. Анализ табл. 3 – 5 показывает, что ошибки модели, построенной на базе усредненной системы, на рассматриваемых отрезках времени составляют несколько километров по координатам и несколько м/с по скоростям.

Таблица 5. Моменты прохождения восходящих узлов орбиты в сглаживающих решениях и по данным РКО

Решение	Дата сентябрь 2007 г., Время ДМВ (h:m:s)
РКО	15, 13:50:11.60
1(T)	40
1(Y)	20
РКО	16, 13:48:42.65
1(T)	43
1(Y)	18
РКО	19, 13:43:55.56
1(T)	44
1(Y)	34
2(T)	68
2(Y)	63
РКО	22, 12:08:44.12
2(T)	06
2(Y)	00
3(T)	8
3(Y)	6
РКО	24, 07:35:12.60
3(T)	79
3(Y)	78

Рассмотрим теперь более сложную задачу. Попытаемся сгладить двухстрочные элементы, относящиеся к спутнику «Молния 2». Модель движения этого спутника, которую будем называть моделью или системой $У$, построим на базе усредненной системы (7). В процессе интегрирования этой системы ее решение будем преобразовывать с помощью функций (3), полагая при этом

$M = \psi - 2(\Omega - \alpha)$, и полученные в результате элементы орбиты будем затем пересчитывать в векторы \mathbf{r} и $d\mathbf{r}/dt$. В итоге получим функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(t, \beta), \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{q}(t, \beta), \quad \beta = [a(t_0), e(t_0), \Omega(t_0), i(t_0), \omega(t_0), \psi(t_0), c]^T.$$

Эти функции используются при построении функционала (9), где теперь $w = \sqrt{5} \cdot 1000$ с. Минимизация этого функционала, отбраковка данных измерений и анализ результатов выполняются по схеме, описанной выше.

Модель У будем сравнивать с моделью, основанной на соответствующих исходных уравнениях [5], только нецентральность гравитационного поля Земли возьмем в них порядка (8,8). Эту модель назовем моделью или системой Т. Аппроксимирующие решения системы Т также будут находиться посредством минимизации функционала (9).

Таблица 6. Моменты прохождения восходящих узлов орбиты в сглаживающих решениях

Модель	Дата 2007 г.	Момент прохождения Узла
Т У	02.06	03 : 16 : 31.82 3.96
Т У	09.06	14 : 33 : 30.72 29.93
Т У	17.06	01 : 50 : 10.17 08.03
Т У	24.06	13 : 06 : 24.35 1.87
Т У	02.07	00 : 22 : 38.16 4.87
Т У	09.07	11 : 38 : 36.00 0.34
Т У	16.07	22 : 54 : 46.68 36.50

Для сравнения моделей был выбран отрезок движения спутника, содержащий $N = 50$ комплектов двухстрочных элементов. Его начальная и конечная точки: $t_1 = 12:19:24$ UTC 01.06.2007, $t_N = 07:45:50$ UTC 18.07.2007. Решение системы Т, доставляющее минимум функционалу (9), характеризуется параметрами: $\sigma_* = 2040$ м, $c = 0.0155$ м²/кг, $\sigma_c = 0.0010$ м²/кг. Решение системы У – параметрами $\sigma_* = 3416$ м, $c = 0.0455$ м²/кг, $\sigma_c = 0.00081$ м²/кг. Дополнительные характеристики точности аппроксимации двухстрочных элементов решениями систем Т и У даны на рис. 10, 11. На этих рисунках приведены диаграм-

мы рядов остатков ξ_{ik} ($j=1, \dots, 6$) вместе с аналогичными диаграммами рядов $|\delta\mathbf{R}_k|$ и $|\delta\mathbf{V}_k|$ ($k=1, 2, \dots, N$). Диаграммы представляют собой ломаные с вершинами в точках (t_k, ξ_{ik}) , $(t_k, |\delta\mathbf{R}_k|)$ и $(t_k, |\delta\mathbf{V}_k|)$. В подписях к рисункам указаны среднеквадратичные значения s_i рядов остатков ξ_{ik} ($k=1, 2, \dots, N$) для $i=1, 2, \dots, 6$. В данном случае система У также оказалась заметно менее точной, чем система Т. Отличие решений систем Т и У наглядно характеризуется различием в моментах прохождения восходящих узлов орбиты (см. табл. 6).

5. Заключение. Точность рассмотренных в данной работе усредненных систем оценивалась двумя способами – сравнением их решений с решениями соответствующих полных уравнений движения космических тел и посредством аппроксимации решениями усредненных систем наборов двухстрочных элементов, характеризующих движение выбранных искусственных спутников Земли на сравнительно продолжительных отрезках времени. Первый из этих способов показал, что усредненные системы достаточно точно описывают вековое изменение орбитальных элементов, второй способ показал, что решения полных уравнений аппроксимируют двухстрочные элементы в 1.5 – 2 раза точнее. Такая точность усредненных систем, по-видимому, достаточна для качественно верного описания эволюции движения тел на продолжительных отрезках времени. Во всяком случае, если судить по точности аппроксимации двухстрочных элементов решениями полных уравнений движения, применение этих уравнений на продолжительных отрезках времени не приведет к бóльшей точности.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00566).

Литература

1. Дубошин Г.Н. (ред.). Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М., Наука, 1976.
2. Liu J.J.F. Satellite motion about an oblate Earth. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 11, pp. 1511-1516.
3. Liu J.J.F., Alford R.L. Semianalytic theory for a close-Earth artificial satellite. J. Guidance and Control, 1980, vol. 3, No. 4, pp. 304-311.
4. Allan R.R. Satellite orbit perturbations due to radiation pressure and luni-solar forces. Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 1962, vol. 15, pt. 3, pp. 283-301.
5. Сазонов В.В. Применение усредненных уравнений движения для исследования эволюции орбит объектов космического мусора. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № , 2009.
6. ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли.

7. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И. и др. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ «Фотон-11». Космические исследования, 2004, т. 42, № 2, с. 185-200.
8. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е. и др. Неуправляемое движение спутника «Фотон М-2» и квазистатические микроускорения на его борту. Космические исследования, 2007, т. 45, № 5, с. 450-470.

