



Афендииков А.Л., Луцкий А.Е.,  
Пленкин А.В.

Локализованные структуры в  
идеальной и вязкой  
моделях. Вейвлетный  
анализ.

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Афендииков А.Л., Луцкий А.Е., Пленкин А.В. Локализованные структуры в идеальной и вязкой моделях. Вейвлетный анализ. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 78. 10 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-78>

**УДК 517.5**

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 08-01-00454-а и 08-08-00356.

А.Л. Афендииков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин.

Локализованные структуры в идеальной и вязкой моделях. Вейвлетный анализ. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва 2009.

Работа посвящена сравнительному анализу особенностей, выделенных с помощью вейвлетного алгоритма предложенного в работе [5] по результатам расчетов, проведенных по моделям Эйлера и Навье – Стокса с использованием методов сквозного счета. Исследования показали, что в вязкой среде четко проявляются структуры, соответствующие ударным волнам в идеальной среде, при этом на них с высокой точностью выполняются соотношения Гюгонио. Кроме того, в вязкой среде выделяются дополнительные структуры, соответствующие вихрям, пограничному слою и слоям смешения.

A.L. Afendikov, A.E. Lutsky, A.V. Plenkin.

Localised structures in the ideal and viscous models. Wavelet study. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2009.

Localized structures singled out with the use of wavelet based algorithm from the shock capturing calculations for Euler and Navier–Stokes models are analyzed. It is demonstrated that in the viscous model localized structures corresponding to the shock waves in Euler model are located with high accuracy. In the viscous model additional structures corresponding to vortices, to the boundary and mixing layers are located.

©ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Москва, 2009 г.

**Введение.** Для расчета газодинамических течений широко используются методы сквозного счета. Их универсальность находится вне конкуренции поскольку эти методы не требуют учета информации о положении разрывов. Однако такой подход приводит к размазыванию разрывов, что может негативно сказываться на качестве расчета. Кроме того, часто именно положение ударных волн в течении представляет специальный интерес. Отсюда возникает обратная задача - локализовать и классифицировать разрывы в поле полученном в расчете. До последнего времени эта задача решалась в «ручном» режиме после завершения расчета. В настоящее время, возникает необходимость проводить алгоритмическую локализацию непосредственно во время расчета для построения адаптивных сеток и повышения качества расчета. Используемые в этих целях алгоритмы должны быть универсальны (применимы к любым данным, получаемым в результате расчета) и не должны требовать для каждого класса течений индивидуальной настройки.

Большой интерес представляет локализация структур в вязких течениях, рассчитанных по уравнениям Навье – Стокса. Часть этих структур имеет аналоги в расчетах, выполненных по уравнениям Эйлера (ударные волны), другие имеют исключительно вязкую природу (пограничный слой). При этом важно сравнить структуры, которые имеют аналоги в расчетах по обоим моделям, и исследовать их свойства. В частности, интересно выяснить, как зависит точность выполнения соотношений Гюгонио на «разрывах» в вязкой среде от числа Рейнольдса и других параметров течения.

Задача локализации разрывов в поле заданном на дискретном множестве точек в общем случае не разрешима, но, учитывая специфику рассматриваемых задач, можно надеяться получить результат с достаточной для приложений точностью. В частности, при построении алгоритма предполагается, что разрывы течений задаются набором кусочно-гладких кривых (поверхностей). Исследованию данной проблемы посвящено не так уж много работ, в частности следует отметить [1, 2]. Однако, предлагаемые в них алгоритмы, часто требуют большого объема вычислений или имеют существенные ограничения (применимы только для анализа двумерных задач или требуют особую структуру расчетной сетки), что ограничивает их использование для указанных выше целей.

В тоже время, широко известна задача о «выделении краев» (edge detection), возникающая при обработке и распознавании изображений. Эта задача очень близка к задаче локализации разрывов течения и для ее решения существует ряд конкурирующих методов. В [3] представлен метод повышения контрастности рентгеновских снимков, на основе симметричных комплексных вейвлетов Добеши. Изложенные в [4] и [3] идеи были использованы в [5] при разработке метода локализации сингулярностей газодинамических полей для случая конформных прямоугольных сеток (т.е. таких, что вершина одного прямоугольника не может лежать на ребре другого), что является существенным

ограничением, для задачи построения адаптивных сеток, где условие конформности часто нарушается.

