



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 6 за 2009 г.



Брюно А.Д., Горючкина И.В.

Эллиптические асимптотики  
решений уравнений  
Пенлеве

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А.Д., Горючкина И.В. Эллиптические асимптотики решений уравнений Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 6. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-6>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТКИ  
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Москва, 2009 г.

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Эллиптические асимптотики решений уравнений Пенлеве. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2009.

Здесь изложен алгоритм, основанный на трехмерной степенной геометрии, который позволяет найти эллиптические асимптотики для решений широкого класса дифференциальных уравнений, в том числе – для уравнений Пенлеве. Мы используем этот алгоритм и методы плоской и трехмерной степенной геометрии для вычисления степенных, сложных, экзотических и эллиптических асимптотик решений первых четырех уравнений Пенлеве, а также экспоненциально малых добавок к этим асимптотикам. Для первого уравнения Пенлеве асимптотики решений, выражаемые через эллиптические функции, были получены Бутру в 1913 г.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. Elliptic asymptotic forms of solutions to the Painlevé equations. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2009.

Here we set out algorithm based on the three-dimensional power geometry, which allows to find elliptic asymptotic forms of solutions to a wide class of differential equations, including Painlevé equations. We use this algorithm and methods of the plane and three-dimensional power geometry to calculate power, complicated, exotic and elliptic asymptotic forms of the solutions to the first four Painlevé equations and also exponentially small additions to these asymptotic forms. Asymptotic forms of the solutions to the first Painlevé equations, expressed in elliptic functions, were found by Boutroux in 1913.

©ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00082) и Фонда содействия отечественной науке.

e-mails: brunoa@mail.ru, chukhareva@yandex.ru

сайт: [www.keldysh.ru](http://www.keldysh.ru)

Здесь используются методы, термины и обозначения из [2, 3].

## §1. Метод вычисления асимптотик типа Бутру для ОДУ второго порядка

**1.1. Постановка задачи.** Пусть  $x$  и  $y$  – независимая и зависимая комплексные переменные соответственно. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (1.1)$$

где  $y' = dy/dx$ ,  $f$  – конечная сумма мономов

$$c x^{q_1} y^{q_2} y'^{q_3}, \quad (1.2)$$

$c = \text{const} \in \mathbb{C}$ ,  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ , целые  $q_3 \geq 0$ .

Степенные и нестепенные асимптотики уравнения (1.1) можно найти с помощью методов плоской степенной геометрии [2]. Все они выражаются через степенные функции, кратные логарифмы и экспоненты.

Для поиска других асимптотик решений уравнения (1.1) применим следующий подход. Сделаем двумерное степенное преобразование переменных  $x, y \rightarrow u, v$ :

$$y = x^\alpha v, \quad u = x^\beta, \quad \beta > 0. \quad (1.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} y' &= \alpha x^{\alpha-1} v + x^\alpha v', \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}v + 2\alpha x^{\alpha-1}v' + x^\alpha v'', \\ v' &= \beta x^{\beta-1} \dot{v}, \quad v'' = \beta(\beta-1)x^{\beta-2} \dot{v} + \beta^2 x^{2(\beta-1)} \ddot{v}, \end{aligned}$$

где  $\dot{v} = dv/du$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} y' &= \alpha x^{\alpha-1} v + \beta x^{\alpha+\beta-1} \dot{v}, \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}v + \beta(2\alpha+\beta-1)x^{\alpha+\beta-2} \dot{v} + \beta^2 x^{\alpha+2(\beta-1)} \ddot{v}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этом, уравнение (1.1) переходит в уравнение

$$\ddot{v} = h(u, v, \dot{v}). \quad (1.5)$$

Если в уравнении (1.5)

$$h = h_0(v, \dot{v}) + \sum_{i=1}^m u^{-\gamma_i} h_i(v, \dot{v}), \quad \gamma_i > 0, \quad (1.6)$$

то при  $u \rightarrow \infty$  монотонное или периодическое или дважды периодическое решение  $v_0(u)$  уравнения

$$\ddot{v} = h_0(v, \dot{v}), \quad (1.7)$$

отделенное от бесконечности и нуля (т. е.  $\varepsilon < |v_0| < \varepsilon^{-1} < \infty$ ), является асимптотикой решения уравнения (1.5), где  $\varepsilon$  – малое положительное число. Следовательно, при  $x \rightarrow \infty$  уравнение (1.1) имеет решение с асимптотикой

$$y \sim x^\alpha v_0(x^\beta). \quad (1.8)$$

При этом сходимость поточечная в области, где  $\varepsilon < |v_0| < \varepsilon^{-1}$ .

**Задача 1** Для уравнения (1.1) указать такое степенное преобразование (1.3), что в полученном уравнении (1.5) правая часть имеет вид (1.6).

**1.2. Основные понятия и методы трехмерной степенной геометрии.** Для решения нашей задачи используем трехмерную степенную геометрию [3]. Но сначала напомним некоторые ее понятия.

Пусть  $x$  – независимая переменная, а  $y$  и  $z$  – зависимые, и все они комплексные. Рассмотрим в  $\mathbb{C}^3$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f_1(x, y, z), \quad z' = f_2(x, y, z), \quad (1.9)$$

где  $y' = dy/dx$ ,  $z' = dz/dx$ ,  $f_i$  – конечные суммы мономов

$$c x^{q_1} y^{q_2} z^{q_3}, \quad c = \text{const} \in \mathbb{C}. \quad (1.10)$$

Для асимптотического исследования решений системы (1.9) согласно [3, гл. III] запишем систему (1.9) в виде

$$(\ln y)' = g_1(x, y, z) \equiv f_1 y^{-1}, \quad (\ln z)' = g_2(x, y, z) \equiv f_2 z^{-1}. \quad (1.11)$$

Согласно [3] каждому слагаемому вида (1.10), входящему в правые части уравнений (1.11), поставим в соответствие его векторный показатель степени

$$\tilde{Q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (1.12)$$

Объекты трехмерной степенной геометрии будем выделять тильдой. Множество всех таких точек  $\tilde{Q}$  называется *носителем системы* (1.11) и обозначается  $\tilde{\mathbf{S}}$ . Выпуклая оболочка  $\tilde{\Gamma}$  носителя  $\tilde{\mathbf{S}}$  называется *многогранником Ньютона* системы (1.11) [3]. Поверхность  $\partial\tilde{\Gamma}$  многогранника  $\tilde{\Gamma}$  состоит из обобщенных граней  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$ , где  $d = \dim \tilde{\Gamma}_j^{(d)}$  и  $j$  – это номер грани. В пространстве  $\mathbb{R}_*^3$ , двойственном пространству  $\mathbb{R}^3$ , каждой грани  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$  соответствует ее нормальный конус  $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ . Он образован такими векторами  $\tilde{P} \in \mathbb{R}_*^3$ , что плоскость, нормальная к вектору  $\tilde{P}$  и опорная к многограннику  $\tilde{\Gamma}$ , пересекает многогранник  $\tilde{\Gamma}$  в точности по грани  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$ . При этом вектор  $\tilde{P}$  направлен во вне многогранника  $\tilde{\Gamma}$ . Каждой грани  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$  многогранника  $\tilde{\Gamma}$  поставим в соответствие укороченную систему

$$(\ln y)' = \hat{g}_{1j}^{(d)}(x, y, z), \quad (\ln z)' = \hat{g}_{2j}^{(d)}(x, y, z), \quad (1.13)$$

где  $\hat{g}_{ij}^{(d)}(x, y, z)$  содержит те и только те мономы (1.10) из суммы  $g_i(x, y, z)$ , у которых векторный показатель степени (1.12) лежит на грани  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$ .

Пусть  $\omega = 1$ , если  $x \rightarrow \infty$ , и  $\omega = -1$ , если  $x \rightarrow 0$ . Согласно [3, гл. III] если система (1.9) имеет решение вида

$$y = x^{p_2}(b_2 + o(1)), \quad z = x^{p_3}(b_3 + o(1)), \quad b_2, b_3 \neq 0, \quad (1.14)$$

где  $x \rightarrow 0$  или  $\infty$ , и вектор  $\tilde{P} = \omega(1, p_2, p_3) \in \tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ , то укороченная система (1.13) имеет решение

$$y = b_2 x^{p_2}, \quad z = b_3 x^{p_3}. \quad (1.15)$$

То есть асимптотика решения полной системы является решением соответствующей укороченной системы. Согласно [5, гл. 1, §1] это справедливо не только для степенных асимптотик. В частности, если вектор  $\tilde{P} = (1, 0, 0) \in \tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ , то дважды периодическое решение укороченной системы, отделенное от бесконечности и нуля, является асимптотикой решения полной системы.

Уравнение (1.1) представим в виде системы двух уравнений

$$y' = z, \quad z' = f(x, y, z), \quad (1.16)$$

которую в свою очередь перепишем в виде (1.11):

$$(\ln y)' = y^{-1} z \stackrel{\text{def}}{=} f_1, \quad (\ln z)' = f(x, y, z) z^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} f_2. \quad (1.17)$$

Первому уравнению системы (1.17) соответствует одна точка

$$\tilde{Q} = (0, -1, 1), \quad (1.18)$$

а второму –  $n$  точек  $\tilde{Q}_i = (q_1^i, q_2^i, q_3^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Среди которых может быть точка (1.18).