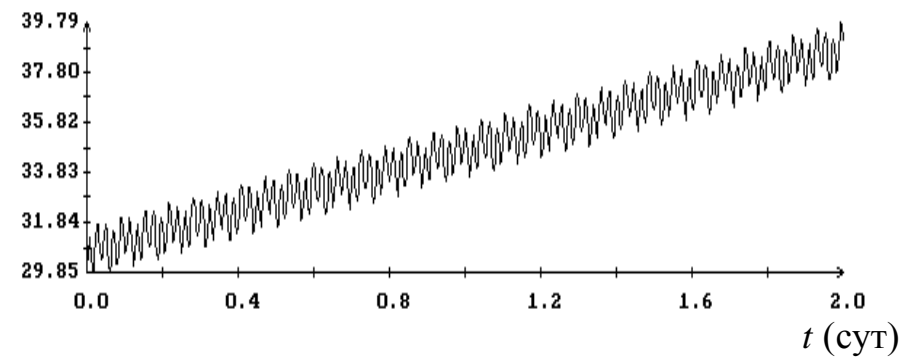
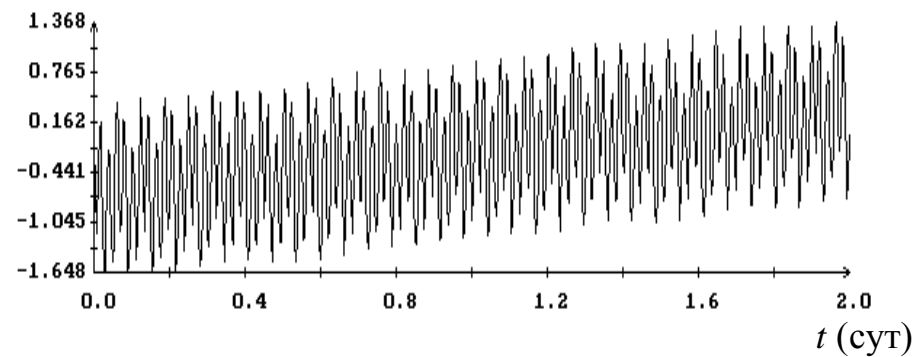
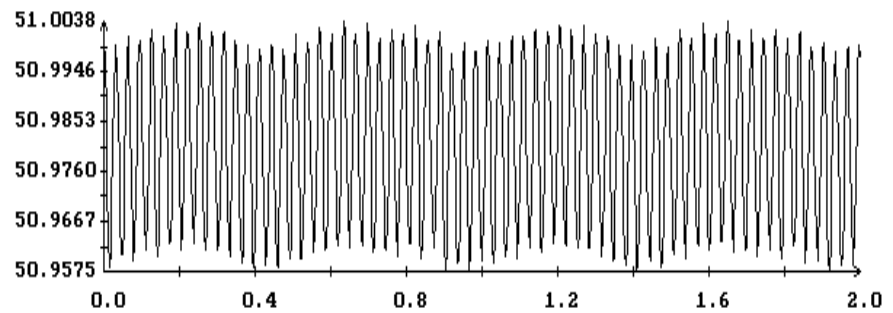
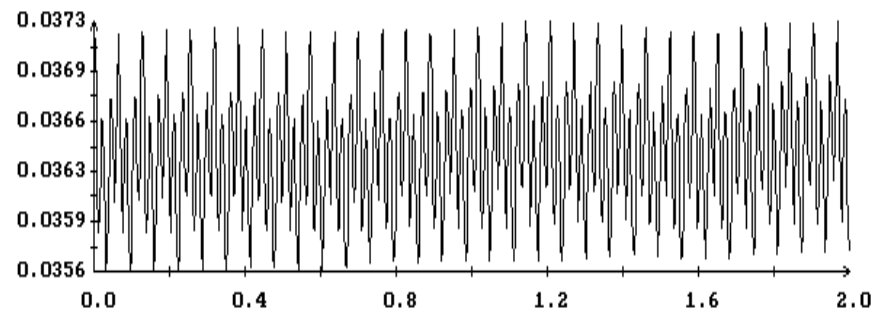
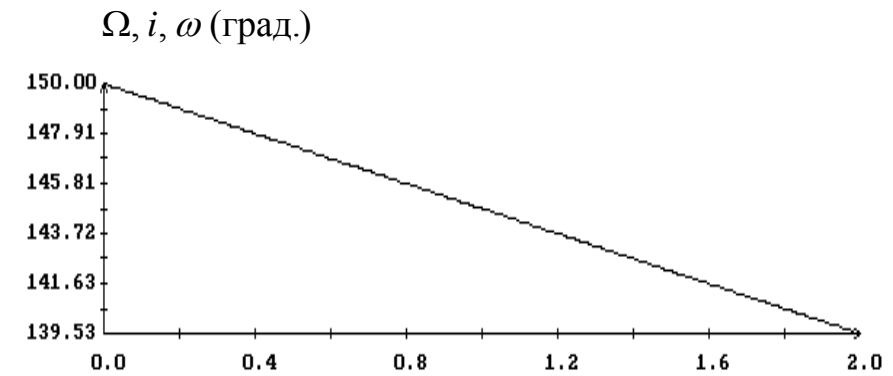
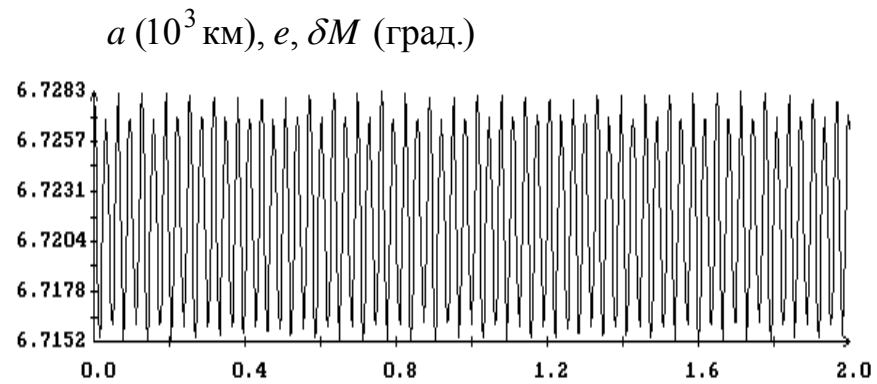


Рис. 1. Изменение элементов орбиты и величины δM вдоль решения исходных уравнений, учитывающих нецентральность гравитационного поля Земли порядка (4,4).

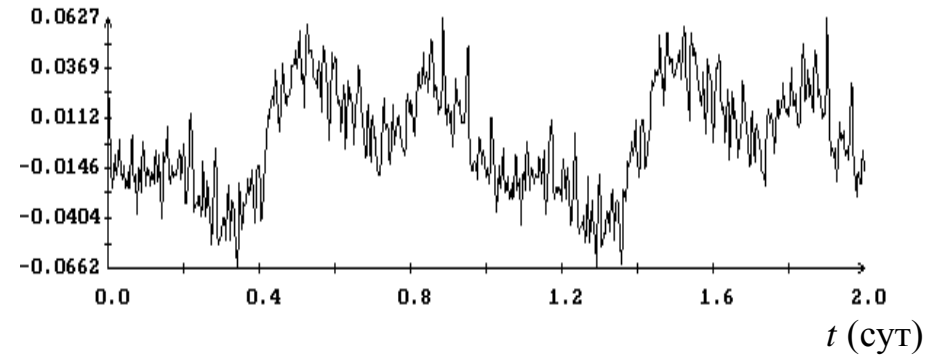
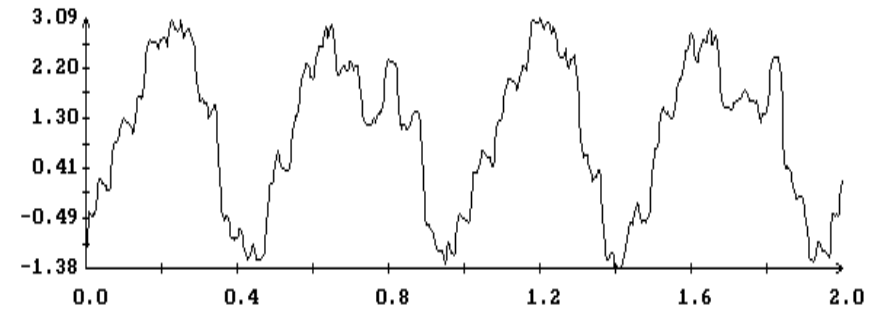
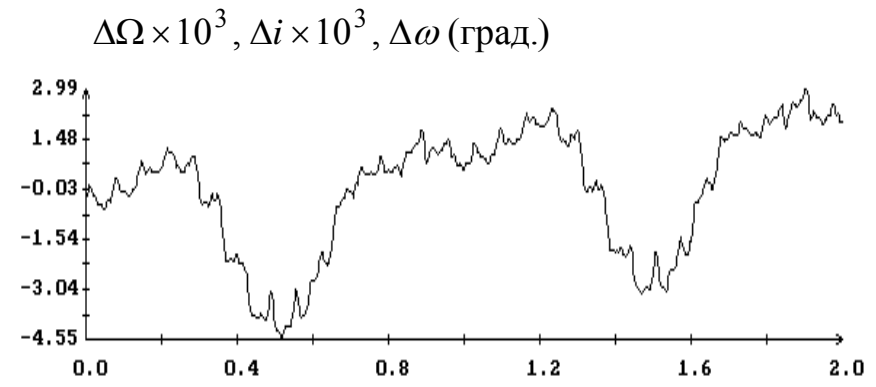
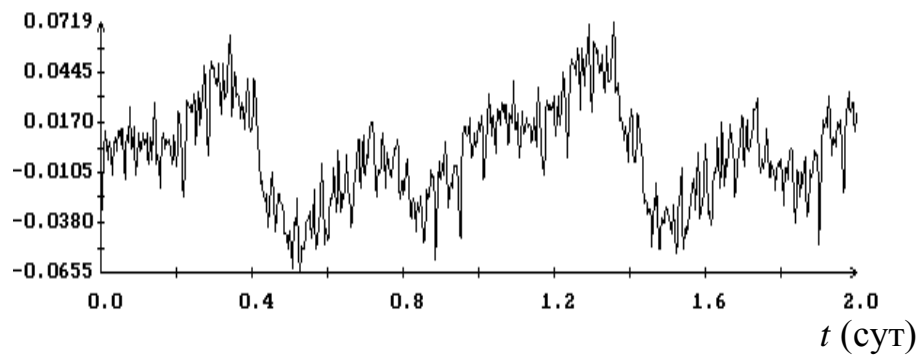
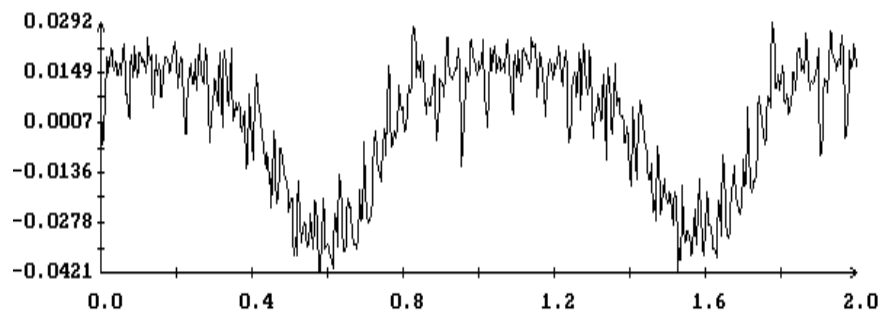
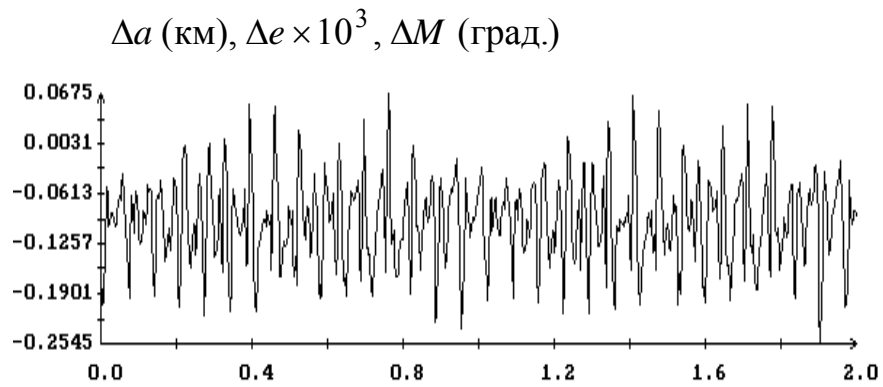


