



Немучинский Р.Б.,
Овчинников М.Ю.

Наблюдаемость тела с
закрепленной точкой,
снабженного лазерными
ретрорефлекторами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Немучинский Р.Б., Овчинников М.Ю. Наблюдаемость тела с закрепленной точкой, снабженного лазерными ретрорефлекторами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 12. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-12>

ордена Ленина
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской Академии Наук

Р.Б.Немучинский, М.Ю.Овчинников

Наблюдаемость тела с закрепленной точкой, снабженного лазерными ретрорефлекторами

Москва – 2009 г.

Наблюдаемость тела с закрепленной точкой, снабженного лазерными ретрорефлекторами. Р.Б.Немучинский, М.Ю.Овчинников. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2009, 22 с., библиография: 9 наименований

Рассматривается твердое тело с закрепленной точкой, оборудованное ретрорефлекторами. Тело подсвечивается лазерным лучом и по времени прохождения луча в обе стороны определяется расстояние до ретрорефлекторов. В работе изучена возможность определения ориентации тела по одномоментным измерениям и показана возможность определения вращательного движения тела по этим измерениям, если движение тела принадлежит некоторым классам. Обосновывается разрешимость системы уравнений, полученной для определения ориентации тела, в случае регулярной прецессии и малых колебаний.

Ключевые слова: определение ориентации, наблюдаемость, лазерный ретрорефлектор, регулярная прецессия

Observability of a rigid body with a fixed point equipped with laser retroreflectors.

R. Nemuchinsky, M. Ovchinnikov. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, 2009, 22 p., 9 items of bibliography

A rigid body with fixed point equipped with laser retroreflectors is considered. The body is lighted up with laser beam and distance to the retroreflectors is computed from the time of the beam returning. A possibility of attitude determination from one-shot measurements is examined and a possibility of rotation determination of the body from these measurements is disclosed in the case when the rotation belongs to some certain kind. Solubility of system of equation builded in the attempt of rotation determination is substantiated when the rotation is regular precession or small-amplitude oscillation.

Key words: Attitude Determination, Observability, Laser Retroreflector, Regular Precession

Введение

Описанный в настоящей работе метод определения ориентации разработан для спутников, оборудованных лазерными ретрорефлекторами. Использование лазерных телескопов для космонавтики началось более сорока лет назад и с тех пор непрерывно совершенствуется[1]. Среди прочих методов внешнетраекторных наблюдений за спутниками их применение обладает следующими преимуществами:

- использование простой модели преломления лазерного луча в атмосфере;
- однозначное определение времени прохождения луча;
- точность определения расстояния от лазерного дальномера до ретрорефлектора в идеальных условиях 1-2 мм;
- сантиметровая точность определения орбиты (1-2 см; для сравнения у GPS точность 3-4 см).
- работа со спутниками с высотой орбиты вплоть до лунной орбиты;
- снижение потребляемой спутником энергии, т. к. он оборудуется пассивными (не потребляющими энергии) ретрорефлекторами;
- возможность работы независимо от времени суток;
- имеется наземная инфраструктура, которая обеспечивает глобальную доступность данных практически в режиме реального времени;

Для наблюдения за спутниками используется Международная сеть лазерной дальнометрии спутников ILRS, в которую входит более 40 станций слежения в 30 странах, расположенных по всему земному шару (рис. 1)[2]. Станции оборудованы телескопами с лазерной подсветкой. Точность измерения расстояния до подсвеченного лазерным лучом ретрорефлектора составляет от 2 до 40 см и зависит от оборудования, установленного на станции и погрешностей, вносимых рефракцией луча в атмосфере. Именно рефракцией определяется минимальная погрешность, которая в реальных условиях всегда больше, чем погрешность в 1-2 мм, имеющаяся у лазерной дальнометрии в идеальных условиях [3].

Со станций ILRS велось и ведется наблюдение более чем за сотней спутников, снабженных лазерными ретрорефлекторами. Для успешных наблюдений телескопы необходимо калибровать. В отличие от обычных оптических телескопов, которые калибруются по двойным звездам и звездным скоплениям, для калибровки лазерных телескопов необходимы специальные цели с

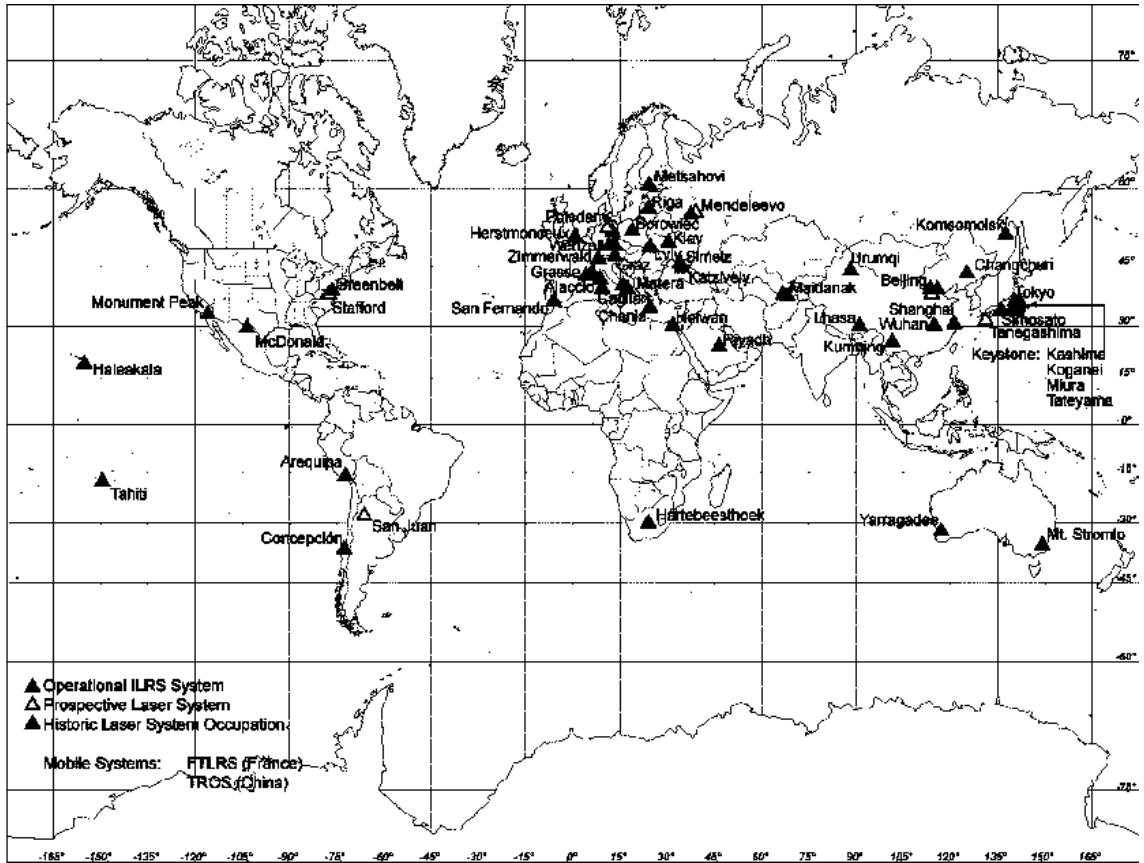


Рис. 1. Станции ILRS

заранее известными характеристиками. В качестве одной из таких целей был использован пассивный наноспутник REFLECTOR (Retroreflector Ensemble for Laser Experiments, Calibration, Testing Optical Research). Наноспутник REFLECTOR был разработан Научно-исследовательским институтом прецизионного приборостроения (НИИПП) в сотрудничестве с Европейским отделением аэрокосмических исследований и разработок ВВС США при участии Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, в котором была разработана система ориентации для спутника. Для калибровки телескопов спутник должен был иметь заранее известную ориентацию. Её обеспечивала пассивная гравитационная система ориентации с магнитным демпфером. Наноспутник REFLECTOR был успешно выведен на низкую солнечно-синхронную орбиту 10 декабря 2001 года. После выхода спутника на орбиту встала задача определить его ориентацию по крайне скудным данным — измерениям лазерных дальномеров[4].