**Теорема 1.1.** Пусть  $\tilde{\Gamma}$  – многогранник Ньютона системы (1.17) и  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$  – такая его обобщенная грань, которая содержит точку (1.18), а ее нормальный конус  $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$  содержит вектор  $\tilde{P} = (1, p_2, p_3)$ , т. е.  $\omega = 1$ . Если  $p_2 < p_3 + 1$  у вектора  $\tilde{P}$ , то двумерное степенное преобразование (1.3) с

$$\alpha = p_2 \text{ и } \beta = p_3 - p_2 + 1 \quad (1.19)$$

переводит уравнение (1.1) в уравнение (1.5) со свойством (1.6).

**Доказательство.** Рассмотрим систему (1.17), эквивалентную уравнению (1.1), которую запишем в виде

$$\frac{y'}{y} = \frac{z}{y}, \quad \frac{y''}{y'} = \sum_{i=1}^n a_i x^{q_1^i} y^{q_2^i} y'^{q_3^i}, \quad (1.20)$$

где  $a_i$  – постоянные коэффициенты,  $q_1^i, q_2^i, q_3^i$  – целые показатели степени,  $q_3^i \geq -1$ . Пусть на грани  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$  лежат точки  $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_m$ , а остальные точки  $\tilde{Q}_{m+1}, \dots, \tilde{Q}_n$  не лежат на ней.

Сделаем преобразование (1.3) в системе (1.20). При этом рассмотрим только второе уравнение этой системы. Учитывая формулы (1.3) и (1.4), получаем равенство

$$x^{\beta-1} \frac{\beta^2 \ddot{v} + \beta(2\alpha + \beta - 1) \frac{\dot{v}}{u} + \alpha(\alpha - 1) \frac{v}{u^2}}{\beta \dot{v} + \alpha \frac{v}{u}} = \quad (1.21)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i u^{(q_1^i + \alpha q_2^i + (\alpha + \beta - 1) q_3^i) / \beta} v^{q_2^i} \left[ \beta \dot{v} + \alpha \frac{v}{u} \right]^{q_3^i}.$$

Из него выразим  $\ddot{v}$  и получим уравнение

$$\ddot{v} = \frac{1}{\beta^2} \left[ -\beta(2\alpha + \beta - 1) \frac{\dot{v}}{u} - \alpha(\alpha - 1) \frac{v}{u^2} + \right. \quad (1.22)$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n a_i u^{(q_1^i + \alpha q_2^i + (\alpha + \beta - 1) q_3^i + 1 - \beta) / \beta} v^{q_2^i} \left[ \beta \dot{v} + \alpha \frac{v}{u} \right]^{q_3^i + 1} \right].$$

Покажем, что для всех точек  $\tilde{Q}_i = (q_1^i, q_2^i, q_3^i)$ , лежащих на грани  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$ , выражение  $q_1^i + \alpha q_2^i + (\alpha + \beta - 1) q_3^i + 1 - \beta$  обращается в ноль. Согласно (1.19) имеем  $\tilde{P} = (1, \alpha, \alpha + \beta - 1)$ . Для всех точек  $\tilde{Q} \in \tilde{\Gamma}_j^{(d)}$  скалярное произведение  $\langle \tilde{P}, \tilde{Q} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$  одинаково и равно  $c_1$ , а для точек  $\tilde{Q} \in \tilde{S}_j^{(d)} \setminus \tilde{\Gamma}_j^{(d)}$  это скалярное произведение меньше  $c_1$ . Вычислим  $c_1$ . По условию теоремы точка (1.18) лежит на грани  $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$ . Для нее  $\langle \tilde{P}, \tilde{Q} \rangle = 0 - \alpha + \alpha + \beta - 1 = \beta - 1 = c_1$ . Следовательно, для всех точек  $\tilde{Q}_i = (q_1^i, q_2^i, q_3^i)$  с  $i \leq m$  выражение  $q_1^i + \alpha q_2^i + (\alpha + \beta - 1) q_3^i + 1 - \beta$  одинаково и равно 0, а для остальных точек  $\tilde{Q}_{m+1}, \dots, \tilde{Q}_n$  оно отрицательно. Поэтому в правой части уравнения (1.22) сумма

$$\frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^m a_i v^{q_2^i} \dot{v}^{q_3^i + 1} \quad (1.23)$$

содержит все мономы с нулевой степенью  $u$ , а остальные мономы содержат  $u$  в отрицательных степенях. Следовательно, уравнение (1.5) имеет вид (1.6), где  $h_0$  равно (1.23). ■

## §2. Примеры вычисления асимптотик Бутру

**2.1. Пример 1.** Первое уравнение Пенлеве [4] имеет вид

$$y'' = 3y^2 + x. \quad (2.1)$$

Запишем его в виде системы (1.17):

$$(\ln y)' = y^{-1}z, \quad (\ln z)' = (3y^2 + x)z^{-1}.$$

Носитель  $\tilde{\mathbf{S}}$  этой системы состоит из трех точек  $\tilde{Q}_1 = (0, -1, 1)$ ,  $\tilde{Q}_2 = (0, 2, -1)$ ,  $\tilde{Q}_3 = (1, 0, -1)$ . Их выпуклая оболочка  $\tilde{\Gamma}$  – это треугольник с вершинами в этих точках и с нормальным вектором  $\tilde{N} = (4, 2, 3)$ . Следовательно, нормальный конус этой грани содержит вектор  $\tilde{P} = \tilde{N}/4 = (1, 1/2, 3/4)$ , т. е.  $p_2 = 1/2$ ,  $p_3 = 3/4$ . Согласно (1.19) получаем  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 5/4$ . После двумерного степенного преобразования (1.3) с этими  $\alpha$  и  $\beta$  уравнение (2.1) принимает вид

$$-\frac{1}{4}x^{-3/2}v + \frac{5}{2}x^{-1/4}\dot{v} + \frac{25}{16}x\ddot{v} = x(3v^2 + 1).$$

После деления на  $25x/16$  получаем уравнение в виде (1.5), (1.6)

$$\ddot{v} = \frac{16}{25}(3v^2 + 1) + \frac{4}{25}x^{-5/2}v - \frac{8}{5}x^{-5/4}\dot{v}$$

с предельным при  $x \rightarrow \infty$  уравнением (1.7) вида  $\ddot{v} = \frac{16}{25}(3v^2 + 1)$ . После умножения его на  $\dot{v}$  и интегрирования получаем уравнение

$$\dot{v}^2 = \frac{32}{25}(v^3 + v + C_0), \quad (2.2)$$

где  $C_0$  – произвольная постоянная. Уравнение (2.2) решается в эллиптических функциях [6, гл. 13]

$$v = \frac{25}{8} \wp \left( u + C_1, -\frac{256}{625}, -\frac{2048}{15625} C_0 \right),$$

где  $\wp$  – функция Вейерштрасса,  $C_0$ ,  $C_1$  – произвольные постоянные. Согласно (1.8) получаем асимптотику

$$y \sim \frac{25}{8} x^{1/2} \wp \left( x^{5/4} + C_1, -\frac{256}{625}, -\frac{2048}{15625} C_0 \right), \quad (2.3)$$

которая отличается от асимптотики, найденной Бутру [1], и от формулы (2.214) в [13] только постоянными множителями.

В плоской степенной геометрии носитель уравнения (2.1) состоит из трех точек  $Q_1 = (-2, 1)$ ,  $Q_2 = (0, 2)$ ,  $Q_3 = (1, 0)$ , и их выпуклая оболочка – это треугольник  $\Gamma$  с этими вершинами. При этом имеется взаимно однозначное соответствие  $Q_i \leftrightarrow \tilde{Q}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Оно задается проекцией  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : Q = \{\tilde{Q} - (\tilde{q}_3 + 1)(1, -1, 1)\}_{1,2}$ , где  $\tilde{q}_3$  – третья координата вектора  $\tilde{Q}$ ,  $\{\}_{1,2}$  – первые две координаты трехмерного вектора. Поэтому



каждому ребру и вершине треугольника  $\Gamma$  соответствует ребро и вершина треугольника  $\tilde{\Gamma}$ . Асимптотики, отвечающие соответствующим ребрам и вершинам оказываются равными. Но трехмерная степенная геометрия дает асимптотики (2.3), отвечающие всему треугольнику  $\tilde{\Gamma}$ , а двумерная степенная геометрия не дает асимптотик, отвечающих всему треугольнику  $\Gamma$  [7].