Рис. 2. Разность между элементами орбиты и значениями средней аномалии в решении исходных уравнений и в подогнанном решении системы (2).

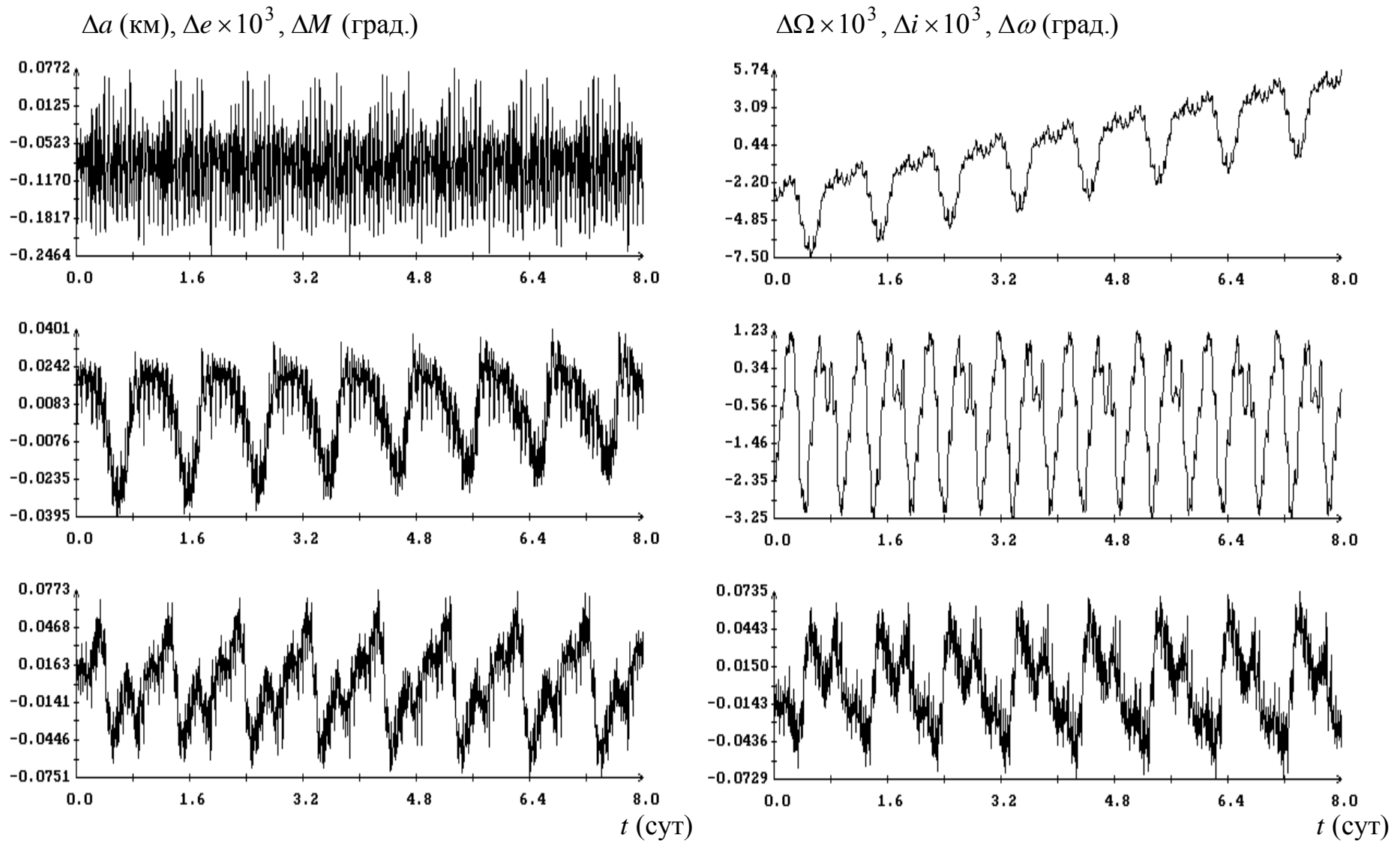


Рис. 3. Разность между элементами орбиты и значениями средней аномалии в решении исходных уравнений и в подогнанном решении системы (2).