В России лазерные ретрорефлекторы для спутников производит НИИПП[5]. Помимо обычных уголкового ретрорефлекторов с точностью определения расстояния до 0,5 мм, в НИИПП производят сферические ретрорефлекторы нового поколения собственной разработки. Их действие основано на эффекте линзы Люнеберга. Они отличаются небольшими размерами

(диаметр 60 мм), точностью определения расстояния до 0,1 мм и широким полем зрения[6]. Угловые ретрорефлекторы имеют гораздо более узкое поле зрения, поэтому чтобы обеспечить видимость спутника с любой стороны, их собирают в «грозди» по несколько штук, направленных в разные стороны.

В настоящей работе даются рекомендации по размещению лазерных ретрорефлекторов на спутнике и описывается локальный метод, позволяющий определить одноосную ориентацию спутника, снабженного лазерными ретрорефлекторами с учетом данных рекомендаций. Также оптимизационными методами обосновывается возможность определения вращения спутника, снабженного лазерными ретрорефлекторами, и описываются результаты численных экспериментов по определению ориентации с помощью метода наименьших квадратов.

1 Постановка задачи

На твердом теле, которое может вращаться относительно закрепленной точки, установлено несколько лазерных ретрорефлекторов. Тело подсвечивается лазером из конкретной точки, которая может как двигаться относительно инерциальной системы отсчета, так и оставаться неподвижной. Отраженный ретрорефлектором лазерный луч регистрируется в этой же точке. По времени прохождения луча в обе стороны определяется расстояние до каждого «освещенного» лазерным лучом ретрорефлектора. В качестве измерений удобнее рассматривать расстояние от ретрорефлектора до, так называемой, *картинной плоскости* — плоскости, проходящей через точку закрепления твердого тела и перпендикулярной прямой, проведенной через точку закрепления тела и точку, из которой испускается лазерный луч.

Вводятся правые ортогональные системы координат: связанная с телом система координат $Ox_1x_2x_3$ и неподвижная система координат $OY_1Y_2Y_3$, где O — точка закрепления тела. Пусть A - матрица перехода из $Ox_1x_2x_3$ в $OY_1Y_2Y_3$, P_i — точка тела, в которой находится i -й ретрорефлектор ($i = 1, \dots, n$), C — точка, в которой находится источник лазерного излучения, $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{CO}$, $\mathbf{d}_i = \overrightarrow{CP_i}$, $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}$ — единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора точки закрепления тела относительно точки C (рис. 2).

Поскольку рассмотрение задачи имеет своей конечной целью определение ориентации спутника, находящегося на орбите, можно считать, что характерный размер тела много меньше расстояния от точки закрепления тела до источника лазерного излучения. Таким образом, лучи лазера от источника до всех ретрорефлекторов можно считать параллельными и тогда можно

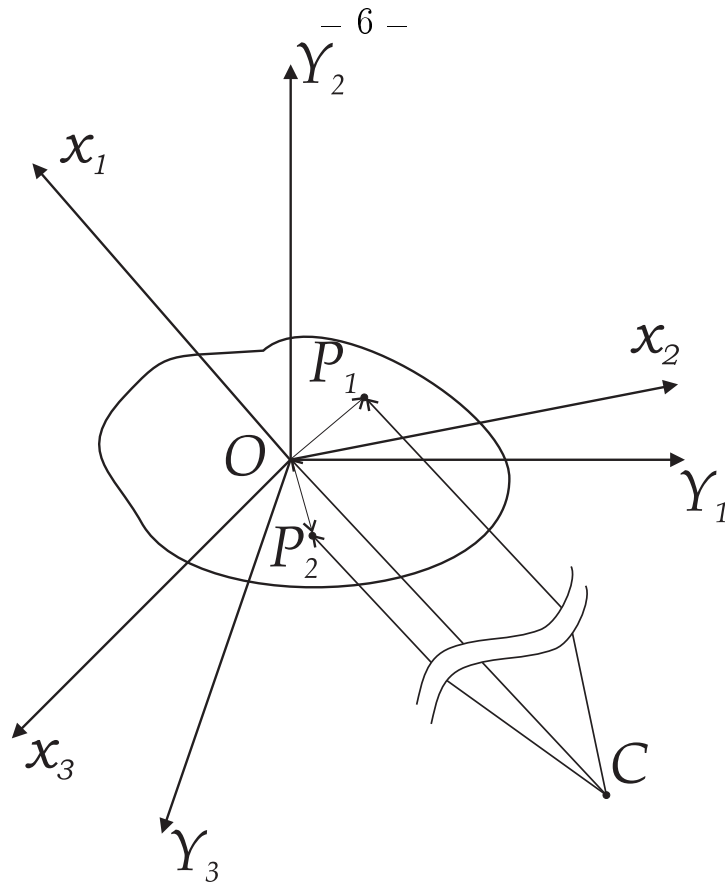


Рис. 2. Системы координат

считать, что вектор τ направлен по лазерному лучу. В рамках этого предположения расстояние l_i от ретрорефлектора P_i до картинной плоскости можно считать равным разности между расстоянием d_i от источника лазерного излучения C до ретрорефлектора P_i и расстоянием d от источника лазерного излучения C до точки закрепления тела O (рис.3). Точная формула для вычисления l_i имеет вид $l_i = d_i \cos \alpha_i - d$. По предположению угол α_i мал, следовательно $\cos \alpha_i \approx 1$ и поэтому, как уже было сказано, $l_i \approx d_i - d$. Далее измерением, поступившим с i -го ретрорефлектора, будем называть величину l_i . Исходя из определения картинной плоскости, можно записать

$$l_i = (\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\tau}). \quad (1)$$

Требуется идентифицировать вращательное движение тела, то есть найти функцию зависимости параметров, определяющих его ориентацию, от времени на некотором интервале $[t_0, t_1]$. Зная эти параметры можно вычислить матрицу перехода A^T из связанной системы координат в неподвижную и продифференцировать ее. А затем по формуле $\Omega = \dot{A}^T A$ [7] можно найти угловую скорость в матричной форме. Точкой $(\dot{})$ обозначена операция дифференцирования по времени.