**2.2. Пример 2.** Второе уравнение Пенлеве [4] имеет вид

$$y'' = 2y^3 + xy + a, \quad (2.4)$$

где  $a$  – комплексный параметр. Соответствующая система (1.17) имеет вид

$$(\ln y)' = y^{-1}z, \quad (\ln z)' = (2y^3 + xy + a)z^{-1}. \quad (2.5)$$

Ее носитель  $\tilde{\mathbf{S}}$  состоит из четырех точек  $\tilde{Q}_1 = (0, -1, 1)$ ,  $\tilde{Q}_2 = (0, 3, -1)$ ,  $\tilde{Q}_3 = (1, 1, -1)$ ,  $\tilde{Q}_4 = (0, 0, -1)$ . Многогранник Ньютона  $\tilde{\Gamma}$ , т. е. выпуклая оболочка этого носителя  $\tilde{\mathbf{S}}$ , является тетраэдром. Он имеет четыре двумерные грани  $\tilde{\Gamma}_j^{(2)} = [\tilde{\mathbf{S}} \setminus \tilde{Q}_j]$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , где квадратные скобки означают выпуклую оболочку. При этом, грани  $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_3^{(2)}$ ,  $\tilde{\Gamma}_4^{(2)}$  содержат точку  $\tilde{Q}_1$ , т. е. (1.18). Согласно гл. I [3] внешние нормали  $\tilde{N}_j$  к граням  $\tilde{\Gamma}_j^{(2)}$  суть

$$\tilde{N}_1 = (0, 0, -1), \quad \tilde{N}_2 = (2, -2, -1), \quad \tilde{N}_3 = (-1, 0, 0), \quad \tilde{N}_4 = (2, 1, 2).$$

Две из них  $\tilde{N}_2$  и  $\tilde{N}_4$  имеют положительные первые компоненты, соответствующие им грани  $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$  и  $\tilde{\Gamma}_4^{(2)}$  содержат точку  $\tilde{Q}_1$ .

Начнем с грани  $\tilde{\Gamma}_4^{(2)}$ . Ее нормированная внешняя нормаль  $\tilde{P} = (1, p_2, p_3) = \tilde{N}_4/2 = (1, 1/2, 1)$ , т. е.  $p_2 = 1/2$ ,  $p_3 = 1$ . Согласно (1.19) имеем  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 3/2$ . Согласно (1.4) преобразование (1.3) с этими  $\alpha$  и  $\beta$  приводит уравнение (2.4) к виду

$$-\frac{1}{4}x^{-3/2}v + \frac{9}{4}\dot{v} + \frac{9}{4}x^{3/2}\ddot{v} = x^{3/2}(2v^3 + v) + a.$$

После деления на  $9x^{3/2}/4$  получаем уравнение вида (1.5), (1.6)

$$\ddot{v} = \frac{8}{9}v^3 + \frac{4}{9}v + \frac{4}{9}ax^{-3/2} + \frac{1}{9}x^{-3} - x^{-3/2}\dot{v}.$$

Соответствующее уравнение (1.7) есть  $\ddot{v} = \frac{8}{9}v^3 + \frac{4}{9}v$ . Его первый интеграл есть

$$\dot{v}^2 = \frac{4}{9}(v^4 + v^2) + C_0, \quad (2.6)$$

где  $C_0$  – произвольная постоянная. Если взять  $v^2$  в качестве новой зависимой переменной, то решения уравнения (2.6) имеют вид

$$v = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\wp \left( u + C_1, \frac{16}{9} \left( \frac{4}{27} - C_0 \right), \frac{64}{243} \left( C_0 - \frac{8}{81} \right) \right) - \frac{4}{27}},$$

где  $C_1$  – вторая произвольная постоянная,  $\wp$  – функция Вейерштрасса [6, гл. 13]. Асимптотика (1.8) имеет вид

$$y \sim \pm \frac{3}{2} x^{1/2} \sqrt{\wp \left( x^{1/2} + C_1, \frac{16}{9} \left( \frac{4}{27} - C_0 \right), \frac{64}{243} \left( C_0 - \frac{8}{81} \right) \right) - \frac{4}{27}}. \quad (2.7)$$

Этот способ вычисления асимптотики с помощью  $v^2$  указан в § 2.15 книги [13].

Рассмотрим теперь грань  $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$  с нормальным вектором  $\tilde{N}_2 = (2, -2, -1)$ . Соответствующий вектор  $\tilde{P} = \tilde{N}_2/2 = (1, -1, -1/2)$ , т. е.  $p_2 = -1$ ,  $p_3 = -1/2$ . Согласно (1.19) имеем  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 3/2$ . Согласно (1.4) преобразование (1.3) с этими  $\alpha$  и  $\beta$  приводит уравнение (2.4) к виду

$$2x^{-3}v - \frac{9}{4}x^{-3/2}\dot{v} + \frac{9}{4}\ddot{v} = 2x^{-3}v^3 + v + a.$$

Соответствующее уравнение (1.5) есть

$$\ddot{v} = \frac{4}{9}(v + a) + \frac{8}{9}x^{-3}v^3 - \frac{8}{9}x^{-3}v + x^{-3/2}\dot{v}.$$

При  $x \rightarrow \infty$  предельное уравнение (1.7) есть  $\ddot{v} = \frac{4}{9}(v + a)$ . Его решения суть

$$v = -a + C_1 \exp(2u/3) + C_2 \exp(-2u/3),$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные. Следовательно,

$$v \sim \begin{cases} -a + C_1 \exp(2u/3), & \text{если } \operatorname{Re} x^{3/2} \rightarrow -\infty, \\ -a + C_2 \exp(-2u/3), & \text{если } \operatorname{Re} x^{3/2} \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Для решений уравнения (2.4) получаем асимптотики

$$y \sim x^{-1} \left[ -a + C_1 \exp \left( \pm 2x^{3/2}/3 \right) \right] \text{ при } \operatorname{Re} x^{3/2} \rightarrow \mp \infty. \quad (2.8)$$

В плоской степенной геометрии носитель уравнения (2.4) состоит из четырех точек  $Q_1 = (-2, 1)$ ,  $Q_2 = (0, 3)$ ,  $Q_3 = (1, 1)$ ,  $Q_4 = (0, 0)$ . Их выпуклая оболочка – это плоский четырехугольник  $\Gamma$  с этими вершинами. Между двумя носителями имеется взаимно однозначное соответствие  $Q_i \leftrightarrow \tilde{Q}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Оно задается проекцией  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : Q = \{\tilde{Q} - (\tilde{q}_3 + 1)(1, -1, 1)\}_{1,2}$ , где  $\tilde{q}_3$  – третья координата вектора  $\tilde{Q}$ ,  $\{\}_{1,2}$  – первые две координаты трехмерного вектора. Поэтому вершинам и четырем ребрам четырехугольника  $\Gamma$  соответствуют вершины и четыре ребра тетраэдра  $\tilde{\Gamma}$ , и соответствующие им асимптотики равны. Но укороченные уравнения, соответствующие граням тетраэдра  $\tilde{\Gamma}$  и остальным двум его ребрам не имеют аналогов в плоской степенной геометрии. Они-то и дают асимптотики, которые не получаются с помощью лишь плоской степенной геометрии.

Впрочем, асимптотики (2.8) получаются и методами плоской степенной геометрии следующим образом. Согласно п. 2.6 [8] при  $x \rightarrow \infty$  решения уравнения (2.4) имеют асимптотическое разложение

$$y = x^{-1} \left( -a + 2a(a^2 + 1)x^{-3} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^{-3k} \right), \quad (2.9)$$

где все  $c_k$  постоянны и однозначно определены. Согласно § 7 [2] это разложение имеет две экспоненциально малые добавки

$$C_i \exp \left[ (-1)^i x^{3/2} \left( \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} x^{-3k/2} \right) \right], \quad i = 1, 2, \quad (2.10)$$

при  $\operatorname{Re} \left( (-1)^i x^{3/2} \right) \rightarrow -\infty$ , где все  $b_{ik}$  постоянны и однозначно определены. Асимптотики (2.8) являются суммой начальных членов разложений (2.9) и (2.10).

### § 3. Асимптотики решений третьего уравнения Пенлеве

**3.1. Свойства уравнения.** Третье уравнение Пенлеве [4] имеет вид

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{ay^2 + b}{x} + \frac{cy^4 + d}{y}, \quad (3.1)$$

где  $y' = dy/dx$ ,  $a, b, c, d$  – комплексные параметры. Правая часть уравнения (3.1) имеет две особые точки независимой переменной  $x = 0$  и  $x = \infty$ .