В качестве входных данных алгоритм получает поля физических величин плотности и давления, заданных в узлах расчетной сетки. В результате каждому узлу сетки сопоставляется натуральное число, характеризующее течение в окрестности этого узла. Особенностью этого метода является то, что он не требует тонкой настройки (одни и те же пороги чувствительности и наборы фильтров могут быть эффективно использованы для множества различных задач), что позволяет использовать его в автоматическом режиме. В тоже время возможность тонкой настройки заложена в алгоритм, что позволяет получить более качественные результаты в постобработке [6].

Для сравнения структуры разрывов в вязкой и идеальной среде была выбрана осесимметричная задача о сверхзвуковом обтекании тела. Расчеты выполнялись на четырехугольной сетке, в области с криволинейными границами. Для анализа этих расчетов предложенный в [5] метод обобщается на произвольные расчетные сетки. Также был разработан набор фильтров, позволяющих избавиться от большей части артефактов и повышающих качество локализации. Метод излагается со всеми существенными для реализации и распараллеливания деталями, но без обоснования, которое достаточно подробно представлено в [5].

В результате применения алгоритма обработки, удалось выделить характерные структуры в расчетах для вязкой и идеальной среды, убедиться, что для структур, выделенных по результатам расчета по модели Навье – Стокса и соответствующих ударным волнам в идеальной среде, условия Гюгонио выполняются с высокой точностью. Также был установлен критерий, позволяющий выделить структуры, имеющие исключительно вязкую природу.

**Алгоритм.** В качестве исходных данных используются результаты расчета полей плотности и давления, заданных в узлах расчетной сетки. Сетка задается координатами узлов и элементами сетки (треугольники, четырехугольники и т.д.). При этом элементы используемой в алгоритме сетки не обязаны совпадать с элементами расчетной сетки, в частности более эффективно вместо прямоугольной неконформной сетки использовать треугольную конформную, полученную из исходной, например, с помощью триангуляции Делоне. Такой переход приводит к увеличению объема вычислений, но позволяет получить более качественный результат (уменьшается число артефактов и уточняется локализация разрывов).

В результате обработки расчета каждому узлу сетки необходимо сопоставить число, которое характеризует течение в окрестности узла (нет разрывов, ударная волна, контактный разрыв, волна разрежения и т.д.).

Обработку расчета можно условно разделить на четыре этапа:

- 1) разделение расчетной сетки на ломаные,
- 2) обработка ломаных с помощью вейвлетов и выделение особенностей,
- 3) объединение результатов обработки ломаных,
- 4) фильтрация артефактов и классификация особенностей.

На первом этапе задача сводится к рассмотрению набора одномерных задач. Из сетки выбирается произвольное ребро. Затем из его соседей выбираются те ребра, которые образуют минимальный угол с этим ребром, причем угол должен быть меньше заданной маски, которая определяет гладкость строящейся ломаной. Если подходящего ребра нет, ломаная на этом конце обрывается, иначе это ребро добавляется в ломаную, и с ним повторяется аналогичная процедура. Чтобы избежать заикливания, каждое ребро может быть добавлено в ломаную только один раз. После того как на обоих концах ломаной не удалось подобрать подходящих ребер, начинается построение следующей ломаной. Ее построение начинается с ребра не входящего ни в одну ломаную, но ребра других ломаных могут быть в нее добавлены. Это делается для того, чтобы ломаные, по возможности, не обрывались внутри области, поскольку обработка границ ломаных может приводить к появлению артефактов или пропуску разрывов. Первый этап завершается, если каждое ребро включено в некоторую ломаную.