Произвольное движение тела идентифицировать геометрическими методами не удастся, так как результаты производимых измерений инвариантны

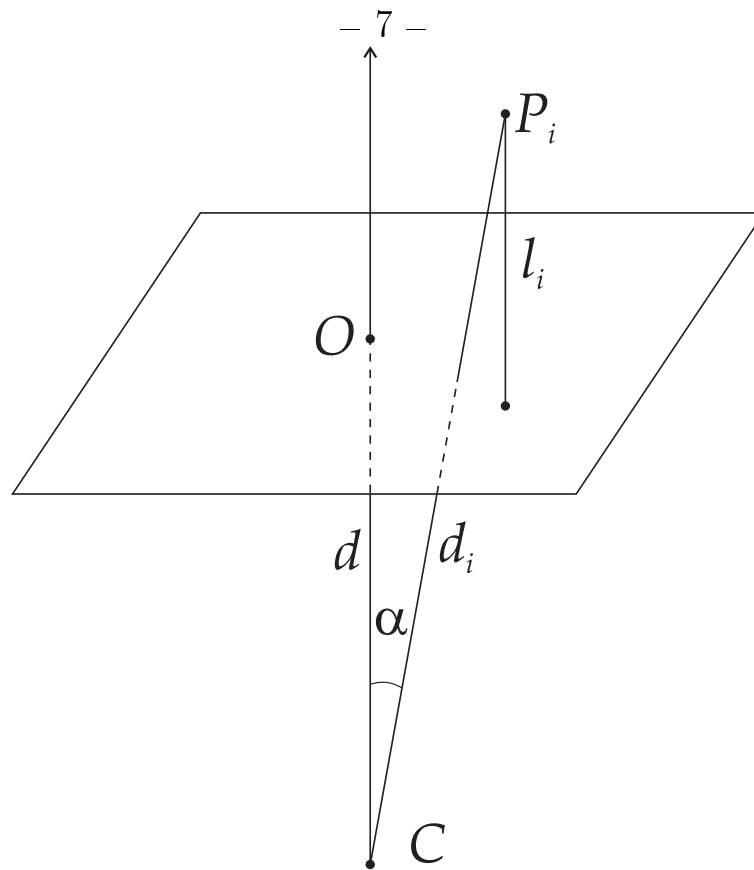


Рис. 3. Проведение измерений

относительно поворота тела вокруг оси, проходящей через источник лазерного излучения — точку C — и точку закрепления тела O . Следовательно, угол поворота и компонента угловой скорости, вокруг этой оси, не определяется. Действительно, пусть $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\perp i} + \mathbf{r}_{\parallel i}$, где $\mathbf{r}_{\perp i}$ — компонента, перпендикулярная $\boldsymbol{\tau}$, а $\mathbf{r}_{\parallel i}$ — компонента, параллельная $\boldsymbol{\tau}$. Пусть преобразование U — это поворот на некоторый угол вокруг $\boldsymbol{\tau}$. Тогда $U\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_{\perp i} + \mathbf{r}_{\parallel i}$, так как поворот U переведет $\mathbf{r}_{\parallel i}$ в себя же, а $\mathbf{r}_{\perp i}$ в некоторый другой вектор $\mathbf{r}'_{\perp i}$, также перпендикулярный $\boldsymbol{\tau}$. Результат измерения получается в виде выражения $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{r}_{\parallel i})$, значение которого совпадает с результатом измерения, полученного с ретрорефлектора до поворота. То есть, повороты вокруг оси, проходящей через источник лазерного излучения и точку закрепления тела O , не меняют значения измерений, и одному набору измерений соответствует множество ориентаций, отличающихся друг от друга только поворотом. Таким образом, нужно сделать какие-либо предположения о движении тела, например, ввести динамическую систему. С введением динамической системы появляется возможность говорить о ее *наблюдаемости*.

В определении наблюдаемости будем следовать [8]. Рассматривается ди-

намическая система с наблюдениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + Cu, \\ z &= Hx, \end{aligned} \tag{2}$$

где x и z - векторы, B , C , H - матрицы, возможно, зависящие от времени, u - известное управление, представленное также в виде вектора. Система (2) называется *наблюдаемой* в момент t , если существует конечный момент t_0 такой, что можно определить состояние системы $x(t)$ из наблюдения функции $z(t)$ на интервале $[t_0, t]$.

В настоящей работе задача определения наблюдаемости рассматривается в условиях соблюдения одного из двух условий:

- движение тела относительно закрепленной точки представляет собой регулярную прецессию;
- движение тела относительно закрепленной точки совпадает с движением осесимметричного тела на круговой околоземной орбите вблизи устойчивого положения равновесия.

Для дальнейшего исследования запишем равенства (1) для $i = 1, \dots, n$ в виде системы уравнений относительно τ

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_1, \tau) = l_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{r}_n, \tau) = l_n \end{cases}$$

и перепишем эту систему в матричной форме

$$R\tau_x = \mathbf{l}, \tag{3}$$

где R — матрица размерности $n \times 3$, i -й строкой в которой служит радиус-вектор точки P_i в связанной системе координат, τ_x — вектор τ , заданный своими проекциями в системе координат $Ox_1x_2x_3$, а \mathbf{l} — n -мерный вектор, i -я компонента которого представляет из себя результат измерения, полученного с i -го ретрорефлектора.

2 Анализ задачи

Разрешимость системы (3) зависит от ранга матрицы R [9]. Система несовместна в том случае, если ранг матрицы R меньше ранга расширенной матрицы $(R|b)$. Но если матрица R и столбец b получены из измерений от ретрорефлекторов, установленных на реальном теле с заданной ориентацией, у системы всегда есть решение в силу существования вектора τ при любой

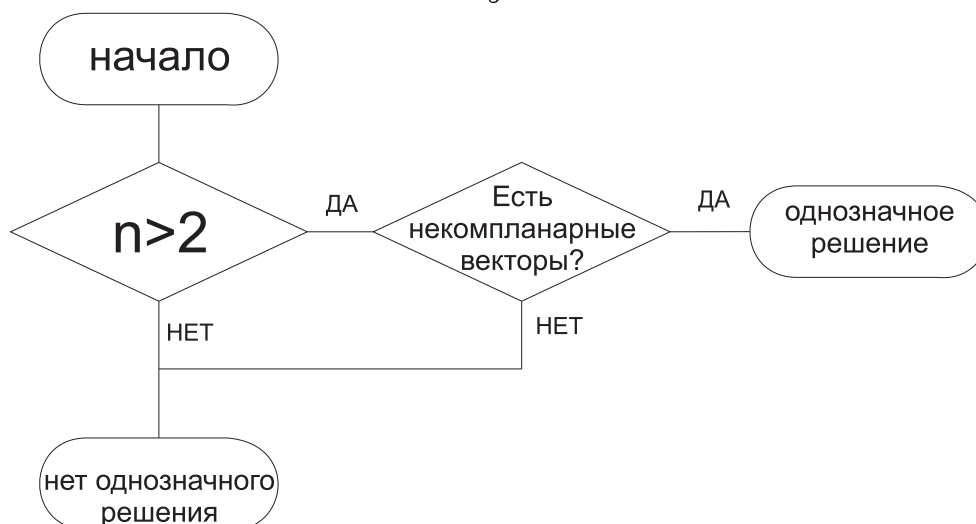


Рис. 4. Однозначность определения ориентации

заданной ориентации. Несовместная система может получиться, например, из-за погрешностей в измерениях, или если измерения производились в разные моменты времени, т. е. в случае некорректной постановки задачи. Поэтому в дальнейшем случай несовместности системы (3) рассматриваться не будет.

