



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 81 за 2009 г.](#)



Милютин Д.С., [Страховская Л.Г.](#)

Развитие метода конечных суперэлементов для задач гидродинамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Милютин Д.С., Страховская Л.Г. Развитие метода конечных суперэлементов для задач гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 81. 13 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-81>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша

Д.С. Милютин, Л.Г. Страховская

Развитие метода конечных суперэлементов для задач гидродинамики

Москва 2009

Д.С. Милютин, Л.Г. Страховская

Развитие метода конечных суперэлементов для задач гидродинамики

Аннотация

В работе представлены некоторые результаты по обоснованию метода конечных суперэлементов (МКСЭ) для решения уравнений Навье-Стокса. Построена эквивалентная слабая постановка задачи определения следов искомого решения на границах суперэлементов. Выполнены расчеты течения двухфазной жидкости в одножидкостной модели, которая приводит к задаче Стокса с интерфейсом, а в стационарном варианте к задаче Стокса с разрывными коэффициентами.

D.S. Milyutin, L.G. Strakhovskaya

Development of the finite superelement method for the hydrodynamics problems

Abstract

Work presents some results on the substantiation of the finite superelement method (FSEM) for solving the Navier-Stokes equations. The equivalent weak formulation of the problem of determining the traces of the desired solution on the boundaries of superelement is built. The calculations of the flow of two-phase liquid are executed in the single-liquid model, which leads to Stokes's problem with the interface, and in the stationary version to Stokes's problem with the discontinuity coefficients.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00299)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Вывод соотношений.....	3
2. Анализ соотношений.....	5
3. Слабая постановка для следов.....	6
4. Задача Стокса с разрывными коэффициентами.....	9
Заключение.....	12
Список литературы.....	12

Введение

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) был предложен для численного решения краевых эллиптических задач, в которых локальные сингулярности сконцентрированы в узких подобластях рассчитываемой области [1,2,3]. В настоящее время метод развивается для решения задач гидродинамики [4,5].

В работе представлены некоторые результаты по обоснованию МКСЭ для решения уравнений Навье-Стокса. Построена эквивалентная слабая постановка задачи для определения следов искомого решения на границах суперэлементов.

Выполнены предварительные расчеты течения двухфазной жидкости. При численном моделировании использовался одножидкостный (one-fluid) подход: две фазы жидкости описываются одной системой законов сохранения для всего течения, а различие свойств учитывается в разрыве коэффициентов уравнений. Такая модель приводит к задаче Стокса с интерфейсом, а в стационарном варианте к задаче Стокса с разрывными значениями коэффициента кинематической вязкости.

1. Вывод соотношений.

Дана задача Навье-Стокса в замкнутой липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} = (u_\alpha(x))_\alpha : \begin{cases} \begin{cases} -\varepsilon u_{\alpha,\beta\beta} + u_\beta u_{\alpha,\beta} + p_{,\alpha} = f_\alpha \\ u_{\alpha,\alpha} = 0 \end{cases}, & x \in \Omega \\ u_\alpha = g_\alpha, & x \in \partial\Omega \\ \int_\Omega p d\Omega = 0 \end{cases} . \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение несжимаемости. Перейдём для него к слабой постановке

$$\int_\Omega u_{\alpha,\alpha} q d\Omega = 0, \quad \forall q \in C^1(\Omega).$$

Преобразуя интеграл с помощью формулы Грина, получим соотношения

$$\int_\Omega u_\alpha q_{,\alpha} d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_\alpha n_\alpha q d\Gamma, \quad \forall q \in C^1(\Omega), \quad (2)$$

которые с учётом граничного условия примут вид

$$\int_\Omega u_\alpha q_{,\alpha} d\Omega = \int_{\partial\Omega} g_\alpha n_\alpha q d\Gamma, \quad \forall q \in C^1(\Omega). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_\alpha)_\alpha$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Из (2) также следует равенство

$$\int_{\Omega} u_{\alpha} q_{,\alpha} d\Omega = 0, \forall q \in \overset{\circ}{C}^1(\Omega) \quad (4)$$