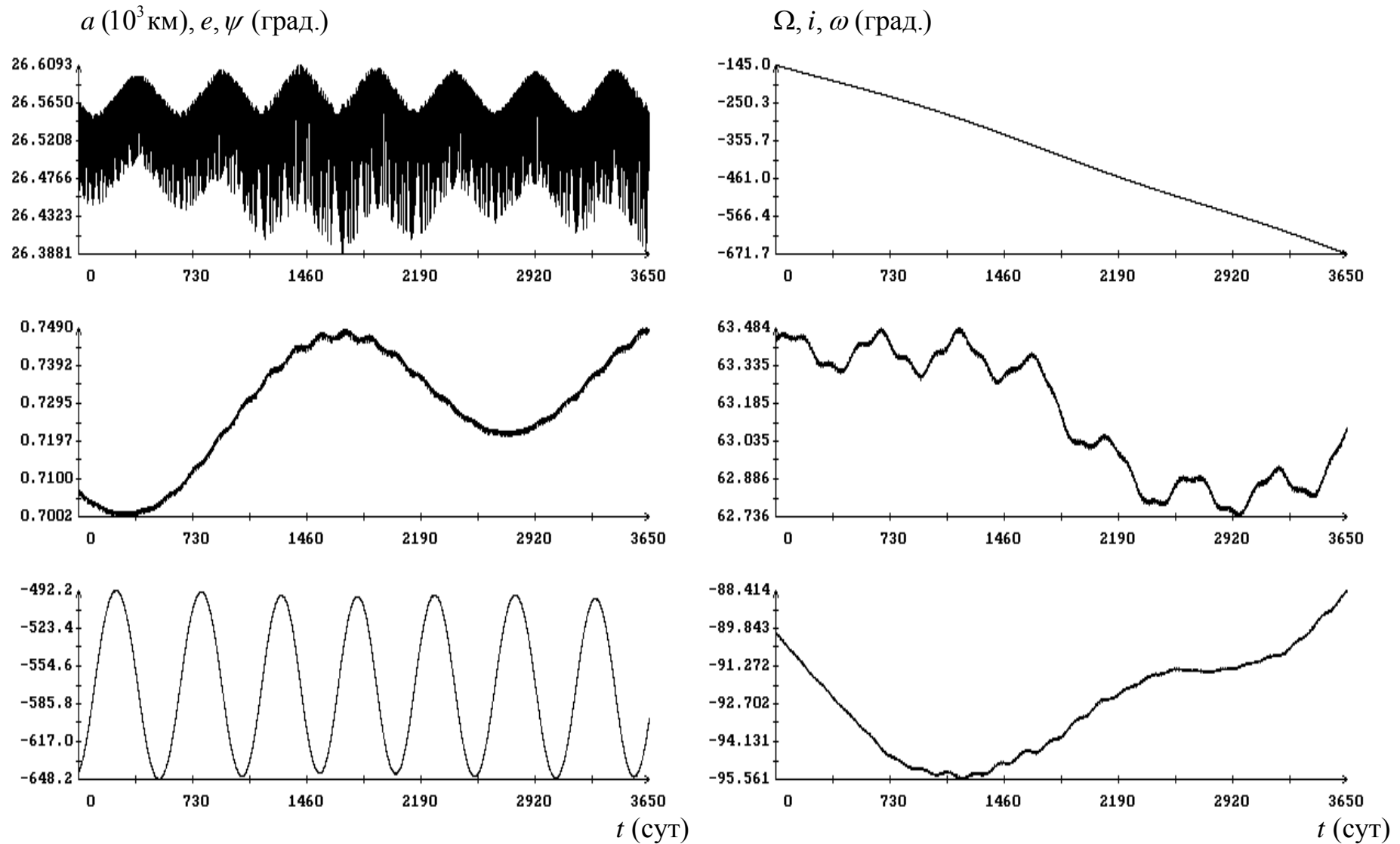


Рис. 4. Изменение элементов орбиты и величины ψ вдоль решения исходных уравнений, учитывающих гравитационное притяжение Луны и Солнца, а также нецентральность гравитационного поля Земли порядка (4,4).