Если на теле установлено меньше трех ретрорефлекторов, то система (3) имеет множество решений. Если на теле установлено три или более ретрорефлектора, разрешимость системы зависит от определителя ее матрицы. Если среди радиус-векторов ретрорефлекторов есть три некопланарных, тогда матрица R невырожденная, ее ранг равен порядку системы (3) и система (3) однозначно разрешима. Иначе ранг матрицы R меньше трех и имеется множество решений (блок-схема алгоритма разбора различных ситуаций приведена на рис. 4).

Видно, что добавление дополнительных уравнений к системе (3) (или, что то же самое, установка дополнительных ретрорефлекторов на тело) сверх трех имеющихся не позволяет получить большей информации об ориентации тела, поскольку для однозначного решения системы (3) достаточно трех уравнений, а дополнительные уравнения ничего нового не дают. Однако в условиях реальных измерений с погрешностями размещать на теле больше трех ретрорефлекторов имеет смысл для решения получившейся переопределенной системы одним из статистических методов, например методом наименьших квадратов. Этот случай является предметом отдельного рассмотрения. В настоящей работе случай установки на тело более, чем трех ретрорефлекторов рассматриваться не будет.

Итак, если на теле установлено три ретрорефлектора, причем их радиус-векторы относительно точки закрепления тела некопланарны, можно ре-

шить систему уравнений (3) и найти τ_x , что дает возможность определить ориентацию тела с точностью до его поворота вокруг вектора τ . Если тело освещается одновременно двумя лазерами из разных точек, появляется возможность с помощью дополнительного измерения второго лазера найти угол поворота вокруг вектора τ и таким образом определить ориентацию однозначно.

Ситуацию, когда тело освещается двумя лазерами, рассмотрим подробнее. Пусть из решения системы (3) и подобной ей, составленной аналогичным образом, но с измерениями, полученными со второго лазера в правой части, определены координаты в связанной с телом системе координат двух векторов — τ и ν (ν — единичный вектор, направленный по лучу второго лазера). Их координаты в неподвижной системе координат известны. Нужно получить матрицу перехода из связанной системы координат в неподвижную.

Пусть неподвижная система координат выбрана так, что ось OY_1 направлена по вектору τ , а вектор ν лежит в плоскости OY_1Y_2 . Тогда $\tau = \mathbf{j}_1$, $\nu = a\mathbf{j}_1 + b\mathbf{j}_2$; $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ — орты системы координат $OY_1Y_2Y_3$, a и b — некоторые коэффициенты. Эти равенства можно обратить: $\mathbf{j}_1 = \tau$, $\mathbf{j}_2 = \frac{1}{b}\nu - \frac{a}{b}\tau$, $\mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{j}_2$. Поскольку из измерений с помощью описанного в настоящем разделе способа получены координаты векторов τ и ν в связанной системе координат, можно получить координаты ортов $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ в этой же системе координат. Эти координаты, записанные в виде матрицы, дают матрицу перехода из $Ox_1x_2x_3$ в $OY_1Y_2Y_3$, что и нужно для однозначного определения ориентации тела.

3 Наблюдаемость вращающегося тела

В отличие от предыдущих разделов, где рассматривалось определение ориентации тела по измерениям, произведенным в один и тот же момент времени, и вследствие этого модель движения тела не имела значения, в этом разделе рассматривается вращающееся тело с заданной моделью движения, но неизвестными ее параметрами, а также рассматривается определение его ориентации и параметров модели.

Предположим, что число параметров, необходимых для полного описания движения в рамках модели, равно k . Для их определения нужно получить k уравнений и, следовательно, провести k измерений. Поскольку рассматриваются тела с не более чем тремя ретрорефлекторами, то если k больше трех, измерения необходимо проводить в различные моменты времени.

Пусть имеется набор измерений $l_i(t_j)$, полученных с i -го рефлектора ($i = 1, \dots, n$) в момент времени t_j ($j = 1, \dots, a$). При этом должно выполняться соотношение $nt \geq k$, чтобы число измерений было не меньше числа опре-

деляемых параметров. Пусть модель предсказывает такое движение тела, что матрица перехода из системы координат $Ox_1x_2x_3$ в систему координат $OY_1Y_2Y_3$ описывается выражением $A(t, \mathbf{f})$, где \mathbf{f} — вектор из k компонент, задающих параметры движения тела (например, постоянных интегрирования). Исходя из модели, результат измерения, полученного с i -го рефлексора в момент времени t_j , можно записать в виде

$$l_i(t_j) = (\boldsymbol{\tau}(t_j), A(t_j, \mathbf{f})\mathbf{r}_i).$$

Здесь $l_i(t_j)$ — известные числа, полученные из измерений. Набор из k таких равенств можно рассматривать как систему уравнений относительно неизвестного вектора \mathbf{f} . Если эта система имеет единственное решение, тогда по модели движения с найденными параметрами движения \mathbf{f} восстанавливается ориентация и угловая скорость тела в любой момент времени. Таким образом, динамическая система (2) оказывается наблюдаемой.

Разрешимость системы исследуется с помощью теоремы¹ об обратной функции [10]. Применительно к описанной задаче $F_h = (\boldsymbol{\tau}(t_h), A(t_h, \mathbf{f})\mathbf{r}_h) - l_h$, где $h = 1, \dots, k$, $t_h \in \{t_1, \dots, t_n\}$, $\mathbf{r}_h \in \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_a\}$, l_h — измерение, полученное в момент времени t_h с ретрорефлексора с радиус-вектором \mathbf{r}_h . Роль неизвестных u_i играют компоненты вектора \mathbf{f} , роль параметров x_i — t_h и \mathbf{r}_h . Для простоты в дальнейшем вместо функций F_h будет использоваться функция \tilde{F}_h , в которой вектор $\boldsymbol{\tau}$ заменен на ненормализованный вектор \mathbf{d} , а слагаемое $-l_h$ не учитывается, поскольку оно является константой и не меняет производной и матрицы Якоби в целом. Поскольку \mathbf{d} отличается от $\boldsymbol{\tau}$ только численным множителем, зависящим от t_h , по которой дифференцирование

¹Т е о р е м а. Пусть a функций

$$\begin{aligned} F_1(u_1, \dots, u_a, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ F_a(u_1, \dots, u_a, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

дифференцируемы в некоторой окрестности точки $K_0(u_1^0, \dots, u_a^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ пространства R^{n+a} , причём частные производные этих функций по переменным u_1, \dots, u_a непрерывны в точке K_0 . Тогда если в точке K_0 все функции $F_i, i = 1, \dots, a$ обращаются в нуль, а якобиан $\left| \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right|$ отличен от нуля, то для достаточно малых положительных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_a$ найдется такая окрестность точки $K'_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ пространства R^n , что в пределах этой окрестности существуют единственные a функций

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ u_a &= \varphi_a(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

которые удовлетворяют условиям $|u_1 - u_1^0| < \varepsilon_1, \dots, |u_a - u_a^0| < \varepsilon_a$ и являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} F_1(u_1, \dots, u_a, x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ F_a(u_1, \dots, u_a, x_1, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки K'_0 .