Легко видеть, что уравнение (3.1) имеет симметрию [9]

$$(x, y, a, b, c, d) = \left( x^*, \frac{1}{y^*}, -b^*, -a^*, -d^*, -c^* \right), \quad (3.2)$$

т. е. переходит в себя при этой подстановке. При этом свойство

$$a, b, c, d \neq 0 \quad (3.3)$$

сохраняется. В дальнейшем рассмотрим уравнение (3.1) при условии (3.3). Умножим обе части уравнения на  $xy$  и перенесем левую часть вправо. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + ay^3 + by + cxy^4 + dx = 0. \quad (3.4)$$

**3.2. Двумерный анализ.** Согласно [2, 10] найдем асимптотики решений уравнения (3.4) методами плоской степенной геометрии. При условии (3.3) плоский носитель  $\mathbf{S}(f)$  состоит из пяти точек

$$Q_1 = (-1, 2), Q_2 = (0, 3), Q_3 = (0, 1), Q_4 = (1, 4), Q_5 = (1, 0).$$

Их выпуклая оболочка – это треугольник  $\Gamma(f)$  с вершинами  $\Gamma_1^{(0)} = Q_5$ ,  $\Gamma_2^{(0)} = Q_4$ ,  $\Gamma_3^{(0)} = Q_1$  и ребрами

$$\Gamma_1^{(1)} = [Q_4, Q_5], \Gamma_2^{(1)} = [Q_1, Q_2, Q_4], \Gamma_3^{(1)} = [Q_1, Q_3, Q_5],$$

где квадратные скобки означают выпуклую оболочку. Носитель  $\mathbf{S}(f)$ , треугольник  $\Gamma(f)$  и его ребра  $\Gamma_j^{(1)}$  показаны на рис. 1 в координатах  $q_1, q_2$ . Нормальные конусы  $\mathbf{U}_j^{(d)}$  обобщенных граней  $\Gamma_j^{(d)}$  показаны на рис. 2 в координатах  $p_1, p_2$ .

Согласно [2, § 1] каждой обобщенной грани  $\Gamma_j^{(d)}$  соответствует свое укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0. \quad (3.5)$$

Его решение  $y = \varphi(x)$ , со свойством

$$\omega(1, p) \in \mathbf{U}_j^{(d)}, \quad (3.6)$$

является асимптотикой некоторого решения  $y = \varphi(x) + \psi(x)$  полного уравнения (3.4). Здесь  $\omega = 1$ , если  $x \rightarrow \infty$ ,  $\omega = -1$ , если  $x \rightarrow 0$ , и  $p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(x)}{\ln x}$  – порядок решения. Последовательно по обобщенным граням  $\Gamma_j^{(d)}$  перечислим те решения  $y = \varphi(x)$  укороченных уравнений (3.5), которые обладают указанными свойствами, т. е. являются асимптотиками решений уравнения (3.4).

Вершинам  $\Gamma_1^{(0)}$  и  $\Gamma_2^{(0)}$  соответствуют алгебраические укороченные уравнения  $dx = 0$  и  $сху^4 = 0$ . Они не имеют нетривиальных решений.

Вершине  $\Gamma_3^{(0)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

Все его решения имеют вид

$$\mathcal{A} : y = c_r x^r, \quad (3.7)$$

где  $r$  и  $c_r$  – произвольные комплексные постоянные. Согласно рис. 2 здесь  $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{P = (p_1, p_2) : p_1 < 0, p_1 > p_2 \text{ или } p_1 < -p_2\}$ . Поэтому включение (3.6) возможно только при

$$\omega = -1, \text{ т. е. } x \rightarrow 0, \text{ и } \text{Re } r \in (-1, 1). \quad (3.8)$$

Ребры  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x(cy^4 + d) = 0 \quad (3.9)$$

и нормальный конус  $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{P = \lambda(1, 0), \lambda > 0\}$ . Включение (3.6) означает, что  $\omega = 1$ , т. е.  $x \rightarrow \infty$ , и  $p = 0$ . Уравнение (3.9) имеет 4 решения

$$\mathcal{B}_k : y = \sqrt[4]{-d/c} \varepsilon^k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3.10)$$

где  $\varepsilon$  – примитивный корень четвертой степени из единицы.

Ребры  $\Gamma_3^{(1)}$  соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + by + dx = 0 \quad (3.11)$$

и нормальный конус  $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{P = -\lambda(1, 1), \lambda > 0\}$ . Поэтому  $\omega = -1$ , т. е.  $x \rightarrow 0$ . Уравнение (3.11) можно решить в явном виде (см. [11, п. 2.3.2]). Из его решений выбираем те, порядок которых равен единице, т. е. соответствует нормальному конусу  $\mathbf{U}_3^{(1)}$ . Это и будут асимптотики решений полного уравнения (3.4). Получаем следующие семейства асимптотик решений уравнения (3.4) при  $x \rightarrow 0$ .

$$\mathcal{D}_0 : y = -\frac{d}{b}x; \quad (3.12)$$

$$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 : y = x \left( -\frac{b}{2} \ln^2 x + \sigma \frac{C_2}{2} \sqrt{-2b} \ln x + \frac{C_2^2}{4} - \frac{d}{2b} \right); \quad (3.13)$$

$$\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4 : y = \frac{d}{b} \left( C_2 x^{\sigma b / \sqrt{-d}} - 1 \right) \quad (3.14)$$

существуют только при

$$\operatorname{Re}(b/\sqrt{-d}) = 0 \text{ и } b/\sqrt{-d} \neq 0; \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6 : y &= x \frac{\alpha(1 + \varkappa)^2 - \beta(1 - \varkappa)^2}{4\varkappa} = \\ &= x \left\{ \alpha \cos^2 \left[ \ln (C_2 x)^{i\gamma/2} \right] + \beta \sin^2 \left[ \ln (C_2 x)^{i\gamma/2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\varkappa = (C_2 x)^\gamma, \quad \operatorname{Re} \gamma = 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \alpha + \beta = \frac{2b}{\gamma^2}, \quad \alpha \cdot \beta = -\frac{d}{\gamma^2}, \quad \sigma = \operatorname{sign} \operatorname{Im} \gamma, \quad (3.17)$$

существуют только при

$$\operatorname{Re}(b/d) > 0, \quad \operatorname{Im}(b/d) = 0. \quad (3.18)$$

Везде  $C_2$  и  $\gamma$  – произвольные постоянные и для семейства  $\mathcal{D}_j$  постоянная

$$\sigma = (-1)^{j-1}. \quad (3.19)$$

Ребру  $\Gamma_2^{(1)}$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + ay^2 + cxy = 0. \quad (3.20)$$

Оно получается из уравнения (3.11) симметрией (3.2). С помощью этой симметрии из асимптотик, соответствующих ребру  $\Gamma_3^{(1)}$ , получаем асимптотики, соответствующие ребру  $\Gamma_2^{(1)}$ . А именно, семейства

$$\mathcal{C}_0 : y = -\frac{c}{a}x^{-1}; \quad (3.21)$$

$$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 : y = x^{-1} \left( \frac{a}{2} \ln^2 x + \sigma \frac{C_2}{2} \sqrt{2a} \ln x + \frac{C_2^2}{4} - \frac{c}{2a} \right)^{-1}; \quad (3.22)$$

$$\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4 : y = \frac{a}{c}x^{-1} \left( C_2 x^{-\sigma a/\sqrt{c}} - 1 \right)^{-1} \quad (3.23)$$

существуют при

$$\operatorname{Re}(a/\sqrt{c}) = 0 \text{ и } a/\sqrt{c} \neq 0; \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6 : y &= x^{-1} \frac{4\aleph}{\alpha(1+\aleph)^2 - \beta(1-\aleph)^2} = \\ &= x^{-1} \left\{ \alpha \cos^2 \left[ \ln(C_2 x)^{i\gamma/2} \right] + \beta \sin^2 \left[ \ln(C_2 x)^{i\gamma/2} \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$\aleph = (C_2 x)^\gamma, \operatorname{Re} \gamma = 0, \gamma \neq 0, \alpha + \beta = -\frac{2a}{\gamma^2}, \alpha \cdot \beta = \frac{c}{\gamma^2}, \sigma = \operatorname{sign} \operatorname{Im} \gamma, \quad (3.26)$$

существуют при

$$\operatorname{Re}(a/c) > 0, \operatorname{Im}(a/c) = 0. \quad (3.27)$$

Для семейства  $\mathcal{C}_j$  выполнено (3.19).

**Теорема 3.1.** При условии (3.3) решения уравнения (3.4) имеют 19 семейств асимптотик:

$\mathcal{A}$  – согласно формулам (3.7), (3.8);

$\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_4$  – согласно формуле (3.10);

$\mathcal{C}_0$  – согласно формуле (3.21);  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  – согласно (3.22);  $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$  – согласно (3.23), (3.24);  $\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$  – согласно (3.25) – (3.27);

$\mathcal{D}_0$  – согласно формуле (3.12);  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  – согласно (3.13);  $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  – согласно (3.14), (3.15);  $\mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6$  – согласно (3.16) – (3.18).

При этом  $x \rightarrow \infty$  только для семейств  $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_4$ , семейства  $\mathcal{C}_0$  и  $\mathcal{D}_0$  состоят из одного элемента (т. е. без параметров), семейства  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_4$  и  $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_4$  имеют по одному комплексному параметру  $C_2$ , семейства  $\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6$  имеют один комплексный параметр  $C_2$  и один вещественный параметр  $\gamma^2 < 0$ , семейство  $\mathcal{A}$  имеет два комплексных параметра  $c_r$  и  $r$ .