Для уравнений движения имеем следующую слабую постановку $\mathbf{u} \in C^1(\Omega, \square^n)$:

$$\int_{\Omega} [\varepsilon u_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta} + v_{\alpha} u_{\alpha,\beta} u_{\beta} + p_{,\alpha} v_{\alpha}] d\Omega = \int_{\Omega} f_{\alpha} v_{\alpha} d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} = (v_{\alpha}) \in \overset{\circ}{C}^1(\Omega, \square^n), \quad (5)$$

где $\overset{\circ}{C}^1(\Omega, \square^n)$ означает пространство гладких вектор функций, обращающихся в нуль на границе. При переходе от уравнений (1) к слабой постановке использована формула Грина

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varepsilon u_{\alpha,\beta} v_{\alpha} n_{\beta} d\Gamma + \int_{\Omega} [-\varepsilon u_{\alpha,\beta\beta} v_{\alpha} + v_{\alpha} u_{\alpha,\beta} u_{\beta} + p_{,\alpha} v_{\alpha}] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} [\varepsilon u_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta} + v_{\alpha} u_{\alpha,\beta} u_{\beta} + p_{,\alpha} v_{\alpha}] d\Omega. \end{aligned} \quad (5a)$$

Пусть дано разбиение области $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k$ на подобласти–суперэлементы (СЭ)

с непересекающимися внутренностями такое, что каждая подобласть Ω_k является липшицевой.

Лемма 1. Предположим, что вектор функция $\mathbf{u} = (u_{\alpha})_{\alpha}$ удовлетворяет уравнению несжимаемости в слабом смысле в каждой подобласти Ω_k , тогда для того, чтобы она удовлетворяла условию несжимаемости во всей области Ω необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} u_{\alpha} n_{\alpha}^k q d\Gamma_k = \int_{\partial\Omega} u_{\alpha} n_{\alpha} q d\Gamma, \quad \forall q \in C^1(\Omega), \quad (6)$$

где $\mathbf{n}^k = (n_{\alpha}^k)_{\alpha}$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega_k$.

Доказательство. Преобразуем интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{\alpha} q_{,\alpha} d\Omega &= \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} u_{\alpha} q_{,\alpha} d\Omega_k = \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} q u_{\alpha} n_{\alpha}^k d\Gamma_k - \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} u_{\alpha,\alpha} q d\Omega_k = \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} q u_{\alpha} n_{\alpha}^k d\Gamma_k \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь использовано свойство аддитивности интеграла Лебега, формула Грина и то, что \mathbf{u} удовлетворяет условию несжимаемости в каждой области.

Необходимость. Пусть функция $\mathbf{u} = (u_\alpha)_\alpha$ удовлетворяет условию несжимаемости в области Ω , тогда для неё верны соотношения (2). Согласно (7) получаем

$$\sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} u_\alpha n_\alpha^k q d\Gamma_k = \int_{\partial\Omega} u_\alpha n_\alpha q d\Gamma \quad \forall q \in C^1(\Omega),$$

то есть соотношения (6).

Достаточность. Из соотношений (6) и (7) следуют соотношения (2), являющиеся слабой постановкой для уравнения несжимаемости. Поэтому функция $\mathbf{u} = (u_\alpha)_\alpha$ удовлетворяет уравнению несжимаемости в области Ω в слабом смысле.

Лемма 2. Предположим, что вектор функция $\mathbf{u} = (u_\alpha)_\alpha$ удовлетворяет уравнениям движения в слабом смысле в каждой подобласти Ω_k , тогда для того, чтобы она удовлетворяла уравнениям движения во всей области Ω необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} [\varepsilon u_{\alpha,\beta} v_\alpha n_\beta^k + p v_\alpha n_\alpha^k] d\Gamma_k = 0, \quad \forall \mathbf{v} = (v_\alpha)_\alpha \in \overset{\circ}{C}^1(\Omega, \square^n), \quad (8)$$

где $\mathbf{n}^k = (n_\alpha^k)_\alpha$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega_k$.