Второй этап посвящен независимой обработке ломаных. Обрабатываются только ломаные, у которых число узлов  $N$  больше 6, это число определяется количеством ненулевых элементов в фильтрах вейвлетов, используемых при обработке. Массивы плотности  $d_k$  и давления  $p_k$ , где  $0 \leq k < N$ , заданные в узлах ломаной также обрабатываются независимо. Для каждого из массивов вычисляется 2 преобразования  $m(x)$  и  $c(x)$ :

$$m_k = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad c_k = \sum_n \zeta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad \text{для } 0 \leq k < N.$$

При этом  $x_i$  - элементы массива плотности или давления, продолженных на границах из соображений симметрии,  $\xi_i$  и  $\eta_i$  вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши 6,  $\zeta_i$  вещественный фильтр классического вейвлета Добеши 6. Цифра 6 обозначает, что фильтры имеют 6 ненулевых компонент [5]. Указанные преобразования соответствуют двум введенным в [5] детекторам, которые используются совместно для повышения точности локализации разрывов. В каждом из четырех полученных массивов выделяются два типа узлов:

- 1) 'нули' – если значения массива в двух соседних узлах имеют разный знак, или только одно из значений нулевое, то выделяется узел с минимальным по модулю значением. Две первых и две последних узла не выделяются;
- 2) 'локальные экстремумы модуля' – узел выделяется, если модуль значения поля в нем больше заданного порога чувствительности, оно не меньше моду-

лей значений трех его левых и правых соседей и строго больше модуля значения хотя бы одного из ближайших соседей. Три первых и три последних узла не выделяются.

Таким образом, каждый узел ломаной получает некоторый набор из 8 возможных меток, обозначим их: *mzd*, *ced*, *mzp*, *cep*, *med*, *czd*, *mer*, *czp*. При этом символ ‘*m*’ означает что метка относится к основному детектору, ‘*c*’ – к корректору, ‘*d*’ означает, что метка характеризует поле плотности, а ‘*p*’ – давления. Символы ‘*z*’ и ‘*e*’ определяют какие структуры были выделены в детекторе: ‘*z*’ соответствует переходам через ноль, а ‘*e*’ - локальным экстремумам модуля. При этом первые четыре метки соответствуют сильным разрывам, а последние – слабым разрывам [5].

На третьем этапе определяется окончательный набор меток, которыми обладают узлы сетки. Набор меток, которые имеет узел, определяется как объединение меток этого узла по всем содержащим его ломаным.

Из первых трех этапов наиболее вычислительно затратным является второй, однако, поскольку каждая ломаная обрабатывается независимо, этот этап допускает легкое распараллеливание. Первый же этап тривиален для широкого класса сеток. По сути, при реализации алгоритма на многопроцессорной машине, первый этап служит для распределения данных по процессорам, а третий для слияния результатов.

Алгоритм обработки данных на первых этапах не зависит от структуры сетки и размерности задачи, однако, на этапе удаления артефактов и классификации особенностей, эти факторы начинают оказывать существенное влияние. Далее приводится описание алгоритмов фильтрации для случая плоских сеток.

Предварительно введем ряд определений.

Узлы называются соседними, если они являются вершинами одного и того же элемента сетки. Например, противоположные вершины четырехугольника являются соседними.

Путь – ломаная, состоящая из отрезков соединяющих соседние узлы.

Расстояние между узлами – минимальное число ребер в пути, соединяющем эти узлы.

Множество называется связным, если для любой пары точек множества существует путь, соединяющий эти точки и состоящий только из точек этого множества.

Используются следующие фильтры:

- 1) Узел помещается в список кандидатов на удаление метки, если его соседи с такой же меткой образуют связное множество и их число не больше половины общего числа соседей. Данная проверка проводится для всех узлов. Из списка кандидатов удаляются точки, удаление которых привело к тому, что их соседи с данной меткой перестали быть связными. Наконец, все кандидаты теряют

рассматриваемую метку.

2) Первый фильтр применяется  $N$  раз. Если какое-либо связное множество точек имеющих заданную метку не было полностью удалено, все его точки возвращают исходные метки. В отличие от первого фильтра второй служит для удаления крупных артефактов.

3) Точка с меткой  $A$  получает метку  $B$ , если существует путь длины не больше  $K$ , соединяющий эту точку с точкой имеющей метку  $B$ . Фильтр убирает несоответствия, вызванные неточностью локализации.