Асимптотики семейств  $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_4, \mathcal{C}_0$  и  $\mathcal{D}_0$  – степенные,  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  – сложные,  $\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_6, \mathcal{D}_3 - \mathcal{D}_6$  – экзотические. Все эти асимптотики решений продолжаются в асимптотические разложения решений.

**3.3. Эллиптическая асимптотика.** Если в уравнении (3.1) устремить  $x$  к бесконечности и считать, что  $y, y^{-1}$  и  $y'$  остаются конечными и отделены от нуля, то в пределе получаем уравнение

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + \frac{cy^4 + d}{y}. \quad (3.28)$$

Оно имеет первый интеграл

$$y'^2 = cy^4 - d + C_0 y^2, \quad (3.29)$$

где  $C_0$  – произвольная постоянная. Уравнение (3.29) решается в эллиптических функциях [6] с помощью перехода к переменной  $y^2$ :

$$y = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[ \wp \left( x + C_1, \frac{4}{3}C_0^2 + 4cd, -\frac{8}{27}C_0^3 - \frac{4}{3}C_0cd \right) - \frac{C_0}{3} \right]^{1/2}, \quad (3.30)$$

где  $\wp$  – функция Вейерштрасса,  $C_1$  – произвольная постоянная. Эти функции являются пределами для решений уравнения (3.1) везде кроме малых окрестностей тех значений  $x$ , в которых функция или ее производная равна нулю или бесконечности.

**Теорема 3.2.** При  $x \rightarrow \infty$  решения уравнения (3.1) имеют эллиптические асимптотики (3.30).

**3.4. Трехмерный анализ.** Запишем уравнение (3.1) в виде системы

$$y' = z, \quad z' = y^{-1}z^2 - x^{-1}z + x^{-1}(ay^2 + b) + y^{-1}(cy^4 + d) \quad (3.31)$$

и изучим ее методами трехмерной степенной геометрии согласно §1. Для этого систему (3.31) запишем в виде

$$\begin{aligned} (\ln y)' &= y^{-1}z, \\ (\ln z)' &= y^{-1}z - x^{-1} + ax^{-1}y^2z^{-1} + bx^{-1}z^{-1} + cy^3z^{-1} + dy^{-1}z^{-1}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Носитель этой системы состоит из шести точек

$$\tilde{Q}_1 = (0, -1, 1), \quad \tilde{Q}_2 = (-1, 0, 0), \quad \tilde{Q}_3 = (-1, 2, -1),$$

$$\tilde{Q}_4 = (-1, 0, -1), \tilde{Q}_5 = (0, 3, -1), \tilde{Q}_6 = (0, -1, -1).$$

Их выпуклая оболочка  $\tilde{\Gamma}$  – это пятигранник с шестью вершинами  $\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_6$ , граница которого состоит из пяти двумерных граней

$$\tilde{\Gamma}_1^{(2)} = [\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_5], \tilde{\Gamma}_2^{(2)} = [\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4, \tilde{Q}_6],$$

$$\tilde{\Gamma}_3^{(2)} = [\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_5, \tilde{Q}_6], \tilde{\Gamma}_4^{(2)} = [\tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4, \tilde{Q}_5, \tilde{Q}_6], \tilde{\Gamma}_5^{(2)} = [\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4].$$

Пятигранник  $\tilde{\Gamma}$  показан на рис. 3. Согласно [3, гл. I] внешние нормали  $\tilde{N}_j$  к граням  $\tilde{\Gamma}_j^{(2)}$  суть

$$\tilde{N}_1 = (-1, 1, 2), \tilde{N}_2 = (-1, -1, 0), \tilde{N}_3 = (1, 0, 0),$$

$$\tilde{N}_4 = (0, 0, -1), \tilde{N}_5 = (-1, 0, 0).$$

Только нормаль  $\tilde{N}_3$  имеет положительную первую координату. Грань  $\tilde{\Gamma}_3^{(2)}$  содержит точку  $\tilde{Q}_1$ . Соответствующая этой грани укороченная система системы (3.32) есть

$$(\ln y)' = y^{-1}z, (\ln z)' = y^{-1}z + cy^3z^{-1} + dy^{-1}z^{-1},$$

т. е.

$$y' = z, z' = y^{-1}z^2 + cy^3 + dy^{-1}$$

или одно уравнение

$$y'' = y^{-1}y'^2 + cy^2 + dy^{-1}.$$

Оно совпадает с уравнением (3.28), которое уже изучено.

Заметим, что соответствие между носителями  $\tilde{\mathbf{S}}$  и  $\mathbf{S}$  таково: двум точкам  $\tilde{Q}_1$  и  $\tilde{Q}_2$  соответствует одна точка  $Q_1$ ,  $\tilde{Q}_{i+1} \leftrightarrow Q_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ . Это результат проекции  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : Q = \{\tilde{Q} - (\tilde{q}_3 + 1)(1, -1, 1)\}_{1,2} + (1, 1)$ , где  $\tilde{q}_3$  – третья координата вектора  $\tilde{Q}$ ,  $\{\}_{1,2}$  – первые две координаты трехмерного вектора. Поэтому граням  $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$  и  $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$  соответствуют в плоской степенной геометрии ребра  $\Gamma_2^{(1)}$  и  $\Gamma_3^{(1)}$ , ребру  $\tilde{\Gamma}_3^{(2)} \cap \tilde{\Gamma}_4^{(2)}$  соответствует ребро  $\Gamma_1^{(1)}$ , а ребру  $\tilde{\Gamma}_1^{(2)} \cap \tilde{\Gamma}_2^{(2)}$  соответствует вершина  $\Gamma_3^{(0)}$ . Поскольку это соответствие взаимно однозначное, то соответствующие им укороченные уравнения дают равные асимптотики. Остальные обобщенные грани трехмерной степенной геометрии, не имеющие аналогов в плоской степенной геометрии (например, грань  $\tilde{\Gamma}_3^{(2)}$ , которой соответствует эллиптическая асимптотика (3.30)), могут дать новые асимптотики, отличные от тех, что получаются методами плоской степенной геометрии.



## §4. Асимптотики решений четвертого уравнения Пенлеве

**4.1. Свойства уравнения.** Четвертое уравнение Пенлеве [4] имеет вид

$$y'' = \frac{1}{2} \frac{y'^2}{y} + \frac{3}{2} y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - a)y + \frac{b}{y}, \quad (4.1)$$

где  $y' = dy/dx$ ,  $a, b$  – комплексные параметры.

Будем рассматривать уравнение (4.1) при условии

$$a, b \neq 0. \quad (4.2)$$

Умножим обе части уравнения (4.1) на  $2y$  и перенесем левую часть вправо. Тогда оно примет вид

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2yy'' + y'^2 + 3y^4 + 8xy^3 + 4(x^2 - a)y^2 + 2b = 0. \quad (4.3)$$

**4.2. Двумерный анализ.** С помощью методов плоской степенной геометрии [2, 10] вычислим асимптотики решений уравнения (4.3) при условии (4.2). Плоский носитель  $\mathbf{S}(f)$  состоит из шести точек

$$Q_1 = (-2, 2), Q_2 = (0, 0), Q_3 = (0, 4), Q_4 = (2, 2),$$

$$Q_5 = (1, 3), Q_6 = (0, 2).$$

Их выпуклая оболочка – это квадрат  $\Gamma(f)$  с вершинами  $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ ,  $\Gamma_2^{(0)} = Q_2$ ,  $\Gamma_3^{(0)} = Q_3$ ,  $\Gamma_4^{(0)} = Q_4$  и ребрами

$$\Gamma_1^{(1)} = [Q_1, Q_2], \Gamma_2^{(1)} = [Q_1, Q_3], \Gamma_3^{(1)} = [Q_3, Q_4, Q_5], \Gamma_4^{(1)} = [Q_2, Q_4],$$

где квадратные скобки означают выпуклую оболочку. Носитель  $\mathbf{S}(f)$ , его выпуклая оболочка  $\Gamma(f)$  и ребра  $\Gamma_j^{(1)}$  показаны на рис. 4. Нормальные конусы  $\mathbf{U}_j^{(d)}$  обобщенных граней  $\Gamma_j^{(d)}$  показаны на рис. 5.

Каждой обобщенной грани  $\Gamma_j^{(d)}$  соответствует свое укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0. \quad (4.4)$$

Если для решения  $y = \varphi(x)$  укороченного уравнения (4.4) выполняется свойство

$$\omega(1, p) \in \mathbf{U}_j^{(d)}, \quad (4.5)$$

где  $\omega = 1$ , если  $x \rightarrow \infty$ ,  $\omega = -1$ , если  $x \rightarrow 0$ , и  $p = \lim (\ln \varphi(x)/\ln x)$  – порядок решения, то решение уравнения (4.4) является асимптотикой некоторого решения  $y = \varphi(x) + \psi(x)$  полного уравнения (4.3).

Перечислим те решения  $y = \varphi(x)$  укороченных уравнений (4.4), соответствующих обобщенным граням  $\Gamma_j^{(d)}$ , которые обладают указанными свойствами, т. е. являются асимптотиками решений уравнения (4.3).