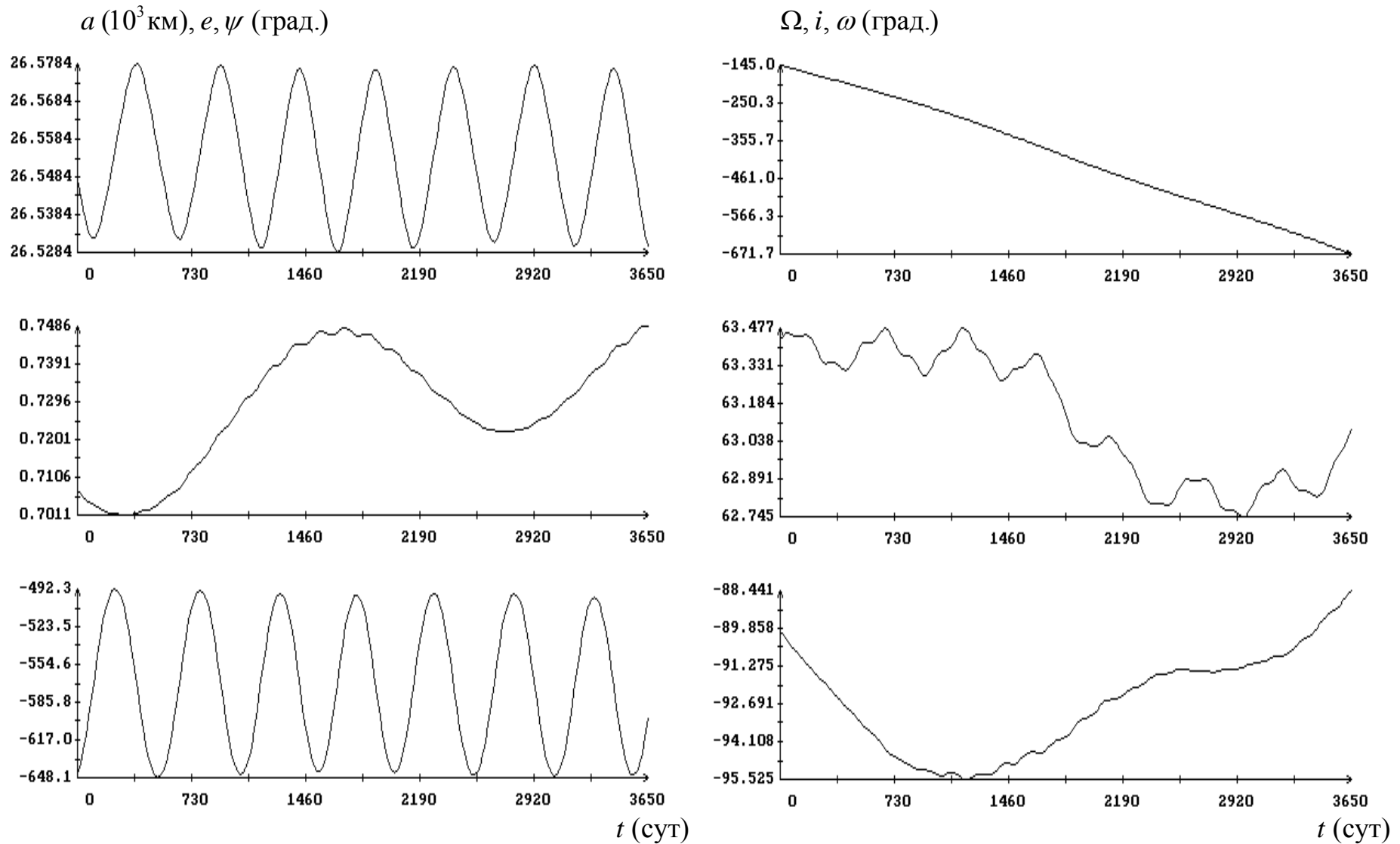
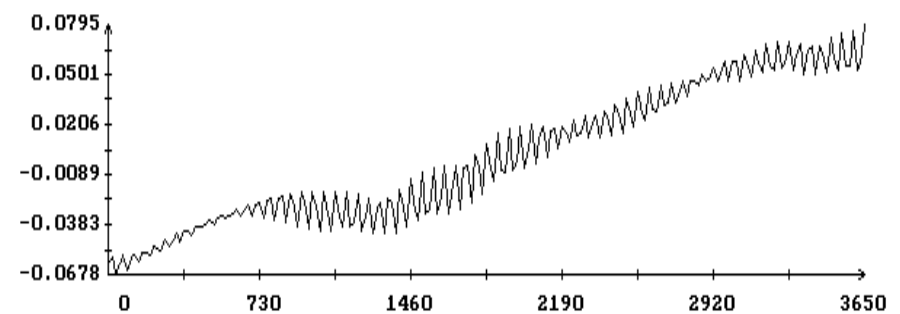
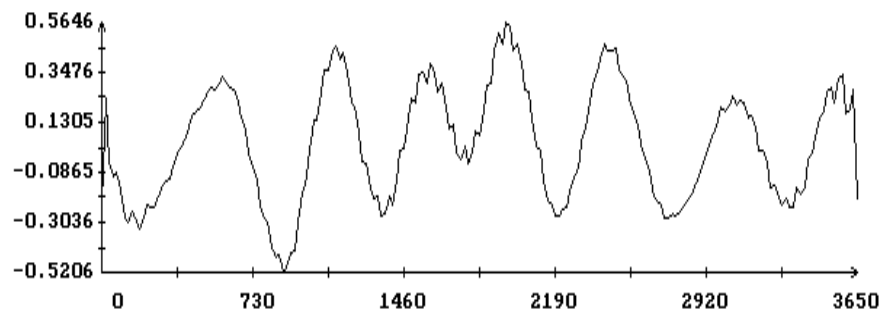
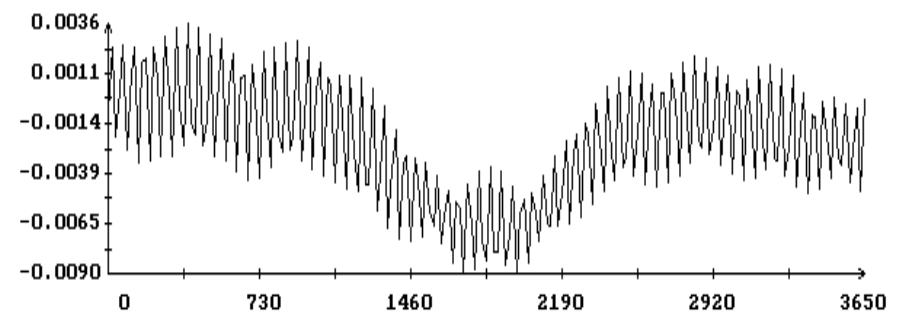
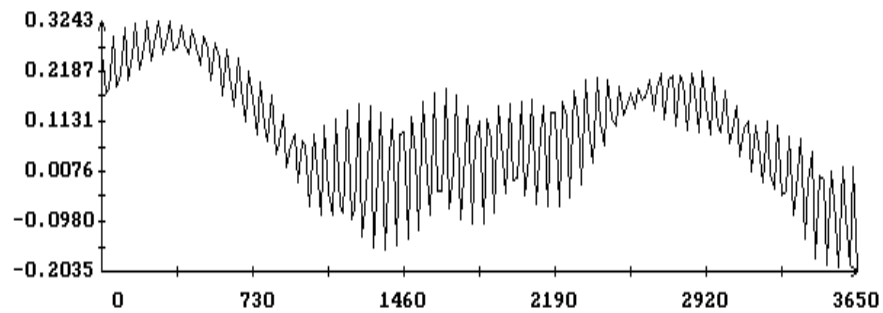
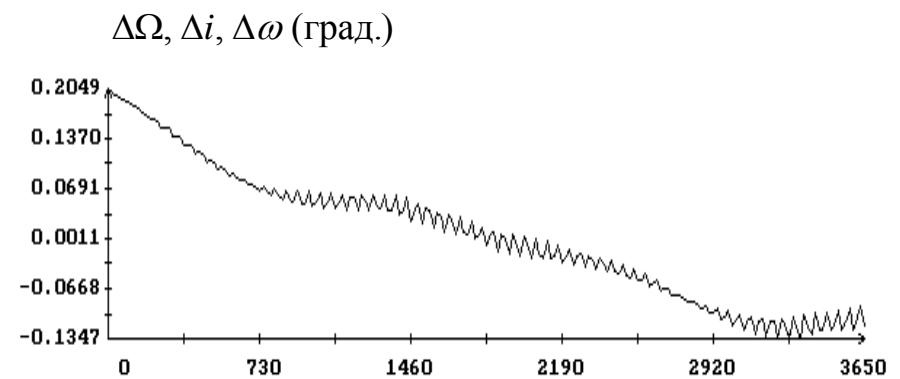
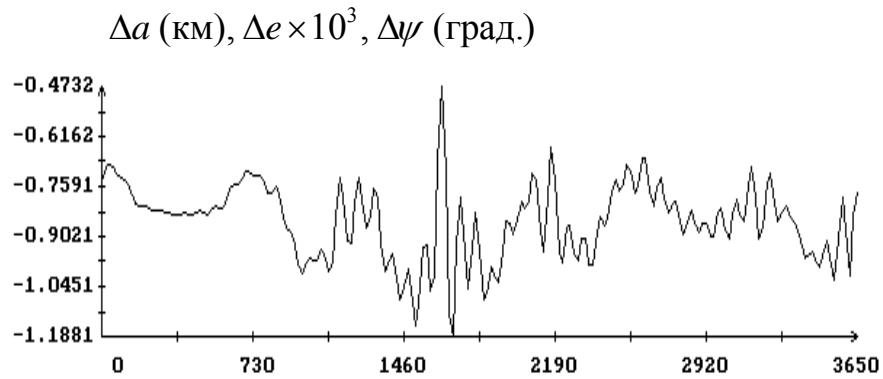


Рис. 5. Аппроксимация выражениями (5) элементов орбиты и функции $\psi(t)$, вычисленных вдоль решения исходных уравнений, учитывающих притяжение Луны и Солнца, а также гравитационное поле Земли порядка (4,4).



t (сут)

t (сут)

Рис. 6. Разность между аппроксимацией элементов орбиты и функции $\psi(t)$ выражениями (5) и подогнанным к этой аппроксимации решением системы (4).