4) Точка с меткой  $A$  теряет её, если расстояние от нее до любой из точек, имеющих метку  $B$ , больше заданного параметра  $K$ . Фильтр служит для уточнения данных одного детектора с помощью данных другого.

5) Точка получает метку, если она входит в путь, состоящий из 2 или 3 ребер, соединяющий несвязные узлы, имеющие ту же метку. Фильтр служит для восстановления целостности разрывов.

Двухмерность сетки существенна только для фильтров 1, 2. Фильтры 3 – 5, очевидно, применимы и к 3D задачам.

Порядок и параметры фильтров, вообще говоря, индивидуальны для каждой задачи и расчетного метода. Фильтр 4 используется для модификации данных основного детектора с помощью корректора, а фильтр 3 позволяет различить разрывы, на которых рвется только плотность, от тех на которых рвется и давление, тем самым, отличая контактные разрывы от ударных волн. Конкретный пример рассмотрен в экспериментальной части.

**Численное моделирование.** Рассматривается осесимметричная задача сверхзвукового обтекания тела. Были проведены расчеты соответствующие уравнениям Эйлера и Навье – Стокса. Параметры набегающего потока в обоих случаях одинаковы и соответствуют числу Маха 1.5. Число Рейнольдса для вязкой среды приближенно равно 1 000 000.

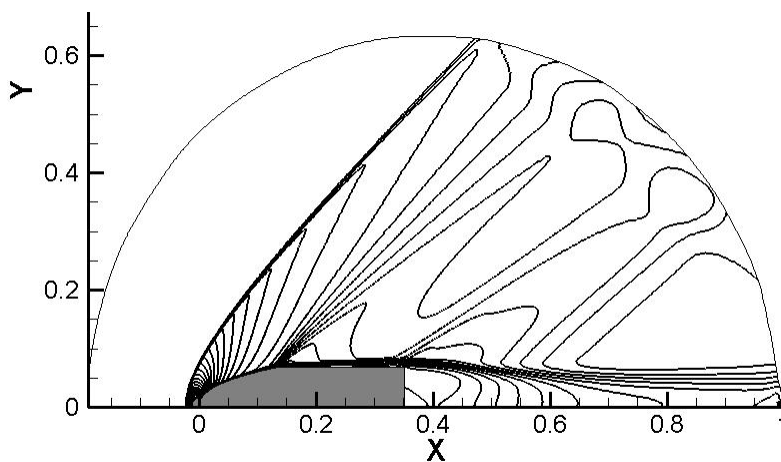


Рис. 1. Распределение плотности в расчете по уравнениям Навье-Стокса.

Геометрия расчетной области представлена на рисунке 1. Расчеты проводились на четырехугольной сетке, содержащей 400\*200 ячеек. Эта сетка отображалась на расчетную область, при этом она равномерно сгущалась вблизи обтекаемого тела.

**Анализ расчетов.** Известно, что в идеальной среде для любого разрыва с нормальной скоростью распространения  $D$  выполняются соотношения:

$$\rho_l(D - u_{n_l}) = \rho_r(D - u_{n_r})$$

$$\rho_l u_{n_l} D - [\rho_l (u_{n_l})^2 + p_l] = \rho_r u_{n_r} D - [\rho_r (u_{n_r})^2 + p_r]$$

$$\rho_l (u_{n_l} - D) u_{\tau_l} = \rho_r (u_{n_r} - D) u_{\tau_r}$$

$$\rho_l (u_{n_l} - D) \left[ e_l + p_l / \rho_l + (u_l - D)^2 / 2 \right] = \rho_r (u_{n_r} - D) \left[ e_r + p_r / \rho_r + (u_r - D)^2 / 2 \right]$$

которые являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии.

Проверка этих соотношений на разрывах в расчете нетривиальна, поскольку некоторая ошибка вносится алгоритмом локализации и за счет размазывания разрывов. В наших экспериментах для проверки соотношений выбирались точки, лежащие на нормали к разрыву вне области размазывания максимально близко к ее границе (она определялась визуально).