Вершине  $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$  соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -2yy'' + y'^2 = 0. \quad (4.6)$$

Согласно [2] его характеристическое уравнение  $\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} -2r(r-1) + r^2 = 0$  имеет два корня  $r_1 = 0$  и  $r_2 = 2$ . Согласно рис. 5 здесь  $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{P = (p_1, p_2) : p_1 < 0, p_1 < p_2 < -p_1\}$ . Поэтому включение (4.5) возможно, только при  $\omega = -1$ , т. е.  $x \rightarrow 0$ . Поскольку вектор  $-(1, r_1) = (-1, 0)$  лежит в нормальном конусе  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ , а вектор  $-(1, r_2) = (-1, -2)$  не лежит в  $\mathbf{U}_1^{(0)}$ , то получаем единственную асимптотику

$$\mathcal{A}_0 : y = c_0, \quad (4.7)$$

где  $c_0 \neq 0$  – комплексная произвольная постоянная. Поскольку все решения уравнения (4.6) имеют вид  $y = (C_1x + C_0)^2$ , где  $C_0, C_1$  – произвольные постоянные, то укороченное уравнение (4.6) не дает нестепенных и экзотических асимптотик.

Асимптотика (4.7) продолжается в виде сходящегося степенного ряда (см. [12, п. 7.1]).

Вершинам  $\Gamma_2^{(0)}$ ,  $\Gamma_3^{(0)}$  и  $\Gamma_4^{(0)}$  соответствуют алгебраические укороченные уравнения  $3y^4 = 0$ ,  $4x^2y^2 = 0$  и  $2b = 0$ . Они не имеют нетривиальных решений.

Ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -2yy'' + y'^2 + 2b = 0 \quad (4.8)$$

и нормальный конус  $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{P = \lambda(-1, -1), \lambda > 0\}$ . Поэтому ищем решения уравнения (4.8) в виде  $y = c_1x$ . Определяющее уравнение  $c_1^2 + 2b = 0$  имеет два корня  $c_1 = \pm\sqrt{-2b}$ . Получаем два семейства степенных асимптотик

$$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 : y = \pm\sqrt{-2b}x, \quad (4.9)$$

которые можно продолжить в виде сходящихся степенных рядов (см. [12, п. 7.2]). Согласно [2, 10] укороченное уравнение (4.8) не дает нестепенных и экзотических асимптотик. Оно интегрируется в явном виде и имеет общее решение  $y = 2b/C_1 + C_1(x + C_2)^2/4$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные, и не дает эллиптических асимптотик. Решения (4.9) являются особыми для уравнения (4.8). Асимптотики (4.9) продолжаются в виде сходящихся степенных рядов [12].

Ребру  $\Gamma_2^{(1)}$  соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -2yy'' + y'^2 + 3y^4 = 0 \quad (4.10)$$

и нормальный конус  $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{P = \lambda(-1, 1), \lambda > 0\}$ . Уравнение (4.10) эквивалентно уравнению

$$y'^2 = y^4 + C_1 y, \quad (4.11)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная, которое решается в явном виде. При  $C_1 \neq 0$  его решение выражается в эллиптических функциях

$$y = C_1 \wp^{-1}(x + C_2, 0, -C_1^2/16) / 4, \quad (4.12)$$

где  $C_2$  – произвольная постоянная,  $\wp$  – функция Вейерштрасса. При  $C_1 = 0$  уравнение (4.11) имеет решение

$$y = (C_2 \pm x)^{-1}. \quad (4.13)$$

Согласно нормальному конусу  $\mathbf{U}_2^{(1)}$  имеем  $\omega = -1$ , т. е.  $x \rightarrow 0$  и  $p = -1$ . Таким образом, из решений уравнения (4.10) выбираем те, порядок которых равен минус единице, т. е. соответствует нормальному конусу  $\mathbf{U}_2^{(1)}$ . Решение (4.12) не подходит, поскольку его порядок  $p > -1$ , а решение (4.13) удовлетворяет свойству (4.5) при  $C_2 = 0$ . Следовательно, при  $x \rightarrow 0$  получаем два семейства асимптотик решений уравнения (4.3)

$$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 : y = \pm x^{-1}, \quad (4.14)$$

которые продолжаются в виде сходящихся степенных рядов (см. [12, п. 7.3]).

Ребру  $\Gamma_3^{(1)}$  соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} 3y^4 + 8xy^3 + 4x^2y^2 = 0 \quad (4.15)$$

и нормальный конус  $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{P = \lambda(1, 1), \lambda > 0\}$ . Уравнение (4.15) имеет ровно два ненулевых решения

$$\mathcal{C}_1 : y = -2x \text{ и } \mathcal{C}_2 : y = -\frac{2}{3}x. \quad (4.16)$$

Оба эти решения удовлетворяют свойству (4.5), поскольку здесь  $\omega = 1$ , т. е.  $x \rightarrow \infty$  и порядок  $p = 1$ , что соответствует нормальному конусу  $\mathbf{U}_3^{(1)}$ .

Асимптотики (4.16) продолжаются в виде расходящихся степенных рядов (см. [12, п. 7.4])

$$\mathcal{C}_j^* : y_j = c_{1j}x + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kj}x^{-k}, \quad j = 1, 2, \quad (4.17)$$

где  $k$  только нечетные,  $c_{11} = -2$ ,  $c_{12} = -2/3$ , остальные  $c_{kj}$  постоянны и однозначно определены. Для асимптотических разложений (4.17) существуют экспоненциально малые добавки. Согласно [2, §7] для разложения  $C_1^*$  получаем две экспоненциально малые добавки

$$C_1 \exp((-1)^i x^2 + \dots), \quad i = 1, 2, \quad (4.18)$$

где  $\operatorname{Re}(-1)^i x^2 \rightarrow -\infty$ ,  $C_1$  – произвольная постоянная. Для разложения  $C_2^*$  две экспоненциально малых добавки суть

$$C_1 \exp((-1)^i x^2 / \sqrt{-3} + \dots), \quad i = 1, 2, \quad (4.19)$$

где  $\operatorname{Re}(-1)^i x^2 / \sqrt{-3} \rightarrow -\infty$ ,  $C_1$  – произвольная постоянная.

Ребра  $\Gamma_4^{(1)}$  соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_4^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} 4x^2 y^2 + 2b = 0 \quad (4.20)$$

и нормальный конус  $\mathbf{U}_4^{(1)} = \{P = \lambda(1, -1), \lambda > 0\}$ . Уравнение (4.20) имеет два решения

$$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 : y = \pm \sqrt{-b/2} x^{-1}. \quad (4.21)$$

Решения (4.21) являются асимптотиками, поскольку удовлетворяют условию (4.5) с  $\omega = 1$  и  $p = -1$ . Они продолжаются в виде расходящихся степенных рядов (см. [12, п. 7.5])

$$\mathcal{H}_j^* : y_j = c_{1j} x^{-1} + \sum_{k=3}^{\infty} c_{kj} x^{-k}, \quad j = 1, 2, \quad (4.22)$$

где  $k$  только нечетные,  $c_{11} = \sqrt{-b/2}$ ,  $c_{12} = -\sqrt{-b/2}$ , остальные  $c_{kj}$  постоянны и однозначно определены. Для каждого из разложений  $\mathcal{H}_j^*$  имеются две экспоненциально малые добавки вида

$$C_1 x^{-1} \exp((-1)^i x^2 + \dots), \quad i = 1, 2, \quad (4.23)$$

где  $\operatorname{Re}(-1)^i x^2 \rightarrow -\infty$ ,  $C_1$  – произвольная постоянная.

Согласно [2, 10] укороченные уравнения (4.15) и (4.20) не дают нестепенных и экзотических асимптотик.