– 12 –

не проводится, матрица Якоби $\left(\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial f_j}\right)$ отличается от матрицы $\left(\frac{\partial F_i}{\partial f_j}\right)$ только тем, что ее строки умножены на некоторые численные коэффициенты, а это на вырожденность матрицы не влияет[9].

Итак, на разрешимость исследуется система уравнений

$$\tilde{F}_i = 0, i = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Для определенности в дальнейшем будем исследовать наблюдаемость для равномерно распределенных по времени измерений в моменты $t_j = (j-1)\Delta t$, $j = 1, \dots, n$.

Далее, в подразделах 3.1 и 3.2 рассматриваются два семейства движений. Для каждого семейства строятся функции \tilde{F}_i , считается и сравнивается с нулем якобиан. Таким образом выясняется в каких случаях динамические системы, описывающие движения из этих семейств, будут наблюдаемыми. Эти семейства представляют собой регулярную прецессию и движение, совпадающее с малыми колебаниями гравитационно-ориентированного тела около положения равновесия.

3.1 Наблюдаемость прецессирующего тела

Одним из важных случаев движения тела, которые необходимо рассмотреть, является его регулярная прецессия. Так движется тело в отсутствие внешних моментов. В частности, эта модель принята в качестве основной в работе [11].

Пусть тело прецессирует вокруг некоторой оси. Точка C , в которой установлен источник лазерного излучения, в инерциальной системе координат $OY_1Y_2Y_3$ имеет начальные координаты $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ и движется со скоростью $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Эти параметры известны. Нужно определить параметры прецессии: начальный угол прецессии ψ_0 , скорость прецессии $\dot{\psi}$, угол нутации θ , начальный угол собственного вращения φ_0 , скорость собственного вращения $\dot{\varphi}$ и сверх того два угла, задающих направление оси прецессии — всего семь параметров.

Далее рассматриваются случаи с одним и тремя установленными на теле ретрорефлекторами. В первом случае проводится семь измерений через равные промежутки времени. Во втором — три, и из получившихся девяти результатов два, выбранные произвольно, отбрасываются. Для простоты три ретрорефлектора, радиус-векторы которых из точки закрепления тела не должны быть компланарны, устанавливаются по осям связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ на равном (для определенности — единичном) расстоянии от начала координат. Координаты точек P_1, P_2, P_3 , в которых уста-

новлены ретрорефлекторы — $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ и $(0; 0; 1)$ соответственно. В случае с одним установленным ретрорефлектором рассматривается только ретрорефлектор в точке P_1 .

Построение матрицы перехода, вычисление и исследование якобиана проводилось с помощью библиотеки символьных вычислений в среде MATLAB.

В рамках описанной в предыдущих абзацах модели среда MATLAB не может выполнить все вычисления по намеченной программе из-за чрезмерной длины образующихся при этом символьных выражений. Возникает необходимость упростить модель. Были выбраны два метода упрощения.

Первое упрощение: оставляем семь параметров, задающих прецессию, но считаем, что точка C неподвижна в инерциальной системе координат. Здесь уже оказывается возможным получить якобиан в аналитическом виде. Он не равен тождественно нулю, однако его описание в формате LATEX требует свыше миллиона символов и дальнейшая работа с ним оказывается непродuktивной, а попросту говоря невозможной.

Второе упрощение: сохраняем движение точки C относительно точки O , а для описания прецессии используем следующее предположение. Пусть некоторым образом стал известен вектор кинетического момента вращающегося тела (например, известна начальная скорость вращения тела). При регулярной прецессии этот вектор постоянен и вдоль него направлена ось прецессии. Без ограничения общности можно считать, что ось OY_2 инерциальной системы координат направлена вдоль вектора кинетического момента тела. Таким образом, положение оси прецессии становится фиксированным, углы, задающие ее направление равны нулю, и для описания регулярной прецессии нужно только пять параметров. Соответственно, проводится только пять измерений для единичного рефлектора и два измерения для тройки рефлекторов с отбрасыванием одного произвольно выбранного результата.

Матрица перехода из $Ox_1x_2x_3$ в $OY_1Y_2Y_3$ имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\psi_0 + \dot{\psi}t) & -\sin(\psi_0 + \dot{\psi}t) & 0 \\ \sin(\psi_0 + \dot{\psi}t) & \cos(\psi_0 + \dot{\psi}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + \dot{\varphi}t) & -\sin(\varphi_0 + \dot{\varphi}t) & 0 \\ \sin(\varphi_0 + \dot{\varphi}t) & \cos(\varphi_0 + \dot{\varphi}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вектор-функция, составленная из функций \tilde{F}_i , в случае, когда используются

три ретрорефлектора, имеет вид

$$\left(\begin{aligned}
 & (q_1 + v_1 \Delta t)(-\cos(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \sin(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi}) - \\
 & \quad - \sin(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \cos(\theta) \cos(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi})) + \\
 & + (q_2 + v_2 \Delta t)(-\sin(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \sin(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi}) + \\
 & \quad + \cos(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \cos(\theta) \cos(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi})) + \\
 & \quad + (q_3 + v_3 \Delta t) \sin(\theta) \cos(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi}) \\
 \\
 & (q_1 + v_1 \Delta t)(\cos(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \cos(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi}) - \\
 & \quad - \sin(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \cos(\theta) \sin(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi})) + \\
 & + (q_2 + v_2 \Delta t)(\sin(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \cos(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi}) + \\
 & \quad + \cos(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \cos(\theta) \sin(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi})) + \\
 & \quad + (q_3 + v_3 \Delta t) \sin(\theta) \sin(\varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi}) \\
 \\
 & (q_1 + v_1 \Delta t) \sin(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \sin(\theta) - \\
 & - (q_2 + v_2 \Delta t) \cos(\psi_0 + \Delta t \dot{\psi}) \sin(\theta) + (q_3 + v_3 \Delta t) \cos(\theta) \\
 \\
 & (q_1 + 2 v_1 \Delta t)(-\cos(\psi_0 + 2 \Delta t \dot{\psi}) \sin(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi}) - \\
 & \quad - \sin(\psi_0 + 2 \Delta t \dot{\psi}) \cos(\theta) \cos(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi})) + \\
 & + (q_2 + 2 v_2 \Delta t)(-\sin(\psi_0 + 2 \Delta t \dot{\psi}) \sin(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi}) + \\
 & \quad + \cos(\psi_0 + 2 \Delta t \dot{\psi}) \cos(\theta) \cos(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi})) + \\
 & \quad + (q_3 + 2 v_3 \Delta t) \sin(\theta) \cos(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi}) \\
 \\
 & (q_1 + 2 v_1 \Delta t)(\cos(\psi_0 + 2 \Delta t \dot{\psi}) \cos(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi}) - \\
 & \quad - \sin(\psi_0 + 2 \Delta t \dot{\psi}) \cos(\theta) \sin(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi})) + \\
 & + (q_2 + 2 v_2 \Delta t)(\sin(\psi_0 + 2 \Delta t \dot{\psi}) \cos(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi}) + \\
 & \quad + \cos(\psi_0 + 2 \Delta t \dot{\psi}) \cos(\theta) \sin(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi})) + \\
 & \quad + (q_3 + 2 v_3 \Delta t) \sin(\theta) \sin(\varphi_0 + 2 \Delta t \dot{\varphi})
 \end{aligned} \right)$$