Для обработки сетка была преобразована в треугольную, за счет добавления диагоналей в четырехугольники.

При обработке использовался следующий набор фильтров:

- 1) фильтр 1, для удаления мелких артефактов и неровностей;
- 2) фильтр 4, для  $A = mzd$ ,  $B = sed$ ,  $K = 1$ , корректировка сильных разрывов плотности;
- 3) фильтр 4, для  $A = mzp$ ,  $B = ser$ ,  $K = 1$ , корректировка сильных разрывов вала;
- 4) фильтр 3, для  $A = mzd$ ,  $B = mzp$ ,  $K = 2$ , компенсация неточности локализации;
- 5) фильтр 2, для  $N = 1$ , удаление только мелких артефактов;
- 6) фильтр 5, восстановление целостности разрывов;
- 7) фильтр 1;
- 8) фильтр 3, для  $A = mzd$ ,  $B = mzp$ ,  $K = 1$ , для удаления возможных отрицательных эффектов от шагов 5 и 7;
- 9) фильтр 2, для  $N = 3$ , удаление крупных артефактов;

Обработка в этом примере направлена только на локализацию сильных разры-



вов. Узлы, которые по результатам фильтрации имеют и метку  $mzd$ , и метку  $mzp$ , классифицируются как ударные волны, а имеющие метку  $mzd$ , но не имеющие метки  $mzp$  – контактные разрывы.

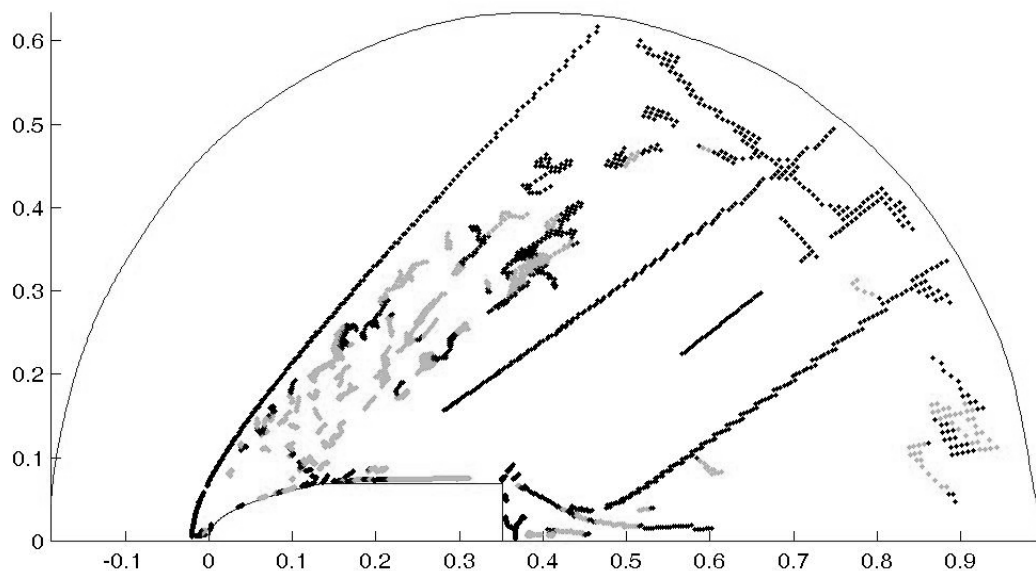


Рис. 2 Расположение разрывов в идеальной среде.

В расчете, выполненном по уравнениям Эйлера рис 2, контактные разрывы (серый цвет) присутствуют только в виде артефактов. Четко выделяется головная ударная волна, однако в области волны разрежения остаются артефакты, избавиться от которых можно, подобрав соответствующий порог чувствительности. Также выделяется некая структура разрывав за обтекаемым телом. Серая линия вдоль поверхности тела является артефактом очень слабой интенсивности, порожденным граничными условиями.