**Теорема 4.1.** *При условии (4.2) решения уравнения (4.3) имеют 9 семейств степенных асимптотик:  $\mathcal{A}_0$  – согласно формуле (4.7);  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  – согласно (4.9);  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  – согласно (4.14);  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  – согласно (4.16);  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  – согласно (4.21).*

*Семейство  $\mathcal{A}_0$  имеет один комплексный параметр  $c_0$ , остальные семейства не содержат параметров.*

**4.3. Трехмерный анализ.** Согласно п. 1.2 представим уравнение (4.3) в виде системы

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \frac{z^2}{y} + \frac{3}{2} y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - a)y + \frac{b}{y}. \quad (4.24)$$

Перепишем систему (4.24) в виде

$$\frac{d \ln y}{dx} = \frac{z}{y}, \quad \frac{d \ln z}{dx} = \frac{z}{2y} + \frac{3y^3}{2z} + \frac{4xy^2}{z} + \frac{2(x^2 - a)y}{z} + \frac{b}{yz}. \quad (4.25)$$

Носитель  $\tilde{\mathbf{S}}$  системы (4.25) состоит из шести точек

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= (0, -1, 1), \quad \tilde{Q}_2 = (0, -1, -1), \quad \tilde{Q}_3 = (0, 3, -1), \quad \tilde{Q}_4 = (2, 1, -1), \\ \tilde{Q}_5 &= (1, 2, -1), \quad \tilde{Q}_6 = (0, 1, -1). \end{aligned}$$

Многогранник Ньютона  $\tilde{\Gamma}$ , т. е. выпуклая оболочка этого носителя  $\tilde{\mathbf{S}}$ , является тетраэдром с вершинами  $\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_4$ . Он имеет четыре двумерные грани

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1^{(2)} &= [\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4], \quad \tilde{\Gamma}_2^{(2)} = [\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_5, \tilde{Q}_4], \\ \tilde{\Gamma}_3^{(2)} &= [\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_6], \quad \tilde{\Gamma}_4^{(2)} = [\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4, \tilde{Q}_5, \tilde{Q}_6], \end{aligned}$$

где квадратные скобки означают выпуклую оболочку. Согласно [3, гл. I] внешние нормали  $\tilde{N}_j$  к граням  $\tilde{\Gamma}_j^{(2)}$  суть

$$\tilde{N}_1 = (1, -1, 0), \quad \tilde{N}_2 = (1, 1, 2), \quad \tilde{N}_3 = (-1, 0, 0), \quad \tilde{N}_4 = (0, 0, -1).$$

Две из них  $\tilde{N}_1$  и  $\tilde{N}_2$  имеют положительные первые компоненты, а соответствующие им грани  $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$  и  $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$  содержат точку  $\tilde{Q}_1$ .

Будем использовать метод изложенный в § 1, согласно которому рассмотрим двумерные грани тетраэдра  $\tilde{\Gamma}$  с положительной первой компонентой внешней нормали.

Грани  $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$  соответствует нормированная внешняя нормаль  $\tilde{N}_1 = (1, -1, 0)$ , т. е.  $p_2 = -1$ ,  $p_3 = 0$ . Сделаем в уравнении (4.1) преобразование

$$y = x^\alpha v, \quad u = x^\beta, \quad \beta > 0, \quad (4.26)$$

где  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_2 = -1$ ,  $\beta \stackrel{\text{def}}{=} p_3 - p_2 + 1 = 2$ . При этом уравнение (4.1) примет вид

$$\ddot{v} = -\frac{3}{8} \frac{v}{u^2} + \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{v}^2}{v} + \frac{3}{8} \frac{v^3}{u^2} + \frac{v^2}{u} - \frac{a}{2} \frac{v}{u} + \frac{b}{4v}, \quad (4.27)$$

где  $\ddot{v} = d^2v/du^2$ ,  $\dot{v} = dv/du$ . Если в уравнении (4.27) устремить  $u$  к бесконечности и считать, что  $v$ ,  $v^{-1}$  и  $\dot{v}$  остаются конечными и отделенными

от нуля, то в пределе получаем уравнение  $\ddot{v} = \frac{\dot{v}^2}{2v} + \frac{v}{2} + \frac{b}{4v}$ . Его первый интеграл есть

$$\dot{v}^2 = v^2 + C_1 v - b/2, \quad (4.28)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная. Носитель и многоугольник уравнения (4.28) показаны на рис. 6. Из него видно, что уравнение (4.28) имеет решения  $v \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \infty$  только если правая часть уравнения (4.28) является полным квадратом. Это имеет место только при  $C_1 = \pm\sqrt{-2b}$ . В этих случаях решения уравнения (4.28) имеют вид

$$v \mp \sqrt{-b/2} = C_2 \exp(\sigma u), \quad (4.29)$$

где  $C_2$  – произвольная постоянная и  $\sigma = \pm 1$ . Учитывая преобразование (4.26) с  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ , получаем асимптотики

$$y \sim \begin{cases} \left( \pm\sqrt{-b/2} + C_2 \exp(x^2) \right) x^{-1}, & \text{если } \operatorname{Re} x^2 \rightarrow -\infty, \\ \left( \pm\sqrt{-b/2} + C_2 \exp(-x^2) \right) x^{-1}, & \text{если } \operatorname{Re} x^2 \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (4.30)$$

Грани  $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$  соответствует нормированная внешняя нормаль  $\tilde{N}_2 = (1, 1, 2)$ , т. е.  $p_2 = 1$ ,  $p_3 = 2$ . Сделаем в уравнении (4.1) преобразование (4.26) с  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ . При этом уравнение (4.1) принимает вид

$$\ddot{v} = \frac{1}{8} \frac{v}{u^2} - \frac{\dot{v}}{u} + \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{v}^2}{v} + \frac{3v^3}{8} + v^2 - \frac{av}{2u} + \frac{b}{4vu^2}, \quad (4.31)$$

где  $\ddot{v} = d^2v/du^2$ ,  $\dot{v} = dv/du$ . При  $u \rightarrow \infty$  получаем предельное уравнение  $\ddot{v} = \frac{\dot{v}^2}{2v} + \frac{v}{2} + \frac{3}{8}v^3 + v^2$ . Его первый интеграл есть

$$\dot{v}^2 = v^4/4 + v^3 + v^2 + C_1 v, \quad (4.32)$$

где  $C_1$  – произвольная комплексная постоянная.

Интегрирование уравнения (4.32) зависит от значений постоянной  $C_1$ . При  $C_1 \neq 0$  и  $C_1 \neq 8/27$  уравнение (4.32) имеет решения в эллиптических функциях [6]

$$v = 3C_1 \left[ 12\wp \left( u + C_2, -\frac{C_1}{4} + \frac{1}{12}, -\frac{C_1^2}{64} + \frac{C_1}{48} - \frac{1}{216} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (4.33)$$

где  $\wp(u)$  – функция Вейрштрасса,  $C_2$  – произвольная комплексная постоянная. После обратного преобразования (4.26) с  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  получаем асимптотику

$$y \sim 3C_1 x \left[ 12\wp \left( x^2 + C_2, -\frac{C_1}{4} + \frac{1}{12}, -\frac{C_1^2}{64} + \frac{C_1}{48} - \frac{1}{216} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (4.34)$$

При  $C_1 = 0$  уравнение (4.32) имеет решения

$$v = \frac{-2}{1 - C_2 \exp(\mp u)} = -2 - 2C_2 \exp(\mp u) + \dots,$$

где  $C_2$  – произвольная комплексная постоянная. Если  $\operatorname{Re} u \rightarrow \pm\infty$ , тогда  $v \sim -2 + C_1^* \exp(\mp u)$ . После обратного преобразования (4.26) с  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  получаем асимптотики

$$y \sim x [-2 + C_1^* \exp(\mp x^2)], \text{ при } \operatorname{Re} x^2 \rightarrow \pm\infty. \quad (4.35)$$

При  $C_1 = 8/27$  правая часть уравнения (4.32) имеет двукратный корень  $v = -2/3$ . Положим  $w = v + 2/3$ , тогда уравнение (4.32) примет вид

$$\dot{w}^2 = \frac{1}{4}w \left(w - \frac{2}{3}\right)^2 (w + 2) = \frac{1}{4}w^4 + \frac{1}{3}w^3 - \frac{1}{3}w^2. \quad (4.36)$$

Носитель и многоугольник этого уравнения показаны на рис. 7. Многоугольник имеет горизонтальное ребро с  $q_2 = 2$ . Этому ребру соответствует укороченное уравнение

$$\dot{w}^2 = -\frac{1}{3}w^2.$$

Его решения суть асимптотики

$$w \sim \tilde{C}_1 \exp[\pm u/\sqrt{-3}],$$

где  $\tilde{C}_1$  – произвольная комплексная постоянная. Соответствующие, асимптотики уравнения (4.1) суть

$$y \sim \begin{cases} x \left[-2/3 \pm \tilde{C}_1 \exp(-x^2/\sqrt{-3})\right], & \text{если } \operatorname{Re} x^2/\sqrt{-3} \rightarrow +\infty, \\ x \left[-2/3 \mp \tilde{C}_1 \exp(x^2/\sqrt{-3})\right], & \text{если } \operatorname{Re} x^2/\sqrt{-3} \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (4.37)$$

Уравнение (4.27) и уравнение (4.31) в случае  $C_1 = 8/27$  также можно решить явно и из явного решения получить те же асимптотики. Но это требует более громоздких вычислений.

**Теорема 4.2.** При условии (4.2) и  $x \rightarrow \infty$  решения уравнения (4.1) имеют эллиптические асимптотики (4.34).

Между двумя носителями: плоским  $\mathbf{S}$  и трехмерным  $\tilde{\mathbf{S}}$  имеется взаимно однозначное соответствие  $Q_i \leftrightarrow \tilde{Q}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Оно задается проекцией  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : Q = \{\tilde{Q} - (\tilde{q}_3 + 1)(1, -1, 1)\}_{1,2} + (0, 1)$ , где  $\tilde{q}_3$  – третья координата вектора  $\tilde{Q}$ ,  $\{\}_{1,2}$  – первые две координаты трехмерного вектора. Поэтому вершинам и четырем ребрам квадрата  $\Gamma(f)$  соответствуют

вершины и четыре ребра тетраэдра  $\tilde{\Gamma}$ , и соответствующие им асимптотики равны. Но укороченные уравнения, соответствующие граням тетраэдра  $\tilde{\Gamma}$  и остальным двум его ребрам, не имеют аналогов в плоской степенной геометрии. Они-то и дают асимптотики, которые не получаются с помощью лишь плоской степенной геометрии.