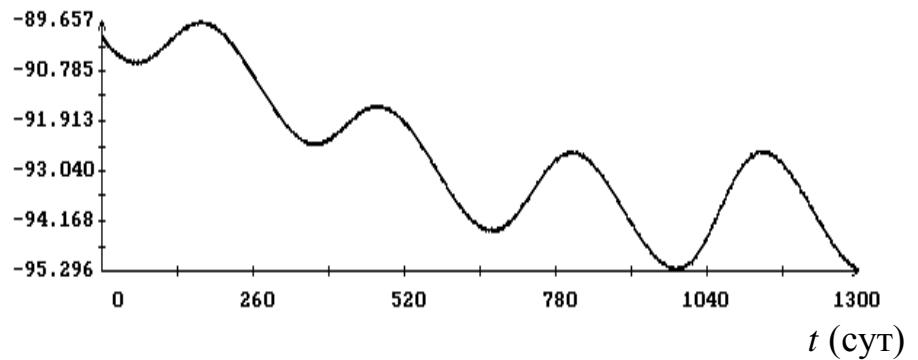
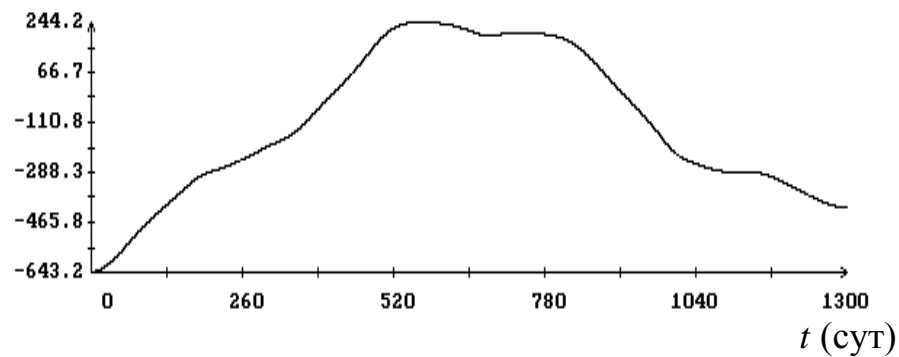
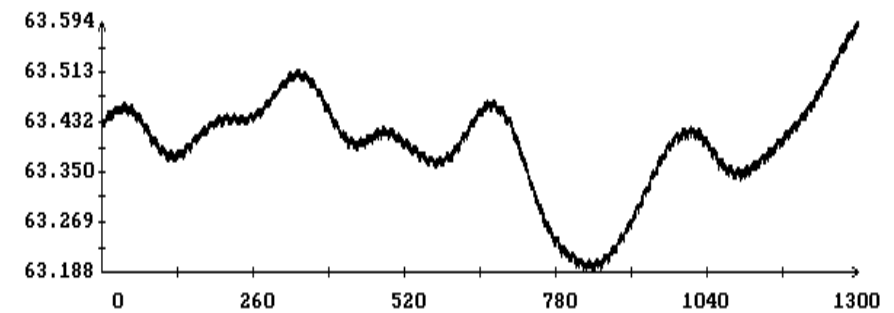
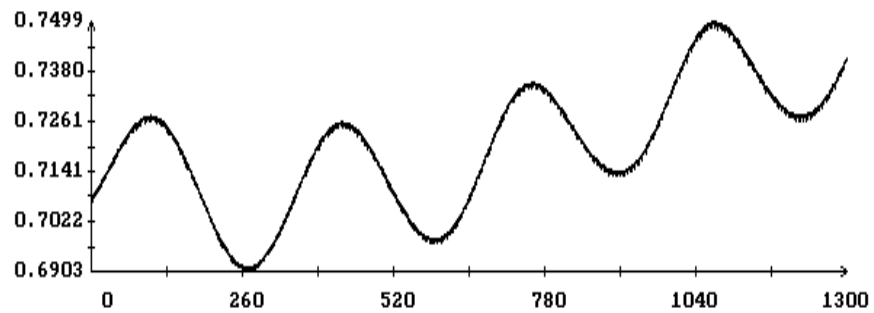
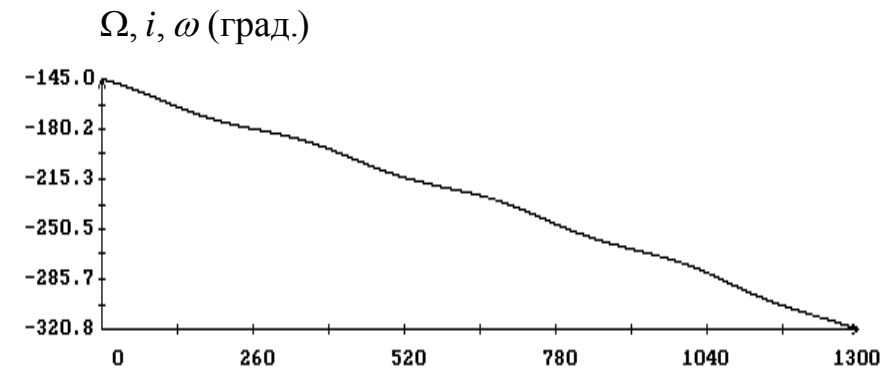
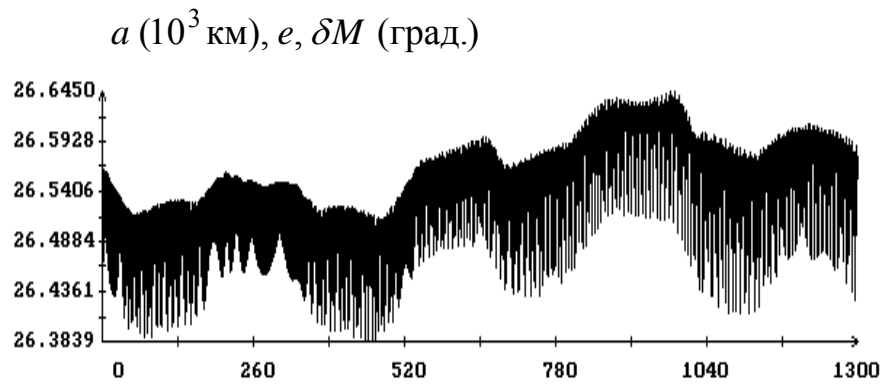


Рис. 7. Изменение элементов орбиты и величины ψ вдоль решения исходных уравнений, учитывающих гравитационное притяжение Луны и Солнца, световое давление, а также гравитационное поле Земли порядка (4,4).

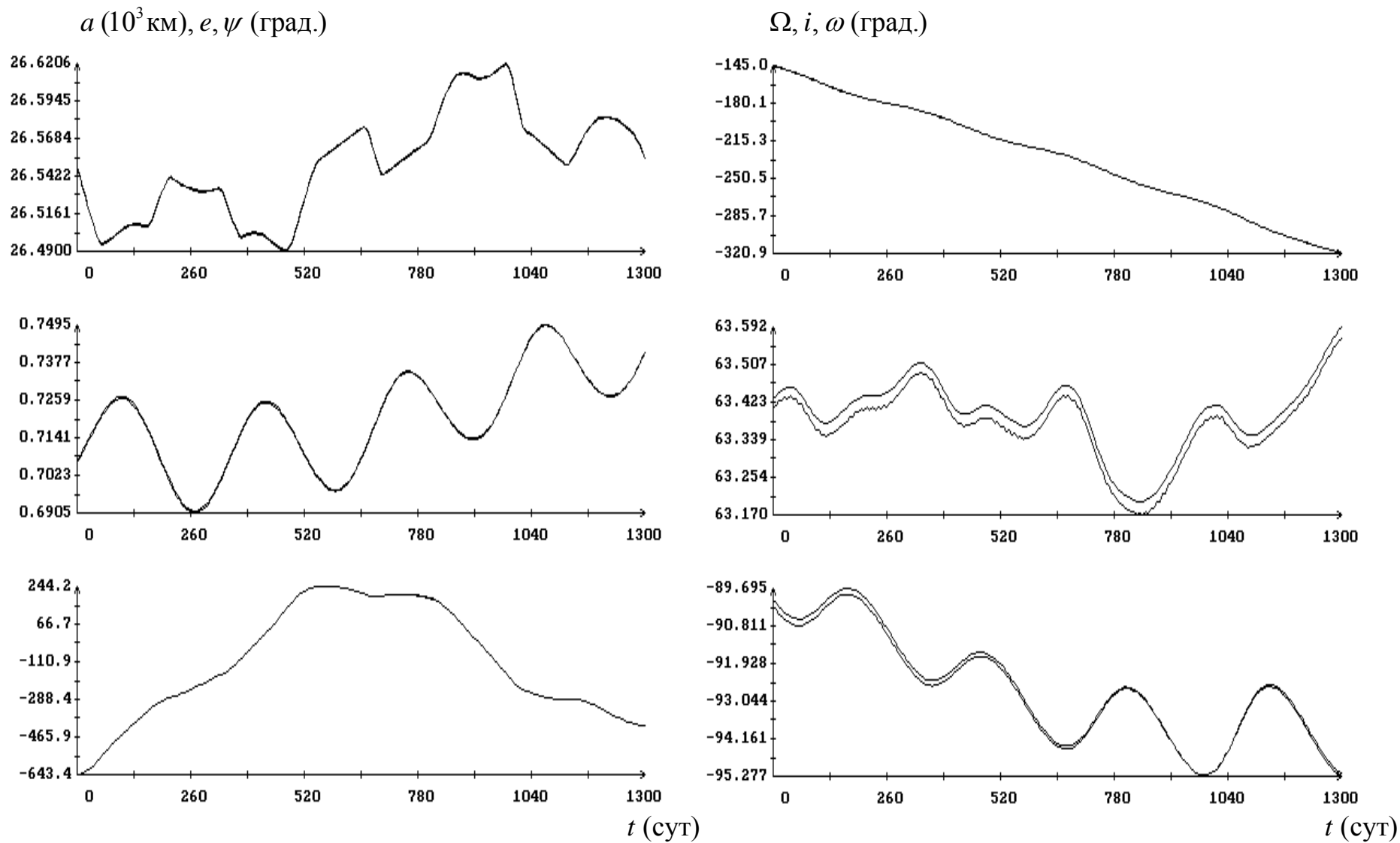


Рис. 8. Функции $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$, $\omega_p(t)$, $\psi_p(t)$ и подогнанное к ним решение системы (7).