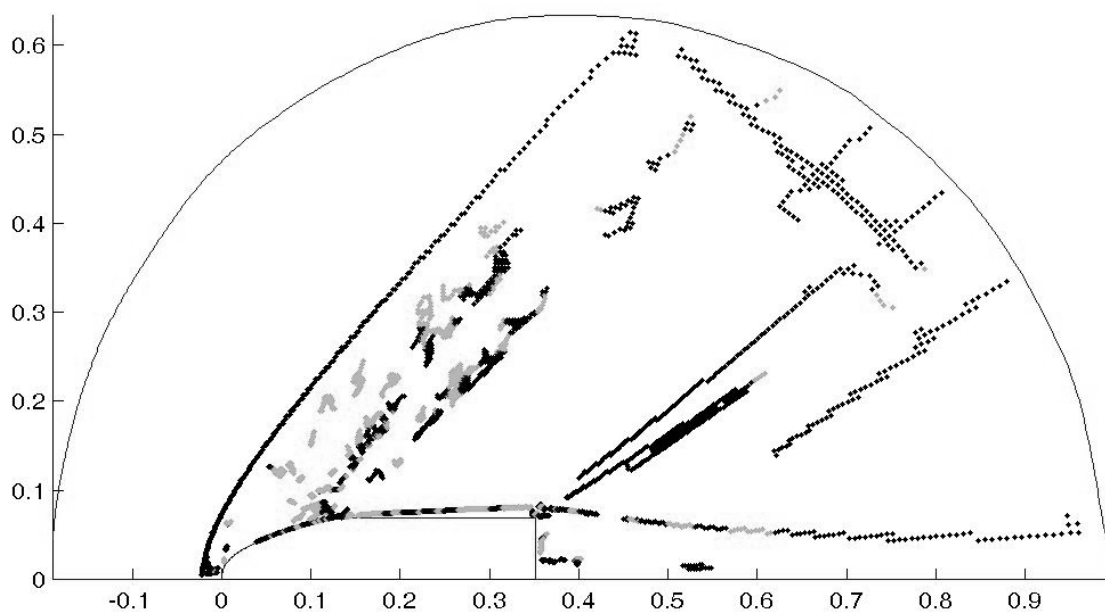


Рис. 3 Структуры, локализованные в вязкой среде.

В расчете, выполненном по уравнениям Навье – Стокса четко выделяется линия, соответствующая головной ударной волне в идеальной среде (рис. 3). Также как и в случае уравнений Эйлера, этот разрыв отражается от верхней границы расчетной области. Это объясняется постановкой искусственных граничных условий: в точке пересечения ударной волна и границы области заданы условия, соответствующие набегающему потоку. Такая информация бывает очень полезна для правильного расположения внешних границ.

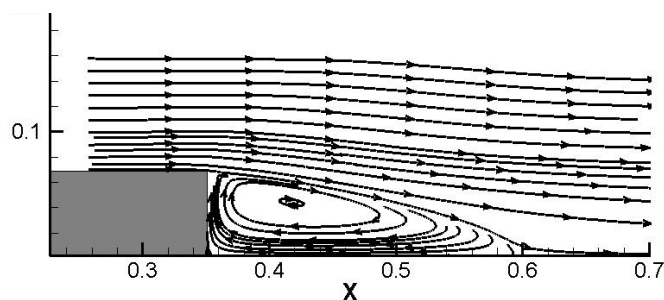


Рис. 4 Поле скоростей за моделью.

Артефактов в зоне волны разрежения в вязком расчете стало меньше. Непосредственно за телом выделяется несколько структур, порожденных вихрями. Четко выделяется пограничный слой и граница следа за моделью, эти линии классифицированы детектором частично как ударные волны, а частично как контактные разрывы.