В этом случае якобиан получается не равным тождественно нулю, но все равно слишком громоздким. Удастся выписать якобиан в том случае, когда результаты предыдущих двух упрощений объединяются, и рассматривается третье упрощение: прецессирующее вокруг оси OY_2 тело, которое освещается лазерным лучом из неподвижной точки C . В этом случае якобиан также не равен тождественно нулю и определяется выражением (в случае трех установленных на тело ретрорефлекторов)

$$\begin{aligned}
 & 2 q_1 \cos(\Delta t \dot{\psi}) \cos(\Delta t \dot{\varphi}) \Delta t^2 q_3 \cos(\theta) q_2 \cos(2 \Delta t \dot{\psi}) \sin(2 \Delta t \dot{\varphi}) + \\
 & + 2 q_1^2 \sin(\Delta t \dot{\psi}) (\cos(\theta))^2 \sin(\Delta t \dot{\varphi}) \Delta t^2 q_2 \sin(\theta) \cos(2 \Delta t \dot{\psi}) \cos(2 \Delta t \dot{\varphi}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 q_1 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_2^2 \sin \left(\theta \right) \cos \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_1^2 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_3 \cos \left(\theta \right) \sin \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_1^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \left(\cos \left(\theta \right) \right)^3 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_3 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_1 \sin \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \left(\cos \left(\theta \right) \right)^3 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_3 q_2 \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_2^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 \sin \left(\theta \right) q_1 \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_2^3 \sin \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 \sin \left(\theta \right) \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_3 \cos \left(\theta \right) q_1 \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_2^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_3 \cos \left(\theta \right) \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_2^2 \cos \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \left(\cos \left(\theta \right) \right)^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 \sin \left(\theta \right) q_1 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_2^3 \cos \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \left(\cos \left(\theta \right) \right)^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 \sin \left(\theta \right) \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_2 \cos \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \left(\cos \left(\theta \right) \right)^3 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_3 q_1 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_2^2 \cos \left(2 \Delta t \dot{\psi} \right) \left(\cos \left(\theta \right) \right)^3 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_3 \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_3 \left(\sin \left(\theta \right) \right)^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_2 q_1 \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_3 \left(\sin \left(\theta \right) \right)^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_2 q_1 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\theta \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_3 \left(\sin \left(\theta \right) \right)^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_2^2 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_3 \left(\sin \left(\theta \right) \right)^2 \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 q_2^2 \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\theta \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) + \\
& + 2 q_3^2 \sin \left(\theta \right) \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 \cos \left(\theta \right) q_1 \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_3^2 \sin \left(\theta \right) \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 \left(\cos \left(\theta \right) \right)^2 q_1 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_3^2 \sin \left(\theta \right) \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 \cos \left(\theta \right) q_2 \cos \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \sin \left(\Delta t \dot{\varphi} \right) - \\
& - 2 q_3^2 \sin \left(\theta \right) \sin \left(2 \Delta t \dot{\varphi} \right) \Delta t^2 \left(\cos \left(\theta \right) \right)^2 q_2 \sin \left(\Delta t \dot{\psi} \right) \cos \left(\Delta t \dot{\varphi} \right),
\end{aligned}$$

но, к сожалению, дальнейшие действия с ним выполнить все еще не удастся.

И наконец, финальное, четвертое упрощение: полагаем начальные углы прецессии и собственного вращения равными нулю. Теперь движение задается только тремя параметрами и для определения движения тела достаточно трех измерений, если на теле установлен один ретрорефлектор, или одного, если установлено три ретрорефлектора. В обоих случаях уравнение $\left| \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right| = 0$ разрешается в символьной форме и получаются следующие результаты: для трех ретрорефлекторов якобиан ни при каких значениях параметров не будет тождественно равен нулю, а для одного ретрорефлек-

тора, расположенного не на оси вращения, якобиан не будет тождественно равен нулю, если $\operatorname{tg} \theta \neq \frac{q_3}{q_2}$. В этом случае система (4) имеет решение и параметры движения найти можно. В противном случае система (4) решения не имеет, и для определения ориентации нужно переместить точку C относительно точки O так, чтобы изменилось отношение ее координат $\frac{q_3}{q_2}$.

3.2 Наблюдаемость гравитационно-ориентированного тела около положения равновесия

Еще один часто встречающийся случай — это колебания гравитационно-ориентированного спутника около положения равновесия. Пространственные колебания удается проинтегрировать только, если они малы, а центр масс спутника движется по круговой орбите. Далее рассматривается именно этот случай.

Пусть матрица перехода A из связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ в неподвижную систему координат $OY_1Y_2Y_3$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим такие малые колебания тела относительно положения, заданного единичной матрицей перехода из $Ox_1x_2x_3$ в $OY_1Y_2Y_3$, которые совпадают с малыми пространственными колебаниями гравитационно-ориентированного спутника на круговой околоземной орбите относительно центра масс около устойчивого положения равновесия. Решение уравнений движения для этого случая описано в [12].

Пусть в положении равновесия направление осей связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ совпадает с направлением одноименных осей инерциальной системы координат $OY_1Y_2Y_3$. Тогда в предположении о малости колебаний тела матрица перехода из связанной системы координат в инерциальную близка к единичной. Обозначим $a_{11} = 1 + \zeta$, $a_{22} = 1 + \chi$, $a_{33} = 1 + \xi$. Если колебания малы, то ζ , χ , ξ , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{23} , a_{31} и a_{32} малы по сравнению с единицей. Каждая строка матрицы перехода представляет собой координаты орта, значит ее компоненты удовлетворяют соотношению $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$. Из него следует, что $\zeta = -\frac{1}{2}(\zeta^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2)$. Можно получить аналогичные соотношения и для χ и ξ . Видно, что ζ , χ и ξ — малые второго порядка, следовательно, в первом приближении можно положить $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$. Две различные строки матрицы перехода представляют собой координаты ортогональных ортов, значит их компоненты удовлетворяют соотношению $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$, где $a_{13}a_{23}$ — малая второго порядка. Из него

следует, что в первом приближении $a_{21} = -a_{12}$. Аналогично $a_{23} = -a_{32}$ и $a_{31} = -a_{13}$.