Доказательство данной леммы абсолютно аналогично доказательству леммы 1 за тем исключением, что вместо уравнений несжимаемости рассматриваются уравнения движения.

Лемма 3. Задача Навье-Стокса в области Ω равносильна задаче:

Найти $\mathbf{u} = (u_\alpha)_\alpha, p$, удовлетворяющие уравнениям Навье-Стокса в каждом суперэлементе Ω_k , для которых выполняются соотношения (6), (8) и условие

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0. \quad (9)$$

Доказательство следует из лемм 1 и 2 с добавлением к ним условия (9).

2. Анализ соотношений.

Выпишем соотношения (8), (9) и (6):

$$\mathbf{u} = (u_\alpha)_\alpha, p: \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} [\varepsilon u_{\alpha,\beta} v_\alpha n_\beta^k + p v_\alpha n_\alpha^k] d\Gamma_k = 0, \quad \forall \mathbf{v} = (v_\alpha)_\alpha \in \overset{\circ}{C}^1(\Omega, \square^n) \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = (u_\alpha)_\alpha : \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} u_\alpha n_\alpha^k q d\Gamma_k = \int_{\partial\Omega} u_\alpha n_\alpha q d\Gamma, \forall q \in C^1(\Omega). \quad (6)$$

Имеется два варианта:

1) Давление p и скорости \mathbf{u} считаются непрерывными на границе СЭ. Тогда соотношения (6) выполняются автоматически. Выбор функции \mathbf{v} , удовлетворяющей дополнительно условию (6) приводит к соотношениям

$$\mathbf{u} = (u_\alpha)_\alpha : \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} \varepsilon u_{\alpha,\beta} v_\alpha n_\beta^k d\Gamma_k = 0, \forall \mathbf{v} = (v_\alpha)_\alpha \in \overset{\circ}{C}^1(\Omega, \square^n) \quad (10)$$

При этом функция $\mathbf{u} = (u_\alpha)_\alpha$ должна в каждой подобласти Ω_k удовлетворять системе Навье-Стокса. С учётом того факта, что давление может быть исключено при рассмотрении слабой постановки в области [6], получаем, что давление исключено и в соотношениях (10). То есть, получена слабая постановка для следов скоростей. При этом необходимо брать тестовые функции $\mathbf{v} = (v_\alpha)_\alpha$ удовлетворяющие условию (6). Очевидно, что непрерывные на границе СЭ функции $\mathbf{v} = (v_\alpha)_\alpha$ удовлетворяют данному условию.

2) Допускается разрыв давления p и/или скоростей \mathbf{u} на границе СЭ. В этом случае уравнения (6), (8), (9) остаются как есть и соотношения (8),(6) допускают следующую трактовку. Дана постановка (10) с ограничениями (6). Для учёта ограничений вводится множитель Лагранжа, который позволяет получить невырожденную избыточную постановку (8), (6). Аналогично множитель Лагранжа можно ввести для уравнения (9).

3. Слабая постановка для следов.

Рассмотрим постановку (10) с непрерывной скоростью на границе СЭ. Введём в рассмотрение подлежащий определению след скоростей на

множестве $M = \bigcup_{k=1}^K \partial\bar{\Omega}_k : \underline{\mathbf{t}} = \mathbf{u}|_M$. По этому следу однозначно

восстанавливается скорость в каждой из подобластей Ω_k : в каждой подобласти Ω_k решается задача Навье-Стокса

$$\mathbf{u} = (u_\alpha(x))_\alpha : \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon u_{\alpha,\beta\beta} + u_\beta u_{\alpha,\beta} + p_{,\alpha} = f_\alpha \\ u_{\alpha,\alpha} = 0 \end{array} \right. , x \in \Omega_k \\ \int_{\Omega_k} p d\Omega = 0 \end{cases}$$