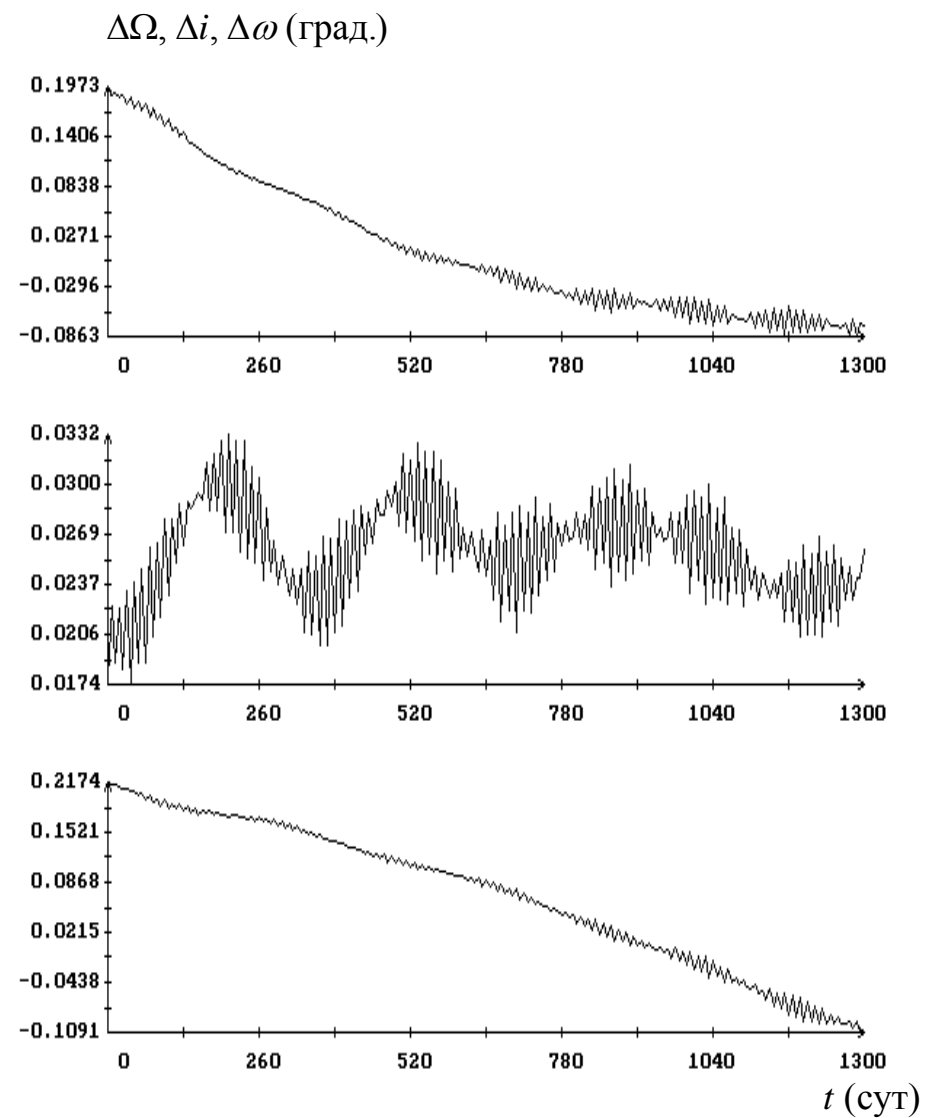
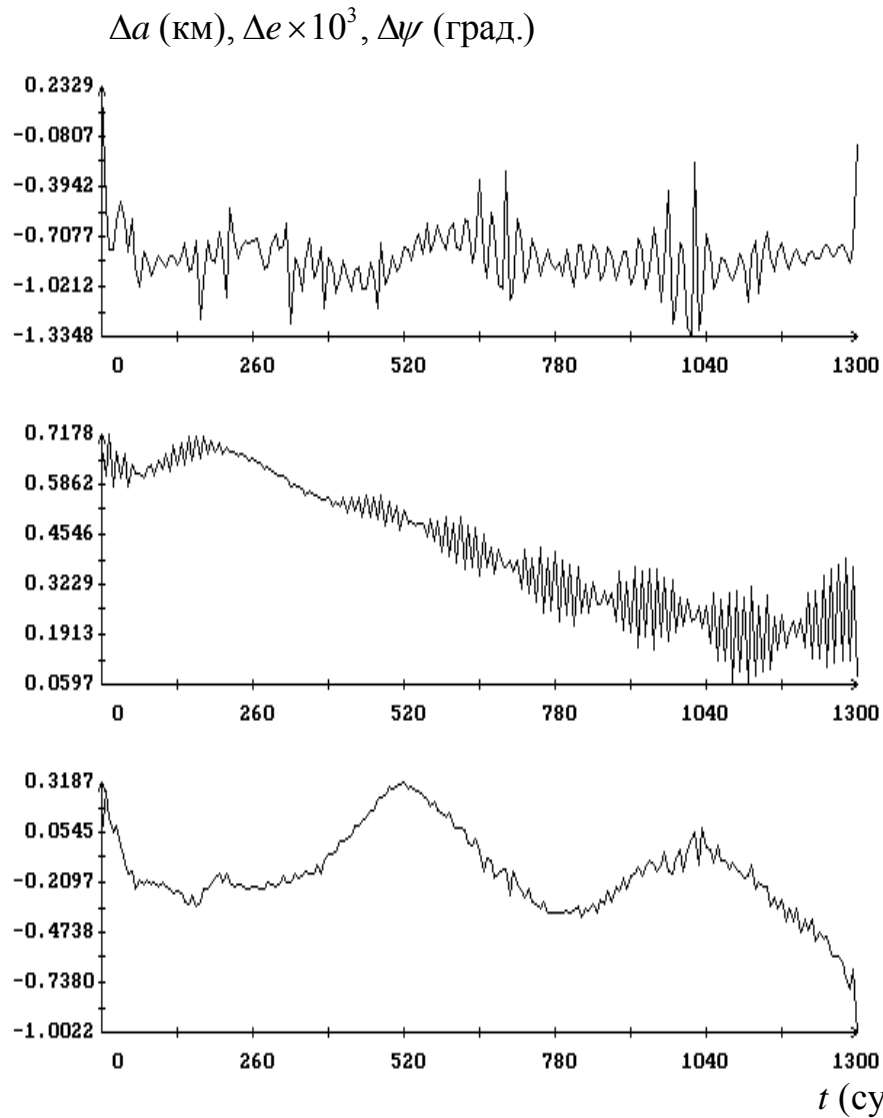


Рис. 9. Разность между аппроксимацией элементов орбиты и функции $\psi(t)$ выражениями (5) и подогнанным к этой аппроксимации решением системы (7).