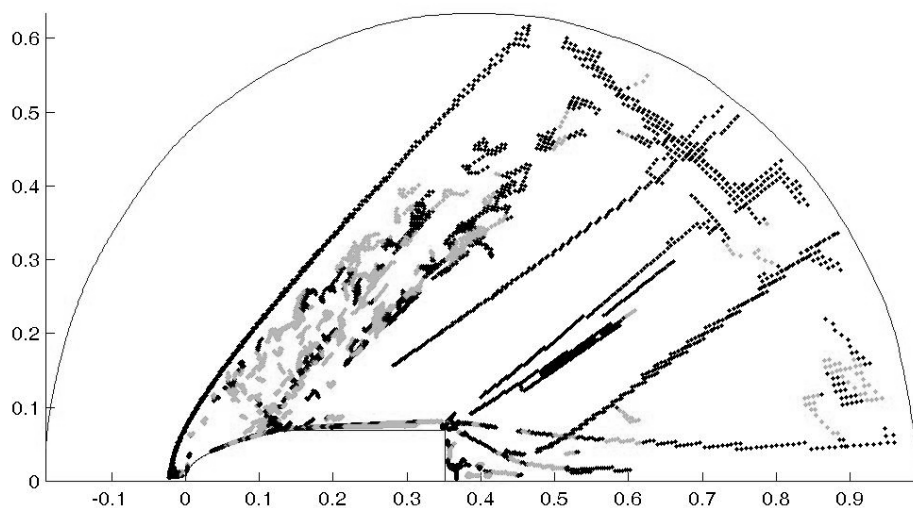


Рис. 5 Наложение результатов локализаций.

При наложении результатов локализации структур в двух расчетах (рис. 5) видно, что положение головной ударной волны и ее отражения от границы области в точности совпадают, небольшое расхождение у внешней границы области вызвано разгрублением сетки. Также в обоих расчетах присутствует разрыв  $(0.63, 0.12) - (0.9, 0.33)$ .

Ошибки в соотношениях на разрыве для точек  $(0.02, 0.16)$  и  $(0.07, 0.14)$  (слева и справа от головной ударной волны) для идеальной среды составляют 0.039,

0.00075, 0.077 и 0.063, а для вязкой среды 0.038, 0.0011, 0.078 и 0.061, что в обоих случаях составляет примерно 4, 0.1, 18 и 4 процента от значения сравниваемых величин. Таким образом наиболее точно выполняются соотношения следующие из закона сохранения массы и нормальной компоненты импульса. Подобная картина наблюдается вдоль всего разрыва.

Если же проверить соотношения для точек (0.6, 0.05) и (0.6, 0.065) (внутри и вне следа за моделью) в вязком течении, то ошибки составят 58, 0.7, 70 и 57 процентов соответственно. То есть нарушение уже значительно и этот факт в дальнейшем может быть использован для определения природы структур выделяемых в расчетах вязких течений.

**Заключение.** Установлено, что модифицированный алгоритм локализации особенностей позволяет успешно обрабатывать расчеты в областях со сложной геометрией и подавлять значительную часть артефактов. Сравнительная обработка расчетов соответствующих уравнениям Эйлера и Навье – Стокса показала, что в расчете для вязкой среды выделяются как особенности, соответствующие ударным волнам в расчете по уравнениям Эйлера, так и особенности, соответствующие вязким эффектам. Для особенностей соответствующих ударным волнам с достаточно высокой точностью выполняются соотношения на разрывах для идеальной среды, кроме соотношения, являющегося следствием закона сохранения энергии. При численной проверке на границе пограничного слоя нарушается соотношение, соответствующее сохранению касательной составляющей импульса. Данные факты, позволяют разделить особенности соответствующие вязким и невязким эффектам.

### Список литературы.

1. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. — Методы локализации особенностей в вычислительной газодинамике, 1985.
2. С. Базаров, Применение методов обработки изображений в вычислительной газодинамике. Труды GraphiCon 98, 258- 264, Москва, 1998.
3. J.-M. Lina, Daubechies wavelets: filters design and applications, *CRM-2449, ISAAC Conference, University of Delaware, June 1997.*
4. А.Л. Афендииков, В.В. Горбунова, Л.И. Левкович-Маслюк, А.В. Плёнкин, Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи комплексных и вещественных вейвлетов, *Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №98, 2005г.*
5. А.Л. Афендииков, Л.И. Левкович-Маслюк, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин. Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа, *Математическое Моделирование 2008, том 20, №7, страницы 65-84.*
6. А.Л. Афендииков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин, Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей, *Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №98, 2008г.*