с граничным условием $\mathbf{u}|_{\partial\Omega_k} = \underline{\mathbf{t}}|_{\partial\Omega_k}$. Обозначим $G_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{t}}, \mathbf{f})$ оператор Грина, сопоставляющий набору следов $\underline{\mathbf{t}} = \mathbf{u}|_M$ и силе \mathbf{f} , функцию \mathbf{u} , которая в каждой подобласти Ω_k является решением соответствующей задачи Навье-Стокса. Введём в рассмотрение следующее пространство функций:

$$\underline{S}_{\mathbf{g}} = \left\{ \underline{\mathbf{s}} = (\underline{s}_{\alpha})_{\alpha} : \underline{\mathbf{s}} = \mathbf{v}|_M, \mathbf{v} \in C^1(\Omega, \square^n), \mathbf{v}|_M = \mathbf{g} \right\},$$

то есть все возможные следы на множестве M непрерывных функций, равных \mathbf{g} и обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

После введения оператора Грина получаем следующие вариационные соотношения:

$$\underline{\mathbf{t}} \in \underline{S}_{\mathbf{g}} : \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} \varepsilon[G_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{t}}, \mathbf{f})]_{\alpha, \beta} \underline{s}_{\alpha} n_{\beta}^k d\Gamma_k = 0, \forall \underline{\mathbf{s}} \in \underline{S}_0. \quad (11)$$

Из вариационного уравнения (11) получаем решение $\underline{\mathbf{t}}$ задачи Навье-Стокса на множестве M , по которому восстанавливаем решение в области Ω с помощью оператора Грина: $\mathbf{u} = G_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{t}}, \mathbf{f})$.

Линеаризация. Уравнения (11) являются нелинейными в силу нелинейности оператора $G_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{t}}, \mathbf{f})$ для получения их решения предлагается использовать следующий итерационный процесс:

Возьмём за начальное приближение непрерывную функцию \mathbf{u}^0 , которая удовлетворяет граничному условию: $\mathbf{u}^0|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}$; полагаем $\underline{\mathbf{t}}^0 := \mathbf{u}^0|_M \in \underline{S}_{\mathbf{g}}$. Для $k = i \dots +\infty$ решаем последовательность задач:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta \mathbf{t}}^i \in \underline{S}_0 : b(\underline{\Delta \mathbf{t}}^i, \underline{\mathbf{s}}) &= F(\underline{\mathbf{s}}), \forall \underline{\mathbf{s}} \in \underline{S}_0 \\ \underline{\mathbf{t}}^i &= \underline{\mathbf{t}}^{i-1} + \underline{\Delta \mathbf{t}}^i \in \underline{S}_{\mathbf{g}} \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} b(\underline{\Delta \mathbf{t}}, \underline{\mathbf{s}}) &= \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} \varepsilon[A^{i-1}(\underline{\Delta \mathbf{t}}^i)]_{\alpha, \beta} \underline{s}_{\alpha} n_{\beta}^k d\Gamma_k \\ F(\underline{\mathbf{s}}) &= - \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega_k} \varepsilon[G_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{t}}^{i-1}, \mathbf{f})]_{\alpha, \beta} \underline{s}_{\alpha} n_{\beta}^k d\Gamma_k \end{aligned}, \quad (12)$$

где A^i означает линейный оператор, сопоставляющий набору следов $\underline{\mathbf{h}}$ на M , решение следующей задачи в каждом СЭ:

$$\mathbf{w} = (w_\alpha(x))_\alpha : \begin{cases} \begin{cases} -\varepsilon w_{\alpha,\beta\beta} + u_\beta w_{\alpha,\beta} + r_{,\alpha} = 0 \\ w_{\alpha,\alpha} = 0 \end{cases}, x \in \Omega_k \\ \mathbf{w}|_{\partial\Omega_k} = \underline{\mathbf{h}}|_{\partial\Omega_k} \\ \int_{\Omega_k} r d\Omega = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{с } \mathbf{u} = G_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{t}}^i, \mathbf{f}).$$

Аппроксимация. При численном решении задач (12) для каждой итерации в пространстве S_0 выбирается конечномерное подпространство $\underline{S}_{0,h}^i$, в котором лежит решение, и конечномерное подпространство тестовых функций $\tilde{S}_{0,h}^i$. Рассмотрим следующую конечномерную постановку

$$\underline{\Delta \mathbf{t}}_h^i \in \underline{S}_{0,h}^i : b(\underline{\Delta \mathbf{t}}_h^i, \underline{\mathbf{s}}_h) = F(\underline{\mathbf{s}}_h), \quad \forall \underline{\mathbf{s}}_h \in \tilde{S}_{0,h}^i. \quad (14)$$