В [12] приводятся следующие значения для компонент матрицы перехода:

$$\begin{aligned} a_{13} &= A_0 \sin(n\omega_0 t + \kappa_0) \\ a_{32} &= A_1 \sin(\lambda_1 \omega_0 t + \kappa_1) + A_2 \sin(\lambda_2 \omega_0 t + \kappa_2) \\ a_{12} &= A_1 k_1 \cos(\lambda_1 \omega_0 t + \kappa_1) + A_2 k_2 \cos(\lambda_2 \omega_0 t + \kappa_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{3 \frac{1-\varepsilon}{\delta}}, \\ \lambda_1 &= \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}, & a &= 1 + 3(\delta - \varepsilon) + (\delta - 1)\left(\frac{\delta}{\varepsilon} - 1\right), \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}, & b &= 4(\delta - 1)\left(\frac{\delta}{\varepsilon} - 1\right), \\ \varepsilon &= \frac{C}{A}, & k_1 &= \frac{1}{(1 - \delta + \varepsilon)\lambda_1} (4(\delta - \varepsilon) - \lambda_1^2), \\ \delta &= \frac{B}{A}, & k_2 &= \frac{1}{(1 - \delta + \varepsilon)\lambda_2} (4(\delta - \varepsilon) - \lambda_2^2); \end{aligned}$$

A, B, C — моменты инерции спутника относительно главных осей инерции, причем $B > A > C$; ω_0 — угловая скорость обращения спутника на круговой орбите; $A_0, A_1, A_2, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Именно шесть постоянных интегрирования являются параметрами данной модели. Следовательно, для определения движения в рамках модели необходимы шесть измерений.

Поскольку значения координат векторов \mathbf{d} и \mathbf{r}_i не зависят от параметров модели движения, то $\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial f_j} = \left(\mathbf{d}, \frac{\partial A(t_i, \mathbf{f})}{\partial f_j} \mathbf{r}_i\right)$. По главной диагонали матрицы стоят единицы; их производные — нули. В случае, если дифференцирование ведется по переменным, отвечающим за плоское движение тела (A_0 и κ_0), в матрице $\frac{\partial A(t_i, \mathbf{f})}{\partial f_j}$ ненулевыми будут только два элемента: $\frac{\partial a_{13}}{\partial f_j}$ и $\frac{\partial a_{31}}{\partial f_j} = -\frac{\partial a_{13}}{\partial f_j}$.

Символьные расчеты в среде MATLAB показывают, что ранг матрицы $\left(\left(\mathbf{d}, \frac{\partial A(\hat{t}, \mathbf{f})}{\partial f_j} \mathbf{r}_i\right)\right)$, $i = 1, \dots, 3$, $j = 1, \dots, 6$ размером 3×6 для любого \hat{t} и для любого набора векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ равен двум. Следовательно, три строки этой матрицы $\left(\left(\mathbf{d}, \frac{\partial A(\hat{t}, \mathbf{f})}{\partial f_j} \mathbf{r}_1\right)\right)$, $\left(\left(\mathbf{d}, \frac{\partial A(\hat{t}, \mathbf{f})}{\partial f_j} \mathbf{r}_2\right)\right)$ и $\left(\left(\mathbf{d}, \frac{\partial A(\hat{t}, \mathbf{f})}{\partial f_j} \mathbf{r}_3\right)\right)$ линейно зависимы. В том случае, если в наборе t_i и \mathbf{r}_i есть измерения, полученные с трех ретрорефлекторов в один момент времени, в матрицу Якоби функций \tilde{F}_i входят три линейно зависимые строки, а значит, якобиан $\left|\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial f_j}\right|$ равен нулю.

Расчеты в среде MATLAB показали, что в случае одного установленного на теле ретрорефлектора, если он находится на координатной оси Ox_2 , независимо от того движется точка C относительно точки O или нет, получившейся от шести последовательных измерений якобиан функций \tilde{F}_i равен нулю, следовательно, определить движение не представляется возможным.

Провести исследования для произвольно установленного на теле единственного рефлектора в среде MATLAB оказалось невозможно из-за большой сложности получающихся при этом символьных выражений. Тем не менее, для ряда частных случаев удастся установить условия разрешимости уравнения $\left| \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial f_j} \right| = 0$.

Если на теле установлен единственный рефлектор на координатной оси Ox_1 , якобиан равен нулю, если выполняется одно из следующих равенств:

$$\begin{array}{lll} A_0 = 0 & A_1 = 0 & A_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 & \lambda_1 = \frac{\pi}{\Delta t} & \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\pi}{\Delta t} & q_1 = 0 & q_2 = 0 \\ n = 0 & n = \frac{\pi}{\Delta t} & \\ \lambda_1 = \lambda_2 & \lambda_1 = n & \lambda_2 = n \end{array}$$

Если единственный рефлектор установлен на координатной оси Ox_3 , добавляются равенства $k_1 = 0$ и $k_2 = 0$, а равенство $q_1 = 0$ меняется на $q_3 = 0$.

Если на теле установлено два рефлектора на двух координатных осях системы $Ox_1x_2x_3$, то якобиан обращается в ноль, когда выполняется одно из следующих равенств или систем равенств:

$$\begin{array}{lll} A_0 = 0 & A_1 = 0 & A_2 = 0 \\ n = \frac{\pi}{\Delta t} & & n = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 & & k_1 = k_2 = 0 \\ k_1 = \lambda_1 = 0 & & k_2 = \lambda_2 = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{\pi}{\Delta t} \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\pi}{\Delta t} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{\pi}{\Delta t} \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} k_2 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\pi}{\Delta t} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\cos(n\Delta t) = \left(-q_3^2 k_1 \sin(\lambda_2 \Delta t) \cos(\lambda_1 \Delta t) - q_1^2 k_2^2 k_1 \sin(\lambda_2 \Delta t) \cos(\lambda_1 \Delta t) + q_1^2 k_1^2 k_2 \sin(\lambda_1 \Delta t) \cos(\lambda_2 \Delta t) + q_3^2 k_2 \sin(\lambda_1 \Delta t) \cos(\lambda_2 \Delta t) \right) / \left(-q_3^2 k_1 \sin(\lambda_2 \Delta t) + q_1^2 k_1^2 k_2 \sin(\lambda_1 \Delta t) + \sin(\lambda_1 \Delta t) q_3^2 k_2 - q_1^2 k_2^2 k_1 \sin(\lambda_2 \Delta t) \right).$$

Кроме этого, для каждого из случаев установки двух рефлекторов имеются свои равенства, выполнение которых приводит к обращению якобиана в

ноль. Так, когда рефлекторы установлены на осях Ox_1 и Ox_2 , это равенства $q_2 = 0$ и $q_3 = 0$.