Тем не менее все не эллиптические асимптотики, полученные выше с помощью трехмерной степенной геометрии, получаются и из двумерной степенной геометрии. А именно, асимптотика (4.30) является суммой первых членов (4.22) и (4.23), асимптотика (4.35) – сумма первых членов (4.17) с  $j = 1$  и (4.18), асимптотика (4.37) – сумма первых членов (4.17) с  $j = 2$  и (4.19).

Результаты этого препринта анонсированы в [14] – [16].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boutroux P.* Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1913. Т. 30 . Р. 255–375. 1914. Т. 31. Р. 99–159.
2. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31–80.
3. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
4. *Розов Н.Х.* Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1984. Т. 4. С. 233–234.
5. *Брюно А.Д., Шадрина Т.В.* Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды моск. матем. общества. 2007. Т. 68. С. 224–287.
6. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967, Т. 3. 300 с.
7. *Брюно А.Д., Петрович В.Ю.* Особенности решений первого уравнения Пенлеве. Препринт №75 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2004, 17 с.
8. *Брюно А.Д., Завгородняя Ю.В.* Степенные ряды и нестепенные асимптотики решений второго уравнения Пенлеве. Препринт №48 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2003, 32 с.
9. *Gromak I.V., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002. 303 p.



10. *Брюно А.Д.* Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2007. Т. 416. №5. С. 583-587.
11. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Все базовые асимптотические разложения решений уравнения Р6 в случае  $a \cdot b \neq 0$ . Препр. №62 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2007, 30 с.
12. *Bruno A.D.* Power Geometry as a New Calculus // Analysis and Applications - ISAAC 2001 (Eds. H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and M.W. Wong). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/ Boston/ London, 2003, p. 51-71.
13. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.-Ижевск: ИКИ, 2004. 360 с.
14. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотики Бутру решений уравнений Пенлеве и степенная геометрия // ДАН. 2008. Т. 422. №2. С. 157-160.
15. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотики решений третьего уравнения Пенлеве // ДАН. 2008. Т. 422. №6. С. 729-732.
16. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотики решений четвертого уравнения Пенлеве // ДАН. 2008. Т. 423. №4. С. 443-448.

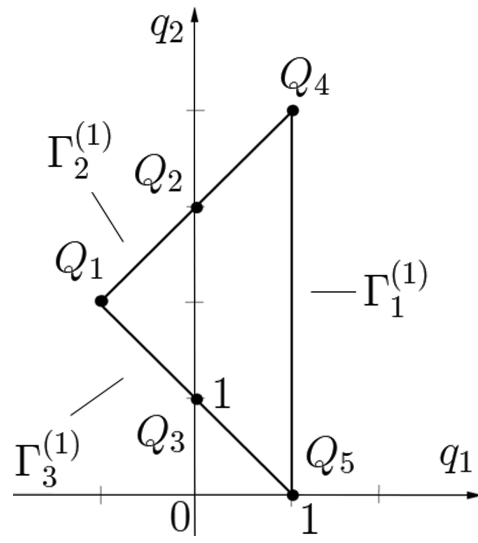


Рис. 1

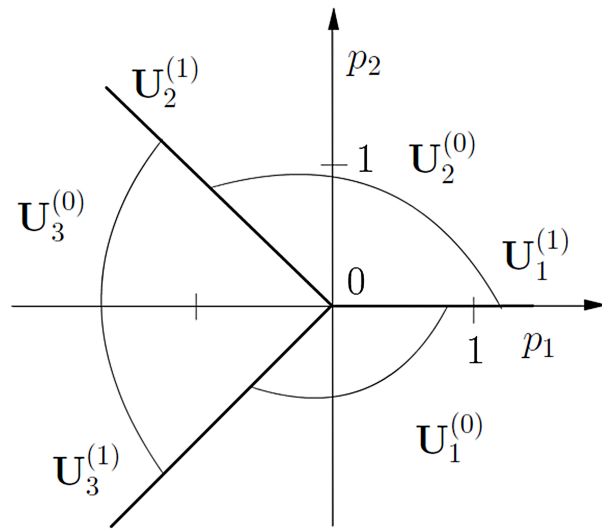


Рис. 2

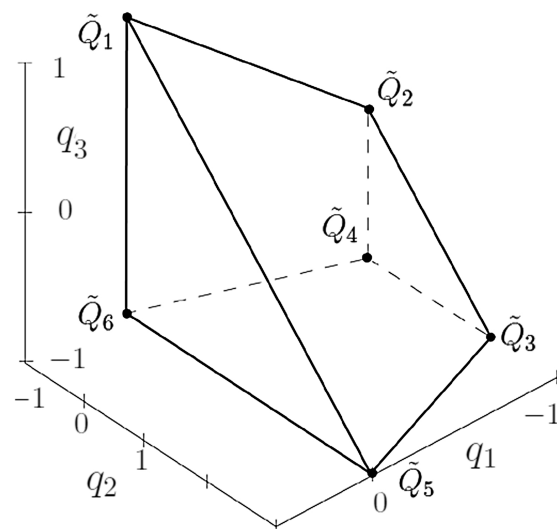


Рис. 3

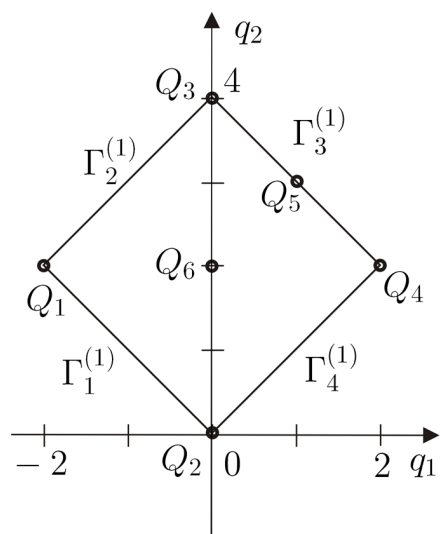


Рис. 4

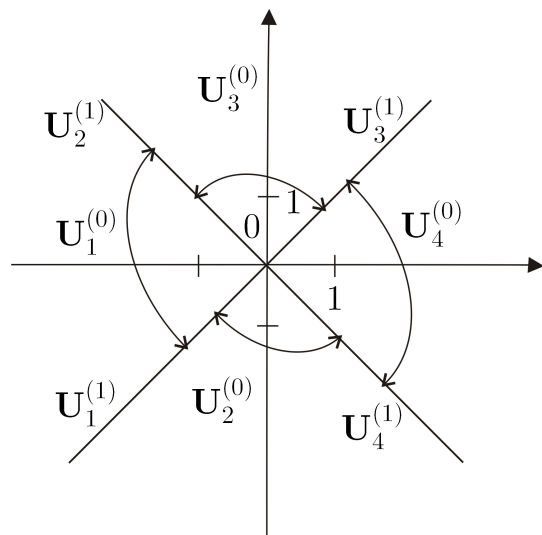


Рис. 5

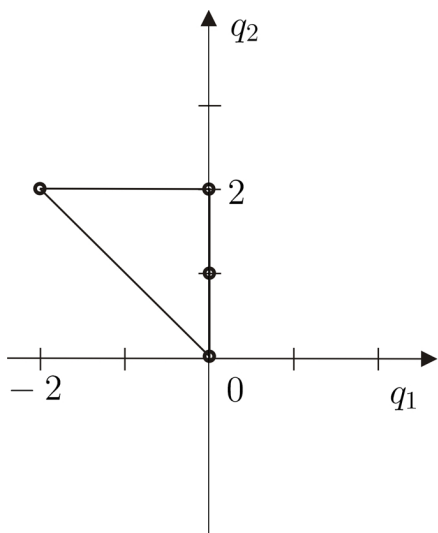


Рис. 6

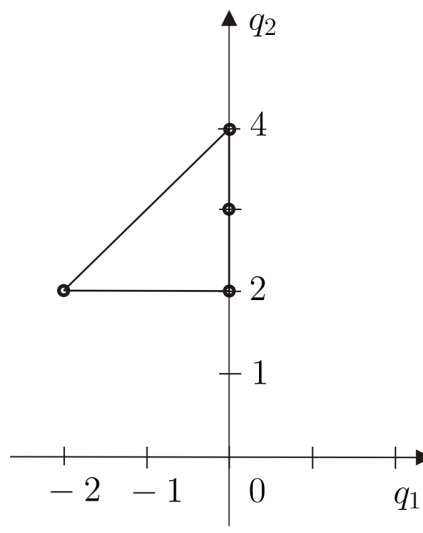


Рис. 7