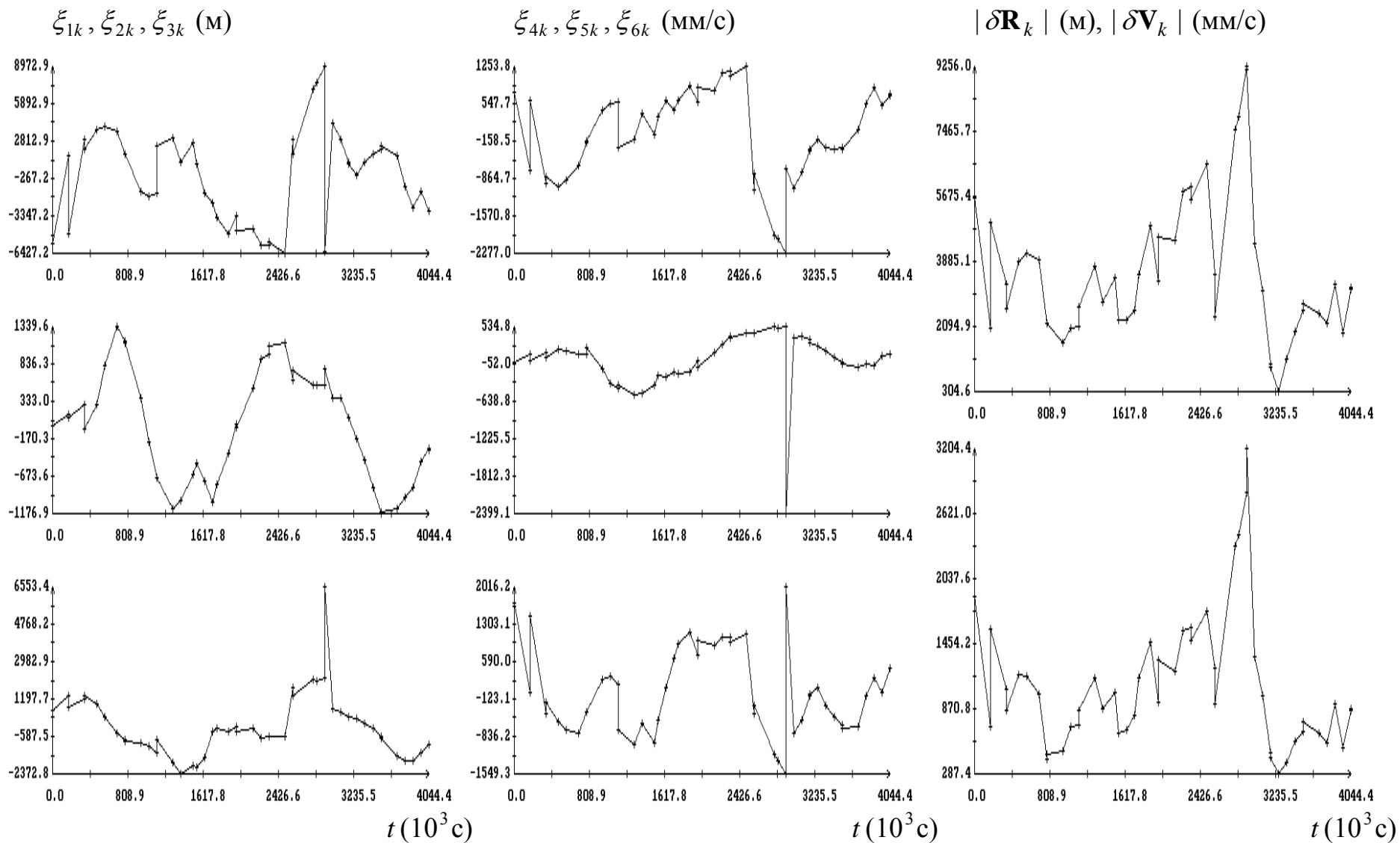


Рис 10. Диаграммы остатков для решения системы Г; $s_1 = 3739 \text{ м}$, $s_2 = 717 \text{ м}$, $s_3 = 1486 \text{ м}$, $s_4 = 836 \text{ мм/с}$,
 $s_5 = 439 \text{ мм/с}$, $s_6 = 804 \text{ мм/с}$.

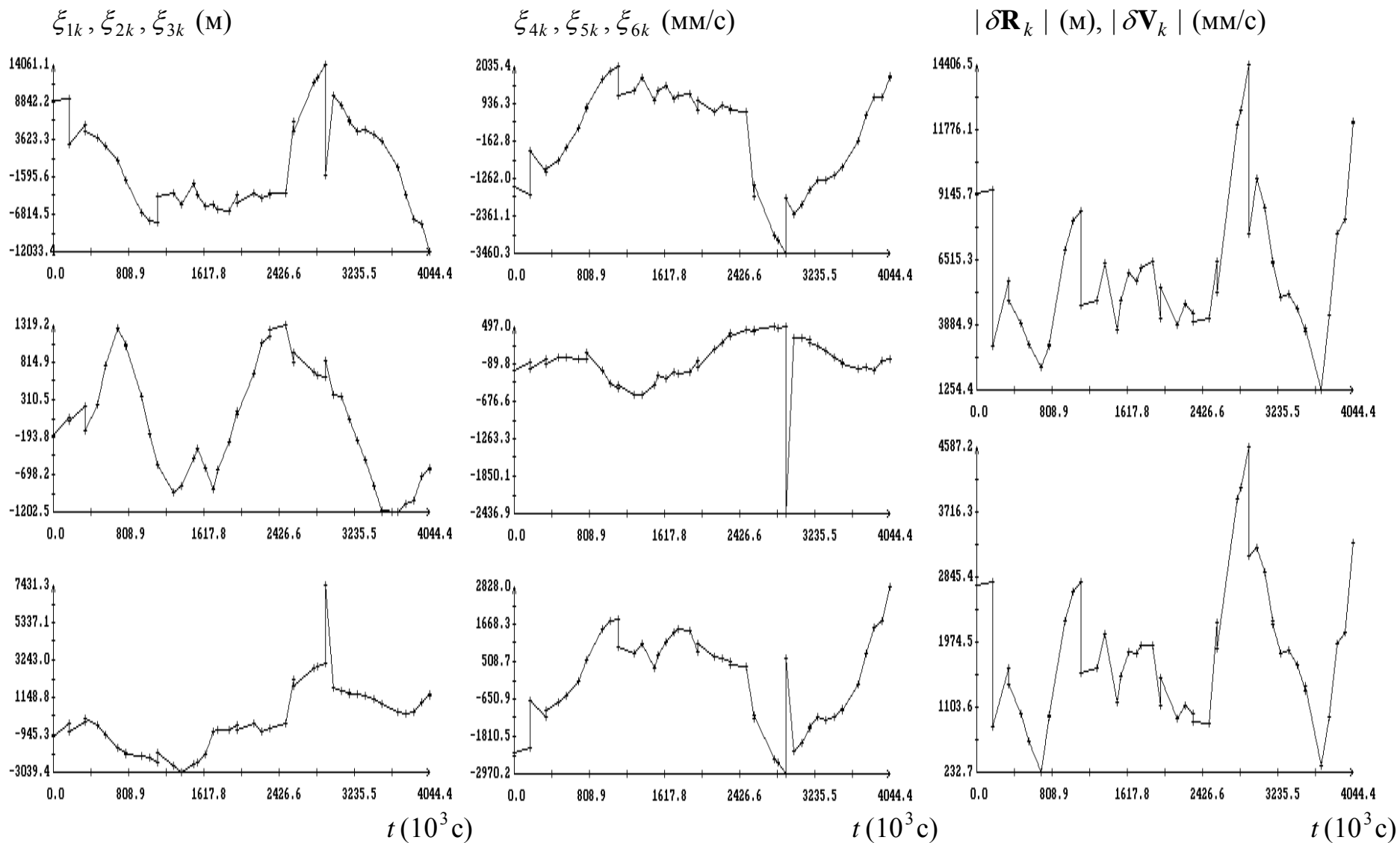


Рис 11. Диаграммы остатков для решения системы У; $s_1 = 6472 \text{ м}$, $s_2 = 747 \text{ м}$, $s_3 = 1887 \text{ м}$, $s_4 = 1473 \text{ мм/с}$,
 $s_5 = 445 \text{ мм/с}$, $s_6 = 1452 \text{ мм/с}$.