В случае, когда рефлекторы установлены на осях Ox_2 и Ox_3 — равенства

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 & q_2 &= 0 \\ k_1 &= q_3 = 0 & k_2 &= q_3 = 0. \end{aligned}$$

И в случае, когда рефлекторы установлены на осях Ox_1 и Ox_3 для разрешимости системы (4) не должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} q_2 &= 0 & q_1 &= q_3 = 0 \\ k_1 &= q_3 = 0 & k_2 &= q_3 = 0. \end{aligned}$$

4 Определение вращательного движения тела методом наименьших квадратов

Были проведены численные эксперименты по определению вращательно-го движения тела с закрепленной точкой, оборудованного лазерными ретро-рефлекторами. Условия для эксперимента совпадали с описанными в подразделе 3.1. Эксперимент проводился для случая получения измерений с трех ретрорефлекторов в моменты времени, начиная с $t = 0$ до $t = 9$ с с интервалом в одну секунду. Заданы начальные условия $\psi_0 = 0,2$, $\dot{\psi} = 1,5 \text{ с}^{-1}$, $\theta = 1$, $\varphi_0 = 0,5$, $\dot{\varphi} = 0,7 \text{ с}^{-1}$. Для получения измерений вычислялась матрица перехода из связанной с телом системы координат $Ox_1x_2x_3$ в инерциальную систему координат $OY_1Y_2Y_3$ $A(t, \mathbf{f}_0)$ (см. формулу (5)), где \mathbf{f}_0 — вектор, компонентами которого являются ψ_0 , $\dot{\psi}$, θ , φ_0 и $\dot{\varphi}$. Далее компоненты радиус-векторов рефлекторов $\mathbf{r}_i, i = 1, 2, 3$ записывались в инерциальной системе координат и вычислялись величины скалярных произведений $(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\tau})$ — непосредственно результаты измерений, где в качестве вектора $\boldsymbol{\tau}$ брался вектор с координатами $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ в инерциальной системе координат.

В результате этих действий получен набор из тридцати чисел $l_j, j = 1, \dots, 30$. К каждому числу из этого набора добавлялась нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием.

Для определения параметров регулярной прецессии минимизировался функционал

$$G(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{t=0}^9 ((\boldsymbol{\tau}, A(t, \mathbf{f})\mathbf{r}_i) - l_{3t+i})^2.$$

Функционал G минимизировался по отражающему алгоритму Ньютона для доверенной области с помощью функции `lsqcurvefit` пакета оптимизации в среде MATLAB[13]. Условием завершения функции было то, что значение функционала на очередном шаге меняется менее, чем на 10^{-6} .

Начальные условия для поиска минимума заданы следующие (при задании всех начальных параметров нулевыми процесс сходился к локальному минимуму, не являющемуся глобальным):

$$\psi_0 = 0, \quad \dot{\psi} = 1, \quad \theta = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi} = 1.$$

При поиске минимума функционала G без внесения погрешностей в измерения l_i процесс минимизации закончился на 37-й итерации получив в результате следующие значения параметров:

$$\psi_0 = 0,2016, \quad \dot{\psi} = 1,4998, \quad \theta = 1,0001, \quad \varphi_0 = 0,4985, \quad \dot{\varphi} = 0,7003.$$

Когда стандартное отклонение внесенных погрешностей составила 0,02, процесс минимизации закончился на 29-й итерации со следующими значениями параметров:

$$\psi_0 = 0,2072, \quad \dot{\psi} = 1,4958, \quad \theta = 1,0118, \quad \varphi_0 = 0,4875, \quad \dot{\varphi} = 0,7054.$$

И в том случае, когда стандартное отклонение внесенных погрешностей составила 0,05, процесс минимизации закончился на 52-й итерации с параметрами, равными

$$\psi_0 = 0,2240, \quad \dot{\psi} = 1,5032, \quad \theta = 1,0593, \quad \varphi_0 = 0,4879, \quad \dot{\varphi} = 0,7035.$$

Расчеты показали, что стандартное отклонение для найденных параметров совпадает со стандартным отклонением для измерений с точностью до множителей (для каждого параметра иного):

$$\psi_0 - 1,5, \quad \dot{\psi} - 0,3, \quad \theta - 0,7, \quad \varphi_0 - 1,5, \quad \dot{\varphi} - 0,3.$$

Таким образом, численный эксперимент показал, что метод наименьших квадратов можно применять для решения обсуждаемой задачи, и полученные с его помощью параметры модели движения будут обладать достаточной степенью точности.

5 Заключение

В работе показано, что:

- ретрорефлекторы, установленные на тело сверх трех имеющихся, не дают новой информации для определения ориентации;
- ориентацию тела, оборудованного лазерными ретрорефлекторами, можно определить с помощью измерений, произведенных в один и тот же момент времени, с точностью до поворота вокруг оси, проходящей через точку закрепления тела и точку установки источника лазерного излучения;

- определить трехосную ориентацию тела, оборудованного лазерными ретрорефлекторами, возможно при помощи второго источника лазерного излучения, установленного так, что точки установки двух лазерных источников и точка закрепления тела не находятся на одной прямой;
- движение тела, оборудованного лазерными ретрорефлекторами и совершающего регулярную прецессию или движения, совпадающие с малыми колебаниями гравитационно-ориентированного спутника около положения равновесия, наблюдаемо почти во всех случаях;
- численные эксперименты показали, что ориентацию тела, оборудованного лазерными ретрорефлекторами, движение которого задается моделью с фиксированным количеством параметров, можно восстановить с помощью метода наименьших квадратов с достаточной точностью.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

Список литературы

- [1] http://ilrs.gsfc.nasa.gov/docs/degan_0603.pdf
- [2] *Pearlman, M.R., Degnan, J.J., and Bosworth, J.M.* The International Laser Ranging Service, *Advances in Space Research*, Vol. 30, No. 2, pp. 135-143, July 2002
- [3] *Marini, J.W., and C.W. Murray.* Correction of laser range tracking data for atmospheric refraction at elevations above 10 degrees, NASA-TM-X-70555, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md., 1973.
- [4] *V. Shargorodsky, V. Shevchenko, M. Ovchinnikov, V. Pen'kov, S. Mirer, R. Nemuchinsky.* Nanosatellite REFLECTOR for Optical Calibrations: Attitude Control and Determination Aspects, *Advances in Space Research*, July 2002, V.30, Issue 2, pp.337-343.
- [5] <http://www.niipp-moskva.ru/>
- [6] <http://lnfm1.sai.msu.ru/~turyshv/material/Shargorodsky-laser-ranging-1uas-2007.pdf>
- [7] *В.Ф. Журавлев.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997.
- [8] *В.В. Александров и др.* Оптимальное управление движением. Москва, Физматлит, 2005.
- [9] *Д.В. Беклемишев.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва, Физматлит, 2006.
- [10] *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов.* Математический анализ. Издательство Московского университета, 1985.
- [11] *Р.Б. Немучинский, М.Ю. Овчинников.* Определение параметров углового движения пассивного наноспутника REFLECTOR по результатам лазерных внешнетраекторных измерений. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2006, N37.
- [12] *В.В. Белецкий.* Движение искусственных спутников относительно центра масс. М.: Наука, 1966.
- [13] *T. Coleman, M.A. Branch, A. Grace.* Optimization Toolbox For Use with MATLAB. User's Guide. Version 2. The MathWork, Inc., 1999.

Содержание

Введение	3
1 Постановка задачи	5
2 Анализ задачи	9
3 Наблюдаемость вращающегося тела	11
3.1 Наблюдаемость прецессирующего тела	12
3.2 Наблюдаемость гравитационно-ориентированного тела около положения равновесия	18
4 Определение вращательного движения тела методом наи- меньших квадратов	21
5 Заключение	22
Благодарности	23
Список литературы	24