Пусть $\{\underline{\boldsymbol{\varphi}}_n^i\}_{n=1}^N$ базис в пространстве $\underline{S}_{0,h}^i$ и $\underline{\Delta \mathbf{t}}_h^i = \sum_{n=1}^N c_n \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n^i$; $\{\underline{\boldsymbol{\psi}}_n^i\}_{n=1}^N$ – базис в пространстве $\tilde{S}_{0,h}^i$. При решении системы (14) требуется сформировать матрицу жесткости $[B_h] = (b(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_n^i, \underline{\boldsymbol{\psi}}_m^i))_{n,m=1}^N$ и вектор сил $[F_h] = (F(\underline{\boldsymbol{\psi}}_n^i))_{n=1}^N$. При вычислении матрицы жёсткости необходимо найти функции $\mathbf{U}_n^j = A^{j-1}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_n^j)$, являющиеся решением задачи (13) с $\underline{\mathbf{h}} = \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n^j$, и функции $\underline{\mathbf{u}}_h^{j-1} = G_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{t}}^{j-1}, \mathbf{f})$. После обновления решения на границах $\underline{\mathbf{t}}_h^i = \underline{\mathbf{t}}_h^{i-1} + \underline{\Delta \mathbf{t}}_h^i$ обновляем $\underline{\mathbf{u}}_h^i = G_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{t}}_h^i, \mathbf{f})$.

Замечание 1. Для $\underline{\mathbf{u}}_h^i$ можно ограничиться обновлением вида:

$$\underline{\mathbf{u}}_h^i = \underline{\mathbf{u}}_h^{i-1} + \underline{\Delta \mathbf{u}}_h^i, \quad \underline{\Delta \mathbf{u}}_h^i = A^{i-1}(\underline{\Delta \mathbf{t}}_h^i) = \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{U}_n^i.$$

Однако такое обновление не учитывает нелинейность задачи.

Замечание 2. При рассмотрении аппроксимации (14) предполагалось, что функции $\mathbf{U}_n^j = A^{j-1}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_n^j)$ определены абсолютно точно. На практике требуется аппроксимировать также задачу вида (13) в каждом СЭ, где имеются ненулевые граничные условия. Для нулевых граничных условий получается нулевое решение.

4. Задача Стокса с разрывными коэффициентами

Одним из первых применений МКСЭ к решению задач гидродинамики был расчет диффузии в многосвязной области [7]. В [5] обсуждаются результаты расчетов тестовых задач течения вязкой несжимаемой жидкости: течение в каверне с движущейся верхней границей и течение в плоском канале за уступом. Целью ставится расчет задач фильтрации, в данной работе используются простейшие модели. Выполнены предварительные расчеты течения двухфазной жидкости без перемешивания. При численном моделировании использовался одножидкостный (one-fluid) подход: две фазы жидкости описываются одной системой законов сохранения для всего течения, а различие свойств учитывается в разрыве коэффициентов уравнений. Такая модель приводит к задаче Стокса с интерфейсом, а в стационарном варианте к задаче Стокса с разрывными значениями коэффициента кинематической вязкости.

Постановка задачи. Дана область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \square^n$ - прямоугольник.

$$\Omega_1 = \{(x, y) : 0 \leq x < X_1, 0 \leq y \leq Y\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) : X_1 < x \leq X_2, 0 \leq y \leq Y\}$$

Найти вектор-функцию \mathbf{u} и скалярную функцию p , удовлетворяющие системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} \varepsilon(x, y) \nabla \mathbf{u} + p = \mathbf{f}, \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad x \in \partial\Omega \\ \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \end{array} \right. , \quad (15)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ и $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ заданные функции.

Сделаны расчеты двух модельных задач с известными точными решениями.

Тест 1.

В единичном квадрате решение системы (15) было выбрано в виде

$$u = 8x(1-x)(2y-1), \quad v = -8y(1-y)(2x-1), \quad p = (2x-1)(2y-1).$$

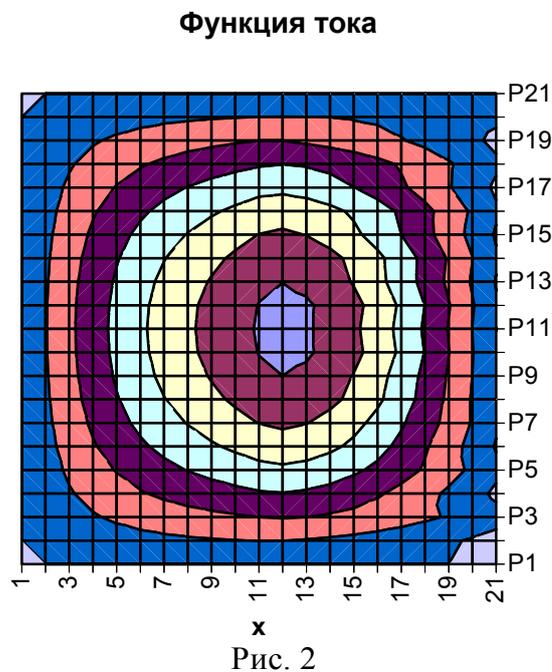
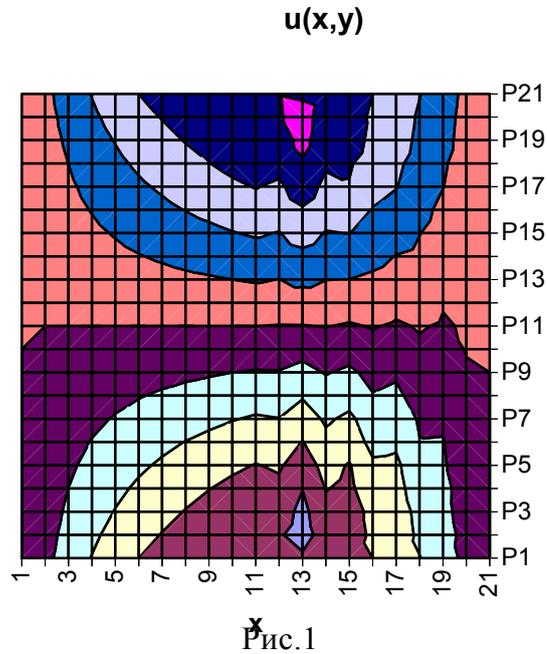
Правая часть: $f_1 = (16\varepsilon + 2)(2y-1)$, $f_2 = -(16\varepsilon - 2)(2x-1)$. $\varepsilon_1 = 1$, $X_1 = 0.5$

Исследовалась зависимость точности решения $\eta = \max_i \left| \frac{\tilde{\mathbf{u}}_i - \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i} \right|$ от ε_2 .

Расчеты велись на ортогональной сетке 10×10 , каждый прямоугольник делился диагональю из левого нижнего угла в верхний правый на два треугольника (всего 200 треугольников с катетами $h=0.1$). Использовалась [5] схема МКСЭ 2-го порядка точности. Суперэлемент строился методом RFB

(residual free bubble), число bubble-функций для скоростей $J = 15$, для давления $J_p = 1$.

На рис.1,2 представлены первая компонента скорости и функция тока, полученные расчетом с $\varepsilon_2 = 10^{-3}$



В таблице 1 приводится зависимость точности η от ε_2 :

Таблица 1

ε_2	1	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10	10^2
η	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$8 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}

Тест 2. Решение системы (15) в прямоугольнике

$$\Omega_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y): \pi < x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq \pi\}$$

было выбрано в виде

$$u_1(x, y) = \sin x \cos y, \quad u_2(x, y) = -\cos x \sin y, \quad p = \sin x \sin y;$$

Правая часть: $f_1 = 2\varepsilon \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$$f_2 = -2\varepsilon \cos x \sin y + \sin x \cos y, \quad \varepsilon_1 = 1$$

Расчеты проводились на сетке 24×16 по схеме МКСЭ 1-го порядка, $J = 6$, $J_p = 1$.

На рис.3 представлена функция тока, полученная расчетом с $\varepsilon_2 = 10^{-3}$:

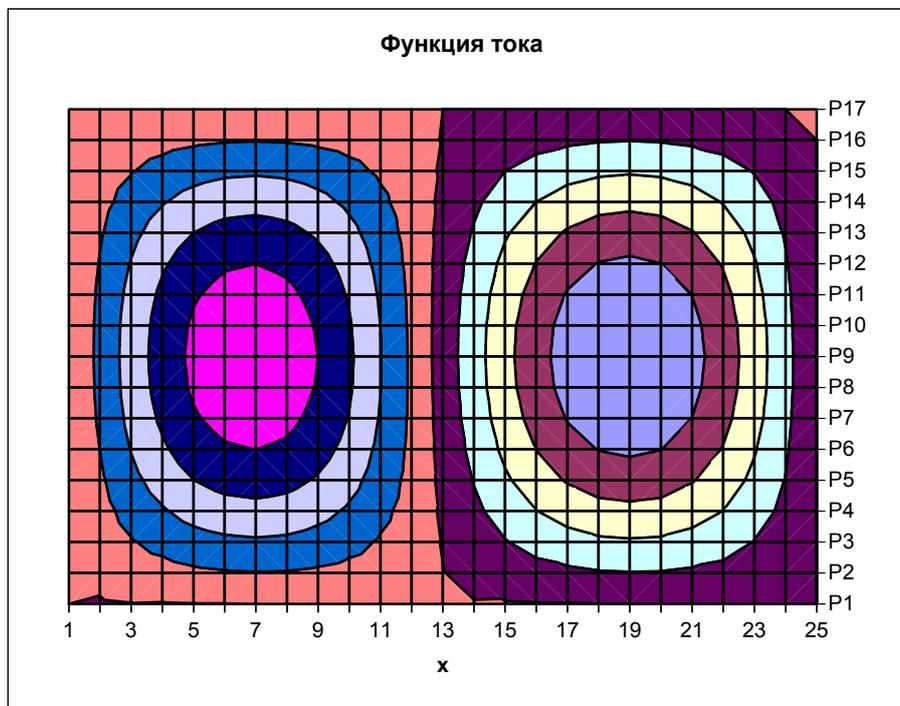


Рис. 3

В таблице 2 приводится зависимость точности η от ε_2 ,

Значения ε_2 брались согласно тесту в [8].

Таблица 2

ε_2	1	1.2	1.5	1.8	2.5
η	0.0018	0.0083	0.0158	0.0222	0.0337

Заключение

Метод конечных суперэлементов и построение векторных трехкомпонентных базисных функций как решений системы Навье-Стокса позволяет решить несколько проблем при расчете задач течения вязкой несжимаемой жидкости. Использовать общую сетку для скорости и давления, преодолеть условие LBB, стабилизировать метод, проводить расчеты на сетках с шагом в 20-50 раз крупнее, чем в стабилизированных МКЭ, использовать многопроцессорные вычисления.

Список литературы

1. Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко. Об одной специальной разностной схеме. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск.1976. Т.7. № 4. С. 149-163.
2. Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко. Об одном варианте метода конечных элементов. // Ж. вычис. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. №4. С. 950-960.
3. Р.П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994.
4. Жуков В.Т., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. Об одном направлении в конструировании разностных схем.// Ж. вычис. матем. и матем. физ.2002. Т.42. №2. С.223-235.
5. Страховская Л.Г. Об одном варианте МКСЭ для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости.// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009, том 49, №1, с. 123-136.
6. Р. Темам. Уравнения Навье-Стокса. // Мир. Москва. 1981.
7. Страховская Л.Г., Р.П. Федоренко. Расчёт диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1987, №171, С.26
8. Рукавишников А.В. Численный метод решения задачи Стокса с разрывным коэффициентом.// Вычислительные методы и программирование, 2005, т.6, №1,с. 17-26.